

---

# ÉTUDE DES CHOCS ÉLASTIQUES ENTRE DEUX BOULES DE BILLARD ET UN MUR

---

SOFIANE AÏSSANI, SALMA ETTAHRI, THÉO GODEFROY, JULES MICHAUD, THOMAS  
VERRECCHIA

**Sous l'encadrement de :** FRANCK WIELONSKY

## Résumé

Ce rapport est le compte rendu d'un projet effectué en deuxième année de Licence. Il porte sur l'étude des chocs élastiques entre deux boules de billard et un mur. Après avoir mené une étude purement mécanique de cette expérience de pensée, on remarque qu'en se plaçant dans des conditions particulières on peut relier le nombre de chocs à l'une des constantes les plus importantes de l'histoire des sciences. Cette corrélation surprenante entre un problème physique et une constante mathématique a fait l'objet de notre travail. La démonstration de cette corrélation est aussi une occasion de s'intéresser à différentes modélisations et représentations informatiques du problème ainsi qu'aux propriétés de cette fameuse constante.

**Mots-clés :** Choc élastique, billard, géométrie, représentation informatique,  $\pi$ .

**Licence 2 - Mathématiques, Physique, Chimie, Informatique**

Semestre 3 - 2019/2020

## Remerciements

Nous tenons dans un premier temps à remercier M. Franck Wielonsky, notre encadrant, pour nous avoir donné l'opportunité de réaliser ce projet. En plus de nous avoir consacré beaucoup de son temps, il a su nous mettre en confiance et nous motiver tout au long de ces trois mois. Il a toujours été à l'écoute et en mesure d'apporter des réponses à nos questionnements.

Nous tenons aussi à remercier M. Philippe Marsal qui nous a accompagné tout au long du projet. Grâce à un bilan régulier sur notre travail, il a pu nous orienter dans notre progression.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Problème dynamique et chocs élastiques</b>	<b>4</b>
1.1	Une droite et deux boules de billard . . . . .	4
1.2	Collisions sur une demi-droite limitée par un mur . . . . .	7
1.3	Étude géométrique . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Représentation graphique et calcul du nombre <math>\pi</math></b>	<b>16</b>
2.1	Première représentation . . . . .	16
2.2	Seconde représentation . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Étude des propriétés de <math>\pi</math></b>	<b>20</b>
3.1	Irrationalité . . . . .	20
3.2	Propriétés d'Arctan . . . . .	23
<b>A</b>	<b>Algorithme de représentation de la trajectoire de <math>P</math> dans le billard de forme <math>S</math></b>	<b>27</b>
<b>B</b>	<b>Algorithme de représentation de la trajectoire des boules en fonction du temps</b>	<b>29</b>

## Introduction

Le but de ce projet est de faire l'étude d'un problème de mécanique : le nombre de collisions entre deux boules de billard sur une demi-droite horizontale délimitée par un mur. Il s'agit d'un problème simple, compréhensible par toute personne ayant étudié la mécanique du point, mais qui cache en lui un lien direct avec un nombre qui a fasciné les savants de l'Antiquité et fascine encore aujourd'hui : le nombre  $\pi$ .

Officiellement nommé ainsi par Leonhard Euler en 1748, ce nombre défini par le rapport constant entre la circonférence d'un cercle et son diamètre fut étudié par de nombreuses civilisations, notamment les civilisations babylonienne et égyptienne il y a près de 4000 ans. Il arrive souvent qu'il apparaisse dans des problèmes mathématiques qui semblent a priori n'avoir aucun lien avec la circonférence du cercle, comme par exemple la fréquence d'apparition de paires d'entiers naturels premiers entre eux. Parmi ces liens surprenants entre la géométrie et les autres domaines des mathématiques, figure notre problème de mécanique.

Nous nous proposons de résoudre la question du nombre de collisions par une approche géométrique que nous illustrerons grâce à des programmes informatiques. Ensuite, nous mettrons en évidence le lien entre  $\pi$  et le nombre de chocs. Pour finir, nous démontrerons certaines propriétés de  $\pi$ , comme son irrationalité.

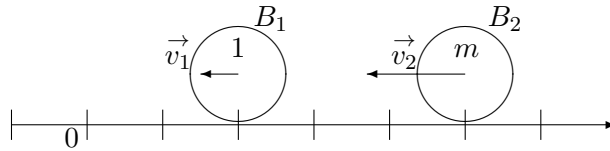
# 1 Problème dynamique et chocs élastiques

Comme nous l'avons annoncé en introduction, notre but premier est de déterminer le nombre de chocs entre deux boules sur une demi-droite horizontale délimitée par un mur. Nous allons d'abord préciser les données initiales du problème, puis nous ramener à un cas plus simple à traiter.

## 1.1 Une droite et deux boules de billard

Avant de considérer le problème dans son intégralité, nous allons étudier un choc supposé élastique entre deux boules de billard  $B_1$  et  $B_2$  sur une droite horizontale qui n'est pas limitée par un mur. Tout au long de la résolution, nous supposerons les boules ponctuelles.

On considère donc deux boules se déplaçant sur une droite orientée positivement vers la droite.  $B_1$  est de masse 1 et de vitesse  $v_1 \in \mathbb{R}$ .  $B_2$ , à droite de  $B_1$ , est de masse  $m > 0$  et de vitesse  $v_2 \in \mathbb{R}$ .



On note  $v'_1$  et  $v'_2$  les vitesses après le choc. Nous allons déterminer ces vitesses en utilisant la conservation des grandeurs physiques adaptées. Dans le cadre d'un choc élastique, on a conservation de la quantité de mouvement totale du système :

$$a = v_1 + mv_2 = v'_1 + mv'_2 \quad (1)$$

De même, l'énergie cinétique est conservée :

$$b = v_1^2 + mv_2^2 = v_1'^2 + mv_2'^2 \quad (2)$$

Dans un premier temps, avant de calculer  $v'_1$  et  $v'_2$ , il est utile de représenter graphiquement la situation pour la rendre plus claire. Les équations 1 et 2 peuvent être facilement visualisées dans un repère bien choisi.

En effet, on peut réécrire ces équations pour trouver une représentation graphique à l'évolution du système. On a d'après 2 :

$$1 = \frac{v_1^2}{b} + \frac{mv_2^2}{b} = \left(\frac{v_1}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{m}{b}}v_2\right)^2 = \left(\frac{v_1}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{mv_2}{\sqrt{mb}}\right)^2$$

Et d'après 1 :

$$mv_2 = a - v_1$$

Si on pose le système suivant :

$$\begin{cases} 1 = \left(\frac{x}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{bm}}\right)^2 \\ y = a - x \end{cases} \quad (3)$$

Les points  $(v_1, mv_2)$  et  $(v'_1, mv'_2)$  sont des solutions de ce nouveau système d'équations. Ces deux équations étant écrites sous leurs formes respectives d'équations d'une ellipse et d'une droite, nous sommes désormais capables de visualiser ce que représentent  $(v_1, mv_2)$  et  $(v'_1, mv'_2)$  : ce sont des points d'intersection entre l'ellipse et la droite descriptives des deux conservations physiques ! Pour mieux voir ce que représentent ces équations et leurs solutions, on peut tracer sur un même graphique la droite et l'ellipse.

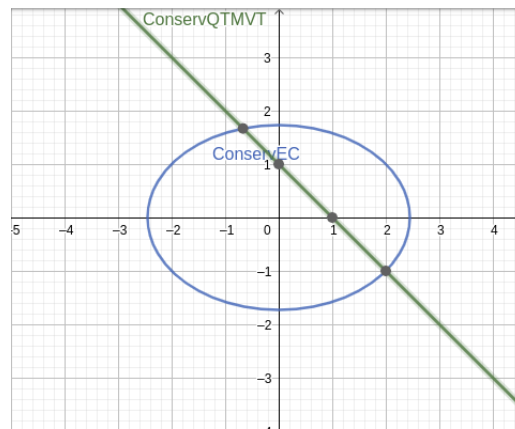


FIGURE 1 – Représentation graphique des états possibles du système pour  $m = \frac{1}{2}$ ,  $a = 1$  et  $b = 6$ .

On observe seulement deux points d'intersection entre les deux courbes sur la figure 1. Comme  $(v_1, mv_2)$  et  $(v'_1, mv'_2)$  sont différents (sinon cela contredirait le fait qu'il y ait eu un choc), on peut donc affirmer que ces deux points d'intersection représentent  $(v_1, mv_2)$  et  $(v'_1, mv'_2)$ , c'est-à-dire les deux seuls états possibles pour le système, avant puis après le choc. Ici par exemple, on a lancé les boules l'une contre l'autre avec une vitesse  $v_2 = -2$  et une masse  $m = 1/2$  pour la boule 2, contre une vitesse  $v_1 = 2$  et une masse 1 pour la boule 1. Le point d'intersection du bas représente cet état initial. Donc l'autre point d'intersection, celui du haut, représente l'état final du système. On en déduit qu'après le choc, la boule 1 a pour vitesse  $-2/3$ , et la boule 2 repart en arrière avec une vitesse  $10/3$ .

Maintenant que nous avons visualisé graphiquement les états initial et final du système, nous pouvons faire un calcul exact des vitesses  $v'_1$  et  $v'_2$  des deux boules après le choc en fonction des caractéristiques du système avant le choc, à savoir  $m$ ,  $v_1$  et  $v_2$ . Pour ce faire, on part des équations données par la conservation de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement et on résout le système.

