Soient E,F,G trois ensembles et f : $E \Rightarrow F$ et g : $F \Rightarrow G$ deux applications. On a les propriétés suivantes :

1. *si g o f est injective alors f est injective ;*

   $f : E \Rightarrow F$ $g : F \Rightarrow G$ g o f: $E \Rightarrow G$ $x \in E$, $y \in F$, $z \in G$
   g o f est injective $\Rightarrow$ *f est injective*
   (g o f)(x)= g(f(x))
   $\forall\ (x_1, x_2) \in E \times E = E^2$, *si* $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$; $\forall\ (x_1, x_2) \in E \times E = E^2$, *si* $g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$;

2. *si g o f est injective alors f est injective ;*

   $f : E \Rightarrow F$ $g : F \Rightarrow G$ g o f: $E \Rightarrow G$ $x \in E$, $y \in F$, $z \in G$
   g o f est surjective $\Rightarrow$ *f est surjective*
   (g o f)(x)= g(f(x))
   $\forall\ z \in G$, $\exists\ y \in F$ $g(y)$ =z ;
   $\forall z \in G$, $\exists\ x \in E$ $g(f(x))$ =Z ;
   on pose y=$f(x) \in F$
   $g(f(x))$=$g(y)$=z

3. *si f et g sont injectives alors g o f est injective ;*

   $(x, y) \in E^2$, $(g\ o\ f)(x) = (g\ o\ f)(y)$ *Si* $(g\ o\ f)(x) = (g\ o\ f)(y) \leftrightarrow g(f(x)) = g(f(y))$ $g \rightarrow$ *injective*, $\leftrightarrow f(x) = g(y)$ $f \rightarrow$ *injective*, $\leftrightarrow x = y$ $g\ o\ f \rightarrow$ *injective.*

4. *si f et g sont surjectives alors g o f est surjective ;*

   $\forall\ y \in B$, $\exists\ x \in A$, $y = f(x)$ $\forall\ z \in C$, $\exists\ y \in B$,$y = f(x)$ $\exists\ x$ *tel que* $y = f(x)$ $\forall\ z \in C$, $\exists\ y \in B$, $\exists\ x \in A$ *et* $y = f(x)$,$z = g(y)$ $\forall\ z \in C$, $\exists\ y \in B$, $\exists\ x \in A$ *et* $y = f(x)$,$z = g(f(x))$ $\forall\ z \in C$, $\exists\ x \in A$,$z = g(f(x))$

5. *si f et g sont bijectives alors g o f est bijective et* $(g\ o\ f\ )^{-1} = f^{-1}\ o\ g^{-1}$.

   $(g\ o\ f)\ o\ (f^{-1}\ o\ g^{-1}) = g\ o\ (f\ o\ f^{-1})\ o\ g^{-1}$
   $\Leftrightarrow (g\ o\ id_f)\ o\ g^{-1}$
   $\Leftrightarrow g\ o\ g^{-1} = id_G$

   $(f^{-1}\ o\ g^{-1})\ o\ (g\ o\ f)$
   $f^{-1}\ o\ (g^{-1}\ o\ g)\ o\ f$
   $(g^{-1}\ o\ g)(y) = g^{-1}(g(y)) = y = id_F$
   $(f^{-1}\ o\ id_f)\ o\ f = f^{-1}\ o\ f = id_E$
   $\Rightarrow (g\ o\ f)\ o\ (f^{-1}\ o\ g^{-1}) = id_G$
   $\Rightarrow (f^{-1}\ o\ g^{-1})\ o\ (g\ o\ f) = id_E$
   $\Longrightarrow (f^{-1}\ o\ g^{-1}) = (f\ o\ g)^{-1}$