

DEVOIR SURVEILLÉ 24/03/2017

Consignes :

- Pour cette épreuve de 2 heures aucun document n'est autorisé et la calculatrice collègue est tolérée.
- Les **5 exercices** qu'elle comporte sont indépendants.
- Expliquez et justifiez vos raisonnements avec un maximum de clarté et avec le vocabulaire adapté.
- Une copie soignée est gage d'une bonne note !

Exercice 1.

1. Énoncer la formule de Taylor-Young pour une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0.
2. Écrire le développement limité de $\frac{1}{1+x}$ au voisinage de 0 à l'ordre 3.
3. En déduire le développement limité de $\frac{1}{1+e^x}$ au voisinage de 0 à l'ordre 3.
4. En utilisant ce qui précède, déterminer l'asymptote au graphe de f pour $x \rightarrow +\infty$, où

$$f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

Exercice 2.

Calculer les limites suivantes en justifiant vos calculs :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^x) \sin x}{x^2 + x^3} \quad \text{et} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$$

Exercice 3.

1. Déterminer tous les couples d'entiers $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $13u + 5v = 3$.
2. Déterminer les restes de la division euclidienne de 2^{2013} par 5 et par 13.
3. Déduire des deux questions qui précèdent le reste de la division euclidienne de 2^{2013} par 65.

Exercice 4.

Soit $P = X^4 - X^3 - X + 1$.

1. Déterminer, avec leur multiplicité, les racines de P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$. Justifier.
2. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Décomposer la fraction $\frac{3}{P}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ et dans $\mathbb{C}(X)$.

Exercice 5.

Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont l'image de la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ est

$$f(e_1) = -7e_1 - 6e_2$$

$$f(e_2) = 8e_1 + 7e_2$$

$$f(e_3) = 6e_1 + 6e_2 - e_3$$

1. Pour tout vecteur $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$ déterminer $f \circ f(x)$.
2. f est bijective ? Si oui, déterminer f^{-1} .