



## Etude d'un modèle climatique simplifié

Théo GODEFROY  
Jules MICHAUD  
Maxime MOUTET  
Thibaud RAYMOND

**Deuxième année de licence MPC1**

**Encadrant :** Michel MEHREMBERGER

**Année d'étude :** 2019 - 2020

### Résumé

Nous nous intéressons à une équation aux dérivées partielles non-linéaire issue d'un modèle simplifié de l'évolution du climat, s'appuyant sur les travaux de Gerald R. North (1975). Le régime stationnaire s'écrit comme une EDO de Legendre et se résout analytiquement. Les solutions sont données par des fonctions hypergéométriques et polynômes de Legendre. Nous étudions le régime transitoire numériquement, via plusieurs schémas basés sur la méthode des différences finies. Nous étudions la convergence, la stabilité et la consistance de ces schémas, et montrons qu'ils convergent vers la solution exacte pour des conditions initiales issues de données réelles.

**Mots clés :** Modélisation, équation différentielle de Legendre, polynômes de Legendre, méthode des différences finies, conditions CFL.

## Remerciements

Nous souhaitons tout d'abord remercier Michel Mehrenberger, notre encadrant au cours de ce projet, pour nous avoir proposé une introduction aussi riche et intéressante au monde de la modélisation et des équations différentielles, mais aussi pour son implication et ses conseils tout au long du semestre.

Nous voulons également remercier les responsables pédagogiques de la licence MPCI, grâce auxquels ce projet a pu voir le jour.

Nous remercions aussi notre enseignante Julia Charrier, dont les indications ont été grandement utiles pour l'analyse de nos schémas numériques.

Enfin, nous souhaitons remercier notre rapporteur Peter Haissinky pour l'attention qu'il portera à ce rapport.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Construction du modèle</b>	<b>2</b>
1.1 Définitions et approximations . . . . .	2
1.2 Bilan thermique et établissement de l'équation . . . . .	3
<b>2 Etude analytique en régime stationnaire</b>	<b>5</b>
2.1 Solution particulière . . . . .	5
2.1.1 Fonctions propres du laplacien . . . . .	5
2.1.2 Polynômes de Legendre . . . . .	7
2.1.3 Construction d'une solution particulière . . . . .	8
2.2 Solution homogène . . . . .	8
<b>3 Simulation numérique</b>	<b>10</b>
3.1 La construction des schémas . . . . .	10
3.2 Schéma(s) numérique(s) . . . . .	11
3.3 Les conditions initiales et les conditions de bord . . . . .	12
3.4 Formes matricielles et résultats des simulations . . . . .	13
3.4.1 Euler explicite . . . . .	14
3.4.2 Euler Implicite . . . . .	14
3.4.3 Résultats numériques . . . . .	15
3.5 Consistance, stabilité et convergence . . . . .	16
3.5.1 Consistance . . . . .	16
3.5.2 Stabilité . . . . .	18
3.5.3 Convergence . . . . .	20
<b>4 Comparaisons des résultats et conclusion</b>	<b>21</b>
<b>Références</b>	<b>23</b>
<b>A Détail des calculs</b>	<b>24</b>
A.1 Solutions homogènes de l'EDO de Legendre . . . . .	24
A.2 Calculs et démonstrations pour la stabilité des schémas . . . . .	27
<b>B Programmes Python</b>	<b>29</b>

# Introduction

Les équations différentielles sont une manière naturelle de modéliser un système physique car il est plus commode de décrire les lois qui régissent son évolution (spatialement et temporellement) plutôt que leur état à tout instant et en tout point. Cependant, de nombreux systèmes sont par nature non-linéaires et les équations qui en découlent peuvent être compliquées à résoudre analytiquement. C'est pourquoi on s'intéresse aux méthodes numériques, nous permettant d'approcher les solutions de telles équations afin d'en tirer des informations sur leurs propriétés. Dans ce projet, nous nous sommes intéressés à une équation aux dérivées partielles, caractérisant l'évolution du climat terrestre au cours du temps. Le modèle, étudié historiquement par Gerald R. North en 1975 [1], est assez précis pour tenir compte d'un certain nombre de phénomènes (ici, de l'effet des calottes glaciaires sur le rayonnement solaire incident), mais qui simplifie suffisamment le problème pour qu'on puisse étudier l'équation analytiquement.

Dans un premier temps, nous posons le problème et décrivons les approximations réalisées, et le raisonnement physique qui fait émerger l'équation décrivant l'évolution de la température dans ce modèle. Ensuite, nous nous intéresserons au régime stationnaire, qui peut être résolu exactement par des méthodes analytiques, et détaillerons une partie de cette résolution. Enfin, nous établirons des schémas numériques nous permettant de simuler le régime transitoire, et étudierons leur stabilité, leur consistance et leur convergence vers la solution exacte. Nous achèverons ce rapport en comparant les solutions obtenues par nos schémas pour des conditions initiales réelles à la solution exacte précédemment calculée, et en ouvrant sur différents raffinements possibles pour le problème.

# 1 Construction du modèle

## 1.1 Définitions et approximations

La première étape est de comprendre comment le modèle est construit, afin d'en comprendre les hypothèses et les limites. On veut arriver à un modèle assez simple pour être résolu, et nous allons donc effectuer un certain nombre d'approximations, mais assez riche pour nous donner des informations sur le comportement du climat réel.

On considère tout d'abord que la Terre est une sphère de rayon  $R$ . On se placera naturellement dans un système de coordonnées sphériques centré au centre de la Terre, et avec les références de latitude et longitude conventionnelles. On suppose le problème indépendant de la longitude – on moyenne sur chacun des cercles de latitude, afin de s'affranchir des échanges thermiques azimutaux. On perd ainsi de grandes sources de complexité que sont les différentes contributions des océans et des multiples types de reliefs continentaux. On néglige également la contribution thermique du sous-sol terrestre.

On arrive avec ces approximations à se ramener à un problème spatialement unidimensionnel. On choisira comme coordonnée d'espace le sinus de la latitude, noté  $x$ , qui est un nombre sans dimension. Ainsi, un cercle de latitude  $\phi$  est repéré par  $Rx = R \sin(\phi)$ , position de sa projection orthogonale sur l'axe Nord-Sud relativement au centre de la Terre. On considérera enfin que le système est symétrique par rapport à l'équateur.

Les pôles cependant jouent un rôle particulier dans la balance thermique de la planète, qu'on souhaite étudier dans notre modèle. On suppose qu'une certaine région autour des pôles est entièrement recouverte de glace et de neige. La position de la ligne de glace, qui délimite cette région, est la coordonnée  $x_s$ , telle que la température en tout point de coordonnée  $|x| > x_s$  est inférieure à  $T_s = -10^\circ\text{C}$ , une condition issue de la littérature (M. I. Bukydo, 1969) [2].

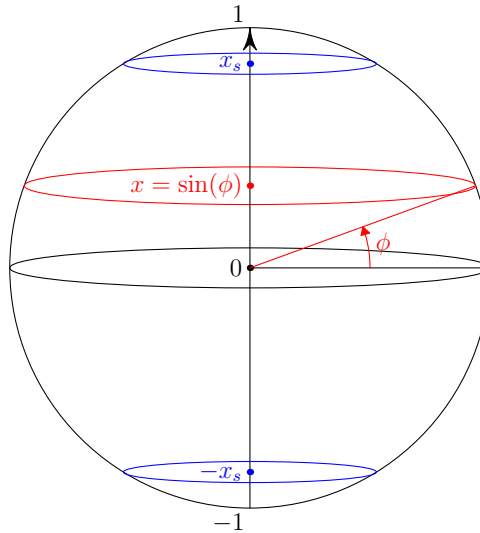


FIGURE 1 – Schéma du système étudié, représentant la définition de la coordonnée  $x$  en fonction de la latitude  $\phi$  et la ligne de glace  $x_s$ .

## 1.2 Bilan thermique et établissement de l'équation

Considérons donc le cercle de latitude indiqué par la coordonnée  $x$  (cercle rouge sur le schéma 1). L'objectif est d'effectuer un bilan thermique du système Terre-atmosphère sur ce cercle afin de déduire l'équation régissant l'évolution spatiale et temporelle de la température à la surface de la Terre, notée  $T(x, t)$  et exprimée en °C.

La quantité de chaleur issue du Soleil par unité de surface, moyennée sur une année, est à cette latitude donnée par la fonction  $QS(1 - \alpha)$ .  $Q$  est ici le quart de la constante solaire, ce qui correspond au rayonnement solaire incident sur le disque apparent (dont la surface est le quart de celle de la sphère terrestre) divisé par la surface totale de la Terre.  $S(x)$  est une fonction sans dimension régulière et paire représentant la distribution annuelle moyenne de radiation en fonction de la latitude et normalisée sur  $[0, 1]$  (de sorte que pour une sphère de rayon 1, le rayonnement incident sur un hémisphère est  $Q$ ). On peut la déterminer géométriquement à partir de l'angle entre l'axe de rotation de la Terre et son plan de révolution.  $\alpha$  est l'albédo du système Terre-atmosphère, la fraction de rayonnement réfléchi, et est aussi sans dimension. Il dépend de nombreux paramètres en général, comme la proportion de nuages, la distribution des océans... Ici, on suppose que l'albédo est une fonction  $\alpha(x, x_s)$  paire par rapport à  $x$  et qui effectue un saut discontinu en  $x = \pm x_s$ .

La Terre perd de la chaleur sous forme de radiations infrarouges émises dans l'espace. Le flux infrarouge sortant est noté  $I(x, t)$ , et correspond à une puissance par unité de surface. Il dépend de la température des couches externes de l'atmosphère, mais son expression peut être reliée à la température de surface. Sellers (1969) obtient une expression correspondant à une correction due à la colonne atmosphérique de la loi d'émission du corps noir de Stefan  $\sigma T_{(K)}^4$  où  $T_{(K)}$  est la température de surface exprimée en Kelvin et  $\sigma = 5,6704 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$  est la constante de Stefan-Boltzmann [3]. La forme retenue dans notre modèle, cependant, est une relation affine proposée par Budyko (1969), qui s'écrit :

$$I(x, t) = A + BT(x, t) \quad (1.1)$$

où  $A = 201,4 \text{ W m}^{-2}$ ,  $B = 1,45 \text{ W m}^{-2} (\text{°C})^{-1}$  sont déterminés empiriquement.

Le dernier phénomène à considérer est le transfert de chaleur méridional à la surface de la Terre, puisque toutes les latitudes n'ont pas la même température moyenne. Ces transferts se font en grande partie par les courants marins et les vents, qui sont des phénomènes très complexes. On considère ici que la chaleur se transmet par un processus diffusif décrit par la loi de Fourier, i.e. le courant de chaleur est proportionnel et opposé au gradient de température – on oublie donc notamment les phénomènes liés à la rotation de la Terre. Le flux de chaleur local s'écrit  $-\mathcal{D}\nabla^2 T$ , où  $\mathcal{D}$  est un coefficient dit de diffusivité thermique exprimé en  $\text{W K}^{-1}$  et  $\nabla^2 T = \text{div}(\nabla T)$  est le laplacien de  $T$  ( $\text{K m}^{-2}$ ).

En notant  $\mathcal{C}$  ( $\text{J m}^{-2} \text{°C}^{-1}$ ) la capacité thermique surfacique effective du système, l'équation traduisant le bilan énergétique en un point de la sphère s'écrit donc :

$$\mathcal{C} \frac{\partial T}{\partial t} = QS(1 - \alpha) - I + \mathcal{D}\nabla^2 T.$$

On réécrit alors l'équation en fonction de  $I$ , en écrivant le laplacien ne dépendant que de la latitude par rapport à notre coordonnée  $x$ ; on trouve que  $\nabla^2 T = \frac{1}{R^2} \frac{d}{dx} \left( (1 - x^2) \frac{dT}{dx} \right)$ . Posons les deux paramètres  $D = \frac{\mathcal{D}}{R^2 B}$ , sans dimension, et  $\tau = \frac{\mathcal{C}}{B}$ , homogène à un temps, et

notons  $a(x, x_s) = 1 - \alpha(x, x_s)$  la fonction d'absorption correspondant à la proportion d'énergie solaire incidente effectivement absorbée par le système. Alors, en rassemblant à gauche tous les termes dépendant de  $I$  et à droite uniquement la contribution solaire, on obtient l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\tau \frac{\partial I}{\partial t} - D \frac{\partial}{\partial x} \left( (1 - x^2) \frac{\partial I}{\partial x} \right) + I(x, t) = QS(x)a(x, x_s) \quad \forall (x, t) \in ]-1, 1[ \times \mathbb{R}_+$$

Dans cette équation, pour rappel,  $I$  s'exprime en  $\text{W m}^{-2}$ , de même que  $Q$ . La coordonnée  $x$  étant sans dimension, les dérivées par rapport à  $x$  également. L'échelle de temps  $\tau$  est exprimée en secondes, et compense la dimension de l'opérateur  $\frac{\partial}{\partial t}$  qui est l'inverse d'un temps. Le paramètre de diffusion  $D$  est sans dimensions, de même que les fonctions  $S$  et  $a$ . On pourrait totalement adimensionner l'équation en prenant  $\tau$  comme unité de temps et  $Q$  comme unité d'intensité thermique. Ce serait cependant moins pratique pour notre étude, car on s'intéressera à la relation entre  $x_s$  et  $Q$  lorsqu'on prend pour conditions initiale des données réelles du climat actuel (ou plutôt, de 1975).