On a :

$$\begin{cases} v'_1 + mv'_2 = v_1 + mv_2 \\ v'^2_1 + mv'^2_2 = v^2_1 + mv^2_2 \end{cases} \quad (4)$$

Donc :

$$\begin{cases} v'_1 - v_1 = m(v_2 - v'_2) \\ v'^2_1 - v^2_1 = m(v^2_2 - v'^2_2) \end{cases}$$

En divisant la deuxième ligne par la première (non nulle) :

$$\begin{cases} v'_1 - v_1 = m(v_2 - v'_2) \\ v'_1 + v_1 = v_2 + v'_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2v'_1 = (m+1)v_2 + (1-m)v'_2 \\ v'_1 + v_1 = v'_2 + v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1+m)v'_1 = 2mv_2 + (1-m)v'_2 \\ v'_2 = v'_1 + v_1 - v_2 \end{cases}$$

Finalement :

$$\begin{cases} v'_1 = \frac{2mv_2 + (1-m)v_1}{m+1} \\ v'_2 = \frac{2mv_1 + (m-1)v_2}{m+1} \end{cases} \quad (5)$$

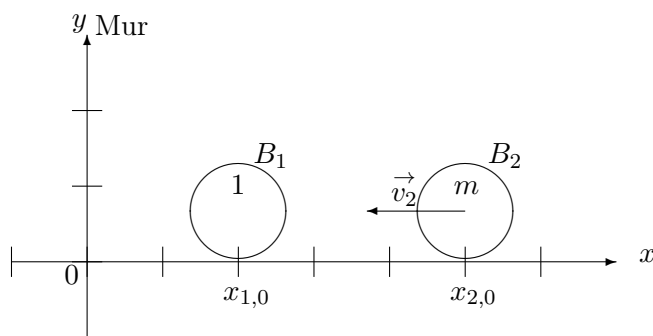
On obtient bien deux équations qui décrivent les vitesses des deux boules après leur choc en fonction des vitesses avant le choc et de la masse. Ces équations nous donnent toute l'information nécessaire à l'étude du mouvement des boules puisqu'il est très facile de retrouver la trajectoire de ces dernières à partir de leurs vitesses. Cependant, comme nous allons le voir, l'étude du nombre total de collisions dans le problème initial (avec un mur vertical en  $x = 0$ ) nécessite d'autres méthodes et raisonnements pour être menée à bien.

## 1.2 Collisions sur une demi-droite limitée par un mur

On considère toujours deux boules  $B_1$  et  $B_2$  se déplaçant sur la demi-droite positive, orientée comme précédemment vers la droite. Mais on suppose maintenant qu'il y a un mur en l'origine de sorte que les boules restent toujours à droite de cette origine.

À l'instant initial, la première boule est désormais à l'arrêt, en position  $x_{1,0} > 0$ . On note  $x_1 := x_1(t)$ , sa position au cours du temps et  $v_1 = x'_1(t)$ , sa vitesse.

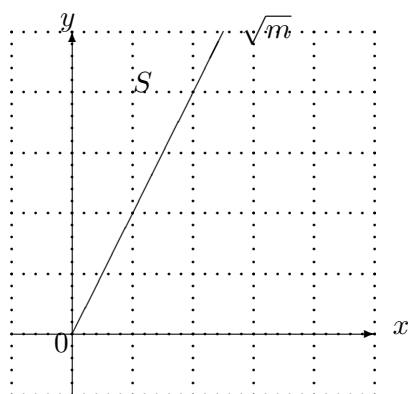
On a également pour la boule de droite  $x_2 := x_2(t) \geq x_1(t)$ , sa position au cours du temps, et  $v_2 := x'_2(t)$  sa vitesse. Au début, on a donc  $x_2 = x_{2,0} > x_{1,0}$ ,  $v_1 = 0$  et  $v_2 < 0$  :



Nous allons utiliser la géométrie pour faire la preuve du nombre de collisions total, c'est-à-dire la somme du nombre de collisions entre les boules, et du nombre de collisions entre la boule de gauche et le mur. Pour la suite, on notera  $P = P(t)$  le point de coordonnées :

$$P = (x_1, \sqrt{m}x_2).$$

On cherche à déterminer à quelle zone  $S$  du plan  $\mathbb{R}^2$  le point  $P$  se limite. Les boules étant toujours à droite de l'origine on sait déjà que les coordonnées du point  $P$  resteront toujours positives. De plus on a  $x_1 \leq x_2$  à tout instant donc  $\sqrt{m}x_1 \leq \sqrt{m}x_2$ . En posant  $y = \sqrt{m}x_2$ , on trouve  $y \geq \sqrt{m}x_1$ . Donc le point  $P$  se trouve à la fois dans le premier quadrant et au-dessus de la droite de coefficient directeur  $\sqrt{m}$  passant par l'origine.





Pour la suite on notera  $\vec{P}'$  le vecteur

$$\vec{P}' = (v_1, \sqrt{m}v_2),$$

dont les coordonnées sont les dérivées des coordonnées du point  $P$ .

### 1.2.1 Choc entre les deux boules

Dans le but de déterminer des quantités concernant le vecteur  $\vec{P}'$  qui sont conservées lors d'un choc entre les 2 boules, on rappelle les lois de la physique régissant les chocs élastiques :

$$a = v_1 + mv_2, \quad (6)$$

$$b = v_1^2 + mv_2^2, \quad (7)$$

(à la constante 1/2 près).

L'objectif est de traduire les équations 6 et 7, qui sont des conservations physiques, en équations de conservation de grandeurs géométriques dans notre nouveau repère bien choisi. Ainsi, on pourra s'appuyer sur tous les principes et théorèmes de la géométrie pour les appliquer à notre problème. Notons pour plus de clarté,  $\vec{P}' = (p_1, p_2)$ , c'est-à-dire que  $p_1 = v_1$  et  $p_2 = \sqrt{m}v_2$ . L'équation 7 nous donne :

$$p_1^2 + p_2^2 = b = \text{constante}$$

Cela nous indique que la norme  $\|\vec{P}'\|$  est conservée. On a donc traduit la conservation de l'énergie cinétique en des termes géométriques : la norme du vecteur vitesse est conservée.

D'autre part, l'équation 6 nous donne que :

$$1 * p_1 + \sqrt{m} * p_2 = a = \text{constante}$$

C'est-à-dire  $\vec{P}' \cdot (1, \sqrt{m}) = a$ , une constante. On pose  $\vec{d} := (1, \sqrt{m})$  et puisque  $\|\vec{P}'\|$  et  $\|\vec{d}\|$  sont constants, on en déduit que  $\cos(\vec{P}', \vec{d})$  est une constante car :

$$\cos(\vec{P}', \vec{d}) = \frac{a}{\|\vec{P}'\| \|\vec{d}\|}$$

On a donc traduit les deux équations de conservations physiques en deux nouvelles équations de conservations géométriques. Ces conservations nous donnent des informations sur la façon dont  $\vec{P}'$  est modifié au cours d'un choc entre les deux boules. On va maintenant essayer d'en déduire le comportement de  $P$  dans la zone  $S$ .

Avant toute chose, par définition de  $P$  et du domaine  $S$ , on peut énoncer la proposition suivante :

**Proposition 1.1.** *Il y a un choc entre les deux boules  $\iff P$  est sur la droite de pente  $\sqrt{m}$  passant par l'origine.*

Cela revient à dire que  $x_1 = x_2$ . On sait d'après nos nouvelles équations que le vecteur  $\vec{P}'$  va garder une norme constante. On sait également que  $\cos(\vec{P}', \vec{d})$  est constant. Il y a donc deux possibilités pour l'angle  $\widehat{\vec{P}', \vec{d}}$  :

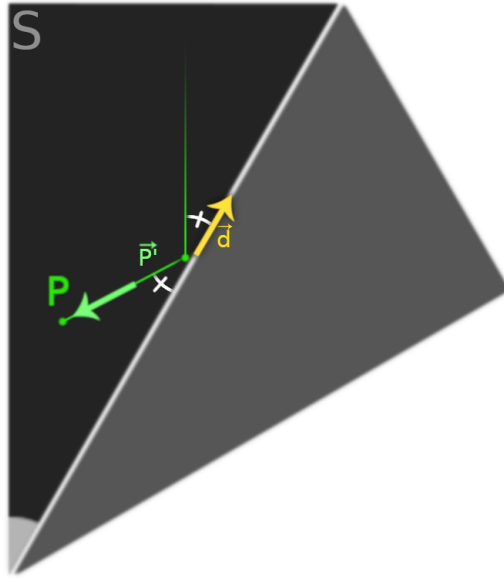


FIGURE 2 – Réflexion de  $P$  sur la droite dirigée par  $\vec{d}$

— Soit il reste constant.

— Soit il change de signe puisque, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\cos(-x) = \cos(x)$ .

Mais si l'angle restait constant, alors le vecteur  $\vec{P}'$  ne serait pas modifié, ce qui contredirait le fait qu'il y ait un choc entre les deux boules. On aurait de plus que le point  $P$  sortirait de la zone  $S$  puisque son vecteur vitesse continuerait de pointer vers l'extérieur.

L'angle  $\widehat{\vec{P}', \vec{d}}$  change donc de signe au cours du choc.  $\vec{d}$  étant un vecteur directeur de la droite de pente  $\sqrt{m}$  délimitant la zone  $S$ , on a en fait une réflexion sur cette droite, selon la loi de Descartes, que nous avons illustrée sur la figure 2.

### 1.2.2 Choc entre la boule $B_1$ et le mur

On s'intéresse maintenant à la façon dont est modifié  $\vec{P}'$  lors d'un choc entre la boule  $B_1$  et le mur. Ce choc survient lorsque  $x_1 = 0$ , d'où on peut tirer la proposition suivante :

**Proposition 1.2.** *Il y a un choc entre la boule  $B_1$  et le mur  $\iff P$  est sur l'axe vertical des ordonnées.*

De manière analogue, l'équation 7 nous donne :

$$p_1^2 + p_2^2 = b = \text{constante}$$

Cela dit que  $\|\vec{P}'\|$  est toujours conservée, ce qui est cohérent puisqu'aucune forme d'énergie n'est fournie au système. Par contre, la quantité de mouvement n'est plus conservée car il y a une action du mur sur  $B_1$ . D'autre part,  $B_2$  étant à droite de  $B_1$ , elle ne subit aucun choc et garde donc sa vitesse constante au cours du choc. Donc finalement, la deuxième grandeur

conservée n'est plus la quantité de mouvement totale, mais la vitesse  $v_2$ .

