ISEN **2021/2022**

CIR1/CNB1 - MATHÉMATIQUES "ANALYSE"

PARTIEL Seconde Session 29/01/2022

Consignes :

- *Pour cette épreuve de **2** heures aucun document n'est autorisé et la calculatrice collège est tolérée.*
- *Les **3** exercices qu'il comporte sont indépendants et peuvent être faits dans l'ordre de votre choix.*
- *Expliquez vos raisonnements avec un maximum de **clarté** et avec le **vocabulaire** adapté.*
- *Une copie soignée est gage d'une bonne note !*

Exercice 1. (7 Points)

On s'intéresse aux solutions de l'équation différentielle :

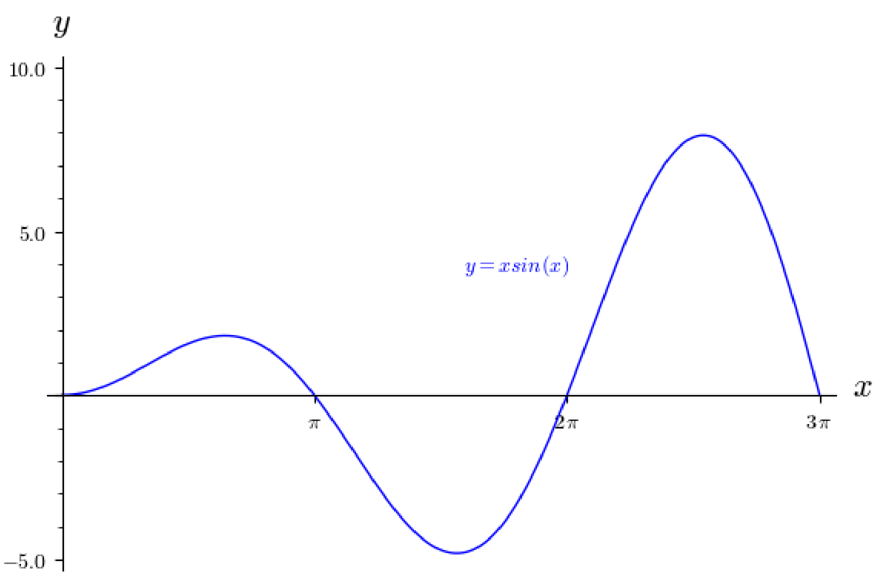
$$y' - y = f(x) \quad (E)$$

avec $f(x)$ une fonction particulière.

1. Pourquoi (E) est une équation différentielle ? Quel est le degré de cette équation ?
2. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
3. Déterminer l'expression de la solution générale lorsque :
   (a) $f(x) = ce^x$, avec $c \in \mathbb{R}^*$.
   (b) $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$
   (c) $f(x) = ce^x + \cos(x) + \sin(x)$, avec $c \in \mathbb{R}^*$.
4. Déterminer la solution de l'équation (E) avec $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$ dont la courbe représentative passe par le point $(0, 1)$.

Exercice 2. (5 Points + BONUS)

On considère la figure ci-dessous :



On veut déterminer l'aire du domaine délimité par la courbe $y = x\sin(x)$ et l'axe des abscisses pour

1. $0 \leq x \leq \pi$ 2. $\pi \leq x \leq 2\pi$ 3. $2\pi \leq x \leq 3\pi$

4. Généraliser le calcul pour $n \in \mathbb{N}$ et $n\pi \leq x \leq (n+1)\pi$.

5. Donner la formule générale que vous avez utilisé pour calculer l'aire du domaine délimité par la courbe $y = x\sin(x)$ et l'axe des abscisses.

6. (BONUS) Déterminer l'aire du domaine délimité par la courbe $y = x^2\sin(x)$ et l'axe des abscisses.

Exercice 3. (8 Points + BONUS)

1. Énoncer la formule de Taylor-Young pour une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.
2. Donner le développement limité de e^x au voisinage de 0 à l'ordre n.
3. Donner le développement limité de e^x au voisinage de 1 à l'ordre n.
4. Utiliser la formule énoncée au point 1. pour calculer le développement limité de $\sin(x)$ au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ à l'ordre 4.
5. Calculer
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{\sin^2(x)}$$
6. Donner l'équation de la tangente T à la courbe C qui admet $e - \frac{e}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$ comme partie entière du développement limité au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
   En déduire la position relative de C par rapport à T au voisinage de $\frac{\pi}{2}$.
7. (BONUS) Donner le développement limité de $e^{\sin(x)}$ au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ à l'ordre 4.
8. (BONUS) Calculer
$$\lim_{x \to +\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin(x)} - e}{(x - \frac{\pi}{2})^2}$$