Les conditions de bord de notre problème sont les suivantes :

- (1) Le flux de chaleur est nul aux pôles car, par symétrie de révolution, le gradient de température est nul. On a donc :

$$\forall t, \lim_{x \rightarrow \pm 1} \sqrt{1 - x^2} \left( \frac{\partial I}{\partial x} \right) (x, t) = 0$$

- (2) Il n'y a pas de transfert thermique au travers de l'équateur, donc :

$$\forall t, \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 - x^2} \left( \frac{\partial I}{\partial x} \right) (x, t) = 0$$

- (3) La solution doit être continue en  $x_s$ , et correspondre à la condition  $I(\pm x_s, t) = I_s = A + BT_s$ , donc

$$\forall t, \lim_{x \rightarrow \pm x_s(t)^-} I(x, t) = \lim_{x \rightarrow \pm x_s(t)^+} I(x, t) = I_s$$

- (4) Le gradient de température doit être continu à la ligne de glace (sinon, il y aurait une accumulation d'énergie thermique à cette latitude qui serait incompatible avec sa température) ; on a donc

$$\forall t, \lim_{x \rightarrow \pm x_s(t)^-} \left( \frac{\partial I}{\partial x} \right) (x, t) = \lim_{x \rightarrow \pm x_s(t)^+} \left( \frac{\partial I}{\partial x} \right) (x, t)$$

La définition même de  $x_s$  rend l'équation non-linéaire, les calottes glaciaires créant un mécanisme de "feedback".

## 2 Etude analytique en régime stationnaire

On va s'intéresser dans cette partie à ce qui se passe en régime stationnaire, c'est à dire lorsque la dépendance en temps de la température disparaît. On notera par souci de simplicité  $I(x)$  la fonction alors obtenue, et on étudie l'équation différentielle ordinaire

$$I(x) - D \frac{d}{dx} \left( (1 - x^2) \frac{dI}{dx} \right) = QS(x)a(x, x_s), \quad x \in ]-1, 1[ \quad (2.1)$$

On s'intéressera en particulier au cas où  $D$  est constant. Gerald R. North (1975a) a mis en évidence une solution analytique à ce modèle dans le cas où de plus,  $a(x, x_s)$  est une fonction crête positive, égale à  $a_0$  si  $|x| < x_s$  et  $a_1$  si  $|x| > x_s$ , avec  $a_1 < a_0$ . [1]

Il est bien important de comprendre que la démarche que nous adoptons n'est pas exactement la même que celle de cet article. North étudie principalement la relation entre  $Q$  et  $x_s$ , afin de tirer des conclusions sur la stabilité du climat pour différentes valeurs de  $Q$  varie. Notre objectif est de comprendre comment construire la solution analytique  $I(x)$ , qui représente le régime stationnaire du problème physique (donc, une situation d'équilibre), puis de la comparer aux résultats numériques que l'on obtiendra sur le modèle dépendant du temps.

Tout d'abord, par parité des fonctions  $S$  et  $x \mapsto a(x, x_s)$ , on peut se limiter à étudier l'équation sur  $[0, 1[$ . De plus, comme  $a$  est une fonction crête de  $x$  et que  $x_s$  est ici fixé (puisque la température n'évolue plus dans le temps), on étudie séparément l'équation sur  $[0, x_s[$  et  $]x_s, 1[$ , avec une condition d'égalité sur la limite des deux solutions en  $x_s$ . On notera respectivement  $I_0$  et  $I_1$  les morceaux de solution sur chacun des intervalles.

On a donc les conditions aux limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x^2)^{1/2} \frac{dI_1}{dx} = 0 \quad (\nabla T = \mathbf{0} \text{ aux pôles}) \quad (2.2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x^2)^{1/2} \frac{dI_0}{dx} = 0 \quad (\nabla T = \mathbf{0} \text{ à l'équateur}) \quad (2.3)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_s^-} I_0(x) = \lim_{x \rightarrow x_s^+} I_1(x) = I_s \quad (2.4)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_s^-} \frac{dI_0}{dx} = \lim_{x \rightarrow x_s^+} \frac{dI_1}{dx} \quad (2.5)$$

### 2.1 Solution particulière

On admettra qu'une solution générale de l'équation 2.1 s'écrit comme la somme d'une solution particulière et d'une solution générale de l'équation homogène associée. Intéressons nous d'abord à la solution particulière.

#### 2.1.1 Fonctions propres du laplacien

Sachant que la fonction  $S$  est régulière et qu'on est capable de la déterminer explicitement (même si elle est compliquée à écrire), on voudrait l'écrire sous la forme d'une série de fonctions plus simples. Tout l'enjeu est de déterminer quelles fonctions "simples" se comportent gentiment au passage par l'opérateur laplacien  $\frac{d}{dx} \left( (1 - x^2) \frac{d}{dx} \right)$ , et somme-nous capable d'exprimer  $S$  comme une série de celles-ci ?



**Définition 2.1** (équation de Legendre). Pour  $\lambda \in \mathbb{C}$ , on appelle *équation différentielle de Legendre de paramètre  $\lambda$*  l'équation différentielle ordinaire définie sur  $] -1, 1[$  d'inconnue  $y$  :

$$\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{dy}{dx} \right) + \lambda(\lambda+1)y = 0 \quad (2.6)$$

On s'intéresse en particulier aux solutions de l'équation :

$$\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{dy}{dx} \right) + n(n+1)y = 0, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.7)$$

On veut ici montrer qu'il existe pour tout  $n \in \mathbb{N}$  des solutions polynomiales de degré  $n$ . Cherchons pour cela une solution sous la forme d'une série entière  $f : x \mapsto \sum_{i \in \mathbb{N}} c_i x^i$  quelconque. Si  $f$  ainsi définie est solution, on a alors pour tout  $x \in ] -1, 1[$  :

$$f'(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i \frac{d(x^i)}{dx} = \sum_{i=0}^{+\infty} i c_i x^{i-1} \stackrel{j=i-1}{=} \sum_{j=0}^{+\infty} (j+1) c_{j+1} x^j \quad \text{car le terme pour } i=0 \text{ est nul}$$

donc :

$$\begin{aligned} (1-x^2)f'(x) &= (1-x^2) \sum_{i=0}^{+\infty} (i+1) c_{i+1} x^i = \sum_{i=0}^{+\infty} (i+1) c_{i+1} x^i - \sum_{i=0}^{+\infty} (i+1) c_{i+1} x^{i+2} \\ &\stackrel{j=i+2}{=} \sum_{i=0}^{+\infty} (i+1) c_{i+1} x^i - \sum_{j=2}^{+\infty} (j-1) c_{j-1} x^j \\ &= c_1 + 2c_2 x + \sum_{i=2}^{+\infty} ((i+1) c_{i+1} - (i-1) c_{i-1}) x^i \end{aligned}$$

et au final

$$\begin{aligned} ((1-x^2)f')'(x) &= 2c_2 + \sum_{i=2}^{+\infty} i((i+1) c_{i+1} - (i-1) c_{i-1}) x^{i-1} \\ &\stackrel{j=i-1}{=} (1 \times 2 c_2 - 0 \times 1 c_1) x^0 + \sum_{j=1}^{+\infty} [(j+1)(j+2) c_{j+2} - j(j+1) c_j] x^j \\ &\stackrel{k=j}{=} \sum_{k \in \mathbb{N}} [(k+1)(k+2) c_{k+2} - k(k+1) c_k] x^k \end{aligned}$$

On veut que cette dernière expression soit égale à  $-n(n+1)f(x)$ . Il faut donc qu'il y ait égalité pour les termes de chaque degré, i.e. on veut la relation de récurrence suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, c_{k+2} = \frac{k(k+1) - n(n+1)}{(k+1)(k+2)} c_k \quad (2.8)$$

On remarque que cette relation porte sur les coefficients de même parité, et donc que tous les coefficients pairs (respectivement impairs) sont dictés par la valeur de  $c_0$  (respectivement  $c_1$ ). Comme dans (2.8), le numérateur s'annule pour  $k = n$ , on en déduit qu'il existe des solutions polynomiales de degré  $n$  et de même parité que  $n$  à l'équation (2.7), et ce pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On peut en fait montrer que la série initiale ne converge en  $\pm 1$  que si c'est un polynôme.

### 2.1.2 Polynômes de Legendre

On va s'intéresser pour la suite de cette partie à une suite particulière de polynômes qui sont solutions de l'équation (2.7), et que l'on appelle polynômes de Legendre.

**Définition 2.2.** On appelle *polynôme de Legendre de degré*  $n \in \mathbb{N}$  l'unique solution  $P_n$  de l'équation de Legendre de paramètre  $n$  vérifiant  $P_n(1) = 1$ .

L'unicité est garantie par le fait qu'une solution polynomiale de l'équation est entièrement déterminée par son coefficient de plus bas degré, noté par exemple  $p_n$ , et donc  $P_n(1) = 1$  est une équation linéaire à une unique inconnue. On peut la calculer explicitement à l'aide de la relation de récurrence 2.8 en sommant les  $c_k$ , pour obtenir :

$$\frac{1}{p_n} = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left( \frac{1}{(2i + r_n)!} \prod_{j=1}^{i+r_n-1} [(2j+1-r_n)(2j-r_n) - n(n+1)] \right),$$

où  $r_n$  est le reste de la division euclidienne de  $n$  par 2 (donc 0 si  $n \in 2\mathbb{N}$  et 1 si  $n \in \mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}$ )

Maintenant, démontrons une proposition particulièrement intéressante pour notre problème.

**Proposition 2.3.** *Il existe une unique suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$  vérifiant :*

- $\forall n \in \mathbb{N}, \deg P_n = n$
- $\forall n, m \in \mathbb{N}, \int_{-1}^1 P_m(t) P_n(t) dt = 0 \iff n \neq m$
- $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(1) = 1$

*Démonstration.* On va construire la suite par récurrence sur  $n$  et montrer à chaque étape l'unicité du polynôme construit.

Pour  $n = 0$ , le polynôme constant 1 convient.

Supposons maintenant qu'on ait des polynômes  $P_0, \dots, P_n$  vérifiant la proposition. Alors, cette famille constitue une base orthogonale de  $\mathbb{R}_n[X]$  pour le produit scalaire  $\varphi : (P, Q) \mapsto \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$  d'après les deux premiers points. On peut la compléter en une base de  $\mathbb{R}_{n+1}[X]$  en y ajoutant le monôme  $X^{n+1}$ . Alors, le polynôme

$$Q(X) = X^{n+1} - \sum_{k=0}^n \frac{\varphi(X^{n+1}, P_k)}{\varphi(P_k, P_k)} P_k(X)$$

est orthogonal à tous les  $P_k$  et de degré  $n+1$ . On a donc construit un polynôme dans  $\mathbb{R}_{n+1}[X]$  qui vérifie  $\text{Vect}(Q) \subset (\mathbb{R}_n[X])^\perp$ , or l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_{n+1}[X]$  est euclidien, donc  $\dim(\mathbb{R}_n[X])^\perp = \dim \mathbb{R}_{n+1}[X] - \dim \mathbb{R}_n[X] = 1$ , d'où  $\text{Vect}(Q) = (\mathbb{R}_n[X])^\perp$ . De plus, par construction :

$$Q(1) = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{\varphi(X^{n+1}, P_k)}{\varphi(P_k, P_k)}$$

car tous les  $P_k(1)$  valent 1, et le polynôme  $Q/Q(1) := P_{n+1}$  est l'unique polynôme de degré  $n+1$  orthogonal à tous les  $P_k$  précédents et tel que  $P_{n+1}(1) = 1$ .

d'où la proposition est héréditaire.

On a donc bien montré l'existence et l'unicité annoncées. □

Ce résultat nous intéresse, car on peut montrer que c'est en fait une autre définition des polynômes de Legendre, parfaitement équivalente à la première. On ne fait pas ici la preuve

explicite, mais on peut déjà s'en convaincre en vérifiant à la main que les polynômes construits dans la preuve vérifient bien (2.8).