On a donc que :

$$0 * p_1 + 1 * p_2 = a' = \text{constante}$$

C'est-à-dire que dans notre repère,

$$\vec{P}' \cdot (0, 1) = a' = \text{constante}$$

On peut définir pour plus de clarté  $\vec{e} := (0, 1)$ . Puisque  $\|\vec{P}'\|$  et  $\|\vec{e}\|$  sont constants, on en déduit grâce à la formule du produit scalaire que  $\cos(\vec{P}', \vec{e})$  est constant :

$$\cos(\vec{P}', \vec{e}) = \frac{a'}{\|\vec{P}'\| \|\vec{e}\|}$$

Comme avant, l'angle  $\widehat{\vec{P}', \vec{e}}$  ne peut rester constant car cela contredirait le fait qu'il y ait un choc. L'angle  $\widehat{\vec{P}', \vec{e}}$  change donc de signe au cours du choc.

Ainsi, lors d'un choc entre la boule  $B_1$  et le mur, le point  $P$  est réfléchi sur l'axe des ordonnées avec un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence.

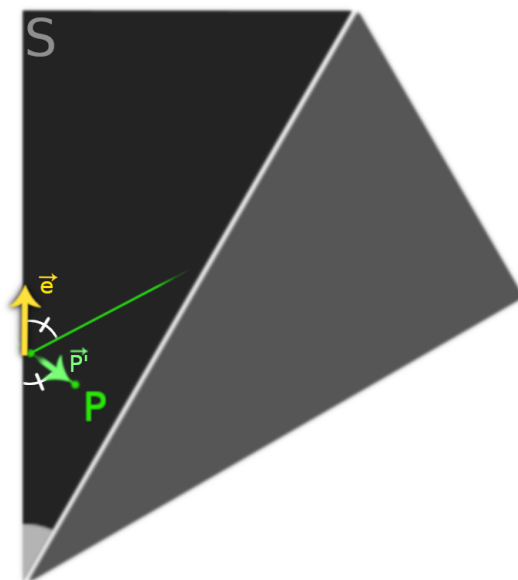


FIGURE 3 – Réflexion de  $P$  sur la droite dirigée par  $\vec{e}$

Finalement, lors d'un choc entre  $P$  et l'une des deux droites délimitant le secteur  $S$ ,  $P$  est réfléchi et l'angle de réflexion est l'opposé de l'angle d'incidence. On peut donc assimiler la trajectoire de  $P$  à celle d'une boule sur un billard de forme  $S$ , ou celle d'un rayon lumineux entre deux miroirs. Il s'agit d'un résultat important, car le problème initial a été complètement changé en un nouveau problème géométrique plus simple à traiter : désormais, au lieu de compter le nombre de collisions entre 2 boules et un mur, nous comptons le nombre de collisions d'un seul point sur les parois d'un billard.

### 1.3 Étude géométrique

Même si le problème est désormais simplifié, nous ne l'avons pas encore résolu. Nous allons nous servir de considérations de symétrie pour le résoudre. Nous avons montré que la conservation du cosinus de l'angle  $\widehat{\vec{P}', \vec{d}}$  implique que  $P$  est réfléchi sur la droite de pente  $\sqrt{m}$  avec un angle de réflexion égal à son angle d'incidence. En effet, physiquement, lorsque  $P$  arrive verticalement sur cette droite, il ne peut continuer sa trajectoire en ligne droite car cela le ferait sortir du domaine  $S$  défini précédemment, en d'autres mots ça reviendrait à dire que  $B_1$  saute par dessus  $B_2$ .

D'après les propositions 1.1 et 1.2, le nombre total de chocs correspond au nombre total d'intersections entre  $P$  et les deux parois du domaine  $S$ . Comme l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence, si à chaque choc on représente la trajectoire de  $P$  dans le domaine symétrique de  $S$  par rapport à la paroi ayant subi le choc, on a par égalité des angles symétriques, que  $P$  continue en ligne droite dans le domaine symétrique, comme sur la figure 4.

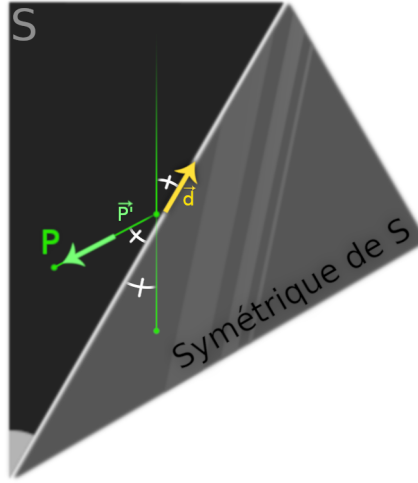


FIGURE 4 – Représentation de la trajectoire de  $P$  lorsqu'on considère le domaine symétrique de  $S$  par rapport à la droite de collision.

Après le choc, le point symétrique de  $P$ , dans le domaine symétrique de  $S$ , suit une trajectoire qui est la prolongation en ligne droite de la trajectoire initiale. La trajectoire de  $P$  est une ligne verticale car elle démarre verticale puis, à chaque fois que  $P$  rencontre une paroi, on fait poursuivre  $P$  en ligne droite dans le domaine symétrique, comme illustré sur les figures 4 et 5. Au final, le problème revient à compter le nombre d'intersections entre la droite verticale dirigée par  $\vec{P}'$  et les droites successives délimitant les domaines dépliés de  $S$  (figure 5).

On nomme  $\alpha$  l'angle entre  $\vec{e}$  et  $\vec{d}$ . On a

$$\tan(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{m}}$$

Le nombre de collisions correspond au nombre de fois que la section  $S$  peut se placer dans la moitié droite du plan, c'est-à-dire le nombre de fois que l'angle  $\alpha$  peut rentrer dans  $\pi$ .

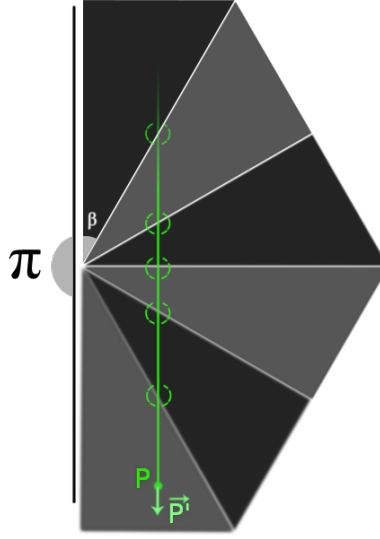


FIGURE 5 – Représentation des domaines symétriques successifs de  $S$  au fur et à mesure que  $P$  rencontre des parois.  $P$  est lancé verticalement vers le bas. Le domaine  $S$  est défini par son angle  $\alpha = \pi/6$ . Il y a 5 chocs car  $P$  rencontre 5 parois au cours de son mouvement.

**Proposition 1.3.** Notons  $C$  le nombre de collision, on a alors la relation :

$$C = \begin{cases} E\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) - 1 & \text{si } \alpha = \pi/k, \quad k \in \mathbb{N}^* \\ E\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

*Démonstration.* En se référant aux figures 4 et 5 plus haut, nous pouvons déduire que le nombre de collisions est le nombre de fois que l'on peut ajouter l'angle  $\alpha$  jusqu'à atteindre ou dépasser  $\pi$  : il s'agit donc de la partie entière de  $\pi/\alpha$ .  $\square$

**N.B.** On ne considérera jamais le cas où  $\alpha$  pourra s'écrire comme une fraction de  $\pi$ . En effet, tant que  $\sqrt{m}$  sera un nombre rationnel différent de 1 (dans notre cas, il le sera toujours),  $\alpha$  ne sera pas une fraction de  $\pi$ . On pourra se référer au théorème 3.1 qui démontre cette propriété.

Finalement, le nombre de chocs s'exprime  $C = E\left(\frac{\pi}{\arctan(\frac{1}{\sqrt{m}})}\right)$  à une unité près.

Pour simplifier cette expression et faire apparaître son éventuelle signification physique, on aimerait faire l'approximation  $\arctan(x) \approx x$  pour  $x$  petit. On aurait alors  $C = E(\pi\sqrt{m})$  pour  $m$  grand. Nous allons vérifier la validité de cette simplification.

Si cette simplification est valide, alors on pourra remarquer quelque chose de très important : pour une masse  $m$  égale à  $10^{2n}$  avec  $n \in \mathbb{N}$ , c'est-à-dire une puissance de 100, on a un nombre de collisions égal à  $E(10^n\pi)$ , qui est exactement l'entier composé des  $n$  premières décimales de

$\pi$  !

