

DS 19/03/2021

Consignes :

- Pour cette épreuve de 2 heures aucun document n'est autorisé et la calculatrice collège est tolérée.
- Les 4 exercices sont indépendants et peuvent être faits dans l'ordre de votre choix.
- Expliquez vos raisonnements avec un maximum de **clarté** et avec le **vocabulaire** adapté.
- Une copie soignée est gage d'une bonne note !

Bon courage !

Exercice 1. (4 Points)

Soit $f(x) = \frac{-4x^2 + 4x + 8}{x^2 - 3x + 2}$.

1. Calculer la limite de f en $+\infty$, $-\infty$ et 2.
2. Déterminer au voisinage de $+\infty$ le développement limité à l'ordre 3 de $f(x)$.

Exercice 2. (4 Points)

On considère le polynôme $P = -X^8 + 2X^4 - 1$ et la fraction rationnelle $F = \frac{1}{P}$.

1. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Écrire les décompositions en éléments simples **théoriques** dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ de F .
3. (BONUS) Calculer les coefficients des décompositions en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ de F .

Exercice 3. (6 Points)

Soient les matrices

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad C = AB = \begin{bmatrix} 12 & 5 & -6 \\ 1 & 11 & 10 \end{bmatrix}.$$

1. Donner les tailles des matrices A et C et les coefficients $c_{2,3}$ et $c_{1,2}$ de la matrice C .
2. Calculer, si c'est possible, les produits : AC et CA .
3. Quelle est la nature de la matrice A ? (Symétrique, anti-symétrique, triangulaire, diagonale, etc)
4. Déterminer B .
5. Calculer $A + 2I$
6. Donner la formule du binôme de Newton et calculer A^n .

Exercice 4. (6 Points)

Puissances de 3

1.
 - (a) Pour $1 \leq n \leq 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.
 - (b) Est-ce que $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7 ? Justifier votre réponse.
 - (c) Calculer le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7.
 - (d) De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n entier quelconque ?
 - (e) En déduire que pour tout entier naturel n , 3^n est premier avec 7.
2. Soit $A_n = \sum_{i=0}^{n-1} 3^i$, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
 - (a) Énoncer le théorème de Gauss.
 - (b) (BONUS) Montrer que A_n est divisible par 7 si et seulement si $3^n - 1$ est divisible par 7.
 - (c) (BONUS) En déduire les valeurs de n telles que A_n soit divisible par 7.