

QUIZ de MATHÉMATIQUES N°2

30/09/2016

Aucun document n'est autorisé. La calculatrice collègue est tolérée.

*Veillez ne pas répondre sur le sujet, mais sur la **feuille de réponse** prévue à cet effet.*

Les questions peuvent présenter une ou plusieurs réponses valides.

Une mauvaise réponse enlève des points, une absence de réponse n'a pas d'incidence.

Question 41. Soient E et F sont deux ensembles finis et $f : E \rightarrow F$ une application. Parmi les implications suivantes, lesquelles sont vraies ?

1. ☐ Si f est injective $\Rightarrow \text{card}(E) \geq \text{card}(F)$
2. ☐ Le nombre d'applications entre E et F est $\text{card}(F)^{\text{card}(E)}$
3. ☐ On peut toujours définir $f^{-1} : F \rightarrow E$.
4. ☐ Si f est bijective, $(f^{-1})^{-1} = \text{Id}_E$.
5. ☐ aucune des réponses précédents n'est correcte

Question 42. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies ?

1. ☐ Si les applications $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont injectives, alors l'application $g \circ f$ est injective
2. ☐ Si une application $f : E \rightarrow E$ vérifie $f \circ f = \text{Id}_E$, alors f est bijective et $f^{-1} = f$.
3. ☐ Si l'application composée $g \circ f$ est injective, alors f et g sont injectives.
4. ☐ Si une application $f : E \rightarrow E$ vérifie $f \circ f$, alors $f = \text{Id}_E$.
5. ☐ aucune des réponses précédents n'est correcte

Question 43. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies ?

1. ☐ $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$ est surjective
2. ☐ $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto n + 1$ est bijective
3. ☐ $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ est bijective
4. ☐ $k : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ n'est pas bijective
5. ☐ aucune des réponses précédents n'est correcte

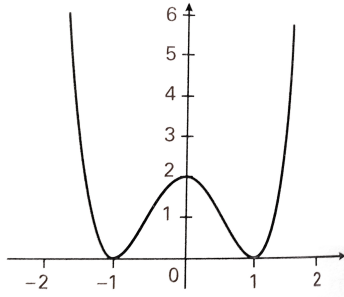
Question 44. Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

1. ☐ f est injective si et seulement si tout élément de E a une image dans F
2. ☐ $\text{Id}_E \circ f = f = f \circ \text{Id}_F$
3. ☐ Si $g \circ f$ est surjective alors f et g sont surjectives.
4. ☐ Si f et g sont bijectives alors $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$
5. ☐ aucune des réponses précédents n'est correcte

Question 45. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ telle que $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

1. ☐ f est une surjection
2. ☐ f est une injection
3. ☐ f^{-1} n'existe pas
4. ☐ $f^{-1}(y) = \frac{2y+1}{y-2}$
5. ☐ aucune des réponses précédents n'est correcte

Question 46. On considère l'application f définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} dont la représentation graphique est donnée ci-contre.



1. ☐ L'image de 0 par f est égale à: $f(0) = 2$
2. ☐ Si $0 < y < 2$, alors y possède trois antécédents
3. ☐ f n'est pas injective
4. ☐ f est surjective
5. ☐ aucune des réponses précédents n'est correcte

Question 47. On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par

$$f(x) = e^x \quad g(x) = \ln(x)$$

1. ☐ $f \circ g \neq Id_{\mathbb{R}}$
2. ☐ $g \circ f = Id_{\mathbb{R}}$
3. ☐ $f^{-1} = g$
4. ☐ $g^{-1} = f$
5. ☐ aucune des réponses précédents n'est correcte

Question 48. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

1. ☐ Pour tout $n \in \mathbb{N}^* : \sum_{i=1}^n 1 = 1$.
2. ☐ Pour tout $n \in \mathbb{N}^* : \sum_{i=1}^n i = in$.
3. ☐ Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leq k \leq n : \binom{n+k}{n} = \frac{n!}{k!(n+k)!}$
4. ☐ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+y)^n = \sum_{k=0}^n x^k y^{n-k}$.
5. ☐ aucune des réponses précédents n'est correcte

Question 49. Cocher les bonnes simplifications.

1. ☐ $\sum_{k=1}^n 3k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. ☐ $\sum_{k=3}^{n+1} k 2^{2k+1} = \sum_{i=0}^{j-2} (i+3) 2^{2i+7}$
3. ☐ $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{10}$
4. ☐ $\prod_{k=1}^n 5a_k = 5 \prod_{k=1}^n a_k$
5. ☐ $n! = \prod_{1 \leq k \leq n} k$

Question 50. Soient n, k, x et y des entiers. Cocher les bonnes simplifications.