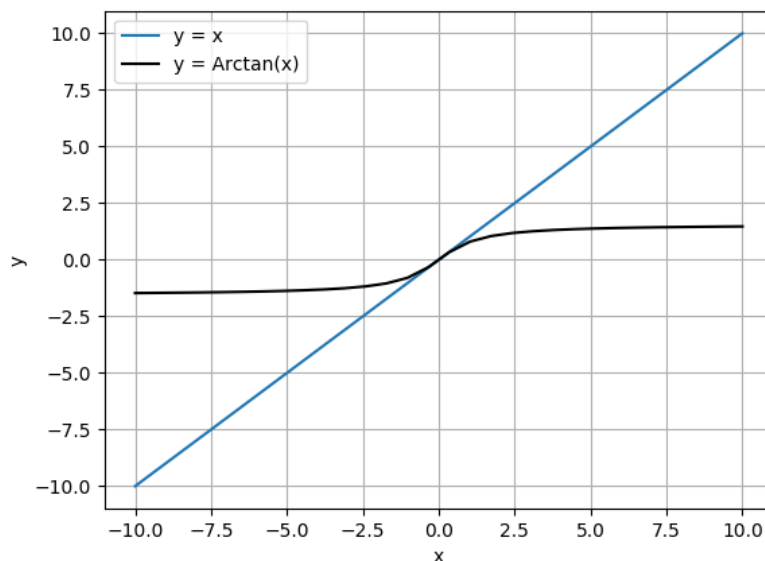


FIGURE 6 – Graphique de la fonction  $y = \arctan(x)$  avec la courbe  $y = x$

**Lemme 1.** On a pour tout  $x > 0$  :

$$0 < \frac{1}{\arctan x} - \frac{1}{x} < x$$

*Démonstration.* On souhaite démontrer que pour tout  $x > 0$ , on a :

$$0 < \frac{1}{\arctan x} - \frac{1}{x} < x$$

Étudions d'abord la première partie de l'inégalité, qui affirme que :

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{\arctan x} - \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x} &< \frac{1}{\arctan x} \end{aligned}$$

On peut ensuite multiplier par  $x$  et  $\arctan x$ , car on a supposé  $x > 0$  et pour  $x > 0$ , on a toujours  $\arctan x > 0$  (comme nous l'assure le graphe ci-dessus ou  $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} > 0$  et  $\arctan 0 = 0$ ). Donc il suffit de montrer :

$$\arctan x < x$$

Pour cela on considère l'application :  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et telle que pour tout  $x > 0$   $g(x) = \arctan x - x$ .

**N.B.** On peut se rendre compte que  $g(x) < 0$  graphiquement, en se référant à la figure 6.

On a alors  $g'(x) = \frac{-x^2}{1+x^2}$ . Et pour tout  $x > 0$ , on a  $1+x^2 > 1$  et  $-x^2 < 0$ , donc  $g'(x) < 0$ . De plus,  $g(0) = 0$ , donc  $g(x) < 0 \quad \forall x > 0$ , c'est-à-dire  $\arctan x < x$ . Donc la première partie de l'inégalité est montrée :

$$0 < \frac{1}{\arctan x} - \frac{1}{x}$$

On considère maintenant l'application  $f$ , tel que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , telle que  $f(x) = (1+x^2)\arctan x - x$ . On étudie alors la seconde partie de l'inégalité, on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\arctan x} - \frac{1}{x} &< x \\ \frac{1}{\arctan x} &< x + \frac{1}{x} \\ \frac{1}{\arctan x} &< \frac{x^2+1}{x} \\ x &< (x^2+1)\arctan x \\ f(x) &> 0 \end{aligned}$$

Démontrer cette équation revient pareillement qu'auparavant, à montrer que pour tout  $x > 0$ , on a  $f(x) > 0$ .

En étudiant sa dérivée, on a que  $f'(x) = 2x \arctan x > 0$ , pour  $x > 0$ . De plus  $f(0) = 0$ .

Nous avons donc bien montré que pour tout  $x > 0$ , l'inégalité suivante est vérifiée :

$$0 < \frac{1}{\arctan x} - \frac{1}{x} < x$$

□

**Proposition 1.4.** On pose  $C_n$ , le nombre de collisions pour une masse  $m = 10^{2n}$ . On a l'égalité suivante :

$$C_n = E(\pi 10^n) \quad \text{ou} \quad C_n = E(\pi 10^n) + 1$$

*Démonstration.* Rappelons que  $C_n = E\left(\frac{\pi}{\arctan(10^{-n})}\right)$ . Prenons le lemme 1 et multiplions l'inégalité par la constante  $\pi$ , en prenant  $x = \frac{1}{\sqrt{m}}$ , avec  $m = 10^{2n}$ . On obtient l'inégalité suivante :

$$0 < \frac{\pi}{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)} - \frac{\pi}{\frac{1}{\sqrt{m}}} < \frac{1}{\sqrt{m}}$$

Ou encore,

$$0 < \frac{\pi}{\arctan(10^{-n})} - \pi 10^n < 10^{-n}$$

Comme on a supposé que  $m = 10^{2n}$ , avec  $n \in \mathbb{N}$  on a que  $\frac{1}{\sqrt{m}}$  devient de plus en plus petit, car  $m$  prend des valeurs de plus en plus grandes. Lorsque  $n = 0$ , on a  $\frac{1}{\sqrt{m}} = 1$ . On a ainsi dans le pire des cas :

$$0 < \frac{\pi}{\arctan(10^{-n})} - \pi 10^n < 1$$

Également, si on a deux nombres  $x$  et  $y$  tels que :

$$0 < x - y < 1$$

On a alors :

$$E(x) = E(y) \quad \text{ou} \quad E(x) = E(y) + 1$$

Donc  $E\left(\frac{\pi}{\arctan(10^{-n})}\right) = E(\pi 10^n)$  ou  $E\left(\frac{\pi}{\arctan(10^{-n})}\right) = E(\pi 10^n) + 1$ .

Ceci prouve la proposition.  $\square$

La valeur de  $m = 10^{2n}$  est choisie dans le but de bien obtenir les décimales de  $\pi$ . En effet, l'intérêt de cette proposition est la suivante : pour avoir un grand nombre de décimales de  $\pi$ , il suffit d'augmenter la valeur de  $n$ , ou de manière équivalente la masse  $m$ .

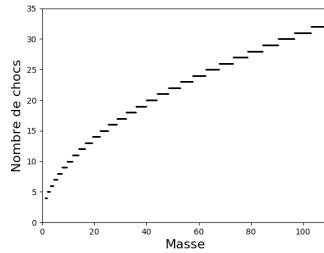


FIGURE 7 – Représentation graphique de la fonction  $f(m) = E\left(\frac{\pi}{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)}\right)$

On a donc montré que le nombre de collisions ne nous donne pas toujours exactement les décimales de  $\pi$ , puisqu'il est parfois décalé de 1 par rapport à  $E(\pi 10^n)$ . Mais lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , malgré que la ou les dernières décimales puissent être erronées, on obtient forcément toutes les décimales, car  $\pi$  ne peut contenir une séquence infinie de "9" dans ses décimales vu qu'il est irrationnel. On pourra se référer à la preuve 3.1.



## 2 Représentation graphique et calcul du nombre $\pi$

Maintenant que nous avons établi la relation entre le nombre de chocs et les décimales de  $\pi$ , nous avons tenté de donner différentes représentations graphiques du problème grâce au développement d'algorithmes. Dans un premier temps, nous avons codé un algorithme Python représentant la situation étudiée dans la partie 1.2. Nous avons ensuite codé un second algorithme en Scilab permettant de représenter les positions des deux boules en fonction du temps.

### 2.1 Première représentation

Le programme correspondant est disponible en annexe (cf A).

#### 2.1.1 Fonctionnement

On cherche ici à créer un programme qui permet, pour une masse  $m$  donnée, d'afficher le graphique de la situation de la partie 1.2. On va pour cela travailler sur les différents coefficients directeurs des droites associées à chaque segment après chaque choc. On commence par introduire l'angle  $\theta$ , angle entre l'axe des abscisses et la droite d'équation  $y = \sqrt{m}x$ , avec  $m$  la masse de la boule  $B_2$ .

On cherche alors à définir une suite de coefficients directeurs  $(a_i)_{i \in I}$  avec  $I = \{0, 1, \dots, n\}$  et  $n$  le nombre de chocs. Pour cela on doit donner les termes initiaux de cette suite ainsi que sa définition par récurrence.

Pour les termes initiaux on commence par  $a_0$ . On définit  $x_1(0)$  et  $x_2(0)$  les positions respectives des boules  $B_1$  et  $B_2$  à l'instant  $t = 0$ . Avant le premier choc  $B_1$  est immobile ce qui implique :

$$x_1(t) = \text{constante}$$

L'équation de la droite associée au premier segment est  $x = x_1(0)$ , on n'a donc pas de coefficient directeur pour ce segment, on pose  $a_0 = \text{None}$ .

Pour  $a_1$ , on utilise l'équation 6 soit la conservation du cosinus de l'angle après le choc, on trouve que,  $a_1 = \tan(2\theta - \frac{\pi}{2})$ .

Il nous reste alors à déterminer la relation de récurrence. On se sert une fois encore de la conservation du cosinus de l'angle lors du choc et en raisonnant sur les angles, on trouve :

$$a_{i+1} = \begin{cases} -a_i & \text{si } i \text{ est impair} \\ \tan(2\theta - \arctan(a_i)) & \text{si } i \text{ est pair} \end{cases} \quad (8)$$

On définit donc notre suite  $(a_i)_{i \in I}$  par récurrence, il reste un problème si  $i$  est pair et  $a_i = \tan(2\theta - \frac{\pi}{2})$ . En effet  $a_{i+1}$  ne sera pas défini : il s'agit du cas où on a un segment perpendiculaire à l'axe des abscisses. Donc on pose  $a_{i+1} = a_n = \text{None}$  et de cette manière, on a le dernier élément de la suite.

Il existe une autre condition pour être le dernier élément de la suite qui est :

$$a_i \geq \sqrt{m}$$

Alors,

$$a_i = a_n$$

On a donc la suite des coefficients directeurs de l'ensemble des segments à représenter sur le

graphique.

L'objectif maintenant est de tracer l'ensemble des segments dont on a obtenu les coefficients directeurs. Les segments se représentent alors par des fonctions affines,  $y = a_i x + b_i$ , définies entre 0 et une valeur  $x_{p_i}$ . Cette valeur  $x_{p_i}$  vient du point de coordonnées  $(x_{p_i}, y_{p_i})$  qui est le point d'intersection entre les droites  $y = \sqrt{m}x$  et  $y = a_i x + b_i$ .

