Quiz de Mathématiques

Durée : 1 heure.
Aucun document n'est autorisé.
La calculatrice collège est tolérée.

Veuillez ne pas répondre sur le sujet, mais sur la **feuille de réponse** prévue à cet effet.

— Les questions peuvent présenter une ou plusieurs réponses correctes.

— **Noircir les cases, ne pas faire des croix sur les cases.**

— En cas d'erreur, utilisez du « blanco ».

— Une mauvaise réponse enlève des points, une absence de réponse n'a pas d'incidence.

BON COURAGE !

∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗∗

1. Quelle(s) est(sont) la(les) assertion(s) vraie(s) ?

(1)☐ Une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ne peut pas être linéaire.
(2)■ Une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est linéaire si et seulement s'il existe des réels a, b, c et d tels que $f([x, y]) = [ax + by, cx + dy]$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
(3)☐ Une application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est linéaire si et seulement s'il existe des réels a, b et c tels que $f([x, y]) = [ax, by, cz]$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
(4)☐ Une application bijective est toujours linéaire.
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

2. On considère les deux applications suivantes :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \text{ telle que } [x, y, z] \mapsto [x + y, x - z] \text{ et } g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \text{ telle que } [x, y, z] \mapsto [xy, xz].$$

Quelle(s) est(sont) la(les) assertion(s) vraie(s) ?

(1)☐ $f([0, 0]) = [0, 0, 0]$ (2)■ f est une application linéaire. (3)☐ $g([1, 1, 0]) = g([1, 0, 0]) + g([0, 1, 0])$
(4)☐ g est une application linéaire. (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

3. On considère $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ munis de leurs bases canoniques et f l'application définie par :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ telle que } [x, y] \mapsto [y - x]$$

La matrice de f relativement aux bases canoniques est :

(1)■ $\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$ (2)☐ $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (3)☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (4)☐ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

4. On considère f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ avec B la base canonique et B' une autre base.
On note A la matrice de f, P la matrice de passage de la base B à la base B', Q la matrice de passage de la base B' à la base B et N la matrice de f dans la base B'.
Quelle(s) est(sont) la(les) assertion(s) vraie(s) ?

(1)☐ $A = P^{-1}NP$ (2)■ $N = P^{-1}AP$ (3)■ $A^n = PN^nP^{-1}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$
(4)☐ $N^n = PA^nP^{-1}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

5. Soient $u_1 = [1,0,0]$, $u_2 = [1,1,0]$, $u_3 = [0,1,1]$, $v_1 = [1,1]$, $v_2 = [1,-1]$ et f l'application linéaire définie par :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \text{ telle que } [x,y,z] \mapsto [x+y, x-z]$$

La matrice de f par rapport aux bases $\{u_1, u_2, u_3\}$ et $\{v_1, v_2\}$ est ...

(1)☐ $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ (2)☐ $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (3)☐ $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(4)■ $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

6. On considère $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique et f l'application définie par :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ telle que } [x,y] \mapsto [2x+y, 4x-3y]$$

Quelle(s) est(sont) la(les) assertion(s) vraie(s) ?

(1)■ La matrice de f dans la base canonique est : $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

(2)☐ La matrice de f dans la base canonique est : $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

(3)■ f est injective.

(4)■ f est bijective.

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

7. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ et la base $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ où $u_1 = [1,1,-1]$, $u_2 = [0,2,1]$ et $u_3 = [0,1,1]$.
On note P la matrice de passage de la base B à la base B' et Q la matrice de passage de la base B' à la base B.
Quelle(s) est(sont) la(les) assertion(s) vraie(s) ?

(1)■ $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (2)☐ $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (3)■ $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(4)☐ P est inversible et $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

8. On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire, $B_1 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ et $B_2 = \{\varepsilon'_1, \varepsilon'_2\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$.
Quelle(s) est(sont) la(les) assertion(s) vraie(s) ?

(1)■ La matrice de passage de B_1 vers B_2 contient en colonnes les coordonnées des vecteurs de la base B_2 exprimées dans B_1.

(2)☐ La matrice de passage de B_1 vers B_2 contient en colonnes les vecteurs de la base B_2.

(3)☐ La matrice de passage de B_2 vers B_1 contient en colonnes les coordonnées des vecteurs de la base B_2 exprimées dans B_1.

(4)☐ La matrice de passage de B_2 vers B_1 contient en colonnes les vecteurs de la base B_1.

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

9. On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire, $B_1 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ et $B_2 = \{\varepsilon'_1, \varepsilon'_2\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$.
La matrice associée à l'application linéaire f dans les bases B_1 vers B_2 ...

(1)☐ contient en colonnes les coordonnées des vecteurs de la base B_2 exprimés dans B_1.

(2)☐ contient en colonnes les coordonnées des vecteurs de la base B_1 exprimés dans B_2.

