Durée : 1 heure.
Aucun document n'est autorisé.
La calculatrice collège est tolérée.

Veuillez ne pas répondre sur le sujet, mais sur la **feuille de réponse** prévue à cet effet.

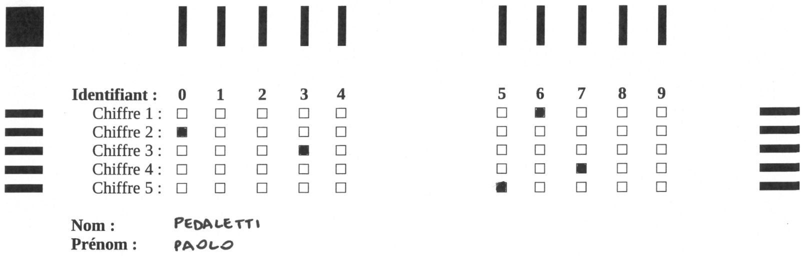
— Les questions peuvent présenter une ou plusieurs réponses valides.

— Une mauvaise réponse enlève des points, une absence de réponse n'a pas d'incidence.

— En cas d'erreur, utilisez du « blanco ».

— Soyez très vigilant, avant de répondre à une question, de cocher la bonne ligne dans la grille.

— N'oubliez pas vos NOM, PRÉNOM et LOGIN (p62xxx). Par exemple, p62375 s'encode ainsi :



Identifiant :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre 1 :	☐	☐	☐	☐	☐	☐	■	☐	☐	☐
Chiffre 2 :	■	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Chiffre 3 :	☐	☐	☐	■	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Chiffre 4 :	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	■	☐	☐
Chiffre 5 :	☐	☐	☐	☐	☐	■	☐	☐	☐	☐

Nom : PEDALETTI
Prénom : PAOLO

BON COURAGE !

⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂

1. On considère l'équation différentielle suivante :

$$y'' + y' - 2y = e^{-x}(x^2 + x + 1).$$

Dans ce cas, on cherche une solution particulière de la forme :

(1)☐ $y_p = e^x(x^2 + x + 1)$
(2)☐ $y_p = e^x(ax^3 + bx^2 + cx + d)$
(3)☐ $y_p = e^{-x}(ax^2 + bx + c)$
(4)☐ $y_p = x^2 e^{-x}(ax^2 + bx + c)$
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

2. Cocher la (les) affirmation(s) correcte(s).

(1)☐ $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + c$ (2)☐ $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + c$ (3)☐ $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(4)☐ $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

3. Soit $c \in \mathbb{R}$ et soit $f'(x) = \dfrac{2}{x^2}$. Alors $f(x) = \dots$

(1)☐ $\dfrac{2}{3}x^3 + c$ (2)☐ $-\dfrac{2}{x} + c$ (3)☐ $\ln(x^2) + c$ (4)☐ $\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right) + c$
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

4. On considère l'équation différentielle (ε) $y'' + y = 0$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies ?

   (1)☐ L'équation caractéristique de (ε) est $r^2 + r = 0$.
   (2)☐ Les solutions de l'équation caractéristique sont $r_1 = i$ et $r_2 = \overline{r_1}$.
   (3)☐ Les solutions de (ε) sont du type $y(x) = (k_1 x + k_2)e^{rx}$, avec $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.
   (4)☐ L'équation (ε) a des solutions réelles.
   (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

5. On considère $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x$. Si on utilise le changement de variable $t = x^2$, on peut écrire :

   (1)☐ $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} 2\sqrt{t}\cos(t)\,\mathrm{d}t$ (2)☐ $\displaystyle\int_0^{\pi} 2\sqrt{t}\cos(t)\,\mathrm{d}t$ (3)☐ $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(t)\,\mathrm{d}t$
   (4)☐ $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

6. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x$.

   (1)☐ 0 (2)☐ 1 (3)☐ $\dfrac{\pi}{2}$ (4)☐ $\dfrac{\pi}{4}$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

7. Une fonction f est solution de l'équation différentielle $y' = 2y + e^x$. Que peut-on en déduire de la fonction g définie par $f(x) = g(x) - e^x$? g est solution de l'équation différentielle ...

