

DEVOIR SURVEILLÉ 6/11/2015

Consignes :

- Pour cette épreuve de **2** heures aucun document n'est autorisé et la calculatrice collègue est tolérée.
- Les **4** exercices qu'elle comporte sont indépendants.
- Expliquez vos raisonnements avec un maximum de **clarté** et avec le **vocabulaire** adapté.
- Une copie soignée est gage d'une bonne note !

Exercice 1

Soient les quatre assertions suivantes :

$$(a) \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0 \quad ; \quad (b) \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$$

$$(c) \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0 \quad ; \quad (d) \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x$$

1. Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ?

2. Donner leur négation.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ dans \mathbb{R} par : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}, \quad f(x) = \frac{2+x}{3-x}$.

1. f est-elle injective ? Surjective ?

2. Définir le domaine d'existence de la bijection réciproque de f et expliciter la.

Exercice 3

1. Pour tout nombre complexe Z , on pose $P(Z) = Z^4 - 1$.

(a) Factoriser $P(Z)$.

(b) En déduire les solutions dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes de l'équation $P(Z) = 0$, d'inconnue Z .

(c) Déduire de la question précédente les solutions dans \mathbb{C} de l'équation d'inconnue z :

$$\left(\frac{2z+1}{z-1} \right)^4 = 1$$

2. (a) Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Placer les points A , B et C d'affixes respectives :

$$a = -2, \quad b = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i \quad \text{et} \quad c = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

- (b) Démontrer que les points O , A , B et C sont situés sur un même cercle que l'on déterminera.
3. Placer le point D d'affixe $d = -\frac{1}{2}$. Exprimer sous forme trigonométrique le nombre complexe z' défini par :

$$z' = \frac{a - c}{d - c}$$

En déduire le rapport $\frac{CA}{CD}$.

Quelle autre conséquence géométrique peut-on tirer de l'expression de z' ?

Exercice 4

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad y'' - 4y' + 4y = d(x),$$

où d est une fonction qui sera précisée plus loin.

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E) .
2. Trouver une solution particulière de (E) lorsque $d(x) = e^{-2x}$ et lorsque $d(x) = e^{2x}$ respectivement.
3. Donner la forme générale des solutions de (E) lorsque

$$d(x) = \frac{e^{-2x} + e^{2x}}{4}$$

4. Y-a-t-il des solutions de (E) vérifiant :

$$y'(0) = 1$$

$$y(0) = 0$$