### 2.1.3 Construction d'une solution particulière

On va maintenant pouvoir construire une solution particulière à notre équation. En effet, on avait précisé plus haut que la fonction  $S$  est paire et régulière. Etant donné que les polynômes de Legendre forment une base de l'espace des polynômes  $\mathbb{R}[X]$ , en supposant que  $S$  peut s'écrire sous la forme d'une série entière sur  $] -1, 1[$ , alors elle peut s'écrire comme série de polynômes de Legendre. Par parité de  $S$ , on a donc l'existence de coefficients  $(S_n)_{n \in 2\mathbb{N}}$  tels que :

$$S(x) = \sum_{n \in 2\mathbb{N}} S_n P_n(x)$$

On a déjà établi qu'on pouvait déterminer par ailleurs la fonction  $S$ . Par ailleurs, on peut montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\int_{-1}^1 P_n^2(t) dt = \frac{2}{2n+1}$ . Par conséquent, d'après la proposition 2.3, on a :

$$\forall n \in 2\mathbb{N}, \quad S_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 S(x) P_n(x) dx$$

Cela signifie qu'on connaît les coefficients de la décomposition de  $S$  explicitement. Notre stratégie sera donc de chercher notre solution particulière sous la forme de fonctions  $I_{p,i}(x) = \sum_{n \in 2\mathbb{N}} I_{i,n} P_n(x)$  où  $i \in \{0, 1\}$  pour séparer la calotte glaciaire du reste de l'hémisphère. En injectant cette forme dans l'équation (2.1), on trouve

$$\sum_{n \in 2\mathbb{N}} I_{i,n} P_n(x) - D \sum_{n \in 2\mathbb{N}} -n(n+1) I_{i,n} P_n(x) = Q a_i \sum_{n \in 2\mathbb{N}} S_n P_n(x)$$

ou encore, comme les deux séries doivent être égales terme à terme :

$$\boxed{\forall i \in \{0, 1\} \quad I_{p,i}(x) = Q a_i \sum_{n \in 2\mathbb{N}} \frac{S_n P_n(x)}{1 + Dn(n+1)}} \quad (2.9)$$

Les deux solutions ont  $Q$  en facteur, et pour étudier la relation entre  $Q$  et  $x_s$  il est intéressant d'introduire les fonctions sans dimension  $\mathcal{I}_i(x) = \frac{I_{p,i}(x)}{Q}$ ,  $i \in \{0, 1\}$  pour pouvoir factoriser  $Q$  des solutions particulières quand on écrira la condition de continuité en  $x_s$ .

## 2.2 Solution homogène

L'équation homogène se réécrit :

$$\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{dI}{dx} \right) - \frac{I}{D} = 0 \quad (2.10)$$

c'est à dire comme une équation de Legendre de paramètre  $\nu \in \mathbb{C}$  avec  $\nu(1+\nu) = -1/D$ . On prend la racine  $\nu = \frac{-1 + (1-4/D)^{1/2}}{2}$  si  $D \geq 4$  et  $\nu = \frac{-1 + i(4/D-1)^{1/2}}{2}$  (ici,  $i$  est l'unité

imaginaire) sinon, et on admettra que les solutions homogènes sur chacune des régions 0, 1 sont données par :

$$I_{h,0}(x) = A_0 f_{1,\nu}(x) + B_0 f_{2,\nu}(x), \quad A_0, B_0 \in \mathbb{C} \quad (2.11)$$

$$I_{h,1}(x) = A_1 P_\nu(x), \quad A_1 \in \mathbb{C} \quad (2.12)$$

$$(2.13)$$

où

$$P_\nu(x) = F\left(\frac{1+\nu}{2}, \frac{-\nu}{2}; 1; 1-x^2\right) \quad (2.14)$$

$$f_{1,\nu}(x) = F\left(\frac{-\nu}{2}, \frac{1+\nu}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right) \quad (2.15)$$

$$f_{2,\nu}(x) = F\left(\frac{1-\nu}{2}, 1 + \frac{\nu}{2}; \frac{3}{2}; x^2\right) \quad (2.16)$$

et  $F(a, b; c; z)$  est la fonction hypergéométrique. La définition utilisée pour  $F$  et les détails des calculs vérifiant que ces fonctions sont bien solutions de (2.10) sont détaillés en annexe A.1. On peut alors montrer (North, 1975a) que les conditions de bords et de raccordement imposent les coefficients suivants : [1]

$$A_0 = \frac{I_s - I_{p,0}(x_s)}{f_{1,\nu}(x_s)}, \quad \text{d'après (2.4) pour } I_0$$

$$B_0 = 0,$$

$$A_1 = \frac{I_s - I_{p,1}(x_s)}{P_\nu(x_s)}$$

et que la relation entre  $Q$  et  $x_s$  s'écrit, avec les fonctions  $\mathcal{I}_i$  introduites plus haut :

$$Q = I_s \frac{P_s f'_s - P'_s f_s}{\mathcal{I}_0(x_s) P_s f'_s - \mathcal{I}_1(x_s) P'_s f_s + (\mathcal{I}'_1(x_s) - \mathcal{I}'_0(x_s)) P_s f_s} \quad (2.17)$$

avec  $P_s = P_\nu(x_s)$ ,  $P'_s = P'_\nu(x_s)$ ,  $f_s = f_{1,\nu}(x_s)$ ,  $f'_s = f'_{1,\nu}(x_s)$ .

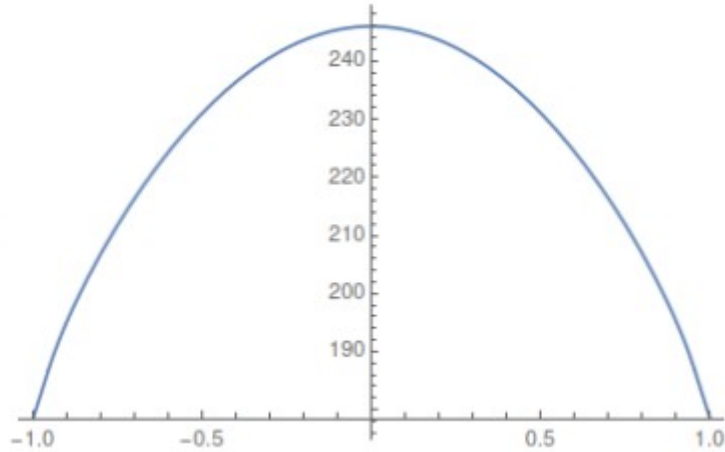


FIGURE 2 – Solution  $I(x)$  ( $\text{W m}^{-2}$ ) de notre équation avec conditions de bords. On prend ici  $S(x) = 1 + S_2 P_2(x)$ , avec  $S_2 = -0,482$ . Les paramètres sont  $D = 0,310$ ,  $a_0 = 0,68$ ,  $a_1 = 0,38$  et  $Q = 335 \text{ W m}^{-2}$  (ce qui correspond à  $x_s \approx 0,95$ ).

### 3 Simulation numérique

Dans cette partie, nous avons abordé le problème de façon numérique afin d'obtenir des approximations des solutions, le but étant de voir si l'on pouvait obtenir des solutions en accord avec les résultats des parties précédentes. Cette partie nous permet de plus d'étudier plus simplement le système avec la contribution solaire, bien plus compliqué analytiquement, ainsi que la particularité du paramètre  $x_s$ , fixé jusqu'à maintenant. En effet, on voit bien physiquement que la ligne de glace varie en fonction de la température.

Pour cela, nous chercherons tout le long de cette partie à tracer une représentation graphique d'une solution de notre équation, ou du moins à tracer ce qui s'en rapprochera le plus.

Nous en profiterons pour vérifier si l'on obtient des résultats cohérents avec ceux de G.North dans son article.

#### 3.1 La construction des schémas

Pour calculer les solutions de manière numérique, il faut construire une schéma numérique. Notre équation que l'on rappelle ci dessous est une équation aux dérivées partielles.

$$\tau \frac{\partial I}{\partial t} - D \frac{\partial}{\partial x} \left( (1 - x^2) \frac{\partial I}{\partial x} \right) + I(x, t) = QS(x)a(x, x_s) \quad \forall (x, t) \in ]-1, 1[ \times \mathbb{R}_+ \quad (3.1)$$

Pour cela, nous utiliserons la méthode des différences finies qui est une méthode classique et simple à mettre en oeuvre pour résoudre un problème de ce type. D'autres méthodes existent (volumes finis, éléments finis) mais sont plus compliquées à utiliser. On doit donc réaliser une double discrétisation en espace et en temps que l'on appelle maillage :

**Définition 3.1.** On appelle *maillage* une discrétisation d'une variable continue, en éléments de proportions bien définis. Ici, on discrétise l'espace et le temps en éléments de tailles  $\Delta x$  et  $\Delta t$  (aussi appelés pas), c'est-à-dire :

$$(x_j, t_n) = (j\Delta x, n\Delta t) \quad \forall j \in \mathbb{Z}, n \geq 0$$

Le but du schéma est de calculer des approximations des solutions en calculant uniquement les points du maillage (plus le maillage est fin, plus la solution est fidèle). On notera les points de la solution  $u_j^n = u(x_j, t_n)$

**Proposition 3.2.** Soit  $u$  une fonction de plusieurs variables au moins  $C^1$ , on peut approcher ses dérivées de la façon suivante :

- $\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x}$
- $\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t}$
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2}$
- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \frac{u(x, t + \Delta t) - 2u(x, t) + u(x, t - \Delta t)}{(\Delta t)^2}$

avec  $\Delta x$  et  $\Delta t$  des éléments positifs les plus petits possible.

*Démonstration.* On utilise pour cela des développements de Taylor autour du point  $(x_0, t_0)$  :

$$\begin{aligned} u(x_0 + \Delta x, t_0) &= u(x_0, t_0) + \Delta x \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(x_0, t_0)} + o(\Delta x) \\ \Rightarrow \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(x_0, t_0)} &\approx \frac{u(x_0 + \Delta x, t_0) - u(x_0, t_0)}{\Delta x} \end{aligned}$$

Le même raisonnement peut être appliqué pour la variable temporelle.

Pour la dérivée seconde :

$$\begin{cases} u(x_0 + \Delta x, t_0) = u(x_0, t_0) + \Delta x \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(x_0, t_0)} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{(x_0, t_0)} + o((\Delta x)^2) \\ u(x_0 - \Delta x, t_0) = u(x_0, t_0) - \Delta x \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(x_0, t_0)} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{(x_0, t_0)} + o((\Delta x)^2) \end{cases}$$

Ce qui donne en sommant les lignes :

$$\begin{aligned} u(x_0 + \Delta x, t_0) + u(x_0 - \Delta x, t_0) &= 2u(x_0, t_0) + (\Delta x)^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{(x_0, t_0)} + o((\Delta x)^2) \\ \Rightarrow \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{(x_0, t_0)} &\approx \frac{u(x_0 + \Delta x, t_0) + u(x_0 - \Delta x, t_0) - 2u(x_0, t_0)}{(\Delta x)^2} \quad \square \end{aligned}$$

On appelle *erreur de troncature* l'erreur commise lors de l'approximation d'une dérivée. On voit que cette erreur dépend du reste dans le développement de Taylor. Plus on diminue le pas, plus cette erreur sera faible.

En prenant les expressions des approximations des dérivées précédemment trouvées aux points du maillage, on obtient une discrétisation de la dérivée de notre fonction et on peut ainsi construire le schéma numérique en remplaçant ces expressions dans notre équations aux dérivées partielles. On peut voir qu'il y a plusieurs façon d'effectuer cette dernière étape.

### 3.2 Schéma(s) numérique(s)

Il existe différentes manières de discrétiser l'équation afin d'en faire un schéma numérique. Par exemple pour le temps, on a trois possibilités :

1. Centré en temps :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t}$$

2. Décentrée en temps (on avance dans le temps) :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$$

3. Décentrée en temps (on recule dans le temps) :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n = \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t}$$

On peut en déduire trois schémas numériques à partir de notre équation 3.1, en discrétisant la dérivée temporelle des différentes manières (les dérivées spatiales sont discrétisée de la manière vue dans la partie 3.1 c'est-à-dire en avançant dans l'espace) :

1. Schéma “centré” (le plus naturel) :

$$\tau \frac{I_j^{n+1} - I_j^{n-1}}{2\Delta t} + 2x_j D \frac{I_{j+1}^n - I_j^n}{\Delta x} - D(1 - x_j^2) \frac{I_{j+1}^n - 2I_j^n + I_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} + I_j^n = QS_j a_j \quad (3.2)$$

2. Schéma d’Euler Explicite (le plus simple) :

$$\tau \frac{I_j^{n+1} - I_j^n}{\Delta t} + 2x_j D \frac{I_{j+1}^n - I_j^n}{\Delta x} - D(1 - x_j^2) \frac{I_{j+1}^n - 2I_j^n + I_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} + I_j^n = QS_j a_j \quad (3.3)$$

3. Schéma d’Euler Implicite (plus compliqué) :

$$\tau \frac{I_j^n - I_j^{n-1}}{\Delta t} + 2x_j D \frac{I_{j+1}^n - I_j^n}{\Delta x} - D(1 - x_j^2) \frac{I_{j+1}^n - 2I_j^n + I_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} + I_j^n = QS_j a_j \quad (3.4)$$

En s’intéressant dans un premier temps à ces schémas, notamment au schéma d’Euler explicite, nous avons alors obtenus des résultats (graphiques) qui n’étaient pas tout à fait symétriques dans certaines conditions (conditions de bord, dont on parlera dans la partie 1.2), ce qui est un réel problème dans notre étude puisque nous nous intéressons à un problème totalement symétrique en espace (symétrie entre partie supérieure du globe - partie inférieure du globe).