   (1)☐ $y' = 2y + 2$ (2)☐ $y' = 2y$ (3)☐ $y' = y + 2$ (4)☐ $y' = 2y + e^x$
   (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

8. Une primitive de $\ln(x)$ est ...

   (1)☐ $\dfrac{1}{x}$ (2)☐ $\dfrac{2}{x^2}$ (3)☐ $x\ln(x)$ (4)☐ $x\ln(x) - x$
   (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

9. Soient f une fonction continue définie sur I et ϕ définie sur J une bijection telle que $\phi(J) \subset I$. Cocher la(les) affirmation(s) correcte(s)

   (1)☐ $\displaystyle\int f(\phi(x)) \cdot \phi'(x)\,\mathrm{d}x = (F \circ \phi)(x) + c$, avec F une primitive de f sur I et $c \in \mathbb{R}$.
   (2)☐ $\displaystyle\int \phi'(x) \cdot \phi^r(x)\,\mathrm{d}x = (r+1)\phi^{r+1}(x) + c$, avec r, c réels.
   (3)☐ $\displaystyle\int \phi'(x)e^{\phi(x)}\,\mathrm{d}x = e^{\phi(x)} + c$
   (4)☐ $\displaystyle\int \frac{1}{\phi(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|\phi(x)| + c$, avec $c \in \mathbb{R}$.
   (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

10. On considère l'équation différentielle $e^{2x}y' - 3y = \cos(x)$.

   (1)☐ C'est une équation différentielle d'ordre 1.
   (2)☐ C'est une équation différentielle non linéaire.
   (3)☐ C'est une équation non homogène.
   (4)☐ Pour résoudre le problème de Cauchy on impose une condition initiale.
   (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

11. On considère $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t \sin t \, \mathrm{d}t$. Si on utilise le changement de variable $\cos t = x$, on peut écrire :

(1)☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \, \mathrm{d}x$ (2)☐ $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \, \mathrm{d}x$ (3)☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^3 \, \mathrm{d}x$

(4)☐ $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} -x \, \mathrm{d}x$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

12. Une primitive de $\displaystyle\int \frac{4x+5}{2x^2+5x+2} \, \mathrm{d}x$ est ...

(1)☐ $\frac{(4x+5)(2x^2+5x+2)^2}{2}$ (2)☐ $\frac{(2x^2+5x+2)^2}{2}$ (3)☐ $\ln|2x^2+5x+2|$ (4)☐ $(\ln|2x^2+5x+2|)^2$

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

13. L'équation différentielle $y'' = 6x$ admet pour solutions les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :

ATTENTION : vous avez le maximum de points, même si vous avez coché que la réponse numéro 2.

(1)☐ $y(x) = 3x^2 + k,$ avec $k \in \mathbb{R}$
(2)☐ $y(x) = x^3 + k_1 x + k_2,$ avec $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$
(3)☐ $y(x) = x^3 + k,$ avec $k \in \mathbb{R}$
(4)☐ $y(x) = x^3 + kx,$ avec $k \in \mathbb{R}$
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

14. Soit $I = \displaystyle\int t \;\; e^t \, \mathrm{d}t$

(1)☐ $I = t\, e^t - \displaystyle\int t \;\; e^t \, \mathrm{d}t$ (2)☐ $I = e^t - \displaystyle\int t \;\; e^t \, \mathrm{d}t$ (3)☐ $I = t\, e^t - \displaystyle\int e^t \, \mathrm{d}t$

(4)☐ $I = e^t(t-1) + c$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

15. On considère la fonction partie entière sur $[-2, 2]$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies ?

(1)☐ $(-2, -1, 0, 1, 2)$ est une subdivision uniforme
(2)☐ $(-2, -\frac{3}{2}, -1, 0, \frac{1}{4}, 1, 2)$ est une subdivision uniforme adaptée
(3)☐ $(-2, -\frac{1}{2}, 0, 1, 2)$ est une subdivision non uniforme adaptée
(4)☐ $(-2, -\frac{3}{2}, -1, 0, 1, 2)$ est une subdivision non uniforme adaptée
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

16. On considère l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 4y' + y = \cos(2x).$$

Dans ce cas, on cherche une solution particulière de la forme :

(1)☐ $y_p = \cos(2x)(ax+b)$
(2)☐ $y_p = \cos(2x)(ax^2+bx+c)$
(3)☐ $y_p = a\cos(2x) + b\sin(2x)$
(4)☐ $y_p = \cos(2x)(ax+b) + \sin(2x)(cx+d)$
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

17. La formule d'intégration par parties est :

(1)☐ $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$

(2)☐ $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u'(x)v'(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v(x)\,\mathrm{d}x$

(3)☐ $\displaystyle\int_a^b u(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v'(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$

(4)☐ $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

18. On a $\displaystyle\int_1^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^4 \frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$. Quel changement de variable avons-nous utilisé ?

(1)☐ $x = \sqrt{u}$ (2)☐ $x = u^2$ (3)☐ $x = 2\sqrt{u}$ (4)☐ $x = 2u$

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

19. Calculer $\displaystyle\int_0^1 1 + 3x - x^2\,\mathrm{d}x$.

(1)☐ 0 (2)☐ 3 (3)☐ $\dfrac{13}{6}$ (4)☐ $\dfrac{17}{6}$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

20. Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

(1)☐ f prend uniquement des valeurs positives sur $\mathbb{R}$. (2)☐ $f(1) = 0$

(3)☐ $f(1) = \dfrac{\pi}{4}$ (4)☐ f prend uniquement des valeurs négatives sur $\mathbb{R}$.

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.