Quiz de Mathématiques

Durée : 1 heure.
Aucun document n'est autorisé.
La calculatrice collège est tolérée.

Veuillez ne pas répondre sur le sujet, mais sur la **feuille de réponse** prévue à cet effet.

— Les questions peuvent présenter une ou plusieurs réponses correctes.

— **Noircir les cases, ne pas faire des croix sur les cases.**

— En cas d'erreur, utilisez du « blanco ».

— Une mauvaise réponse enlève des points, une absence de réponse n'a pas d'incidence.

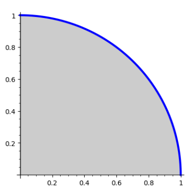
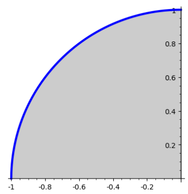
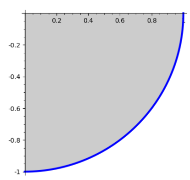
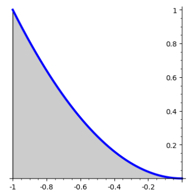
BON COURAGE !

* * * * * * * * * * * * * * * *

1. Soit $f(x) = \dfrac{1}{2+x} + \dfrac{4}{x^2-4}$ et $\tilde{f}$ son prolongement s'il existe.
   Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies ?

   (1)☐ $f(x)$ est prolongeable par continuité en $x = 2$ et $\tilde{f}(2) = +\infty$
   (2)■ $f(x)$ n'est pas prolongeable par continuité en $x = 2$
   (3)■ $f(x)$ est prolongeable par continuité en $x = -2$ et $\tilde{f}(-2) = -\frac{1}{4}$
   (4)☐ $f(x)$ n'est pas prolongeable par continuité en $x = -2$
   (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

2. Soit $I = \displaystyle\int_0^1 -\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$. Parmi les graphes suivants, lequel décrit I ?

   (1)☐  (2)☐  (3)■  (4)☐ 

   (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

3. Un équivalente de $f(x)$, avec $f'(x) \neq 0$, au voisinage de 0 est ...

   (1)■ $f(x) - f(0) \underset{a}{\sim} f'(0)x$ (2)☐ $f(x) - f'(0) \underset{a}{\sim} f(0)x$ (3)■ $f(x) \underset{a}{\sim} f(0) + f'(0)x$
   (4)☐ $f(x) - f(0) \underset{a}{\sim} f'(0) + f'(0)x$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

4. Soit $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Cocher la(les) affirmation(s) correcte(s).

   (1)☐ $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$
   (2)■ $f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$
   (3)☐ On ne peut rien dire sur le comportement de $f(x)$ et $g(x)$.
   (4)☐ $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$
   (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

5. La formule de Taylor-Young à l'ordre n d'une fonction $f \in \mathcal{C}^n$ au voisinage de a avec $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ est ...

(1)■ $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x)$
(2)☐ $f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^{n+1} \varepsilon(x)$
(3)■ $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$
(4)☐ $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^{n+1})$
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

6. Les développements limités servent à :

(1)■ donner une approximation au voisinage d'un point.
(2)■ calculer des limites.
(3)☐ donner l'allure d'une fonction sur son domaine de définition.
(4)☐ remplacer une fonction par une fonction polynomiale sur son domaine de définition.
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

7. La valeur de la limite $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2}$ est ...

(1)☐ 0 (2)■ $\dfrac{1}{2}$ (3)☐ 2 (4)☐ $+\infty$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

8. Soit $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$. Parmi les affirmations suivantes la(lesquelles) est(sont) vraie(s) ?

(1)☐ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (2)☐ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ (3)☐ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$
(4)■ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = e$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

9. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(2) = -1$. Quelle(s) affirmation(s) est(sont) correcte(s) ?

(1)☐ f est constante sur$[0, 1]$
(2)■ f s'annule sur$[1, 2]$
(3)☐ f est décroissante sur$[1, 2]$
(4)☐ f s'annule deux fois sur$[0, 2]$
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

10. On considère $f(x) = e^x$ au voisinage de 0. Cocher la(les) affirmation(s) correcte(s).

(1)■ $f(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$
(2)☐ $f(x) = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$
(3)☐ $f(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$
(4)☐ $f(x) = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

11. Au voisinage de 0 :

(1)■ $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$
(2)■ $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n)$
(3)☐ $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^{n-1})$
(4)☐ $\dfrac{1}{1-x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^{n-1})$
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