Il nous reste donc à déterminer les valeurs  $x_{p_i}$  et  $b_i$  pour  $i \in I$ , on a :

$$y_{p_i} = \sqrt{m}x_{p_i} = a_i x_{p_i} + b_i \iff x_{p_i}(\sqrt{m} - a_i) = b_i \quad (9)$$

On obtient encore une fois une définition de ces valeurs par récurrence. En effet, on a  $x_{p_0} = x_1(0)$  comme expliqué au début ; cela vient du fait que  $B_1$  est immobile avant le premier choc. On en déduit aussi que  $b_0$  n'est pas défini. On peut ensuite trouver la relation de récurrence sur les couples  $(x_{p_i}, b_i)$  :

$$(x_{p_i}, b_i) = \begin{cases} (x_{p_{i-1}}, x_{p_{i-1}}(\sqrt{m} - a_i)) & \text{si } i \text{ est impair} \\ \left( \frac{b_{i-1}}{\sqrt{m} - a_i}, b_{i-1} \right) & \text{si } i \text{ est pair} \end{cases} \quad (10)$$

Finalement on a un ensemble de coefficients directeurs et de couples de points qui nous permettent de tracer informatiquement les schémas de la partie 1.2. De plus on sait que par construction  $Card(I) = n + 1$  avec  $n$  le nombre de chocs entre les deux boules. Il nous suffit donc de récupérer le nombre de coefficients directeurs pour une certaine masse  $m$  afin de déterminer le nombre de chocs.

On peut maintenant comparer les valeurs obtenues par le programme avec les valeurs attendues avec la formule obtenue dans la partie précédente. Par exemple pour une masse égale à 100 le programme nous donne 31 chocs. Avec les propositions 1.3 et 1.4, on a le nombre de chocs qui vaut  $E(10^n \pi)$  avec  $m = 10^{2n}$ . On peut donc écrire le nombre de chocs en fonction de la masse  $m$  :

$$C_n = E(\sqrt{m}\pi)$$

Pour  $m$  égal à 100 on a bien 31 chocs avec la formule.

Si on prend maintenant une masse  $m$  égale à 513 le programme nous donne un nombre de chocs égal à 71, ce qui coïncide bien avec la valeur obtenue par la formule  $C_n = E(\sqrt{513}\pi) = 71$ .

### 2.1.2 Complexité

Pour la complexité, on pose  $m$  la masse rentrée dans le programme, pour la création de la liste  $a_i$  on a une boucle While dans laquelle on itère  $E(\sqrt{m}\pi)$  fois, autant de fois qu'il y a de chocs, puis on effectue un nombre constant d'opérations, donc la complexité est en  $O(E(\sqrt{m}\pi)) = O(\sqrt{m})$ . Par la création de la liste Tab on itère dans la boucle For autant de fois que dans la boucle While on a donc aussi une complexité en  $O(\sqrt{m})$ . On a donc une complexité totale du programme en  $O(\sqrt{m})$ .

### 2.1.3 Limites

Pour le calcul du nombre de chocs, avec une complexité en  $O(\sqrt{m})$  on peut, dans un temps raisonnable (c'est-à-dire une dizaine de secondes), obtenir le nombre de chocs pour une masse de  $10^{14}$ . On s'arrête à partir des masses supérieures à  $10^{16}$ . Pour l'affichage de la figure, on a une complexité plus élevée et donc une masse limite, pour laquelle le programme termine dans des temps raisonnables, qui est atteinte plus rapidement. On peut obtenir des graphes pour des masses inférieures ou égales à  $10^8$ .

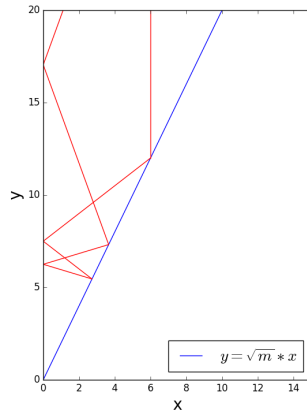


FIGURE 8 – Représentation graphique des positions des boules, avec  $m = 4$ .

## 2.2 Seconde représentation

Le programme correspondant est disponible en annexe (cf B).

### 2.2.1 Fonctionnement

Dans cette partie, nous avons représenté, grâce au logiciel Scilab, les positions des deux boules de billard dans un graphique en fonction du temps, cf figure 9.

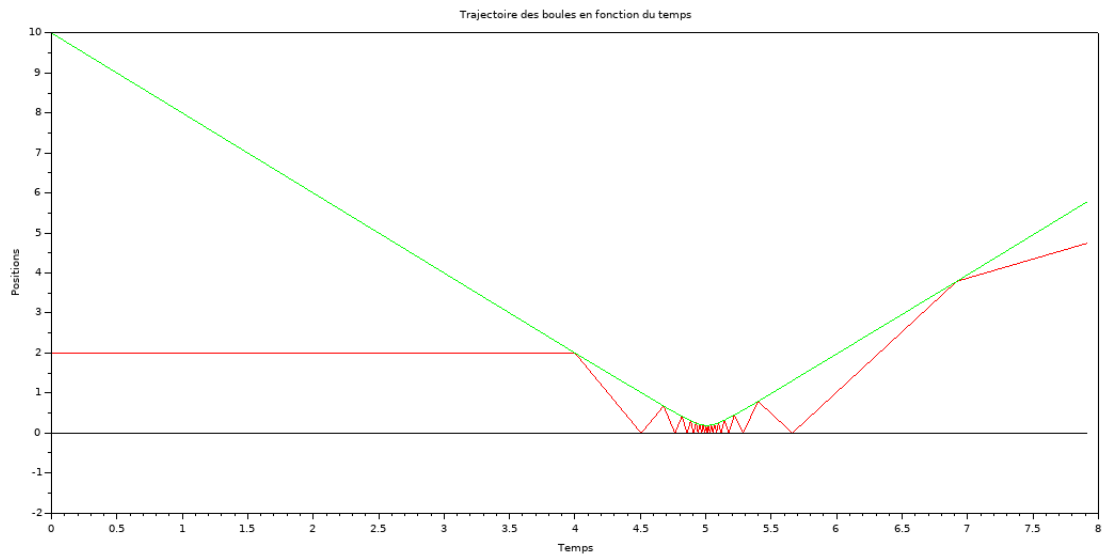


FIGURE 9 – Représentation graphique des positions des boules au cours du temps, avec  $m = 100$ .

On se sert pour cela de deux fonctions qui ont pour but de calculer les positions des deux boules entre un choc et le suivant pour des temps espacés d'un pas  $h$ , selon deux cas de figure.

On considère d'abord si  $B_1$  a une vitesse négative après un choc. Si c'est le cas, on cherche alors les positions jusqu'au choc avec le mur, soit jusqu'à ce que la position de la boule  $B_1$  atteigne ou devienne inférieure à 0, en plaçant le mur à l'origine du repère. En effet, une vitesse négative implique obligatoirement un choc avec le mur car à partir de la situation initiale,  $v_1 = 0$  et  $v_2 < 0$ , une vitesse  $v_1$  négative signifie que le précédent choc était entre les deux boules, et elles ne peuvent pas entrer en collision deux fois d'affilée puisque leurs vitesses après un choc sont constantes.

Si  $B_1$  n'a pas une vitesse négative, la prochaine collision sera entre les deux boules, et on calcule donc les positions jusqu'à trouver un point d'intersection entre les deux fonctions associées à la position des boules. On crée ensuite une fonction principale qui renvoie deux listes correspondant aux positions des deux boules jusqu'au dernier choc, en fonction des positions, des vitesses initiales, de la masse de  $B_2$  et du pas de temps entre chaque calcul de position. Pour cela on lance les deux fonctions précédemment définies tant qu'un choc est possible, c'est-à-dire tant que  $v_1 > v_2$  ou que  $v_1 < 0$ , en redéfinissant les vitesses après chaque itération grâce aux calculs effectués dans la partie 1.1.

Ce programme détient, comme pour le précédent, un compteur du nombre de chocs, qui renvoie des valeurs qui sont bien en accord avec la formule de la partie précédente.

### 2.2.2 Complexité

Au niveau de la complexité des fonctions utilisées dans ce programme, on a :

- `traj_1` : on rentre dans la boucle while tant que  $x > 0$  soit jusqu'à ce que  $j > \left\lceil \frac{x_{0,1}}{v_1 h} \right\rceil$ .

Comme  $x_{0,1}$  et  $v_1$  sont des données de l'énoncé, on a une complexité en  $O(\frac{1}{h})$ .

- `traj_2` : de la même manière que pour `traj_1`, on rentre dans la boucle while tant que  $x_2 - x_1 > 0$ , soit jusqu'à ce que  $j > \left\lceil \frac{x_{0,1} - x_{0,2}}{(v_2 - v_1)h} \right\rceil$ . Comme  $x_{0,1}$ ,  $v_1$ ,  $x_{0,2}$  et  $v_2$  sont des données de l'énoncé, on a encore une fois une complexité en  $O(\frac{1}{h})$ .

- `trajectoire_boules` : on rentre dans la boucle while autant de fois qu'on a de chocs, soit environ  $\pi\sqrt{m}$ , boucle dans laquelle on appelle à chaque itération une des deux fonctions préliminaires.

Comme la partie "prolongement" est en  $O(\frac{1}{h})$ , ce n'est pas cette partie de la fonction qui définit sa complexité.

On a finalement une complexité en  $O(\frac{\sqrt{m}}{h})$ .

