Quiz de Mathématiques

Durée : 1 heure.
Aucun document n'est autorisé.
La calculatrice collège est tolérée.

Veuillez ne pas répondre sur le sujet, mais sur la **feuille de réponse** prévue à cet effet.

— Les questions peuvent présenter une ou plusieurs réponses correctes.

— **Noircir les cases, ne pas faire des croix sur les cases.**

— En cas d'erreur, utilisez du « blanco ».

— Une mauvaise réponse enlève des points, une absence de réponse n'a pas d'incidence.

BON COURAGE !

✻✻✻✻✻✻✻✻✻✻✻✻✻✻✻✻

1. On considère les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Quelle(s) est(sont) la(les) proposition(s) vraie(s) ?

(1)■ $A + B^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ (2)■ $BB^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (3)☐ $A^T C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

(4)☐ $C^T D = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

2. Soient A, B et C des matrices de taille $n \geqslant 1$. Parmi les affirmations suivantes, la(les)quelle(s) est(sont) vraie(s) ?

(1)☐ $AB = 0 \Longrightarrow A = 0$ ou $B = 0$
(2)☐ $A(BC) = (AC)B$
(3)■ $A(B + C) = AC + AB$
(4)☐ $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

3. On considère

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quelle(s) est(sont) la(les) propositions vraie(s) ?

(1)■ $A^2 = 2A$
(2)☐ $A^n = 2^n A,$ pour tout entier $n \geqslant 1$
(3)■ $(A - I)^{2n} = I,$ pour tout entier $n \geqslant 1$
(4)☐ $(A - I)^{2n+1} = A + I,$ pour tout entier $n \geqslant 1$
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

4. Parmi les matrices suivantes, la(les)quelle(s) est(sont) inversible(s) ?

(1)■ $\begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$ (2)□ $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ (3)■ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (4)□ $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(5)□ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

5. Soient $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

(1)■ $\det(A) = \det(A^T)$
(2)□ $AB^T = (AB)^T$
(3)□ $A^{-1}B = (AB)^{-1}$
(4)□ $\lambda \cdot \det(A) = \det(\lambda \cdot A)$
(5)□ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

6. Le déterminant ...

(1)■ du produit de deux matrices est le produit de leur déterminants.
(2)□ d'une matrice est zéro si et seulement si la matrice est nulle.
(3)■ de $A \in M_n(\mathbb{R})$ est $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$
(4)■ de $A \in M_n(\mathbb{R})$ est $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$
(5)□ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

7. On considère la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$$

La comatrice de A est :

(1)□ $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ (2)□ $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$ (3)■ $\begin{bmatrix} -1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ (4)□ $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

(5)□ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

8. On considère la matrice

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. L'inverse de A est :

(1)□ $\frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & b \\ c & a \end{bmatrix}$ (2)□ $\frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$ (3)□ $\frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} -a & c \\ d & -d \end{bmatrix}$ (4)□ $|A| \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

(5)■ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

9. Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont échelonnées ?

(1)■ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2)■ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ (3)□ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \end{bmatrix}$ (4)■ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

(5)□ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

10. On considère les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Quelle(s) est(sont) la(les) propositions vraie(s) ?

(1)☐ Le rang de A est 3
(2)■ Le rang de B est 1
(3)■ Le rang de C est 3
(4)☐ Le rang de D est 3
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

11. On considère le système d'équations d'inconnues $[x, y, z] \in \mathbb{R}^3$.

$$(S) \begin{cases} x + 2y + z &= 0 \\ -x + z &= 0 \\ x + y &= 0 \end{cases}$$

Parmi les affirmations suivantes, la(les)quelle(s) est(sont) vraie(s) ?

(1)■ $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y &= -x \\ z &= x \end{cases}$
(2)■ L'ensemble de solution de (S) est une droite.
(3)☐ (S) n'admet pas de solutions.
(4)☐ (S) admet une unique solution.
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

12. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On considère le système d'équations suivant :

$$(S) \begin{cases} x + y &= a \\ y + z &= b \\ z + t &= c \\ t + x &= d \end{cases}$$

Parmi les affirmations suivantes, la(les)quelle(s) est(sont) vraie(s) ?

(1)☐ (S) est n'est pas linéaire.
(2)☐ La matrice des coefficients associée à (S) n'est pas carrée.
(3)■ Le rang de la matrice associée à (S) est 3.
(4)■ (S) admet une unique solution si et seulement si $a + c = b + d$
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

13. Une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ est :

(1)■ un homomorphisme (2)☐ un automorphisme (3)☐ un endomorphisme

(4)■ un morphisme (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

14. Soient $u, v \in \mathbb{R}^p$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Une application f de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ est linéaire si ...

(1)☐ $f(u+v) = f(u) + f(v)$ (2)☐ $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ (3)■ $f(0_{\mathbb{R}^p}) = 0_{\mathbb{R}^n}$

(4)■ $f(\lambda u + \mu u) = \lambda f(u) + \mu f(u)$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

15. On considère les deux applications suivantes :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ telle que } x \mapsto \sin(x) \text{ et } g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ telle que } [x, y] \mapsto [y, x].$$

Quelle(s) est(sont) la(les) assertion(s) vraie(s) ?

(1)■ $f(0) = 0$ (2)□ f est une application linéaire. (3)□ $g([x, y]) = g([y, x])$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

(4)■ g est une application linéaire. (5)□ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

16. On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

L'application linéaire associée à A est la :

(1)□ réflexion par rapport à l'axe Oy
(2)□ réflexion par rapport à l'axe Ox
(3)□ rotation centrée en O d'angle $\frac{\pi}{2}$.
(4)■ symétrie par rapport à l'origine O.
(5)□ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

17. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'homothétie de rapport 2 et soit g la rotation du plan de $\dfrac{\pi}{2}$ centrée à l'origine. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies ?

(1)■ $Mat(f \circ g) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ (2)□ $Mat(f \circ g) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ (3)□ $Mat(f \circ g) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(4)■ $Mat(f \circ g) = Mat(g \circ f)$ (5)□ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

18. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u_1 = [1, 1, 0]$, $u_2 = [0, 1, -1]$ et $u_3 = [-1, 0, -1]$. Quelle(s) est(sont) la(les) assertion(s) vraie(s) ?

(1)□ $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une famille libre.
(2)□ $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
(3)■ u_3 est une combinaison linéaire de u_1 et u_2.
(4)□ $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(5)□ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

19. Parmi les vecteurs suivants, y en a-t-il qui **n'**est ou **ne** sont **pas** vecteur(s) de la base canonique de $\mathbb{R}^5$?

(1)■ $[0\ 0\ 1\ 0]^T$ (2)■ $[0\ 0\ 1\ 0\ 1]^T$ (3)□ $[1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ (4)□ $[0\ 0\ 0\ 1\ 0]^T$

(5)□ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

20. Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $f(e_1) = [1,\ 0,\ 2]$, $f(e_2) = [2,\ 1,\ 1]$ et $f(e_3) = [-1,\ 0,\ 1]$ et A la matrice de f. Cocher les affirmations correctes.

(1)□ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2)■ $f([x, y, z]) = [x + 2y - z, y, 2x + y + z]$ (3)□ $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$

(4)■ A est inversible (5)□ aucune des réponses précédentes n'est correcte.