Ce problème vient de la discrétisation de la dérivée première en espace de notre équation, (le terme  $2x_j D \frac{I_{j+1}^n - I_j^n}{\Delta x}$ ) qui rend le schéma asymétrique. La dérivée seconde est elle ”naturellement” centrée (ce qui est la conséquence directe de la discrétisation d’un terme en dérivée seconde).

Nous avons donc décidé de symétriser ce terme de l’équation de la même manière que pour la discrétisation centrée en temps c’est-à-dire :  $2x_j D \frac{I_{j+1}^n - I_{j-1}^n}{2\Delta x}$ , quitte à augmenter notre pas en espace puisque l’on multiplie par deux notre élément infinitésimal  $\Delta x$ . On doit prendre un pas d’espace plus petit, ce qui a pour conséquence d’augmenter grandement le temps de calcul de notre représentation graphique. Cependant, en symétrisant le schéma on le rend d’ordre 2 en espace et cela aura pour conséquence de le rendre plus précis comme on le verra un peu plus tard dans ce rapport (cf 3.5).

On notera que le schéma centré en temps n’est pas utilisable car toujours instable (cf 3.5). On s’intéressera donc uniquement aux schémas d’Euler explicite et implicite symétriques dans la suite.

### 3.3 Les conditions initiales et les conditions de bord

Une fois les schémas construits, il faut des conditions initiales qui vont préciser l’état initial du système. De plus dans un schéma d’équations aux dérivées partielles, le système est soumis à des conditions de bord au cours de son évolution.

Pour la condition initiale, nous avons construit une fonction  $T_0(x)$  qui se rapproche de la fonction trouvée par North (1975a) dans son article qui rend compte du climat en 1975 :

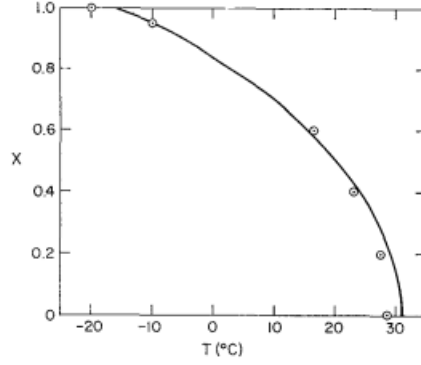


FIG. 2. Zonally averaged temperature as a function of  $x$  (sine of latitude) for observed (points) and model values (curve). The conditions are the same as in Fig. 1, with  $x_s=0.95$  (the present climate).

### FIGURE 3 – Condition Initiale

Pour les conditions de bords, nous avons dans un premier temps utilisé des conditions de Dirichlet (plus simples) qui fixent les valeurs de  $I$  aux bords (en  $x = 1$  et  $x = -1$ ) à des constantes. Mais pour être en accord avec la partie 1.2, nous avons tentés d'introduire ces conditions de Neumann (qui elles fixent la dérivée de  $I$  aux bords). Afin d'aborder le problème plus facilement, nous nous sommes ramenés à l'étude du problème pour  $x$  dans  $[-1, 0]$ . Nous pouvons nous le permettre car on sait que le problème est symétrique par rapport à l'équateur. On discrétise les conditions pour les implémenter dans le schéma :

- (1) Le flux de chaleur est nul aux pôles, donc

$$\forall t, \lim_{x \rightarrow \pm 1} \sqrt{1-x^2} \left( \frac{\partial I}{\partial x} \right) (x, t) = 0$$

Il est plus commode ici de faire annuler la dérivée de  $I$ , c'est à dire au point  $x = -1$  :

$$\forall n \geq 0, \frac{I(-1 + \Delta x, t_n) - I(-1, t_n)}{\Delta x} = 0 \Rightarrow I(-1, t_n) = I(-1 + \Delta x, t_n)$$

- (2) Il n'y a pas de transfert thermique au travers de l'équateur, donc

$$\forall t, \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1-x^2} \left( \frac{\partial I}{\partial x} \right) (x, t) = 0$$

Ce qui donne en discrétisant et en prenant au point  $x = 0$  :

$$\forall n \geq 0, \frac{I(0 + \Delta x, t_n) - I(0, t_n)}{\Delta x} = 0 \Rightarrow I(0, t_n) = I(-\Delta x, t_n) \quad (\text{En utilisant la symétrie de } I)$$

Les conditions aux limites en  $x_s$  ne concernent pas cette partie, car ce paramètre évolue avec le temps. En effet, à chaque itération, on calcule la nouvelle position de la ligne de glace (grâce à la condition de North qui dit que  $T_s = -10^\circ\text{C}$ ) pour effectuer la nouvelle itération avec cette valeur. On pourra néanmoins vérifier que le schéma converge bien vers la solution calculée analytiquement en régime stationnaire.

### 3.4 Formes matricielles et résultats des simulations

Avec les expressions de la partie 3.2, on peut réorganiser les termes et obtenir des expressions plus intéressantes :



### 3.4.1 Euler explicite

En effet, l'équation 3.3 (avec le terme symétrique pour la dérivée première) devient :

$$I_j^{n+1} = I_{j+1}^n \alpha_j + I_j^n \beta_j + I_{j-1}^n \gamma_j + QSa(x_j, x_s(t_n)) \quad \forall j \in \{0, \dots, m\}, n \geq 0$$

où  $m$  est le nombre de points pris pour le maillage de la variable spatiale tel que  $x_1 = -1$  et  $x_m = 0$  et :

- $\alpha_j = \frac{\Delta t}{\tau} \left( \frac{D(1-x_j^2)}{\Delta x^2} - \frac{x_j D}{\Delta x} \right)$
- $\beta_j = 1 - \frac{\Delta t}{\tau} \left( 1 + \frac{2D(1-x_j^2)}{\Delta x^2} \right)$
- $\gamma_j = \frac{\Delta t}{\tau} \left( \frac{D(1-x_j^2)}{\Delta x^2} + \frac{x_j D}{\Delta x} \right)$

On reconnaît un système tridiagonal que l'on peut réécrire à l'aide d'une matrice tridiagonale dans  $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$  :

$$I^{n+1} = \begin{pmatrix} \gamma_2 & \beta_2 & \alpha_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \gamma_2 & \beta_2 & \alpha_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_3 & \beta_3 & \alpha_3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_{m-2} & \beta_{m-2} & \alpha_{m-2} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \gamma_{m-1} & \beta_{m-1} & \alpha_{m-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \gamma_{m-1} & \beta_{m-1} & \alpha_{m-1} \end{pmatrix} I^n + \begin{pmatrix} QSa(x_1, x_s(t_n)) \\ QSa(x_2, x_s(t_n)) \\ \dots \\ QSa(x_m, x_s(t_n)) \end{pmatrix}$$

L'écriture de la première et de la dernière ligne vient de la condition de bord. En régime stationnaire, on se retrouve avec l'équation simplifiée  $I^{n+1} = AI^n$ .

### 3.4.2 Euler Implicite

De la même façon, on réécrit l'équation 3.4 :

$$\alpha_j I_{j+1}^n + \beta_j I_j^n + \gamma_j I_{j-1}^n = \frac{\tau}{\Delta t} I_j^{n-1} + QSa(x_j, x_s(t_n)) \quad \forall j \in \{0, \dots, m\}, n \geq 1$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\tau}{\Delta t} + 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \gamma_2 & \beta_2 & \alpha_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_3 & \beta_3 & \alpha_3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_{m-2} & \beta_{m-2} & \alpha_{m-2} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \gamma_{m-1} & \beta_{m-1} & \alpha_{m-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{\tau}{\Delta t} + 1 \end{pmatrix} I^{n+1} = \frac{\tau}{\Delta t} I^n + \begin{pmatrix} QSa(x_1, x_s(t_n)) \\ QSa(x_2, x_s(t_n)) \\ \dots \\ QSa(x_m, x_s(t_n)) \end{pmatrix}$$

avec  $\alpha_j = \frac{x_j D}{\Delta x} - \frac{D(1-x_j^2)}{\Delta x^2}$ ,  $\beta_j = \frac{\tau}{\Delta t} + \frac{2D(1-x_j^2)}{\Delta x^2} + 1$  et  $\gamma_j = -\frac{x_j D}{\Delta x} - \frac{D(1-x_j^2)}{\Delta x^2}$ .

Pour trouver la première ligne, on utilise l'équation 3.4 avec  $x_j = -1$  ainsi que la condition de bord, ce qui donne :

$$\tau \frac{I_j^n - I_j^{n-1}}{\Delta t} - 2D \frac{I_{j+1}^n - I_j^n}{\Delta x} + I_j^n = QSa_j \quad \xRightarrow{I_j^n = I_{j+1}^n} \left( \frac{\tau}{\Delta t} + 1 \right) I_j^n = \frac{\tau}{\Delta t} I_j^{n-1} + QSa_j$$

Pour la dernière ligne, on utilise encore l'équation 3.4 cette fois avec  $x_j = 0$ , la condition de bord ainsi que la symétrie du problème :

$$\begin{aligned} \tau \frac{I_j^n - I_j^{n-1}}{\Delta t} - D \frac{I_{j+1}^n - 2I_j^n + I_{j-1}^n}{\Delta x^2} + I_j^n &= Q S_j a_j \\ \Rightarrow_{I_{j+1}^n = I_{j-1}^n} \tau \frac{I_j^n - I_j^{n-1}}{\Delta t} - 2D \frac{I_{j-1}^n - I_j^n}{\Delta x^2} + I_j^n &= Q S_j a_j \\ \Rightarrow_{I_{j-1}^n = I_j^n} \left( \frac{\tau}{\Delta t} + 1 \right) I_j^n &= \frac{\tau}{\Delta t} I_j^{n-1} + Q S_j a_j \end{aligned}$$

### 3.4.3 Résultats numériques

En programmant les schémas numériques avec python, on peut obtenir un affichage de l'approximation de notre solution pour observer l'évolution de  $I$  sur la surface du globe en fonction de  $x$ . On affiche ici uniquement les résultats des schémas symétriques, les autres n'ayant pas grand intérêt. La temporalité est donnée par le dégradé de couleurs. On affiche une courbe tous les  $100\Delta t$ .

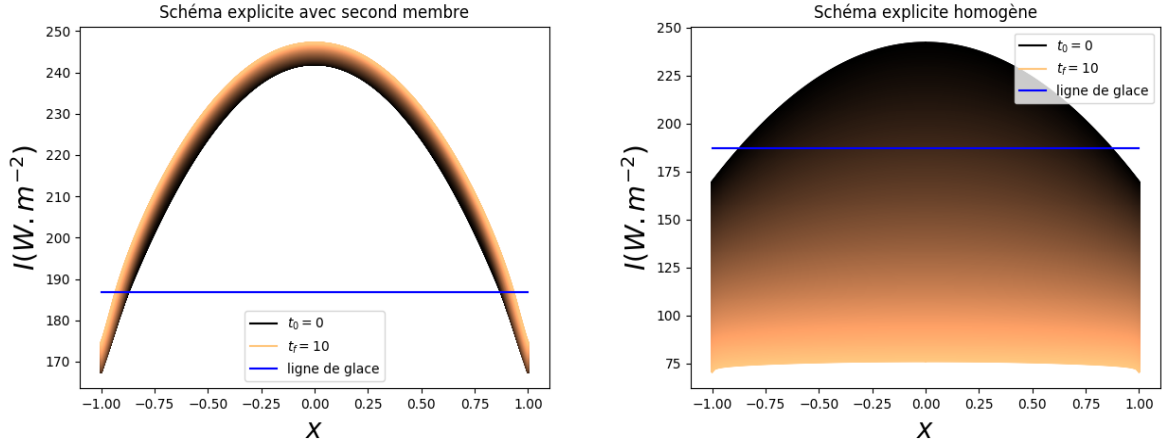


FIGURE 4 – Résultats des simulations pour le schéma explicite ( $\Delta t = 0.0001, \Delta x = 0.01$ )

