ISEN **2017/2018**

CIR1 - Mathématiques

PARTIEL 12/03/2018

Consignes :

- *Pour cette épreuve de **2** heures aucun document n'est autorisé et la calculatrice collège est tolérée.*
- *Les **3** exercices qu'il comporte sont indépendants.*
- *Expliquez vos raisonnements avec un maximum de clarté et avec le vocabulaire adapté.*
- *Une copie soignée est gage d'une bonne note !*

Exercice 1.

Soit $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, soient $A = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ et $P = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Calculer $P^T P$.

   La matrice P est inversible ? Si oui **pourquoi** et donner son inverse P^{-1}.

2. Calculer $D = P^{-1}AP$.

   La matrice D sera une matrice diagonale. À partir de cette relation, comment on peut retrouver A ?

3. Calculer $X^T AX$.

4. On pose $X' = P^{-1}X = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}$.

   (a) À partir de cette relation, comment on peut retrouver X ?

   (b) Calculer $(X')^T DX'$ et montrer que ce réel est strictement positif pour $X' \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   (c) En déduire que pour tout $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, $X \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, on a $X^T AX \geq 0$.

   Suggestion : vous pouvez utiliser les relations déterminées aux questions précédentes.

Exercice 2.

1. Énoncer le Théorème de Fermat.

2. Est-ce que 91 est premier ? En utilisant le Théorème de Fermat avec $a = 2$, **justifier** votre réponse.

3. On considère un entier naturel a et le premier nombre de Carmichaël $n = 561$.

   (a) Calculer le reste de la division euclidienne de a^{560} par 3, par 11 et par 17.

   (b) Montrer que pour tout a premier avec 561 on a : $a^{561} \underset{561}{\equiv} a$.

4. Écrire la réciproque du Théorème de Fermat. Est-elle vraie ? **Expliquer** votre réponse.

5. Donner une définition de "nombre de Carmichaël".

Exercice 3.
On considère la fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{Q} = \dfrac{X^4}{X^4 - 1}$.

En justifiant et en expliquant vos raisonnements et vos résultats déterminer :

1. les pôles de F sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ avec leur multiplicité ;
2. la factorisation de Q sur sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$;
3. la décomposition en éléments simples de F sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.