ISEN **2019/2020**

CIR1 ET CNB1 - MATHÉMATIQUES

PARTIEL 5/05/2020

Consignes :

- *Pour cette épreuve de 2 heures aucun document n'est autorisé et la calculatrice collège est tolérée.*
- *Les 4 exercices qu'il comporte sont indépendants et peuvent être faits dans l'ordre de votre choix.*
- *Expliquez vos raisonnements avec un maximum de* ***clarté*** *et avec le* ***vocabulaire*** *adapté.*
- *Une copie soignée est gage d'une bonne note !*
- *Nous vous rappelons qu'il vous est demandé de regrouper les photos des différentes pages de votre(vos) copie(s) dans un seul fichier, Word de préférence.*
- *Le fichier ainsi créé devra être déposé sur* ***Teams*** *uniquement.*

Exercice 1. (8 Points)
On considère deux bases de $\mathbb{R}^2$: $B_e = \{e_1, e_2\} = \{[1,0],[0,1]\}$ et $B_f = \{f_1, f_2\} = \{[1,3],[2,5]\}$.

1. Trouver la matrice de passage P de la base B_e à la base B_f.
2. Trouver, de deux manières différentes, la matrice de passage Q de la base B_f à la base B_e.
3. Calculer $P \cdot Q$ et $Q \cdot P$. Comparer.

Soit l'application linéaire t définie par : $t([x,y]) = [2y, 3x - y]$.

4. Donner, en justifiant, la matrice T_e de t dans la base B_e et sa matrice T_f dans la base B_f.
5. Est-ce qu'il y a une relation entre T_e et T_f ? Justifier.
6. Quel est le rang de T_e ? Celui de T_f ? Justifier.
7. 0 est-il valeur propre de t ? Justifier.
8. La matrice T_e est-elle diagonalisable ? Si oui, justifier et donner une base qui permette de diagonaliser l'application linéaire t. Cette base est-elle unique ? Justifier.
9. Calculer T_e^n avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2. (4.5 Points)
Soit $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire telle que :

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \\ -x_1 - 2x_2 + (k-4)x_3 + 2x_4 \end{bmatrix}$$

où $k \in \mathbb{R}$.

1. Discuter de l'éventuelle injectivité, surjectivité et/ou bijectivité de T selon le paramètre k.
2. Déterminer le noyau de T selon le paramètre k.

3. Résoudre, en utilisant une des techniques vues cette année, le système suivant

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 & = & 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 & = & 3 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 & = & 4 \end{cases}$$

Cette question ne rapportera aucun point si vous utilisez la méthode de substitution.

Exercice 3. (3 Points)
On considère la fonction f définie par

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 + y^2}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et le représenter graphiquement.
2. Est-ce que f est continue sur $\mathbb{R}^2$?

   Si oui, pourquoi ? Si non, serait-il possible de la prolonger par continuité sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4. (4.5 Points)
On considère la fonction f définie par

$$f(x,y) = (x+y)e^x - y$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer $\nabla f(x,y)$.
3. Calculer, s'ils existent, les points stationnaires de f.
4. Calculer la matrice hessienne de f en un point quelconque (x,y).
5. Calculer, s'ils existent, les minima et maxima de f. Est-ce qu'on peut dire s'ils sont locaux ou globaux ?