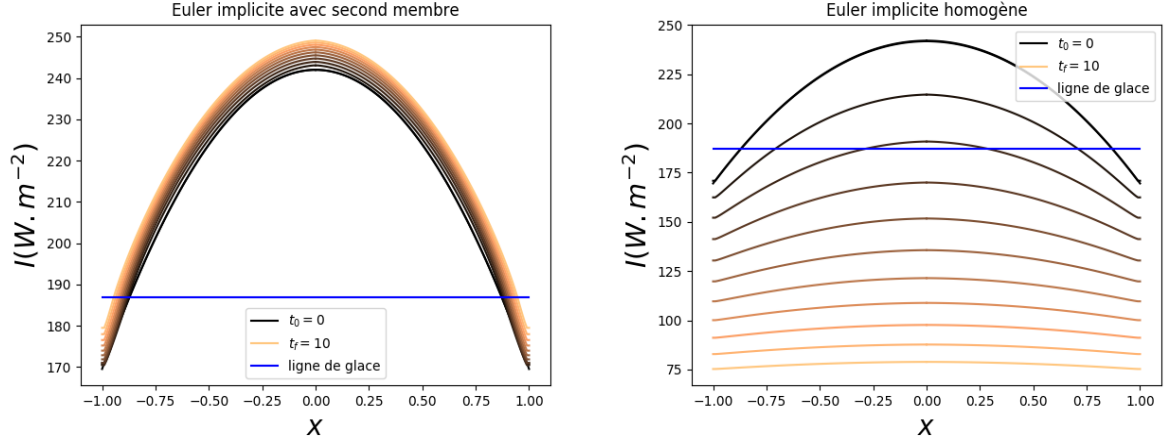


FIGURE 5 – Résultats des simulations pour le schéma implicite ( $\Delta t = 0.01, \Delta x = 0.01$ ). On prend ici  $S(x) = 1 + S_2 P_2(x)$ , avec  $S_2 = -0,482$ . Les paramètres sont  $D = 0,310$ ,  $a_0 = 0,68$ ,  $a_1 = 0,38$  et  $Q = 340 \text{ Wm}^{-2}$ . A gauche, le schéma converge vers un  $x_s = 0.954545$

On remarque que l'on obtient des résultats très similaires avec les deux schémas ce qui est rassurant. On remarque aussi l'avantage du schéma implicite qui autorise plus de liberté sur le choix du pas de temps et d'espace (à cause des conditions CFL du schéma explicite, cf 3.5), ce qui donne des temps de calculs plus raisonnables que pour l'explicite.

### 3.5 Consistance, stabilité et convergence

Un schéma numérique peut être caractérisé par plusieurs critères : la stabilité (pour une norme), la consistance et la convergence. Un schéma est d'autant meilleur qu'il vérifie le plus possible de ces critères ; on peut considérer que ce sont des critères de "fiabilité". Dans cette partie, nous allons étudier la consistance, la stabilité et la convergence des schémas d'Euler implicite et explicite, pour notre équation homogène (c'est-à-dire en supprimant les apports énergétiques du soleil) :

$$\tau \frac{\partial I}{\partial t} - D \frac{\partial}{\partial x} \left( (1 - x^2) \frac{\partial I}{\partial x} \right) + I(x, t) = 0 \quad \forall (x, t) \in ]-1, 1[ \times \mathbb{R}_+$$

On se concentrera sur cette équation pour une meilleure lisibilité des calculs et une meilleure compréhension globale des notions présentées.

#### 3.5.1 Consistance

La notion de consistance est liée à l'erreur de troncature du schéma, à savoir l'erreur commise lors de la discrétisation des termes de dérivées. Cette erreur est générée lors du choix de l'ordre de précision de la discrétisation, c'est-à-dire du terme à partir duquel nous négligeons le reste du développement limité. Un schéma est dit consistant si cette erreur diminue quand le pas (temps ou espace) tend vers 0. Les schémas d'Euler sont construits afin d'être consistants. On va étudier la consistance de nos schémas explicite et implicite. On rappelle que l'on est dans le cas du schéma homogène (sans les apports du soleil). Soit  $u(x, t)$  la solution exacte de notre EDP, et  $u_j^n$  la solution de l'équation aux différences finies (EDF). L'erreur de troncature est donnée par la différence entre l'EDP et l'EDF en un point  $(j\Delta x, n\Delta t)$  du maillage pour la

solution exacte :  $e = EDF[u(j\Delta x, n\Delta t)] - EDP[u]_{(j\Delta x, n\Delta t)}$ . On notera  $U_j^n = u(j\Delta x, n\Delta t)$  la solution exacte en ce point. On cherche à montrer que  $\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} e = 0$  pour nos différents schémas.

**Euler Explicite :** Comme  $u$  est solution de l'EDP (homogène), l'erreur de troncature  $e$  est juste donnée par :

$$e = \tau \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + x_j D \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{\Delta x} - D(1 - x_j^2) \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} + U_j^n$$

On va exprimer tous les termes en fonction de  $U_j^n$  grâce à des développements de Taylor autour du point  $(j\Delta x, n\Delta t)$  :

- $u(j\Delta x, n\Delta t + \Delta t) = U_j^{n+1} = U_j^n + \Delta t \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_j^n + \mathcal{O}((\Delta t)^2)$
- $u(j\Delta x + \Delta x, \Delta t) = U_{j+1}^n = U_j^n + \Delta x \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_j^n + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_j^n + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \Big|_j^n + \mathcal{O}((\Delta x)^4)$
- $u(j\Delta x - \Delta x, \Delta t) = U_{j-1}^n = U_j^n - \Delta x \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_j^n + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_j^n - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \Big|_j^n + \mathcal{O}((\Delta x)^4)$

En injectant ces expressions dans l'erreur, on trouve :

$$e = \tau \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_j^n + \mathcal{O}(\Delta t) + 2x_j D \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_j^n + \frac{\Delta x^2}{3} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \Big|_j^n + \mathcal{O}(\Delta x^3) - D(1 - x_j^2) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_j^n + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

Or  $U$  est solution de notre EDP homogène donc  $\tau \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_j^n + 2x_j D \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_j^n - D(1 - x_j^2) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_j^n = 0$ .

Ainsi,  $e = \frac{\Delta x^2}{3} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \Big|_j^n + \mathcal{O}(\Delta t + \Delta x^2)$ . Cette erreur tend bien vers 0 lorsque  $\Delta x$  et  $\Delta t$  tendent vers 0 séparément.

**Euler Implicite :** On adopte le même raisonnement que précédemment avec l'EDF implicite, on a :

$$e = \tau \frac{U_j^n - U_j^{n-1}}{\Delta t} + x_j D \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{\Delta x} - D(1 - x_j^2) \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} + U_j^n$$

Or  $U_j^{n-1} = U_j^n - \Delta t \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^2)$  donc :

$$\begin{aligned} e &= \tau \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_j^n + \mathcal{O}(\Delta t) + 2x_j D \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_j^n + \frac{\Delta x^2}{3} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \Big|_j^n + \mathcal{O}(\Delta x^3) - D(1 - x_j^2) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_j^n + \mathcal{O}(\Delta x^2) \\ &= \frac{\Delta x^2}{3} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \Big|_j^n + \mathcal{O}(\Delta t + \Delta x^2) \end{aligned}$$

Le schéma d'Euler implicite est donc lui aussi consistant car son erreur de troncature tend vers 0 quand  $\Delta x$  et  $\Delta t$  tendent vers 0.

On voit que pour nos deux schémas notre erreur de troncature relève de  $\mathcal{O}((\Delta x)^2 + (\Delta t))$ , on dit que nos schémas sont précis à l'ordre 2 en  $x$  et à l'ordre 1 en  $t$ . Ainsi, on s'aperçoit bien (comme nous l'avions énoncé à la fin de la partie 3.2) que plus l'ordre d'une variable du schéma augmente, plus on est précis.

### 3.5.2 Stabilité

Un schéma est dit stable (pour une norme) si le calcul des solutions n'explose pas, c'est-à-dire notamment si le pas de temps et le pas en espace sont bien choisis, et s'il vérifie  $\|I^n\| \leq K\|I^0\|$  pour tout  $n \geq 0$ , pour tout  $I^0$  et pour  $K > 0$  une constante indépendante de  $\Delta x$  et  $\Delta t$ . Cette inégalité peut être vérifiée tout le temps, alors le schéma est inconditionnellement stable, ou sous certaines conditions (conditions CFL dont on reparlera plus tard, mais qui reste la même pour un même schéma, peu importe la norme choisie), et le schéma est alors conditionnellement stable. Il est bien connu que le schéma d'Euler implicite est inconditionnellement stable, tandis que le schéma d'Euler explicite est conditionnellement stable, pour toute norme. Nous étudierons ici la stabilité pour les normes discrètes  $L_2$  et  $L_\infty$  dans  $\mathbb{R}^d$  ( $\|I^n\|_2 = (\sum_{j=1}^m (\Delta x |I_j^n|^2))^{\frac{1}{2}}$  et  $\|I^n\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq m} |I_j^n|$ ) de ces deux schémas afin de retrouver ces résultats.

**Norme discrète  $L_\infty$**  Commençons par étudier la stabilité de nos deux schémas pour la norme discrète  $L_\infty$  :

Pour un schéma de la forme  $I^{n+1} = AI^n$ , avec A une matrice, on a  $\|I^{n+1}\| = \|A^n I^0\| \leq \|A^n\| \cdot \|I^0\| \leq \|A\|^n \cdot \|I^0\|$  puisque la norme subordonnée est une norme algébrique. Ainsi, pour montrer l'existence d'une constante K telle que  $\|A\|^n \cdot \|I^0\| \leq K\|I^0\| \forall I^0, n$ , montrer que  $\|A\|_\infty \leq 1$  est une condition suffisante pour montrer que le schéma est stable pour la norme  $L_\infty$  (puisque alors s'il n'y a pas égalité  $\|A\|_\infty^n$  tend vers 0 et il existe  $n_0$  tel que  $\forall n \geq n_0 \ \|A\|_\infty^n < K \forall K > 0$ ; et s'il y a égalité on prend  $K = 1$  qui convient), qui est plus simple à étudier sous cette forme.

Pour le schéma d'Euler implicite, étant donné un schéma sous la forme  $AI^{n+1} = \frac{\tau}{\Delta t} I^n + B$  avec A et B deux matrices, on a sans l'action du soleil une équation de la forme  $A'I^{n+1} = I^n$  avec  $A' = \frac{\Delta t}{\tau} A$ .

On peut montrer que A' est inversible et que  $\|A'^{-1}\|_\infty \leq 1$ , mais comme nous savons déjà que le schéma d'Euler implicite est inconditionnellement stable et que les calculs sont lourds, nous avons décidé de nous concentrer sur le schéma d'Euler explicite.

Pour le schéma d'Euler explicite, on a un schéma sous la forme  $I^{n+1} = AI^n + B$  avec A et B deux matrices.

Sans l'action du soleil, on se retrouve avec l'équation simplifiée  $I^{n+1} = AI^n$ . Donc pour la norme infinie on a  $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} (\sum_{j=1}^m |a_{i,j}|) = \max_{2 \leq i \leq m-1} (|\alpha_j| + |\beta_j| + |\gamma_j|)$ . Cette norme subordonnée est inférieure à 1 sous une certaine condition sur le pas de temps et le pas en espace du schéma :  $(\Delta x)^2 \geq \frac{2D\Delta t}{\tau}$ , c'est cette condition (que nous avons cherchée puis trouvée) que l'on appelle CFL (Courant–Friedrichs–Lewy).

Montrons que cette condition est suffisante pour que  $\|A\|_\infty \leq 1$  et donc pour que le schéma soit stable :

On rappelle que l'on a  $\alpha_j = \frac{\Delta t}{\tau} \left( \frac{D(1-x_j^2)}{\Delta x^2} - \frac{x_j D}{\Delta x} \right)$ ,  $\beta_j = 1 - \frac{\Delta t}{\tau} \left( 1 + \frac{2D(1-x_j^2)}{\Delta x^2} \right)$  et  $\gamma_j = \frac{\Delta t}{\tau} \left( \frac{D(1-x_j^2)}{\Delta x^2} + \frac{x_j D}{\Delta x} \right)$ , tel que  $x_1 = -1$  et  $x_m = 0$

Sous la condition énoncée ci-dessus on vérifie aisément que  $\beta_j \geq 0 \forall j$  :

$$\begin{aligned} \beta_j &= 1 - \frac{\Delta t}{\tau} \left( 1 + \frac{2D(1-x_j^2)}{\Delta x^2} \right) \geq 1 - \frac{\Delta t}{\tau} \left( 1 + \frac{2D}{\Delta x^2} \right) \geq 1 - \frac{\Delta t}{\tau} \left( 1 + \frac{D}{D\Delta t}(\tau) \right) \\ &\approx 1 - \frac{\Delta t}{\tau} \left( 1 + \frac{D}{D\Delta t}(\tau - \Delta t) \right) \geq 1 - \frac{\Delta t}{\tau} \left( \frac{\tau}{\Delta t} \right) = 0 \quad \text{puisque } \tau \approx 10 \text{ et } \Delta t \ll 1 \text{ donc } \Delta t \ll \tau \end{aligned}$$

Donc  $|\beta_j| = \beta_j$ , et de plus on a  $|\alpha_j| = \alpha_j$  (car  $1 - x_j^2$  est positif et  $x_j$  est négatif, puisque  $-1 \leq x_j \leq 0 \forall j$ ). On a maintenant deux cas : soit le max est atteint pour une valeur de  $\gamma_j$  négative, soit pour une valeur de  $\gamma_j$  positive. Montrons que dans tous les cas, on a bien  $\max_{2 \leq i \leq m-1} (|\alpha_j| + |\beta_j| + |\gamma_j|) \leq 1$ .

