ISEN **2020/2021**

CIR1 ET CNB1 - MATHÉMATIQUES

PARTIEL 10/05/2021

Consignes :

- *Pour cette épreuve de 2 heures aucun document n'est autorisé et la calculatrice collège est tolérée.*
- *L'épreuve est formée par **deux exercices, un qcm et un exercice bonus**. Pour le qcm il faut répondre sur la grille pré-remplie ci-jointe*

Bon courage !

Exercice 1. Problème (12 Points)

Pour toutes les questions suivantes, on considère l'application linéaire $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associée à la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 10 & -6 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

avec la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Écrire l'application linéaire u.
2. Montrer que les vecteurs $\varepsilon_1 = [-4, -1, 1]^T$ et $\varepsilon_2 = [10, 1, -7]^T$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
3. Calculer le noyau de u. A est-elle inversible ? Justifier.
4. u est-elle un automorphisme ?
5. Énoncer le théorème du rang. Quel est le rang de u ?
6. Est-ce que la famille $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ engendre $\mathrm{Im}(u)$?
7. Calculer le polynôme caractéristique de A. Donner les valeurs propres de A.
8. Montrer que A est diagonalisable.
9. Donner une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
10. On s'intéresse au système $AX = B$ avec $B = [1, -1, 1]^T$. Ce système admet-il une(des) solution(s) ? Si oui, la(les) calculer.

Exercice 2. (3 Points)

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans leurs bases canoniques respectives est

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

On appelle (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (f_1, f_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On pose

$$e'_1 = e_2 + e_3 \quad e'_2 = e_3 + e_1 \quad e'_3 = e_1 + e_2 \quad f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2) \quad f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$$

1. (BONUS) Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) et (f'_1, f'_2) forment des bases respectivement de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
2. Exprimer la matrice de f dans ces nouvelles bases.

Exercice 3. QCM (5 Points)
Voir sujet ci-joint.
Veuillez répondre sur la feuille de réponse pré-remplie prévue à cet effet.

Exercice 4. BONUS (4 Points)
On suppose qu'une population x de lapins et une population y de loups sont gouvernées par le système suivant d'équations différentielles :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & 4x - 2y \\ y' & = & x + y \end{array} \right.$$

1. Diagonaliser la matrice A associée à ce système.
2. Exprimer le système et ses solutions dans une base de vecteurs propres de A.