ISEN **2019/2020**

CIR1 et CNB1 - Mathématiques

DEVOIR SURVEILLÉ 6/01/2020

Consignes :

- *Pour cette épreuve de **2** heures aucun document n'est autorisé et la calculatrice collège est tolérée.*
- *Les **4** exercices qu'il comporte sont indépendants et peuvent être faits dans l'ordre de votre choix.*
- *Expliquez vos raisonnements avec un maximum de **clarté** et avec le **vocabulaire** adapté.*
- *Une copie soignée est gage d'une bonne note !*

Exercice 1. (5 Points)

On pose $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2+\sqrt{4-(t-2)^2}}\,\mathrm{d}t$

(a) Utiliser le changement de variable $t-2 = 2\cos u$ pour montrer que $I = \displaystyle\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{\sin u}{1+\sin u}\,\mathrm{d}u$

(b) Montrer qu'avec $v = \tan(u/2)$ et $\mathrm{d}u = \dfrac{2}{1+v^2}\,\mathrm{d}v$ on obtient $I = \displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{4v}{(1+v)^2(1+v^2)}\,\mathrm{d}v$

(c) Déterminer I en sachant que $\dfrac{4v}{(1+v)^2(1+v^2)} = \dfrac{-2}{(1+v)^2} + \dfrac{2}{1+v^2}$

Exercice 2. (6 Points)
Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$

(a) Déterminer le domaine de définition de f.

(b) Calculer la dérivée de f et en déduire le(s) sens de variation de f.

(c) Déterminer le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0.

(d) En déduire l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ et la position de la tangente par rapport à la courbe.

(e) Déterminer une équation de l'asymptote en $+\infty$ ainsi que la position de cette asymptote par rapport à la courbe.

(f) (BONUS) Tracer une allure de la courbe sur son domaine de définition.

Exercice 3. (4 Points)
Soit f la fonction définie par $f(x) = -x^3 + 3x - 3$

(a) Étudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

(b) Calculer la dérivée de f et en déduire son(ses) sens de variation.

(c) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

(d) (BONUS) Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Exercice 4. (5 Points)

(a) En détaillant les étapes, résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle

$$y'' + y = \sin(\omega x)$$

en fonction du paramètre $\omega \in \mathbb{R}$

(b) (BONUS) Est-ce qu'il existe une solution de cette équation différentielle telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$?