### 2.2.3 Limites

Une complexité telle que celle-ci ne permet pas des calculs pour des masses infiniment grandes. En effet, pour avoir un graphique cohérent, multiplier par 10 la masse  $m$  demande de diviser par 10 le pas de temps  $h$ . Ainsi, le programme affiche un graphique cohérent en choisissant un pas  $h$  adapté jusqu'à  $m = 10^6$ , mais peut néanmoins calculer le nombre de chocs jusqu'à une masse de  $m = 10^8$ , sans que la représentation ne soit pour autant cohérente, car on ne peut que choisir un pas  $h$  trop faible pour terminer l'algorithme dans des temps raisonnables.

Nous avons réalisé un film du déplacement des boules, disponible à l'adresse suivante : [https://github.com/julesmichaud/PI/blob/master/video\\_choc2.mp4](https://github.com/julesmichaud/PI/blob/master/video_choc2.mp4)

## 3 Étude des propriétés de $\pi$

L'étude physique faite dans la première partie de ce rapport, nous mène à isoler le nombre  $\pi$ , et mieux encore : à trouver une nouvelle méthode permettant de le calculer. Qu'en est-il de cette constante et de ses propriétés ? Dans cette partie, on décide d'étudier plus précisément les propriétés du nombre  $\pi$ .

Une première propriété remarquable est son irrationalité, démontrée il y a moins de 3 siècles. Avec le nombre d'Euler  $e$ , ces deux nombres ont permis une révolution dans l'arrangement des nombres et encore aujourd'hui, certaines autres propriétés de  $\pi$  restent un mystère, comme la possibilité que  $\pi$  soit un nombre univers.

### 3.1 Irrationalité

Rappelons tout d'abord qu'on dit qu'un nombre est irrationnel lorsqu'on ne peut pas l'écrire comme une fraction de deux nombres entiers. En 1761, J-H Lambert a démontré pour la première fois que  $\pi$  vérifie cette propriété.

Prenons un temps pour comprendre pourquoi  $\pi$  est irrationnel.

**Lemme 2.** Soient  $a, b \in \mathbb{Z}$  avec  $b \neq 0$ . Soit  $g(x)$  un polynôme à coefficients entiers et

$$f(x) = (a - bx)^n g(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Si  $\deg g \leq n$ , alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)}(a/b) \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad n! \mid f^{(k)}(a/b).$$

*Démonstration.* Supposons tout d'abord que  $k < n$ . Par la formule de Leibniz, on a que :

$$f^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} ((a - bx)^n)^{(j)} g^{(k-j)}(x)$$

Or, posons  $u$ , l'application qui pour tout  $x$ , est tel que  $u(x) = (a - bx)^n$ , alors on a que pour tout  $j \in [0, k]$ , avec  $k < n$ , on peut exprimer la dérivée  $j$ -ème de  $u$ , comme :

$$u^{(j)}(x) = ((a - bx)^n)^{(j)} = \frac{n!}{(n-j)!} (-b)^j (a - bx)^{(n-j)}$$

On a donc que pour tout  $j < n$ ,  $u^{(j)}(a/b) = 0$ . C'est-à-dire, que nous pouvons réécrire :

$$f^{(k)}(x) = \binom{k}{0} u(x) g^{(k)}(x) + \binom{k}{1} u^{(1)}(x) g^{(k-1)}(x) + \dots + \binom{k}{k} u^{(k)}(x) g(x)$$

$$f^{(k)}(x) = \binom{k}{0} (a - bx)^n g^{(k)}(x) + \binom{k}{1} ((a - bx)^n)^{(1)} g^{(k-1)}(x) + \dots + \binom{k}{k} ((a - bx)^n)^{(k)} g(x)$$

$$f^{(k)}(a/b) = 0 + 0 + \dots + 0 = 0$$

Donc pour tout  $k < n$ , on a que  $f^{(k)}(a/b) = 0$ , donc on a bien que  $f^{(k)}(a/b) \in \mathbb{Z}$ , et on a bien que  $n! \mid 0$ .

Pour  $k \geq n$ , on a forcément le cas où  $k = n$ , c'est-à-dire que :

$$f^{(k)}(x) = \binom{k}{0} u(x) g^{(k)}(x) + \binom{k}{1} u^{(1)}(x) g^{(k-1)}(x) + \dots + \binom{k}{n} u^{(n)}(x) g^{(k-n)}(x) + \dots + \binom{k}{k} u^{(k)}(x) g(x)$$

Comme précédemment, on a que pour tous les  $j < n$ ,  $u^{(j)}(x) = 0$ , donc  $\binom{k}{j} u^{(j)}(x) g^{(k-n)}(x) = 0$ , de plus pour tout  $j > n$ , on a que  $u^{(j)}(x) = 0$ , car on dérive une constante, donc le seul cas intéressant est lorsque  $j = n$ . De ce fait, nous avons que :

$$f^{(k)}(x) = \binom{k}{n} u^{(n)}(x) g^{(k-n)}(x)$$

De plus, comme nous avons que :

$$u^{(n)} = n!(-b)^n$$

On a que  $f^{(k)}(a/b) = n!(-b)^n g^{(k-n)}(a/b)$ . On sait par hypothèse que  $\deg(g) \leq n$ . Dans le cas, où  $k - n > \deg(g)$ , le polynôme  $g$  sera soit une constante entière, soit 0.

Puisqu'on dérive  $k - n$  fois avec  $k - n \geq 0$ , après dérivation, le polynôme  $g^{(k-n)}$  restera un polynôme avec un degré plus faible ou égal, donc son terme de plus haut degré est au maximum en  $X^n$ . De ce fait, si on l'évalue en  $(a/b)$ , les dénominateurs de chaque terme du polynôme seront des puissances de  $b$  inférieures ou égales à  $n$ , qui seront donc tous simplifiées lors de la multiplication de  $g^{(k-n)}$  par  $(-b)^n$ . Finalement on a bien :

$$(-b)^n g^{(k-n)}(a/b) \in \mathbb{Z}$$

Donc,  $n!$  divise bien  $f^{(k)}(a/b)$

□

### Théorème 3.1

Le nombre  $\pi$  est irrationnel.

Nous allons démontrer ce théorème par l'absurde. On supposera lors de toute la preuve que  $\pi$  est rationnel c'est-à-dire que  $\pi = \frac{a}{b}$ , avec  $a, b \in \mathbb{Z}$  et  $b \neq 0$ . On pose  $f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$ .

**Lemme 3.** Soit  $f$  un polynôme de degré  $2n$ , nous avons que :

$$\int_0^\pi f(x) \sin x dx = F(\pi) + F(0) \quad \text{avec} \quad F(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k f^{(2k)}(x).$$

En particulier,  $\int_0^\pi f(x) \sin x dx$  est un entier.

*Démonstration.* On calcule l'intégrale par des intégrations par parties successives. On a :

$$\int_0^\pi f(x) \sin x dx = [-f(x) \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi f^{(1)}(x) \cos x dx$$

En faisant une seconde IPP, on a :

$$\int_0^\pi f(x) \sin x dx = [-f(x) \cos x]_0^\pi + [f^{(1)}(x) \sin x]_0^\pi + \int_0^\pi f^{(2)}(x) \sin x dx$$

Par IPP successives jusqu'à l'ordre  $2n + 1$ , on obtient l'expression suivante :

$$\int_0^\pi f(x) \sin x dx = \left[ \cos x \left( \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} f^{(2k)}(x) \right) \right]_0^\pi + \left[ \sin x \left( \sum_{k=0}^n (-1)^k f^{(2k+1)}(x) \right) \right]_0^\pi + \int_0^\pi f^{(2n+1)}(x) \sin x dx$$

Alors, en prenant le sin de  $\pi$  à 0, on a bien :

$$\int_0^\pi f(x) \sin x dx = \left[ \cos x \left( \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} f^{(2k)}(x) \right) \right]_0^\pi + \int_0^\pi f^{(2n+1)}(x) \sin x dx$$

On obtient le résultat attendu. D'après le lemme 2, on en déduit que  $\int_0^\pi f(x) \sin x dx \in \mathbb{Z}$ . □

**Lemme 4.** Rappelons que  $f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$ . Nous avons que :

$$0 < \int_0^\pi f(x) \sin x dx \leq \frac{a^n \pi^{n+1}}{n!}$$

*Démonstration.* On a que :

$$\left| \int_0^\pi f(x) \sin x dx \right| \leq \max |f(x) \sin x| \int_0^\pi dx$$

On peut alors évaluer  $\max |f(x) \sin x|$

$$\begin{aligned} \max |f(x) \sin x| &\leq \max |f(x)| = \max \left| \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \right| \\ &= \max \left| \frac{x^n a^n (1 - \frac{x}{\pi})^n}{n!} \right| \end{aligned}$$

Or, comme  $0 \leq x \leq \pi$  on a que  $0 \leq \frac{x}{\pi} \leq 1$ , alors  $0 \leq 1 - \frac{x}{\pi} \leq 1 < \pi$ , alors  $(1 - \frac{x}{\pi})^n < \pi^n$ , donc on peut écrire que :

$$\max |f(x) \sin x| \int_0^\pi dx < \frac{a^n \pi^{n+1}}{n!}$$

On a ainsi :

$$\left| \int_0^\pi f(x) \sin x dx \right| \leq \frac{a^n \pi^{n+1}}{n!}$$

De plus,  $f(x) \sin x$  est positif pour  $x$  compris entre 0 et  $\pi$ , donc il est évident que :

$$0 \leq \int_0^\pi f(x) \sin x dx$$

On a finalement bien :

$$0 \leq \int_0^\pi f(x) \sin x dx < \frac{a^n \pi^{n+1}}{n!}$$

Au final, si  $n$  tend vers  $+\infty$ , on a par le théorème des gendarmes que  $\int_0^\pi f(x) \sin x dx$  tend vers 0. Mais cette intégrale est un entier d'après le lemme 3, donc elle vaut exactement 0 pour  $n$  assez grand. Or, quelle que soit la valeur de  $n$ ,  $x \mapsto f(x) \sin x$  est une fonction continue, positive et non nulle sur  $[0, \pi]$ , donc son intégrale est non nulle. On a conclu sur une absurdité. Donc  $\pi$  est irrationnel. □

