ISEN **2017/2018**

CIR1 - Mathématiques

DEVOIR SURVEILLÉ 20/11/2017

Consignes :

- *Pour cette épreuve de **2** heures aucun document n'est autorisé et la calculatrice collège est tolérée.*
- *Les **5** exercices qu'il comporte sont indépendants.*
- *Expliquez vos raisonnements avec un maximum de* **clarté** *et avec le* **vocabulaire** *adapté.*
- *Une copie soignée est gage d'une bonne note !*

Exercice 1. (Points 4.5)

Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ les applications définies par :

$$\forall x \in \mathbb{N},\ f(x) = 2x \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & \text{si } x \text{ est pair} \\[2ex] \dfrac{x-1}{2}, & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases}$$

1. Exprimer à l'aide de quantificateurs les trois propositions suivantes :

   $a)$ f est injective $\quad b)$ f est surjective $\quad c)$ f est bijective

2. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et g.
3. Calculer les applications $g \circ f$ et $f \circ g$.

   Étudier leur injectivité, surjectivité et bijectivité.

Exercice 2. (Points 4)

Nous allons calculer la somme des carrés d'entiers de la manière suivante :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3$.
2. En développant $(k+1)^3$, exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3$ à l'aide de sommes classiques.
3. En comparant les deux calculs précédents, retrouver la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Exercice 3. (Points 4)

On considère le nombre complexe $z = -\mathrm{i}$.

1. Représenter graphiquement le nombre complexe z dans le plan $\mathbb{R}^2$.
2. Écrire z sous sa forme exponentielle et sous sa forme trigonométrique.
3. Résoudre $z^5 = -\mathrm{i}$.
4. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation géométrique : $z \mapsto -\mathrm{i}z$

Exercice 4. (Points 4.5)
On considère l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 2y' + y = e^{\lambda x} \quad (E)$$

où λ est un paramètre réel.

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. En fonction de λ, trouver une solution particulière de (E) (expliquer votre démarche), puis donner l'ensemble de toutes les solutions de (E).

Exercice 5. (Points 3)

On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, \mathrm{d}x$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, \mathrm{d}x$.

1. Calculer $I + J$.
2. À l'aide du changement de variable affine $x = \frac{\pi}{2} - t$, montrer que $I = J$ et en déduire leur valeur commune.
3. Donner, sans faire de calcul de primitive, la valeur de $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^2 x \, \mathrm{d}x$.

   Suggestion : utiliser une formule de duplication.