1. ☐ $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k+1} + \binom{n-1}{k}$

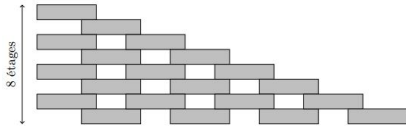
2. ☐ $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$

3. ☐ $(n+1)! = n!(n+1)$

4. ☐ $(x+1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$

5. ☐ $(x+2y)^5 = 2 \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} x^k y^{5-k}$

Question 51. Voici une construction à 8 étages réalisé à base de Léo. On souhaite poursuivre la construction avec un nombre *pair* d'étages n .



Combien de briques cela nécessite-t-il ?

1. ☐ $n(n+1)$

2. ☐ $n(n-1)$

3. ☐ $\frac{n(n+2)}{4}$

4. ☐ $\frac{n(n+3)}{2}$

5. ☐ $\frac{(n+1)^2}{2}$

Question 52. On suppose $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n a_k = n(n+2)$

1. ☐ $\sum_{k=0}^6 a_k = 48$

2. ☐ $\sum_{k=0}^{n+1} a_k = (n+1)(n+2)$

3. ☐ $\sum_{k=0}^{n-1} a_k = (n-1)(n+2)$

4. ☐ $\sum_{k=n+1}^{2n} a_k = n(3n+2)$

5. ☐ aucune des réponses précédents n'est correcte

Question 53. En lançant deux fois une pièce équilibrée, la probabilité d'obtenir deux résultats différents (un pile et un face) est :

1. ☐ $\frac{1}{2}$ 2. ☐ $\frac{1}{3}$ 3. ☐ $\frac{1}{4}$ 4. ☐ $\frac{2}{3}$ 5. ☐ aucune des réponses précédents n'est correcte

Question 54. La forme algébrique de $\frac{1}{(1+2i)(3-i)}$ est :

1. ☐ $-\frac{1}{10} - i\frac{1}{10}$ 2. ☐ $\frac{1}{10} + i\frac{1}{10}$ 3. ☐ $\frac{1}{10} - i\frac{1}{10}$ 4. ☐ $-\frac{1}{10} - i\frac{1}{10}$ 5. ☐ Elle n'existe pas.

Question 55. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

1. ☐ Pour tout $t \in \mathbb{R}$, le conjugué du nombre complexe $1 + e^{it}$ est $1 - e^{it}$.
2. ☐ Pour tout $(u, v) \in \mathbb{C}^2 : \overline{uv} = \overline{u} \overline{v}$.
3. ☐ Pour tout $z \in \mathbb{C} : |z| = z\overline{z}$.
4. ☐ Pour tout $z \in \mathbb{C}^* : |z| = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}$.
5. ☐ aucune des réponses précédents n'est correcte

Question 56. D'après Euler, $\sin \theta$ est égal à

1. ☐ $\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$
2. ☐ $\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$
3. ☐ $\frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$
4. ☐ $\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2i}$
5. ☐ $\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Question 57. Soit $z = 4\sqrt{3} + 4i$ un nombre complexe sous forme algébrique. Cocher ses écritures exponentielle et trigonométrique si présentes.

1. ☐ $8e^{\frac{\pi}{6}i}$
2. ☐ $8e^{\frac{\pi}{3}i}$
3. ☐ $8(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6}))$
4. ☐ $8(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}))$
5. ☐ aucune des réponses précédents n'est correcte

Question 58. Soient a un nombre réel et $z = \sin a + i\cos a$ un nombre complexe. Cocher la ou les écritures équivalentes si présentes.

1. ☐ $e^{i(-a+\pi)}$
2. ☐ $e^{i(-a+\frac{\pi}{2})}$
3. ☐ ie^{-ia}
4. ☐ $e^{i(a+\pi)}$
5. ☐ aucune des réponses précédents n'est correcte

Question 59. Soient $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_3 = z_1z_2$

1. ☐ $|z_1| = 1$ et $|z_2| = 2$
2. ☐ $\arg(z_1) = \frac{\pi}{4}$ et $\arg(z_2) = \pi$
3. ☐ $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = 2e^{i\pi}$
4. ☐ $z_3 = (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})$
5. ☐ aucune des réponses précédents n'est correcte

Question 60. Soit $r = 3$ et $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Cocher la forme algébrique de ce complexe si présente.

1. ☐ $z = -\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$
2. ☐ $z = \frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$
3. ☐ $z = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$
4. ☐ $z = \frac{3\sqrt{2}}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$
5. ☐ aucune des réponses précédents n'est correcte