— Si le max est atteint en un indice  $j=J$  tel que  $|\gamma_J| = \gamma_J$ , alors on a :

$$\max_{2 \leq i \leq m-1} (|\alpha_j| + |\beta_j| + |\gamma_j|) = |\alpha_J| + |\beta_J| + |\gamma_J| = \alpha_J + \beta_J + \gamma_J = 1 - \frac{\Delta t}{\tau} < 1$$

— Si le max est atteint en un indice  $j=J$  tel que  $|\gamma_J| = -\gamma_J$ , alors on a :

$$\begin{aligned} \max_{2 \leq i \leq m-1} (|\alpha_j| + |\beta_j| + |\gamma_j|) &= |\alpha_J| + |\beta_J| + |\gamma_J| = \alpha_J + \beta_J - \gamma_J \\ &= 1 - \frac{\Delta t}{\tau} + \frac{2D\Delta t}{\tau\Delta x} \left( -x_J - \frac{1 - x_J^2}{\Delta x} \right) \\ &= 1 - \frac{\Delta t}{\tau} + \frac{2D\Delta t}{\tau\Delta x^2} (x_J^2 - x_J\Delta x - 1) \end{aligned}$$

Or en étudiant le signe le polynôme du second degré en  $x_J$ , on trouve qu'il s'annule aux points  $x_{J_{1,2}} = \frac{-\Delta x \pm \sqrt{\Delta x^2 + 4}}{2}$ . Cependant, on se trouve sur l'intervalle  $[-1, 0]$  et  $x_{J_1} > 0, x_{J_2} < -1$ , donc le polynôme est tout le temps négatif sur cet intervalle. Ainsi :

$$\max_{2 \leq i \leq m-1} (|\alpha_j| + |\beta_j| + |\gamma_j|) = 1 - \frac{\Delta t}{\tau} + \frac{2D\Delta t}{\tau\Delta x^2} (x_J^2 - x_J\Delta x - 1) < 1 - \frac{\Delta t}{\tau} < 1$$

Dans tous les cas, on a bien  $\|A\|_\infty \leq 1$  donc cette condition est suffisante pour que le schéma d'Euler Explicite soit stable.

On peut également vérifier que cette condition est également nécessaire pour que  $\|A\|_\infty \leq 1$  (voir démonstration en annexe A.2), et donc elle est nécessaire et suffisante, c'est bien une condition CFL. Dans tous les cas, on voit bien que le schéma est conditionnellement stable.

**Norme discrète  $L_2$  :** Intéressons nous maintenant à la stabilité de nos schémas pour la norme discrète  $L_2$ . Pour se faire, nous ne l'étudierons pas directement, mais allons nous intéresser à une condition nécessaire pour la stabilité des schémas avec cette norme : la condition nécessaire de stabilité de Von Neumann. Pour pouvoir utiliser cette condition, nous ne considérerons pas nos conditions de bord, mais considérerons qu'on a des conditions de bords périodiques. Si l'on considère une solution discrète particulière du schéma sous la forme d'un mode de Fourier ( $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall j, n, I_j^n = A(k)^n e^{2i\pi k x_j}$ ), le coefficient d'amplification  $A(k)$  doit respecter la condition suivante :  $|A(k)| \leq 1 \forall k \in \mathbb{Z}$ . Cette condition est dans la plus part des cas suffisante (sous les conditions suivantes : l'EDP et le schéma aux différences finies sont linéaires, l'EDP est à coefficients constants avec des conditions de bord périodiques et dépend de deux variables indépendantes et le schéma n'utilise pas plus de deux niveaux de temps, mais comme nous n'avons pas des coefficients constantes, cette condition n'est pas suffisante ici, et nous ne chercherons pas à trouver de condition suffisante).

Pour le schéma d'Euler implicite, on a sans l'apport du soleil une équation de la forme :  $\alpha_j I_{j+1}^n + \beta_j I_j^n + \gamma_j I_{j-1}^n = \frac{\tau}{\Delta t} I_j^{n-1}$ , avec  $\alpha_j = \frac{x_j D}{\Delta x} - \frac{D(1-x_j^2)}{\Delta x^2}$ ,  $\beta_j = \frac{\tau}{\Delta t} + \frac{2D(1-x_j^2)}{\Delta x^2} + 1$  et  $\gamma_j = -\frac{x_j D}{\Delta x} - \frac{D(1-x_j^2)}{\Delta x^2}$ . On injecte la solution discrète sous la forme d'un mode de Fourier, et on trouve (voir calcul en

annexe A.2) :

$$|A(k)| = \frac{1 + \frac{4D(1-x_j^2)\Delta t}{\tau\Delta x^2} \sin^2(\pi k\Delta x)}{\left(1 + \frac{4D(1-x_j^2)\Delta t}{\tau\Delta x^2} \sin^2(\pi k\Delta x)\right)^2 + \left(\frac{2x_j\Delta t D}{\Delta x\tau} \sin(2\pi k\Delta x)\right)^2}$$

On voit clairement que  $|A(k)| \leq 1$  puisque  $1 + \frac{4D(1-x_j^2)\Delta t}{C\Delta x^2} \sin^2(\pi k\Delta x) \leq \left(1 + \frac{4D(1-x_j^2)\Delta t}{C\Delta x^2} \sin^2(\pi k\Delta x)\right)^2$  (car  $1 + \frac{4D(1-x_j^2)\Delta t}{C\Delta x^2} \sin^2(\pi k\Delta x) \geq 1$ ). Ainsi, le schéma d'Euler implicite vérifie inconditionnellement la condition de Von Neumann.

Pour le schéma d'Euler explicite, on a sans l'apport du soleil une équation de la forme :  $I_j^{n+1} = I_{j+1}^n \alpha_j + I_j^n \beta_j + I_{j-1}^n \gamma_j$ , avec  $\alpha_j = \frac{\Delta t}{\tau} \left( \frac{D(1-x_j^2)}{\Delta x^2} - \frac{x_j D}{\Delta x} \right)$ ,  $\beta_j = 1 - \frac{\Delta t}{\tau} \left( 1 + \frac{2D(1-x_j^2)}{\Delta x^2} \right)$  et  $\gamma_j = \frac{\Delta t}{\tau} \left( \frac{D(1-x_j^2)}{\Delta x^2} + \frac{x_j D}{\Delta x} \right)$

On injecte la solution discrète sous la forme d'un mode de Fourier, et on trouve (voir calcul en annexe A.2) :

$$|A(k)| = \left| \frac{-4D(1-x_j^2)\Delta t}{\tau\Delta x^2} \sin^2(\pi k\Delta x) + 1 - \frac{\Delta t}{\tau} \right|$$

On cherche à ce que  $|A(k)| \leq 1$ . On remarque que vérifier la condition CFL est une condition suffisante pour vérifier la condition de Von Neumann (voir démonstration en annexe A.2). On peut également montrer la nécessité de la condition CFL par un raisonnement analogue, que nous ne détaillerons pas dans ce rapport.

### 3.5.3 Convergence

La convergence d'un schéma numérique est une propriété théorique globale assurant que l'écart (au sens d'une norme) entre la solution approchée et la solution exacte tend vers 0 lorsque le pas de discrétisation tend vers 0 (ou lorsque chacun des pas globaux associés aux différentes directions tend vers 0).

Le théorème de Lax nous dit "Un schéma linéaire, consistant et stable est convergent. De plus, si le schéma est précis à l'ordre  $p$  en  $x$  et à l'ordre  $q$  en  $t$  alors la vitesse de convergence est  $\mathcal{O}((\Delta x)^p + (\Delta t)^q)$ ."

Nos deux schémas sont bien linéaires, puisque notre équation sans les apports du soleil est linéaire (opérateur linéaire) et qu'elle peut se discrétiser comme nous l'avons fait en deux équations toute deux pouvant être mise sous forme matricielle linéaire.

Ce théorème nous assure donc que notre schéma d'Euler implicite converge bien, au moins pour la norme  $L_\infty$ , et que notre schéma d'Euler explicite aussi sous la condition CFL  $(\Delta x)^2 \geq \frac{2D\Delta t}{\tau}$ , avec une vitesse de convergence de  $\mathcal{O}((\Delta x)^2 + \Delta t)$ . On reconnaît que cette vitesse de convergence est égale à notre erreur de troncature énoncée dans la partie 3.5.1.

## 4 Comparaisons des résultats et conclusion

Afin de vérifier que nos simulations numériques peuvent être utiles et donnent des résultats convenables, il faut comparer les résultats calculés numériquement avec les solutions calculées analytiquement. Nous avons donc calculé la solution exacte en certains points afin de l'afficher sur la même figure que la solution approchée. On observe les résultats suivants :

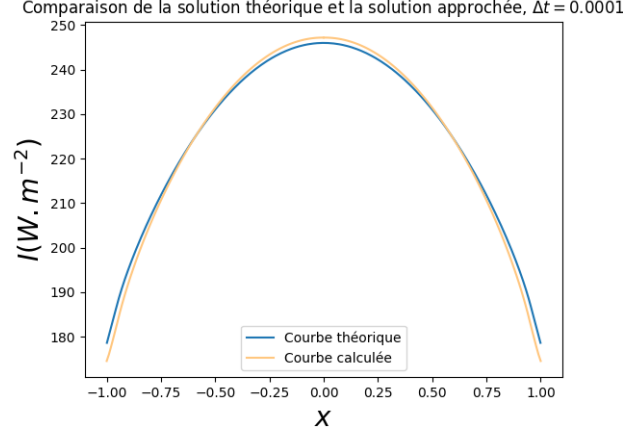


FIGURE 6 – Comparaison pour le schéma explicite,  $\Delta t = 10^{-4}$ . Les plus grosses erreurs sont de l'ordre de  $5 \text{ W m}^{-2}$  au niveau des pôles, donc environ  $3,5^\circ\text{C}$ .

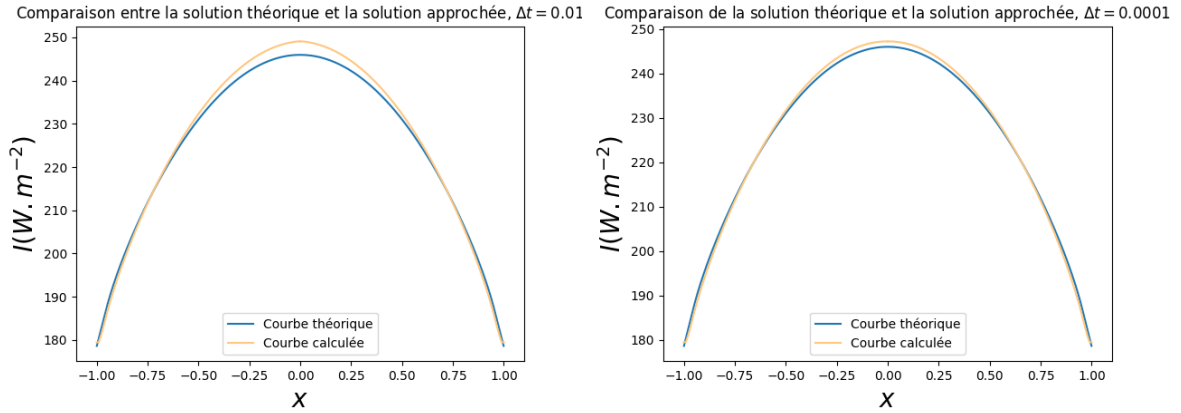


FIGURE 7 – Comparaison pour différents pas de temps pour le schéma implicite : à gauche,  $\Delta t = 10^{-2}$  et à droite  $\Delta t = 10^{-4}$ . On voit que le schéma semble bien converger vers notre solution théorique lorsque  $\Delta t \rightarrow 0$ .

On semble observer clairement sur ces graphiques que la solution numérique converge vers la solution analytique établie dans la première partie. Néanmoins, ce n'est pas le cas. Plusieurs éléments nous permettent de le remarquer :

- La valeur de  $x_s$  obtenue numériquement pour un  $Q$  donné (ici,  $Q = 340 \text{ W m}^{-2}$ ) n'est pas en accord avec la relation  $Q(x_s)$  obtenue analytiquement : pour cette valeur de  $Q$ , on trouve en effet numériquement  $x_s = 0,954545$ , alors que d'après la relation (2.17), on a  $Q(0,954545) = 335,1 \text{ W m}^{-2}$ , un écart de l'ordre du pourcent.
- Pour  $\Delta t$  arbitrairement petit, la convergence du schéma ralentit (ne reste pas linéaire en



$\Delta t$ ) comparée à la solution exacte. Si néanmoins on prend pour référence une solution calculée à  $\Delta t$  petit, on trouve bien que l'erreur décroît linéairement en  $\Delta t$ . Cela indique que le problème n'est pas la vitesse de convergence du schéma, mais bien qu'on ne converge pas vers la bonne solution - cf. figure 8 ci-dessous.

