

Durée : 30 minutes.

Aucun document n'est autorisé.

La calculatrice collègue est tolérée.

*Veillez ne pas répondre sur le sujet, mais sur la **feuille de réponse** prévue à cet effet.*

BON COURAGE !

On considère pour toutes les questions de ce QCM l'application suivante :

Soit f l'application de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 définie par : $f([x, y, z]) = [3x - 2y + 2z, x + 2y, x + y + z]$.

1. La matrice de f dans la base canonique est :

- ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$
 ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
 ☐ $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
 ☐ $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

2. f est :

- ☐ un homomorphisme
 ☐ un morphisme
 ☐ un endomorphisme
 ☐ $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$
☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

3. L'image par f de $[0 \ 1 \ 1]^T$ est :

- ☐ $[0 \ 2 \ 2]^T$
 ☐ $[0 \ 1 \ 1]^T$
 ☐ $[0 \ 2 \ 2]$
 ☐ $[0 \ 1 \ 1]$
☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

4. $\text{Ker } f$ est :

- ☐ $\{[x \ x \ x]^T, x \in \mathbb{R}\}$
 ☐ $\{([-2y \ y \ -y]^T, [-x \ y \ x]^T), x, y \in \mathbb{R}\}$
 ☐ $\{[1 \ 1 \ 1]^T\}$
☐ $\{[0 \ 0 \ 0]^T\}$
☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

5. Le rang de f est égal à :

- ☐ 0
 ☐ 1
 ☐ 2
 ☐ 3
☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

6. f est une application :

- (1) ☐ ni injective ni surjective
- (2) ☐ injective mais pas surjective
- (3) ☐ surjective mais pas injective
- (4) ☐ bijective
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

7. Dans l'espace de départ de f :

- (1) ☐ Toute famille libre de 3 vecteurs est une base.
- (2) ☐ Toute famille génératrice de 4 vecteurs est une base.
- (3) ☐ Si on ajoute un vecteur quelconque à une famille libre de deux vecteurs, on obtient une base.
- (4) ☐ Si on enlève un vecteur quelconque à une famille libre de quatre vecteurs, on obtient une base.
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

8. On considère une nouvelle base $\mathcal{B}_1 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\} = \{[-1 \ 1 \ 2]^T, [0 \ 1 \ 1]^T, [1 \ 1 \ 1]^T\}$ pour f .

On note $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}_1}$ la matrice de passage de la base canonique \mathcal{B} à la base \mathcal{B}_1 .

Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies ?

- (1) ☐ $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
- (2) ☐ $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
- (3) ☐ $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- (4) ☐ $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}_1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -5 & 8 \end{bmatrix}$
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

9. On considère deux nouvelles bases \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 pour f .

On note $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}_1}$ la matrice de passage de la base canonique \mathcal{B} à la base \mathcal{B}_1 , $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}_2}$ la matrice de passage de la base canonique \mathcal{B} à la base \mathcal{B}_2 et $P_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$ la matrice de passage de la base \mathcal{B}_1 à la base \mathcal{B}_2 .

Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies ?

- (1) ☐ $P_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}_1}^{-1} \cdot P_{\mathcal{B}\mathcal{B}_2}$
- (2) ☐ $P_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}_1}^{-1} \cdot P_{\mathcal{B}\mathcal{B}_2}$
- (3) ☐ $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}_1} \cdot P_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}_2}$
- (4) ☐ $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}_1} = P_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}^{-1} \cdot P_{\mathcal{B}\mathcal{B}_2}$
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

10. Soit N la matrice de l'application f dans la base \mathcal{B}_1 .

On note A la matrice de l'application f dans la base \mathcal{B} et P la matrice de passage de la base canonique \mathcal{B} à la base \mathcal{B}_1 .

Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies ?

- (1) ☐ $A = P^{-1}NP$
- (2) ☐ $N = PAP^{-1}$
- (3) ☐ A et N sont semblables
- (4) ☐ A est diagonalisable
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.