ISEN **2016/2017**
CIR1 - Mathématiques

DEVOIR SURVEILLÉ 15/06/2017

Consignes :

- *Pour cette épreuve de 2 heures aucun document n'est autorisé et la calculatrice collège est tolérée.*
- *Les **3 exercices** qu'elle comporte sont indépendants.*
- ***Expliquez et justifiez** vos raisonnements avec un maximum de clarté et avec le vocabulaire adapté.*

Exercice 1.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique $b = \{e_1, e_2, e_3\}$ par la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

1. Décrire l'endomorphisme u sous forme d'un système d'équations.
2. Déterminer D la matrice diagonale représentant l'endomorphisme u en calculant ses vecteurs propres.
3. Déterminer une base $b' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice représentant l'endomorphisme u soit la matrice diagonale D en sachant que $u(e'_1) = 0$, $u(e'_2) = e'_2$ et $u(e'_3) = -e'_3$.
4. Exprimer A en fonction de D en determinant la matrice de passage de b à b'.
5. Décrire le ker u. L'endomorphisme u est un automorphisme ? Justifier.
6. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
7. Écrire un système d'équations différentielles $Y'(t) = A \cdot Y(t)$ associé à l'application h et décrire sa solution.
8. Décrire la solution du système avec conditions initiales : $Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Exercice 2.
On considère la fonction f définie par

$$f(x, y) = y^2 - x^2 + \frac{x^4}{2}$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
2. Calculer les points stationnaires de f, si ils existent.
3. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f afin de déterminer la nature des points stationnaires, si ils existent.
4. Est-ce que f admet un minimum global en $(-1, 0)$?
5. Déterminer la nature des points stationnaires sous la contrainte $g(x, y) = x + y - 8 = 0$.

Exercice 3.

On considère la courbe M définie par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = 3t^3 + 2t^2 - t - 1 \\ y(t) = 3t^2 + 2t + 1 \end{cases}$$

1. Une courbe paramétrée possède un point double s'il existe $(t_0, t_1) \in \mathbb{R}^2$ avec $t_0 \neq t_1$ tel que $M(t_0) = M(t_1)$. Montrer que la courbe paramétrée admet un point double.

   Suggestion : définir $S = t_0 + t_1$ et $P = t_0 \cdot t_1$

2. Déterminer les deux tangentes correspondantes aux points $M(t_0)$ et $M(t_1)$.