ISEN **2019/2020**

CIR1 ET CNB1 - MATHÉMATIQUES

DEVOIR SURVEILLÉ 15/10/2019

Consignes :

- *Pour cette épreuve de 2 heures aucun document n'est autorisé et la calculatrice collège est tolérée.*
- *Les 4 exercices qu'il comporte sont indépendants et peuvent être faits dans l'ordre de votre choix.*
- *Expliquez vos raisonnements avec un maximum de* ***clarté*** *et avec le* ***vocabulaire*** *adapté.*
- *Une copie soignée est gage d'une bonne note !*

Exercice 1. (5 Points)
Soient les propriétés suivantes, où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

1) La fonction f est injective et 2) La fonction f ne prend jamais la même valeur.

(a) Éxprimez à l'aide de quantificateurs 1) et 2).

(b) Donnez à l'aide de quantificateurs leur négation.

(c) Si f est définie par $f(x) = x^2 - 1$, f est elle injective ? surjective ? Pourquoi ?

(d) Est-ce que f est bijective ? Si oui, pourquoi. Sinon, donnez une restriction bijective.

Exercice 2. (5 Points)

(a) Soit k un entier compris entre 2 et $n+1$, avec $n \in \mathbb{N}$.

En utilisant les propriétés du coefficient binomial, démontrez que

$$k(k-1)\binom{n+1}{k} = (n+1)n\binom{n-1}{k-2}$$

(b) Soient x, y deux réels et n un entier naturel. Exprimez $(x+y)^{n-1}$ comme une somme sur $k \in \mathbb{N}$

(c) Calculez

$$\sum_{k=2}^{n+1} k(k-1)\binom{n+1}{k}$$

Combien de termes possède cette somme ?

Exercice 3. (5 Points)
On appelle $j = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(a) Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3 = 1$. Donnez les solutions sous forme algébrique et trigonométrique.

(b) Montrez que $\overline{j} = j^2$ et que $j^{-1} = j^2$.

(c) Combien vaut $1 + j + j^2$? Quelle propriété exprime ce résultat ? *Suggestion : qui sont* 1, j *et* j^2 *?*

(d) Résolvez l'équation $z^2 + z + 1 = 0$

(e) Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de la transformation géométrique : $z \mapsto jz$

(f) (BONUS) Si A et B sont les deux points d'affixe les racines du polynôme calculées en d), calculer c l'affixe du point C tel que ABC soit un triangle équilatéral et $Re(c) > 0$.

Exercice 4. (5 Points)
On considère l'équation différentielle suivante :

$$y' + 2y = (x+2)e^{-2x} \quad (E)$$

(a) Pourquoi (E) est une équation différentielle ? Définissez son type.

(b) Résolvez l'équation différentielle homogène associée à (E).

(c) Trouvez une solution particulière de (E) en justifiant votre démarche.

(d) Donnez l'ensemble de toutes les solutions de (E).

(e) Vérifiez que votre résultat est solution de (E).

(f) (BONUS) Résolvez l'équation différentielle : $y' + 2y = (x+2)e^{-2x} + \cos(3x) \quad (E_2)$