Durée : 1 heure.
Aucun document ni calculatrice n'est autorisé.

Veuillez répondre sur le sujet.

NOM ....

PRÉNOM ....

Sans indiquer votre raisonnement, compléter ci-dessous.

Pour toutes les questions

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1. $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $B^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

2. Si possible, calculer $A \cdot B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ et $B \cdot A$ impossible

3. Si possible, calculer $|A|$ impossible et $|B|$ $=1$

4. Soient C et D deux matrices carrée de taille n, $(CD)^T = D^T C^T$

5. Une matrice C est antisymétrique si $C^T = -C$

6. Soit E une matrice inversible, $E^{-1} = \dfrac{1}{|E|} Com(E)^T$

7. Si possible, donner A^{-1} impossible et $B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

8. Si on échange deux colonnes C_i et C_j d'une matrice carrée F, $|F_{C_i \leftrightarrow C_j}| = -|F|$

9. La matrice échelonnée réduite de A est $= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

10. Les équations associées au système homogène de matrice de coefficients A sont

    $2x = 0, y = 0$ et $-x + y = 0$

11. Le *rang* d'une matrice est le nombre de lignes non nulles si on se ramène à une matrice triangulaire échelonnée

12. Un système linéaire $CX = D$ est compatible si rg(C)=rg(C|D) ou s'il admet une et une seule solution ou une infinité de solutions

13. Soit $CX = D$ un système linéaire de n équations à p inconnues avec $n < p$ et $rg(C) = rg(C|D)$.

    Combien de solutions a ce système ? Une infinité

14. Une application f de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ est linéaire si $\forall u, v \in \mathbb{R}^p$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(u+v) = f(u)$ et $f(\lambda u) = \lambda f(u)$

    ou $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

15. Un endomorphisme est une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$

16. Quelle transformation géométrique représente la matrice B ? Symétrie par rapport à l'origine

17. Une famille $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ de $\mathbb{R}^n$ est libre si toute combinaison linéaire nulle $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p = 0$ est

    telle que tous ses coefficients sont nuls $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$

18. Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les vecteurs $\{[t, 0, 1], [1, 1, t], [1, 0, t]\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$? $t \neq \pm 1$

19. La matrice de passage de la base $\{[-1, 2], [-1, 1]\}$ à la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

20. Le vecteur $u = [3, -1]$ dans la base $\{[-1, 2], [-1, 1]\}$ est $u = [2, -5]$