12. On considère $f(x) = \sqrt{x+2}$ au voisinage de 0. Cocher les affirmations correctes.

(1)■ $f(x) = \sqrt{2}(1 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{32}) + o(x^3)$
(2)□ $f(x) = 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^3)$
(3)□ $f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^3)$
(4)□ $f(x) = 2(1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{32}) + o(x^3)$
(5)□ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

13. Parmi les valeurs suivants, cocher celle qui s'approche le plus de $\sin(0.01)$.

(1)□ $\frac{\pi}{4}$ (2)□ 0.99 (3)□ $\frac{\pi}{2}$ (4)■ 0.01 (5)□ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

14. Parmi les affirmations suivantes la(lesquelles) est(sont) vraie(s) ?

(1)■ $x \underset{0}{=} o(\ln(x))$ (2)□ $e^x \underset{0}{=} o(x^2)$ (3)■ $\ln(x) \underset{+\infty}{=} o(x^2)$ (4)■ $x^2 \underset{+\infty}{=} o(e^x)$

(5)□ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

15. Parmi les équivalents suivants, le(lesquels) est(sont) valable(s) ?

(1)□ $\ln(x^3) \underset{+\infty}{\sim} x^3$ (2)□ $e^x \underset{+\infty}{\sim} 1 + x$ (3)■ $2x^5 + x^4 - x^3 \underset{+\infty}{\sim} 2x^5$

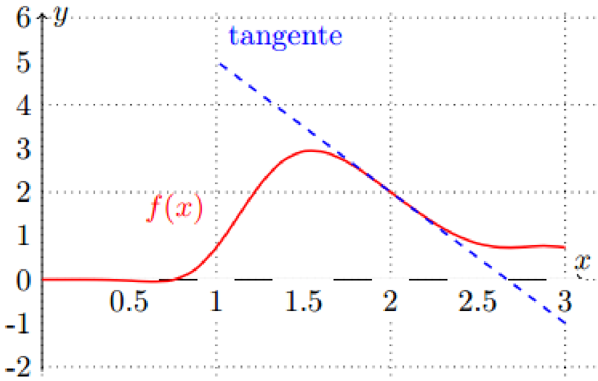
(4)■ $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ (5)□ $\tan(3x) \underset{+\infty}{\sim} 3x$

16. Lesquelles parmi les affirmations suivantes sont valables ?

(1)□ $x \underset{0}{=} o(x^2)$ (2)■ $x^2 \underset{0}{=} o(x)$ (3)■ $x \underset{+\infty}{=} o(x^2)$ (4)□ $x^2 \underset{+\infty}{=} o(x)$

(5)□ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

17. Ci-dessous apparaît le graphe de la fonction f au voisinage du point $x = 2$. Quel est le seul développement limité qui soit possible ?



(1)□ $2 + 3(x-2) + (x-2)^2 + o((x-2)^2)$
(2)■ $2 - 3(x-2) + (x-2)^3 + o((x-2)^2)$
(3)□ $2 - 3(x-2) + (x-2)^2 + o((x-2)^2)$
(4)□ $2 + 3(x-2) - (x-2)^3 + o((x-2)^2)$
(5)□ $2 - 3x - x^3 + o(x^3)$

18. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant 0, telle que $f(x) = 1 + x + o(x^2)$.

(1)■ $f(2x) = 1 + 2x + o(x^2)$
(2)□ $2f(x) = 1 + 2x + o(x)$
(3)■ $f^2(x) = 1 + 2x + x^2 + o(x^2)$
(4)□ $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$
(5)□ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

19. Soit $f(x) = \sin(x)$. Déterminer son développement limité en $\frac{\pi}{2}$ à l'ordre 3, s'il existe.

(1)☐ $f(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

(2)☐ $f(x) = x - \frac{\pi}{2} - \frac{(x-\frac{\pi}{2})^3}{3!} + o((x-\frac{\pi}{2})^3)$

(3)☐ $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

(4)■ $f(x) = 1 - \frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{2} + o((x-\frac{\pi}{2})^3)$

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

20. Soit $f(x) = e^{\cos(x)}$. Déterminer son développement limité en 0 à l'ordre 3, s'il existe.

(1)☐ $f(x) = e + e(x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + o((x-1)^3)$

(2)■ $f(x) = e - \frac{e}{2}x^2 + o(x^3)$

(3)☐ $f(x) = 1 + (1 - \frac{x^2}{2}) + \frac{1}{2}(1 - \frac{x^2}{2})^2 + \frac{1}{6}(1 - \frac{x^2}{3}) + o(x^3)$

(4)☐ $f(x) = \frac{8}{3} - \frac{5}{4}x^2 + o(x^3)$

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.