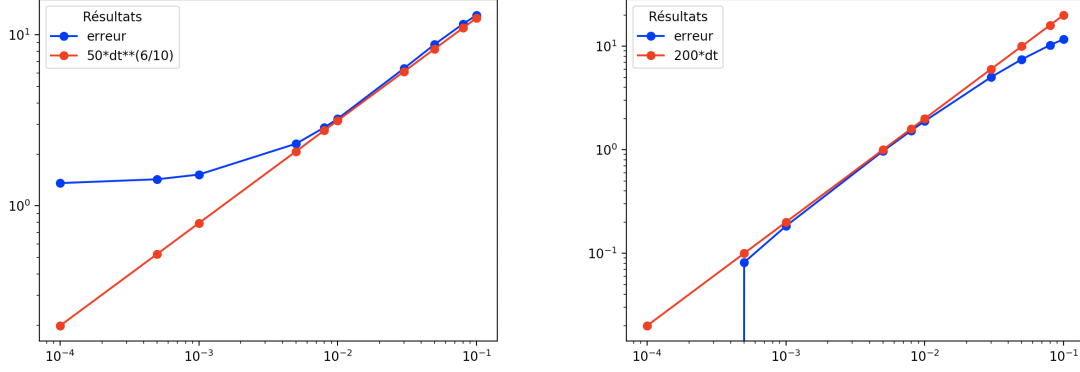


FIGURE 8 – Erreur relative mesurée comme  $\|I - (I_j^n)\|_\infty$ , avec  $(I_j^n)$  la solution calculée numériquement, exprimée en échelle log-log en fonction de  $\Delta t$ . À gauche, on a pour  $I$  la solution théorique pour la valeur de  $x_s$  renvoyée par les calculs, et à droite on prend pour référence  $I$  la valeur numérique pour  $\Delta t = 10^{-4}$ .

On voit clairement (à droite) que le schéma converge à vitesse linéaire, mais comparé à la solution exacte, c'est plus proche d'une loi de puissance 6/10 au début, et ça tend vers une différence fixe à la solution exacte, ce qui montre que les solutions exacte et numérique ne sont pas en accord...

Le plus gros suspect pour cet écart semble être l'implémentation des conditions de bord. Faute de temps, nous n'avons néanmoins pas pu trouver de solution alternative permettant de corriger cela.

Au travers de ce projet, nous avons pu étudier les solutions d'une équation aux dérivées partielles non-linéaire. En se basant sur les travaux de G. R. North (1975a) pour la forme des solutions homogènes, et en construisant une solution particulière, nous avons pu obtenir la solution exacte en régime stationnaire. Nous avons mis en place des méthodes numériques pour simuler l'équation dépendante du temps, et avons partiellement démontré qu'elles devaient converger ; néanmoins, on a observé que la limite ne correspondait pas à la solution précédemment obtenue.

Plusieurs points de cette étude peuvent néanmoins être approfondis ou améliorés. Toutes les preuves n'ont pas été détaillées, pour des raisons de temps, de place et de complexité. Ensuite, des méthodes numériques plus sophistiquées et plus exactes peuvent être mises en place - par exemple, à base de transformées de Fourier rapides - en espérant ainsi raccorder à la solution exacte... Pour raffiner le modèle (qui est assez grossier en l'état) on pourrait considérer en premier lieu une dépendance du coefficient de diffusion en la latitude. Nous avons également envisagés d'ajouter un terme modélisant le  $\text{CO}_2$  anthropique, par exemple en modifiant la valeur de la constante  $Q$ , ce qui nous aurait amené à nous rapprocher davantage de l'étude de North et les différents climats d'équilibre. Et bien sûr, le problème 2D est incroyablement plus complexe à modéliser.

## Références

- [1] Gerald R. NORTH. « Analytical Solution to a Simple Climate Model with Diffusive Heat Transport ». In : *Journal of the Atmospheric Sciences* 32.7 (1975), p. 1301-1307. DOI : 10.1175/1520-0469(1975)032<1301:ASTASC>2.0.CO;2. eprint : [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1975\)032<1301:ASTASC>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1975)032<1301:ASTASC>2.0.CO;2). URL : [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1975\)032%3C1301:ASTASC%3E2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1975)032%3C1301:ASTASC%3E2.0.CO;2).
- [2] M. I. BUDYKO. « The effect of solar radiation variations on the climate of the Earth ». In : *Tellus* 21.5 (1969), p. 611-619. DOI : 10.3402/tellusa.v21i5.10109. eprint : <https://doi.org/10.3402/tellusa.v21i5.10109>. URL : <https://doi.org/10.3402/tellusa.v21i5.10109>.
- [3] William D. SELLERS. « A Global Climatic Model Based on the Energy Balance of the Earth-Atmosphere System ». In : *Journal of Applied Meteorology* 8.3 (1969), p. 392-400. DOI : 10.1175/1520-0450(1969)008<0392:AGCMB0>2.0.CO;2. eprint : [https://doi.org/10.1175/1520-0450\(1969\)008<0392:AGCMB0>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0450(1969)008<0392:AGCMB0>2.0.CO;2). URL : [https://doi.org/10.1175/1520-0450\(1969\)008%3C0392:AGCMB0%3E2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0450(1969)008%3C0392:AGCMB0%3E2.0.CO;2).
- [4] Gerald R. NORTH. « Theory of Energy-Balance Climate Models ». In : *Journal of the Atmospheric Sciences* 32.11 (1975), p. 2033-2043. DOI : 10.1175/1520-0469(1975)032<2033:TOEBCM>2.0.CO;2. eprint : [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1975\)032<2033:TOEBCM>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1975)032<2033:TOEBCM>2.0.CO;2). URL : [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1975\)032%3C2033:TOEBCM%3E2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1975)032%3C2033:TOEBCM%3E2.0.CO;2).
- [5] Grégoire ALLAIRE. *Transport et diffusion*. Ecole Polytechnique. URL : <http://www.cmap.polytechnique.fr/~allaire/map567/PAEnergie5.pdf>.
- [6] Grégoire ALLAIRE. *Analyse numérique et optimisation : Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. Ecole Polytechnique. URL : <http://www.cmap.polytechnique.fr/~allaire/map431/amphi1.pdf>.
- [7] *État Courant – Friedrichs – Lewy*. URL : [https://en.wikipedia.org/wiki/Courant%E2%80%93Friedrichs%E2%80%93Lewy\\_condition](https://en.wikipedia.org/wiki/Courant%E2%80%93Friedrichs%E2%80%93Lewy_condition).
- [8] *Stabilité de Von Neumann*. URL : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Stabilit%C3%A9\\_de\\_Von\\_Neumann](https://fr.wikipedia.org/wiki/Stabilit%C3%A9_de_Von_Neumann).
- [9] *Méthode des différences finies*. URL : [https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9thode\\_des\\_diff%C3%A9rences\\_finies#Convergence](https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9thode_des_diff%C3%A9rences_finies#Convergence).
- [10] *Etude de la convergence du schéma explicite*. URL : [https://perso.univ-lyon1.fr/marc.buffat/COURS/COURSDF\\_HTML/node12.html](https://perso.univ-lyon1.fr/marc.buffat/COURS/COURSDF_HTML/node12.html).
- [11] *Fonctions hypergéométriques*. URL : [https://en.wikipedia.org/wiki/Hypergeometric\\_function](https://en.wikipedia.org/wiki/Hypergeometric_function).

## A Détail des calculs

### A.1 Solutions homogènes de l'EDO de Legendre

Pour  $a, b, c \in \mathbb{C}$  on définit sur le disque  $|z| < 1$  la fonction hypergéométrique par sa série entière : [11]

$$F(a, b; c; z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!},$$

où  $(\cdot)_n$  désigne le symbole de Pochhammer descendant, défini par :

$$(u)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (u + k),$$

avec donc la convention  $(u)_0 = 1$ . On utilisera les formules utiles :

$$(u)_{n+1} = (u + n)(u)_n$$

$$(u + p)_n = \left[ \prod_{k=0}^{p-1} \frac{u + k + n}{u + k} \right] (u)_n, \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

On admet que le rayon de convergence de cette série entière est bien 1, et qu'elle est définie en  $z = \pm 1$  pour les valeurs de  $a, b, c$  de notre problème.

On effectuera les calculs en coordonnées sphériques, avec le changement de variable  $x = \cos \theta$ , et donc :

$$\frac{d}{dx} \left( (1 - x^2) \frac{df}{dx} \right) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d(f \circ \cos)}{d\theta} \right).$$

#### Calcul pour $P_\nu$

Posons  $P_\nu : x \mapsto F(a, b; c; 1 - x^2)$  avec  $a = \frac{1+\nu}{2}$ ,  $b = -\frac{\nu}{2}$  et  $c = 1$ . On a alors les relations utiles suivantes :

$$ab = \frac{ab}{c} = \frac{1}{4D}$$

$$a + b = \frac{1}{2}$$

$$(a + n)(b + n) = ab + n(a + b) + n^2 = \frac{1}{4} \left( 2n(2n + 1) + \frac{1}{D} \right)$$

On a

$$P_\nu(\cos \theta) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{\sin^{2n}(\theta)}{n!},$$

donc

$$\sin \theta \frac{dP_\nu(\cos \theta)}{d\theta} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \left( \frac{2n \cos \theta \sin^{2n}(\theta)}{n!} \right),$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP_\nu(\cos \theta)}{d\theta} \right) &= \frac{2}{\sin \theta} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} n \left( -\sin^{2n+1}(\theta) + 2n \cos^2(\theta) \sin^{2(n-1)+1}(\theta) \right) \\ &= 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} \left( 2n^2 \sin^{2(n-1)}(\theta) - (2n^2 + n) \sin^{2n}(\theta) \right) \end{aligned}$$

d'après l'identité  $\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta)$ . On sépare ensuite le termes avec  $n - 1$  dans l'exposant du sinus dans le but de changer d'indice dans la série (ce qu'on a le droit de faire car elle converge uniformément, comme série entière évaluée dans son rayon de convergence). On a donc, comme le premier terme vaut 0, en faisant le changement d'indice  $k = n - 1$  :

$$\begin{aligned} 4 \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} n^2 \sin^{2(n-1)}(\theta) &= 4 \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(a)_{k+1} (b)_{k+1}}{k! (c)_{k+1}} (k+1) \sin^{2k}(\theta) \\ &= 4 \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(a)_k (b)_k}{k! (c)_k} \frac{\frac{1}{4}(2k(2k+1) + 1/D)}{k+1} (k+1) \sin^{2k}(\theta) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(a)_k (b)_k}{k! (c)_k} \left( 2k(2k+1) + \frac{1}{D} \right) \sin^{2k}(\theta) \end{aligned}$$

En simplifiant par  $\frac{(a)_k (b)_k}{k! (c)_k} \sin^{2k}(\theta)$ , le terme général de la série de départ vaut donc

$$2n(2n+1) + \frac{1}{D} - 2(2n^2 + n) = 2n(2n+1) + \frac{1}{D} - 2n(2n+1) = \frac{1}{D},$$

donc on trouve bien  $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP_\nu(\cos \theta)}{d\theta} \right) = \frac{P_\nu(\cos \theta)}{D}$  comme souhaité.