### 3.2 Propriétés d'Arctan

**Proposition 3.1.** Soient  $p, q \in \mathbb{N}^*$ ,  $p \neq q$ ,  $p$  et  $q$  premiers entre eux. Alors

$$\frac{1}{\pi} \arctan \frac{p}{q} \notin \mathbb{Q}.$$

*Démonstration.* Montrons cette proposition par contradiction, en supposant qu'il existe  $m, n \in \mathbb{Z}^*$ , tels que :

$$\arctan \left( \frac{p}{q} \right) = \frac{m}{n} \pi$$

Nous avons alors :

$$p = q \tan \left( \frac{m\pi}{n} \right)$$

Évaluons la quantité :

$$\left( \frac{q + ip}{q - ip} \right)^n$$

On a :

$$\begin{aligned} \left( \frac{q + ip}{q - ip} \right)^n &= \left( \frac{q \left( 1 + i \tan \left( \frac{m\pi}{n} \right) \right)}{q \left( 1 - i \tan \left( \frac{m\pi}{n} \right) \right)} \right)^n \\ &= \left( \frac{\exp \left( i \frac{m\pi}{n} \right)}{\exp \left( -i \frac{m\pi}{n} \right)} \right)^n = \left( \exp \left( 2i \frac{m\pi}{n} \right) \right)^n \\ &= e^{i2m\pi} = 1 \end{aligned}$$

Donc :

$$(q + ip)^n = (q - ip)^n$$

Par jeu d'écriture, nous savons que  $(q + ip) = (q - ip + 2ip)$ , c'est-à-dire, d'après ce que nous venons de montrer :

$$(q + ip)^n = (q - ip + 2ip)^n = (q - ip)^n$$

Nous avons alors que :

$$\begin{aligned} (q - ip)^n &= (q - ip + 2ip)^n \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (q - ip)^j (2ip)^{n-j} \\ (q - ip)^n &= (q - ip)^n + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} (q - ip)^j (2ip)^{n-j} \\ 0 &= (2ip) \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} (q - ip)^j (2ip)^{n-j-1} \end{aligned}$$

Or, comme  $2ip \neq 0$ , on peut réécrire que :

$$\begin{aligned} -(2ip)^{n-1} &= \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} (q - ip)^j (2ip)^{n-j-1} \\ -(2ip)^{n-1} &= (q - ip) \left( \binom{n}{1} (2ip)^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1} (q - ip)^{n-2} \right) \end{aligned}$$



Nous obtenons donc la relation suivante :

$$-(2ip)^{n-1} = (q - ip) \left( \binom{n}{1} (2ip)^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1} (q - ip)^{n-2} \right) \quad (11)$$

De la même manière mais cette fois-ci en étudiant que  $(q - ip) = (q + ip - 2ip)$ , on a :

$$\begin{aligned} (q + ip)^n &= (q + ip - 2ip)^n \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (q + ip)^j (-2ip)^{n-j} \\ (q + ip)^n &= (q + ip)^n + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} (q + ip)^j (-2ip)^{n-j} \\ 0 &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} (q + ip)^j (-2ip)^{n-j} \\ -(-2ip)^n &= (-2ip)(q + ip) \left( \binom{n}{1} (-2ip)^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} (q + ip)^{n-2} \right) \end{aligned}$$

Comme précédemment nous avons que  $(-2ip) \neq 0$ , nous pouvons donc diviser par  $-2ip$ , nous avons alors une seconde relation :

$$-(2ip)^{n-1} = (-1)^{n-1} (q + ip) \left( \binom{n}{1} (-2ip)^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} (q + ip)^{n-2} \right) \quad (12)$$

En multipliant, 11 et 12, on obtient la relation suivante :

$$(2p)^{2(n-1)} = (q^2 + p^2)(-1)^n K \quad (13)$$

Avec  $K = i^{1-n} \left( \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} (q - ip)^j (2ip)^{n-j-1} \right) \left( \sum_{\ell=1}^{n-1} \binom{n}{\ell} (q + ip)^\ell (-2ip)^{n-\ell-1} \right)$ , tel que  $K \in \mathbb{Z}$  car  $Re(K) \in \mathbb{Z}$  et  $Im(K) = 0$  forcément puisque  $K$  multiplié par un réel donne un réel. D'après 13, on a donc que  $q^2 + p^2 \mid (2p)^{2(n-1)}$ . Maintenant, nous savons par hypothèse que  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux. Le Lemme de Bézout nous fournit une équation sur  $p$  et  $q$  qu'il suffit d'élever au carré pour montrer que  $q^2$  et  $p^2$  sont aussi premiers entre eux. Encore en utilisant le Lemme de Bézout, nous avons alors qu'il existe un couple  $(a, b) \in \mathbb{Z}$ , tel que :

$$ap^2 + bq^2 = 1$$

De ce fait comme  $q^2$  et  $p^2$  sont strictement positifs, on a que  $a$  et  $b$ , sont forcément de signe opposé, on peut alors se permettre d'écrire que  $a = (a - b) + b$ , ce qui donne que :

$$b(q^2 + p^2) + (a - b)p^2 = 1$$

Comme  $a - b \in \mathbb{Z}$ , il existe bien un couple  $(u, v) \in \mathbb{Z}$  vérifiant :

$$u(q^2 + p^2) + vp^2 = 1$$

Donc  $(p^2 + q^2)$  et  $p^2$  sont premiers entre eux. Il est possible alors de généraliser en écrivant que pour tout  $n \geq 1$ , on a que  $p^2 + q^2$  et  $p^{2(n-1)}$ , sont premiers entre eux (il suffit d'élever à la puissance  $n$ -ième l'équation donnée par le Lemme de Bézout).

Mais comme  $p^2 + q^2$  divise  $(2p)^{2(n-1)}$ , on en déduit à l'aide du Théorème de Gauss, que  $p^2 + q^2$  divise  $2^{2(n-1)}$ .

De ce fait, si  $p^2 + q^2$  divise  $2^{2(n-1)}$ ,  $p^2 + q^2$  est forcément pair, or pour qu'une somme soit paire on a soit que :

- $p^2$  et  $q^2$  sont pairs.
- $p^2$  et  $q^2$  sont impairs.

Or, si  $p^2$  et  $q^2$  étaient pairs, cela signifierait que  $p$  et  $q$  sont également pairs, ce qui irait contre l'hypothèse que  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux. Donc  $p^2$  et  $q^2$  sont impairs, et ainsi  $p$  et  $q$  sont impairs.

De ce fait, on peut poser  $k, k' \in \mathbb{Z}$ , tels que :

$$\begin{aligned} p &= 2k + 1 \\ q &= 2k' + 1 \end{aligned}$$

En recalculant, on en déduit que :

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 &= (2k + 1)^2 + (2k' + 1)^2 \\ &= 2(2(k^2 + k'^2) + 2(k + k') + 1) \end{aligned}$$

On avait montré que ce nombre divisait  $2^{2(n-1)}$ , pour  $n \geq 1$ . Donc on a que  $(2(k^2 + k'^2) + 2(k + k') + 1) \mid 2^{2n-3}$ , pour  $n \geq 2$ . Or,  $2(k^2 + k'^2) + 2(k + k') + 1$  est un nombre impair, donc ne divise pas une puissance de 2. On est arrivés à une absurdité. On en conclut que  $\frac{1}{\pi} \arctan \frac{p}{q}$  est irrationnel.  $\square$

Ce théorème nous permet de revenir sur la proposition 1.3 pour y ajouter un point de détail : puisque  $\alpha = \arctan \frac{1}{\sqrt{m}} = \arctan(10^{-n})$  avec  $10^{-n} \in \mathbb{Q}$ ,  $\alpha$  ne peut être une fraction de  $\pi$  si  $m$  est une puissance de 100, ce qui écarte bien la possibilité que le dépliage des domaines symétriques de  $S$  remplisse exactement la moitié du plan.

## Conclusion

Notre premier objectif était d'étudier un choc élastique entre deux boules de billard sur une droite limitée par un mur. Pour ce faire, nous avons considéré dans un premier temps un choc élastique simple entre deux boules. À partir de la conservation de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement du système, nous avons réussi à déterminer ses états possibles en étudiant les points d'intersection d'une droite et d'une ellipse. Cette première représentation nous a permis d'avoir les idées claires pour ensuite calculer la vitesse des deux boules après le choc en fonction des paramètres initiaux.

C'est seulement dans un second temps que nous avons ajouté un mur pour revenir au problème initial. Assimiler notre situation à un problème de billard dans un repère aux coordonnées bien choisies nous a permis de mener une étude géométrique pour pouvoir déterminer le nombre de chocs en fonction du rapport des masses de nos deux boules. On a alors remarqué que si le rapport entre les deux masses est égal à la  $N^{ième}$  puissance de 100, le nombre de chocs nous donne les  $N$  premières décimales de  $\pi$ .

Nous nous sommes attachés à démontrer cette relation entre  $\pi$  et le nombre de chocs en utilisant des considérations sur les angles permises par l'aspect géométrique du problème.

Dans la seconde partie de ce projet, nous avons cherché à produire des représentations graphiques du problème physique. L'implémentation de deux algorithmes décrivant le problème sous deux angles différents nous a aussi permis de calculer les premières décimales du nombre  $\pi$ .

Nous avons terminé par la démonstration mathématique de deux propriétés du nombre  $\pi$ , à savoir son irrationalité ainsi que les propriétés liées à la fonction Arctan.

