ISEN **2015/2016**

CIR1 - Mathématiques

EXAMEN 13/06/2016

Consignes :

- Pour cette épreuve de **2** heures aucun document n'est autorisé et la calculatrice collège est tolérée.
- Les **3** exercices qu'elle comporte sont indépendants.
- Expliquez vos raisonnements avec un maximum de **clarté** et avec le **vocabulaire** adapté.
- Une copie soignée est gage d'une bonne note !

Exercice 1.
Soit $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice définie par

$$A = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$$

associée à l'endomorphisme f dans $\mathcal{B}$, la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. On considère $u_1 = [1\ 0\ -1]^T$, $u_2 = [1\ -1\ 0]^T$ et $u_3 = [1\ 1\ 1]^T$.
   (a) Démontrer que $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer D, la matrice associée à f dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$.
2. Calculer D^n pour tout entier n.
3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$A^n = \frac{(a-b)^n}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{(a+2b)^n}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 2.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + \frac{y^4}{2}.$$

1. Donner un domaine du plan, le plus large possible, sur lequel on peut affirmer immédiatement que $f \in \mathcal{C}^2$. Justifier.
2. Calculer les points critiques de $f(x, y)$ et établir leur nature.
3. Écrire la formule de Taylor-Young d'ordre 2 au point (1,-1).

Exercice 3.
On considère trois vecteurs $u = [\frac{3}{2}\ 3]^T$, $v = [3\ 1]^T$ et $w = [2\ 2]^T$ de $\mathbb{R}^2$ et l'application linéaire suivante :

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (5x - 3y, 6x - 4y)$$

1. En utilisant la définition de vecteur propre, vérifier si u, v et w sont vecteurs propres de g.
   Dans le cas affirmatif, donner la valeur propre associée.
2. Écrire un système d'équations différentielles associé à l'application g et décrire sa solution.