(3)■ a pour colonnes l'image par f des vecteurs de la base B_1 exprimée dans la base B_2.

(4)☐ a pour colonnes l'image par f des vecteurs de la base B_2 exprimée dans la base B_1.

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

10. Soit $A \in Gl(\mathbb{R}^n)$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application linéaire de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$
Quelle(s) est(sont) la(les) assertion(s) vraie(s) ?

(1)■ f est bijective.
(2)■ Le noyau de f est réduit au vecteur nul.
(3)■ Le rang de f est n.
(4)■ Le rang de A est n.
(5)□ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

11. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire.
Quelle(s) est(sont) la(les) assertion(s) vraie(s) ?

(1)□ Ker$f$ peut être vide.
(2)□ Ker$f$ est le vecteur nul.
(3)□ $0_E \in \mathrm{Im} f$
(4)□ $\mathrm{Im}(f) = F$
(5)■ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

12. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire.
Quelle(s) est(sont) la(les) assertion(s) vraie(s) ?

(1)□ f est injective si et seulement si Ker$f$ est vide.
(2)□ f est injective si et seulement si dim Ker$f$ vaut 1
(3)■ f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im} f = F$.
(4)□ f est bijective si et seulement si $\mathrm{Im} f = F$.
(5)□ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

13. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^5$.
Quelle(s) est(sont) la(les) assertion(s) vraie(s) ?

(1)□ Si $\mathrm{Ker} f = \{[0,0,0]\}$, alors f est surjective.
(2)■ f est injective si et seulement si $\dim \mathrm{Im} f = 3$.
(3)□ f est bijective si et seulement si $\mathrm{Ker} f = \{[0,0,0]\}$.
(4)■ $\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = 3$
(5)□ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

14. On considère l'application :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \text{ telle que } [x, y, z] \mapsto [x - y, y - z, x + z]$$

Quelle(s) est(sont) la(les) assertion(s) vraie(s) ?

(1)□ $\dim \mathrm{Ker}\ f = 1$ (2)■ f est injective (3)■ $\dim \mathrm{Im}\ f = 3$ (4)■ f est bijective

(5)□ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

15. On considère l'application :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \text{ telle que } [x, y, z] \mapsto [x - z, y + z, x + y]$$

Quelle(s) est(sont) la(les) assertion(s) vraie(s) ?

(1)■ $\mathrm{Ker}\ f = \{[1, -1, 1]\}$ (2)□ f est bijective (3)□ f est injective

(4)■ $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$ (5)□ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

16. Soient E et F deux $\mathbb{R}-$espaces vectoriels de dimensions finies et f une application linéaire de E dans F.
Quelle(s) est(sont) la(les) assertion(s) vraie(s) ?

(1)☐ Si f est injective, alors f est surjective.
(2)☐ Si f est surjective, alors f est injective.
(3)☐ Si dim $E =$ dim F, alors f est bijective.
(4)■ Si f est bijective, alors dim $E =$ dim F.
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

17. Soit E et F deux espaces vectoriels munis de leurs bases canoniques $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
Soit $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$ la matrice de l'application linéaire f dans ses bases canoniques.
Soit $N = \text{Mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(f)$ la matrice de f par rapport aux nouvelles bases $\mathcal{B}'_E$ pour E et $\mathcal{B}'_F$ pour F.
Quelle(s) est(sont) la(les) assertion(s) vraie(s) ?

(1)■ $f = id_F \circ f \circ id_E$
(2)■ $N = P_{\mathcal{B}'_F,\mathcal{B}_F} \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) \cdot P_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}'_E}$
(3)■ $(E,\mathcal{B}'_E) \overset{id_E}{\to} (E,\mathcal{B}_E) \overset{f}{\to} (F,\mathcal{B}_F) \overset{id_F}{\to} (F,\mathcal{B}'_F)$
(4)■ $N = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}'_F}(id_F) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}_E}(id_E)$
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

18. Soit f un endomorphisme et soit A sa matrice associée.
Quelle(s) est(sont) la(les) assertion(s) vraie(s) ?

(1)☐ Une valeur propre ne peut pas être nulle.
(2)☐ Le polynôme caractéristique de A est $A - \lambda Id$
(3)☐ A est toujours diagonalisable.
(4)☐ Un vecteur propre est unique.
(5)■ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

19. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.
Quelle(s) est(sont) la(les) assertion(s) vraie(s) ?

(1)■ Si A est diagonalisable, elle est semblable à une matrice diagonale.
(2)■ A est diagonalisable si et seulement si elle possède n vecteurs propres formant une base.
(3)☐ A est diagonalisable si et seulement si les valeurs propres sont simples.
(4)☐ A n'est pas diagonalisable si elle possède des valeurs propres coïncidentes.
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

20. Parmi les matrices suivantes, la(lesquelles) est(sont) diagonalisable(s) ?

(1)■ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (2)☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (3)■ $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ (4)■ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.