

EXAMEN 13/01/2017

Consignes :

- Pour cette épreuve de **2** heures aucun document n'est autorisé et la calculatrice collègue est tolérée.
- Les **4** exercices qu'elle comporte sont indépendants.
- Expliquez vos raisonnements avec un maximum de **clarté** et avec le **vocabulaire** adapté.
- Une copie soignée est gage d'une bonne note !

Exercice 1.

On considère

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } S = \frac{1}{4} M^T M.$$

Justifier vos réponses.

- a) La matrice S est-elle carrée ? Quelle est sa dimension ? Est-elle symétrique ?
- b) On considère le système linéaire $A \cdot X = b$, avec $X = [x \ y \ z]^T$, $b = [1/2 \ 1/2 \ 3/8]^T$ et $A = S - \frac{3}{4} Id_3$, où Id_3 est la matrice identité d'ordre 3.
- i) Écrire les équations du système linéaire.
- ii) Résoudre le système linéaire avec la méthode du pivot de Gauss et en déduire le rang de A .

Exercice 2.

On pose $z = \frac{-4}{1 + i\sqrt{3}}$.

- a) Écrire z sous forme algébrique, trigonométrique et exponentielle.
- b) Calculer z^3 .
- c) Calculer les racines carrées de z .

Exercice 3.

Résoudre l'équation différentielle ci-dessous :

$$y'' + 2y' + y = e^{kx}$$

- a) dans le cas où $k = -\frac{1}{2}$;
- b) puis dans le cas où $k = -1$.

Exercice 4.

On pose

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt \text{ et } C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt$$

- a) Effectuer le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$ sur S .
Qu'est-ce que vous remarquez par rapport à C ?
- b) Que vaut $S + C$? En déduire S et C .
- c) En déduire $\int_0^1 \frac{1}{t + \sqrt{1-t^2}} dt$.

Rappel : $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$