### Calcul pour $f_{1,\nu}$

Posons  $f_{1,\nu} : x \mapsto F(a, b; c; x^2)$  avec  $a = \frac{1+\nu}{2}$ ,  $b = -\frac{\nu}{2}$  et  $c = \frac{1}{2}$ . On a alors les relations utiles suivantes :

$$\begin{aligned} ab &= \frac{ab}{2c} = \frac{1}{4D} \\ a + b &= \frac{1}{2} \\ (a+n)(b+n) &= ab + n(a+b) + n^2 = \frac{1}{4} \left( 2n(2n+1) + \frac{1}{D} \right) \\ c + n &= \frac{1}{2}(2n+1) \end{aligned}$$

On a

$$f_{1,\nu}(\cos \theta) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{\cos^{2n}(\theta)}{n!},$$

donc

$$\sin \theta \frac{df_{1,\nu}(\cos \theta)}{d\theta} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \left( \frac{-2n \sin^2(\theta) \cos^{2n-1}(\theta)}{n!} \right),$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{df_{1,\nu}(\cos \theta)}{d\theta} \right) &= \frac{-2}{\sin \theta} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} n \left( 2 \sin \theta \cos^{2n}(\theta) - (2n-1) \sin^3(\theta) \cos^{2(n-1)}(\theta) \right) \\ &= -2 \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} n \left( (2+2n-1) \cos^{2n}(\theta) - (2n-1) \cos^{2(n-1)}(\theta) \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} \left( -2n(2n+1) \cos^{2n}(\theta) + 2n(2(n-1)+1) \cos^{2(n-1)}(\theta) \right) \end{aligned}$$

De même que précédemment, on sépare les termes avec  $n - 1$  dans l'exposant du cosinus et on fait le changement d'indice  $k = n - 1$  pour obtenir, comme le premier terme est nul :

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} 2n(1 + 2(n - 1)) \cos^{2(n-1)}(\theta) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(a)_{k+1} (b)_{k+1}}{(k+1)! (c)_{k+1}} 2(k+1)(2k+1) \cos^{2k}(\theta) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(a)_k (b)_k}{k! (c)_k} \frac{\frac{1}{4}(2k(2k+1) + 1/D)}{\frac{1}{2}(2k+1)} \cdot 2(2k+1) \cos^{2k}(\theta) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(a)_k (b)_k}{k! (c)_k} \cos^{2k}(\theta) \cdot \left( 2k(2k+1) + \frac{1}{D} \right) \end{aligned}$$

et donc, dans la série d'origine, le terme général devient  $\left( \frac{1}{D} \right) \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{\cos^{2n}(\theta)}{n!}$  comme souhaité.

### Calcul pour $f_{2,\nu}$

Posons  $f_{2,\nu} : x \mapsto x \cdot F(a, b; c; x^2)$  avec  $a = \frac{1-\nu}{2}$ ,  $b = \frac{2+\nu}{2}$  et  $c = \frac{3}{2}$ . On a alors les relations utiles suivantes :

$$\begin{aligned} ab &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4D} \\ a + b &= c = \frac{3}{2} \\ \frac{(a+n)(b+n)}{c+n} &= \left( \frac{1}{2} \right) \frac{[2 + \frac{1}{D}] + 2n(2n+3)}{2n+3} \end{aligned}$$

On a

$$f_{2,\nu}(\cos \theta) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{\cos^{2n+1}(\theta)}{n!},$$

donc

$$\sin \theta \frac{df_{2,\nu}(\cos \theta)}{d\theta} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \left( \frac{-(2n+1) \sin^2(\theta) \cos^{2n}(\theta)}{n!} \right),$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{df_{2,\nu}(\cos \theta)}{d\theta} \right) &= - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} (2n+1) (-2n \sin^2(\theta) \cos^{2n-1}(\theta) + 2 \cos^{2n+1}(\theta)) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} (2n+1) (2n \cos^{2(n-1)+1}(\theta) - 2(n+1) \cos^{2n+1}(\theta)) \end{aligned}$$

On sépare comme avant les termes avec  $(n - 1)$  mis en évidence dans l'exposant du cosinus et on fait le changement d'indice  $k = n - 1$ , pour obtenir sachant que le terme pour  $n = 0$  est nul :

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} (n+1) 2n \cos^{2(n-1)+1}(\theta) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(a)_{k+1} (b)_{k+1}}{(k+1)! (c)_{k+1}} (2k+3) 2(k+1) \cos^{2k+1}(\theta) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(a)_k (b)_k}{k! (c)_k} \cos^{2k+1}(\theta) \cdot 2(2k+3) \left( \frac{1}{2} \right) \frac{[2 + \frac{1}{D}] + 2k(2k+3)}{2k+3} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(a)_k (b)_k}{k! (c)_k} \cos^{2k+1}(\theta) \cdot \left( \frac{1}{D} + [2 + 2k(2k+3)] \right) \end{aligned}$$

En remarquant que  $2(n+1)(2n+1) = 2 + 2n(2n+3)$ , le terme général dans l'autre partie de la série qu'on a laissé de côté s'écrit  $-\frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n} \cos^{2n+1}(\theta) \cdot (2 + 2n(2n+1))$ . Le terme général de la série d'origine est donc  $\left(\frac{1}{D}\right) \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n} \frac{\cos^{2n+1}(\theta)}{n!}$  comme souhaité.

## A.2 Calculs et démonstrations pour la stabilité des schémas

### Nécessité de la condition CFL ( $L_\infty$ )

Supposons que l'on n'ait pas la condition énoncée, donc  $(\Delta x)^2 < \frac{2D\Delta t}{\tau}$ .  
On a :

$$|\alpha_0| + |\beta_0| + |\gamma_0| \leq \max_{2 \leq i \leq m-1} (|\alpha_i| + |\beta_i| + |\gamma_i|) = |||A|||_\infty$$

Or :

$$\begin{aligned} (\Delta x)^2 < \frac{2D\Delta t}{\tau} &\Rightarrow \frac{2D}{\Delta x^2} > \frac{\tau}{\Delta t} \approx \frac{\tau - \Delta t}{\Delta t} \\ \Rightarrow \frac{\tau}{\Delta t} < \frac{2D}{\Delta x^2} + 1 &\Rightarrow 1 < \frac{\Delta t}{\tau} \left( \frac{2D}{\Delta x^2} + 1 \right) \Rightarrow \beta_0 < 0 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} |\alpha_0| + |\beta_0| + |\gamma_0| &= \frac{2D\Delta t}{\tau\Delta x^2} + \frac{\Delta t}{\tau} \left( 1 + \frac{2D}{\Delta x^2} \right) - 1 \\ &= \frac{\Delta t}{\tau} \left( \frac{4D}{\Delta x^2} + 1 \right) - 1 \end{aligned}$$

Mais on a :

$$\begin{aligned} (\Delta x)^2 < \frac{2D\Delta t}{\tau} &\approx \frac{2D\Delta t}{\tau - \frac{\Delta t}{2}} \\ &\Rightarrow \frac{4D}{\Delta x^2} > \frac{2\tau - \Delta t}{\Delta t} \\ &\Rightarrow \frac{4D}{\Delta x^2} + 1 > \frac{2\tau}{\Delta t} \\ &\Rightarrow \frac{\Delta t}{\tau} \left( \frac{4D}{\Delta x^2} + 1 \right) > 2 \\ &\Rightarrow \frac{\Delta t}{\tau} \left( \frac{4D}{\Delta x^2} + 1 \right) - 1 > 1 \end{aligned}$$

Ainsi,  $|||A|||_\infty > |\alpha_0| + |\beta_0| + |\gamma_0| > 1$  et donc la condition  $(\Delta x)^2 \geq \frac{2D\Delta t}{\tau}$  est nécessaire pour que  $|||A|||_\infty \leq 1$ .

### Injection de la solution sous la forme d'un mode de Fourier (Euler Implicite)

On injecte la solution discrète sous la forme d'un mode de Fourier :

$$\begin{aligned}
A(k)^n e^{2i\pi k x_{j+1}} \alpha_j + A(k)^n e^{2i\pi k x_j} \beta_j + A(k)^n e^{2i\pi k x_{j-1}} \gamma_j &= A(k)^{n-1} e^{2i\pi k x_j} \frac{\tau}{\Delta t} \\
\Rightarrow A(k) e^{2i\pi k \Delta x} \alpha_j + A(k) \beta_j + A(k) e^{-2i\pi k \Delta x} \gamma_j &= \frac{\tau}{\Delta t} \\
\Rightarrow A(k) \left( \frac{\tau}{\Delta t} + \frac{2D(1-x_j^2)}{\Delta x^2} (1 - \cos(2\pi k \Delta x)) + \frac{i2Dx_j}{\Delta x} \sin(2\pi k \Delta x) \right) &= \frac{\tau}{\Delta t} \\
\Rightarrow A(k) \left( \frac{\tau}{\Delta t} + \frac{4D(1-x_j^2)}{\Delta x^2} \sin^2(\pi k \Delta x) + \frac{i2Dx_j}{\Delta x} \sin(2\pi k \Delta x) \right) &= \frac{\tau}{\Delta t} \\
\Rightarrow A(k) &= \frac{1}{1 + \frac{4D(1-x_j^2)\Delta t}{\tau\Delta x^2} \sin^2(\pi k \Delta x) + i\frac{2x_j\Delta t D}{\Delta x\tau} \sin(2\pi k \Delta x)} \\
\Rightarrow A(k) &= \frac{1 + \frac{4D(1-x_j^2)\Delta t}{\tau\Delta x^2} \sin^2(\pi k \Delta x) - i\frac{2x_j\Delta t D}{\Delta x\tau} \sin(2\pi k \Delta x)}{\left(1 + \frac{4D(1-x_j^2)\Delta t}{\tau\Delta x^2} \sin^2(\pi k \Delta x)\right)^2 + \left(\frac{2x_j\Delta t D}{\Delta x\tau} \sin(2\pi k \Delta x)\right)^2} \\
\Rightarrow |A(k)| &= \frac{1 + \frac{4D(1-x_j^2)\Delta t}{\tau\Delta x^2} \sin^2(\pi k \Delta x)}{\left(1 + \frac{4D(1-x_j^2)\Delta t}{\tau\Delta x^2} \sin^2(\pi k \Delta x)\right)^2 + \left(\frac{2x_j\Delta t D}{\Delta x\tau} \sin(2\pi k \Delta x)\right)^2}
\end{aligned}$$

### Injection de la solution sous la forme d'un mode de Fourier (Euler Explicite)

On injecte la solution discrète sous la forme d'un mode de Fourier :

$$\begin{aligned}
A(k)^{n+1} e^{i2\pi k x_j} &= A(k)^n e^{i2\pi k x_{j+1}} \alpha_j + A(k)^n e^{i2\pi k x_j} \beta_j + A(k)^n e^{i2\pi k x_{j-1}} \gamma_j \\
\Rightarrow A(k) &= \alpha_j e^{i2\pi k \Delta x} + \beta_j + \gamma_j e^{-i2\pi k \Delta x} \\
&= \frac{D(1-x_j^2)\Delta t}{\tau\Delta x^2} (e^{i2\pi k \Delta x} + e^{-i2\pi k \Delta x} - 2) - \frac{2ix_j\Delta t D}{\Delta x\tau} \sin(2\pi k \Delta x) + 1 - \frac{\Delta t}{\tau} \\
&= \frac{-2D(1-x_j^2)\Delta t}{\tau\Delta x^2} (1 - \cos(\pi k \Delta x)) - \frac{2ix_j\Delta t D}{\Delta x\tau} \sin(2\pi k \Delta x) + 1 - \frac{\Delta t}{\tau} \\
&= \frac{-4D(1-x_j^2)\Delta t}{\tau\Delta x^2} \sin^2(\pi k \Delta x) - \frac{2ix_j\Delta t D}{\Delta x\tau} \sin(2\pi k \Delta x) + 1 - \frac{\Delta t}{\tau} \\
\Rightarrow |A(k)| &= \left| \frac{-4D(1-x_j^2)\Delta t}{\tau\Delta x^2} \sin^2(\pi k \Delta x) + 1 - \frac{\Delta t}{\tau} \right|
\end{aligned}$$

### Suffisance de la condition CFL ( $L_2$ )

On a clairement  $A(k) \leq 1$ , montrons que pour que  $A(k) \geq -1$  vérifier la condition CFL ( $(\Delta x)^2 \geq \frac{2D\Delta t}{\tau}$ ) est une condition suffisante pour vérifier la condition de Von Neumann :

$$\begin{aligned}
(\Delta x)^2 &\geq \frac{2D\Delta t}{\tau} \\
\Rightarrow (\Delta x)^2 &\geq \frac{2D(1-x_j^2)\Delta t}{\tau} \sin^2(\pi k \Delta x) \quad \text{car } 0 \leq 1-x_j^2, \sin^2(\pi k \Delta x) \leq 1 \\
\Rightarrow \frac{\tau - \frac{1}{2}\Delta t}{\Delta t} &\approx \frac{\tau}{\Delta t} \geq \frac{2D(1-x_j^2)}{\Delta x^2} \sin^2(\pi k \Delta x) \\
\Rightarrow \frac{2\tau}{\Delta t} - 1 &\geq \frac{4D(1-x_j^2)}{\Delta x^2} \sin^2(\pi k \Delta x) \\
\Rightarrow 2 &\geq \frac{\Delta t}{\tau} \left( \frac{4D(1-x_j^2)}{\Delta x^2} \sin^2(\pi k \Delta x) + 1 \right) \\
\Rightarrow -2 &\leq -\frac{\Delta t}{\tau} \frac{4D(1-x_j^2)}{\Delta x^2} \sin^2(\pi k \Delta x) - \frac{\Delta t}{\tau} \\
\Rightarrow -1 &\leq A(k)
\end{aligned}$$

Ainsi, la condition CFL est suffisante pour vérifier la condition de Von Neumann.

## B Programmes Python

Les programmes développés pour ce projet sont tous disponibles sur [GitHub](#).