Durée : 1 heure.
Aucun document n'est autorisé.
La calculatrice collège est tolérée.

— Veuillez ne pas répondre sur le sujet, mais sur le Formulaire Forms prévu à cet effet.

— Les questions peuvent présenter une ou plusieurs réponses valides.

— Une mauvaise réponse enlève des points, une absence de réponse n'a pas d'incidence.

— A la fin du QCM la dernière question sur le formulaire vous proposera de valider vos réponses.

Attention le choix sera définitif et vous ne pourrez plus revenir sur vos réponses.

BON COURAGE !

****

1. On a $\displaystyle\int_1^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^4 \frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$. Quel changement de variable avons-nous utilisé ?

   (1)☐ $x = \sqrt{u}$ (2)☐ $x = u^2$ (3)☐ $x = 2\sqrt{u}$ (4)☐ $x = 2u$

   (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

2. On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \dfrac{\cos^2(t)}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin^2(t)}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t$. Le calcul de $I - J$ donne comme résultat :

   (1)☐ $I - J = \dfrac{\pi}{6}$ (2)☐ $I - J = \dfrac{\pi}{12}$ (3)☐ $I - J = \dfrac{\pi}{3}$ (4)☐ $I - J = 1$

   (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

3. Pour I et J définis à la question précédente, on souhaite calculer $I+J$ en posant $x = \tan(t)$. L'intégrale obtenue après changement de variable est :

   (1)☐ $I + J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ (2)☐ $I + J = \displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ (3)☐ $I + J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

   (4)☐ $I + J = \displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

4. Une primitive de la fonction sous l'intégrale $I + J$ définie à la question précédente est :

   (1)☐ $[I + J] = \frac{1}{2}(-\ln|1-x| + \ln|1+x|)$ (2)☐ $[I + J] = \frac{1}{2}(1-x^2)^2$ (3)☐ $[I + J] = \mathrm{Arctan}(x)$

   (4)☐ $[I + J] = \mathrm{Arctan}(-x)$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

5. On considère $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t \sin t \, \mathrm{d}t$. Si on utilise le changement de variable $\cos t = x$, on peut écrire :

(1)☐ $\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} x^2 \, \mathrm{d}x$ (2)☐ $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^2 \, \mathrm{d}x$ (3)☐ $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^3 \, \mathrm{d}x$

(4)☐ $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \, \mathrm{d}x$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

6. Calculer $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, \mathrm{d}x$.

(1)☐ 0 (2)☐ 1 (3)☐ $\frac{\pi}{2}$ (4)☐ $\frac{\pi}{4}$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

7. Soit $I = \int_1^3 t \ \ln(t) \, \mathrm{d}t$. Calculer I en intégrant par parties :

(1)☐ $I = \frac{9}{2}\ln(3) - 2$ (2)☐ $I = e^3 - e + 2$ (3)☐ $I = 2\ln(3) + \frac{3}{2}$

(4)☐ $I = \frac{9}{4}\ln(3) - \frac{9}{8}$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Cocher la(les) affirmation(s) correcte(s)

(1)☐ F est continue sur $\mathbb{R}$

(2)☐ Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$

(3)☐ Si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$ alors F est T-périodique sur $\mathbb{R}$

(4)☐ Si f est paire, alors F est impaire

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

9. Calculer $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos(x) \, \mathrm{d}x$.

(1)☐ $2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(x) \, \mathrm{d}x$

(2)☐ 0 (3)☐ 1 (4)☐ -1 (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

10. Soit $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} t \ \sin(t) \, \mathrm{d}t$. Calculer I en intégrant par parties :

(1)☐ $I = -1$ (2)☐ $I = 0$ (3)☐ $I = \frac{\pi}{4}$ (4)☐ $I = \frac{1}{2}$

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

11. Calculer $\int_{-4}^{4} \frac{x}{x^2+3} \, \mathrm{d}x$.

(1)☐ 0 (2)☐ $\frac{2}{3}\ln(17)$ (3)☐ $2\ln(17)$ (4)☐ $-\frac{1}{2}\ln(17)$

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

12. Soit $I = \displaystyle\int t \ \ e^t \, \mathrm{d}t$

(1)☐ $I = t\ e^t - \displaystyle\int t \ \ e^t \, \mathrm{d}t$ (2)☐ $I = e^t - \displaystyle\int t \ \ e^t \, \mathrm{d}t$ (3)☐ $I = t\ e^t - \displaystyle\int e^t \, \mathrm{d}t$

(4)☐ $I = e^t(t-1) + c$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

13. En utilisant des sommes de Riemann, que vaut $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{k}{n}\right)$

(1)☐ $\tan(\frac{\pi}{4})$ (2)☐ $\tan(1)$ (3)☐ $\cos(1)$ (4)☐ $-\ln(\cos(1))$

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

14. On cherche à calculer $I = \int_5^6 \dfrac{x+2}{x^2-5x+4} \, \mathrm{d}x$.
Pour cela on écrit $\dfrac{x+2}{x^2-5x+4}$ sous la forme $\dfrac{A}{x-4} + \dfrac{B}{x-1}$, avec

(1)☐ $A = -1$ et $B = 2$ (2)☐ $A = 2$ et $B = -1$ (3)☐ $A = 2$ et $B = -3$

(4)☐ $A = -3$ et $B = 2$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

15. Pour l'intégrale I définie à la question précédente, on trouve alors comme résultat :

(1)☐ $I = 4\ln(2) + \ln(5)$ (2)☐ $I = \ln(\frac{16}{5})$ (3)☐ $I = 2\ln(4) - \ln(5)$ (4)☐ $I = 0$

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.