La relation surprenante entre une expérience de pensée purement physique et une constante majeure de l'histoire des mathématiques nous a amenés à explorer différents domaines des sciences, de la physique aux mathématiques en passant par l'algorithmique. Ce projet complet nous a aussi permis de commencer à appréhender les nombreux liens et passerelles entre les mathématiques et la physique ainsi que la nécessaire pluridisciplinarité de nombreux problèmes en science.

## A Algorithme de représentation de la trajectoire de $P$ dans le billard de forme $S$

```
1 import numpy as np
2 from math import *
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 # Masse de la boule n2
6 MASSE = 17
7 # Position initiale de la boule n1
8 x10 = 6
9 # Position initiale de la boule n2
10 x20 = 20
11 # Angle theta entre l'axe des abscisses et
12 # la droite de coefficient directeur sqrt(m)
13 theta = np.arctan(sqrt(MASSE))
14
15 # Creation d'une liste contenant l'ensemble des coefficients directeurs des
16 # droites a tracer sur le graphique defini par recurrence. 2 conditions d'
17 # arret possibles :
18 # soit a = None on a pas de coefficient directeur et une droite d'equation x =
19 # b
20 # soit a > sqrt(Masse) et donc plus aucun choc possible
21
22 ai = [None]
23 i = 0
24 a = np.tan(2 * theta - (pi / 2))
25 ai += [a]
26 while a < sqrt(MASSE):
27     if i % 2 == 0:
28         a = -a
29     else:
30         if int(10 ** 10 * a) == int(10 ** 10 * np.tan(2 * theta - (pi / 2))):
31             a = None
32             ai += [None]
33             break
34         else:
35             a = np.tan(2 * theta - np.arctan(a))
36
37     i += 1
38     ai += [a]
39
40 # Creation d'une liste de listes chacune contenant, pour chaque coefficient de
41 # la liste ai, la coordonnee x du point d'intersection entre la droite de
42 # pente ai[i] et celle de pente sqrt(MASSE) ainsi que l'ordonnee a l'origine b
43
44 Tab = [[x10, None]]
45 for i in range(1, len(ai)-1):
46     if i%2 == 0:
47         Tab += [[Tab[i-1][1]/(sqrt(MASSE)-ai[i]), Tab[i-1][1]]]
48     else:
49         Tab += [[Tab[i-1][0], Tab[i-1][0]*(sqrt(MASSE)-ai[i])]]
50 if ai[len(ai) - 1] == None:
51     Tab += [[Tab[len(Tab)-1][0], None]]
52 else :
53     if len(ai)%2 == 0:
54         Tab += [[Tab[i][0], Tab[i][0] * (sqrt(MASSE) - ai[i+1])]]
55     else:
```

```

51     Tab += [[None, Tab[len(Tab)-1][1]]]
52
53 # plot des differentes fonctions
54 plt.figure(figsize=(6, 8))
55
56 def flineaire(a, b, x):
57     return a * x + b
58
59 def foncton_racineMASSE(x):
60     return sqrt(MASSE) * x
61
62 x = np.arange(0, x10 + 8, 0.1)
63 plt.plot(x, foncton_racineMASSE(x), 'b', label=r'$y = \sqrt{m} * x$')
64
65 yp = sqrt(MASSE) * x20
66
67 for i in range(len(ai)-1):
68     xp = Tab[i][0]
69     b = Tab[i][1]
70     if ai[i] == None:
71         xp = Tab[i][0]
72         DataY = np.arange(foncton_racineMASSE(xp), yp, 0.1)
73         DataX = xp + np.zeros(len(DataY))
74         plt.plot(DataX, DataY, 'r')
75     else:
76         DataX = np.arange(0, xp, 0.01)
77         plt.plot(DataX, flineaire(ai[i], b, DataX), 'r')
78
79 if Tab[len(Tab)-1][0] == None:
80     DataX = np.arange(0, x10, 0.01)
81     plt.plot(DataX, flineaire(ai[len(Tab)-1], Tab[len(Tab)-1][1], DataX), 'r')
82 else:
83     xp = Tab[len(Tab) - 1][0]
84     if ai[len(ai) - 1] == None:
85         DataY = np.arange(foncton_racineMASSE(xp), x20*10, 0.1)
86         DataX = xp + np.zeros(len(DataY), 'r')
87         plt.plot(DataX, DataY)
88     else:
89         DataX = np.arange(xp, xp + 10, 0.1)
90         plt.plot(DataX, flineaire(ai[len(Tab) - 1], Tab[len(Tab) - 1][1], DataX), 'r')
91
92 plt.legend(loc='best', prop={'size': 20})
93 plt.ylabel('y', fontsize=20)
94 plt.xlabel('x', fontsize=20)
95 plt.show()
96
97 # Nombre de chocs
98 print(len(ai) - 1)

```

Listing 1 – Ce programme représente la trajectoire de notre point P dans le billard de forme S.

## B Algorithme de représentation de la trajectoire des boules en fonction du temps

```
1 // fonctions intermediaires : renvoie les postions des deux boules entre le
2 // dernier choc et le prochain choc
3
4
5 function [y1,y2]=traj_1(x10, x20, v1, v2, h)
6     // calcul des trajectoires entre le dernier choc et le choc de la boule 1
7     // avec le mur
8     x1 = [x10];
9     x2 = [x20];
10    j = 1;
11    while x1(1,j)>0
12        // h etant le pas entre chaque temps, on a tn=h*n
13        j = j+1;
14        x1(1,j) = v1*h*(j-1) + x1(1, 1);
15        x2(1,j) = v2*h*(j-1) + x2(1, 1);
16    end
17    // on renvoie la liste des positions SANS la position initiale qui est deja
18    // dans la liste totale des positions
19    N = size(x1);
20    y1 = [x1(2:N(2))];
21    y2 = [x2(2:N(2))];
22 endfunction
23
24
25 function [y1,y2]=traj_2(x10, x20, v1, v2, h)
26     // calcul des trajectoires entre le dernier choc et le prochain choc entre
27     // les deux boules
28     x1 = [x10];
29     x2 = [x20];
30     j = 1;
31     while (x2(1,j)-x1(1,j)>0)
32        // h etant le pas entre chaque temps, on a tn=h*n
33        j = j+1;
34        x1(1,j) = v1*h*(j-1) + x1(1, 1);
35        x2(1,j) = v2*h*(j-1) + x2(1, 1);
36    end
37    // on renvoie la liste des positions SANS la position initiale qui est deja
38    // dans la liste totale des positions
39    N = size(x1);
40    y1 = [x1(2:N(2))];
41    y2 = [x2(2:N(2))];
42 endfunction
43
44
45 // fonction principale : renvoie la liste complete des positions entre t0 et la
46 // derniere collision (+ une petite prolongation pour avoir une id e de ce qu'
47 // il se
48 // passe apres le dernier choc), ainsi que le nombre de collisions.
49
50 function [nb_chocs, y1, y2]=trajectoire_boules(x1_0, x2_0, v1, v2, m2, h)
51     x1 = [x1_0];
52     x2 = [x2_0];
53     // on introduit un compteur qui compte le nombre de collisions
54     compteur = 0;
```

```

55 // on effectue le programme jusqu'a ce qu'il ne puisse plus y avoir de
    chocs
56 // cad tant que l'on verifie une des conditions suivantes
57 while (v1<0) | (v1>v2)
58     compteur = compteur + 1
59     N = size(x1);
60     if v1<0 then
61         // cas 1
62         [x1_2, x2_2] = traj_1(x1(N(2)), x2(N(2)), v1, v2, h);
63         x1 = [x1 x1_2];
64         x2 = [x2 x2_2];
65         // recalcul des vitesses
66         v1 = -v1;
67     else
68         [x1_2, x2_2] = traj_2(x1(N(2)), x2(N(2)), v1, v2, h)
69         x1 = [x1 x1_2];
70         x2 = [x2 x2_2];
71         // recalcul des vitesses
72         v2_2 = ((m2-1)*v2 + 2*v1)/(m2+1);
73         v1_2 = v1 + m2*v2 -m2*v2_2;
74         v1 = v1_2;
75         v2 = v2_2;
76     end
77 end
78 // calcul des positions apres le dernier choc pour prolonger les droites
79 N = size(x1);
80 for i=1:(1/h)
81     prolong_1 = v1*h*(i) + x1(1, N(2));
82     prolong_2 = v2*h*(i) + x2(1, N(2));
83     x1 = [x1 prolong_1];
84     x2 = [x2 prolong_2];
85 end
86 nb_chocs = compteur
87 y1 = x1;
88 y2 = x2;
89 endfunction
90
91
92 // Programme pour afficher les differentes positions des deux boules au cours
93 // du temps ainsi que le nombre de collisions
94
95
96 // Donnees du probleme :
97
98 x1_0 = 2
99 x2_0 = 10
100 v1_0 = 0
101 v2_0 = -2
102
103 // Donnees variables :
104
105 h = 0.001 // h est le pas entre chaque temps
106 m2 = 100 // m2 la masse de la seconde boule
107
108 // Affichage du graphique et du nombre de collisions
109
110 [nb_chocs,x,y]=trajectoire_boules(x1_0, x2_0, v1_0, v2_0, m2, h)
111
112 N = size(x)

```

```

113 t = 0:h:((N(2)-1)*h) // ensemble des temps correspondants aux positions
    caculees
114
115 function y=tracer_mur(t)
116     y = []
117     for i=1:(size(t))(2)
118         y = [y 0]
119     end
120 endfunction
121
122 mur=tracer_mur(t) // permet d'afficher le mur
123
124 disp(nb_chocs)
125 plot(t,x,"r",t,y,"g",t,mur,"k")
126 xtitle("Trajectoire des boules en fonction du temps","Temps","Positions")

```

Listing 2 – Ce programme Scilab représente la trajectoire des boules en fonction du temps.