CIR1 2016/2017

QUIZ de MATHÉMATIQUES N°8

7/04/2017

Durée : 40 minutes.
Aucun document n'est autorisé. La calculatrice collège est tolérée.

*Veuillez ne pas répondre sur le sujet, mais sur la **feuille de réponse** prévue à cet effet.*

Les questions peuvent présenter une ou plusieurs réponses valides.
Une mauvaise réponse enlève des points, une absence de réponse n'a pas d'incidence.

Question 41. Soit $f : (x, y, z) \mapsto (x + y, y + z, x - 2z)$. Sa matrice A dans la base canonique est :

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ 2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ 3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
5. aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 42. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ déterminée par la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -8 & -2 \end{bmatrix}$$

L'application linéaire associée est :

1. $f : (x, y, z, w) \mapsto (x + 2y - z + 2w, 2x + 4y + 4z - 8w, 3x + 6y + z - 2w)$.
2. $f : (x, y, z, w) \mapsto (x + 2y - z + 2w, 2x + 4y + 4z - 8w, 3x + 6y + z - 2w, x - y + z + 2w)$.
3. $f : (x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z, 2x + 4y + 6z, -x + 4y + z, 2x - 8y - 2y)$.
4. $f : (x, y, z) \mapsto (x + 2y - z, 2x + 4y + 4z, 3x + 6y + z)$.
5. aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 43. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par $[x, y, z] \mapsto [x - y, 2x + z]$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ définie par $[x, y] \mapsto [x + y, 3x - y, -x + 2y]$. La matrice associée à $g \circ f$ est une matrice :

1. $M_3(\mathbb{R})$ 2. $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ 3. $M_2(\mathbb{R})$ 4. on ne peut pas la calculer

5. aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 44. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et f l'application linéaire associée à A. L'image par f de $[0\ 0\ 1]^T$ est :

1. $[1\ 0\ 2]^T$
2. $f([0\ 0\ 1]^T)$
3. $[-1\ 0\ 1]^T$
4. $[x + 2y - z,\ y,\ 2x + y + z]$
5. aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 45. Parmi les matrices suivantes, laquelle est associée à la réflexion par la droite $y = x$?

1. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. aucune des réponses précédentes n'est correcte.

On considère pour les questions 46-47-48-49 l'application suivante :

Soit $\mathbb{R}^2$ muni de deux bases : la base canonique $\{e_1, e_2\}$ et la base $\{e_1^{'}, e_2^{'}\}$ définie par

$$\begin{cases} e_1^{'} &= 2e_1 + e_2 \\ e_2^{'} &= 3e_1 + 2e_2 \end{cases}$$

Soit $\mathbf{x} = 2e_1 + 3e_2$.

Question 46. La matrice de passage de la base canonique $\{e_1, e_2\}$ et la base $\{e_1^{'}, e_2^{'}\}$ est

1. $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ 2. $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 3. $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ 4. $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

5. aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 47. La matrice de passage de la base $\{e_1^{'}, e_2^{'}\}$ à la base canonique$\{e_1, e_2\}$ est

1. $P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 2. $P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ 3. $P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ 4. $P^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

5. aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 48. Les composantes de $\mathbf{x}$ dans la base canonique $\{e_1, e_2\}$ sont

1. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ 2. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ 3. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ 4. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

5. aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 49. Les composantes de $\mathbf{x}$ dans la base $\{e_1^{'}, e_2^{'}\}$ sont

1. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}$ 2. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$ 3. $\mathbf{x}' = P\mathbf{x}$ 4. $\mathbf{x}' = P^{-1}\mathbf{x}$

5. aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 50. Soit f un morphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

1. Si le $Kerf$ est réduit au vecteur nul, alors f est injective.
2. f est est un endomorphisme.
3. Si f est surjective, f est bijective.
4. Si f est injective, f est bijective.
5. aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 51. Dans $\mathbb{R}^4$:

1. Toute famille libre de 4 vecteurs est une base.
2. Toute famille génératrice de 4 vecteurs est une base.
3. Si on ajoute un vecteur quelconque à une famille libre de trois vecteurs, on obtient une base.
4. Toute famille de trois vecteurs non nuls est libre.
5. aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 52. Soient $u = [u_1\ u_2\ \ldots u_n]^T$ et $v = [v_1\ v_2\ \ldots v_n]^T$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Alors

1. $u + v = v + u$ 2. $u + 0 \neq u$ 3. $1 \times u = u$ 4. $u \wedge v = v \wedge u$

5. aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 53. Soient $f : E \to E$ un endomorphisme, B et B' deux bases de E et P la matrice de passage de B à B'. Si A est la matrice de l'application linéaire f dans la base B et N la matrice de l'application linéaire dans la base B', alors

1. $N = P^{-1}AP$
2. $A = PNP^{-1}$
3. A et N représentent dans deux bases différentes le même endomorphisme.
4. A et N représentent dans la même base deux endomorphismes différents.
5. aucune des affirmations précédentes n'est correcte.

Question 54. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avec la matrice dans la base canonique $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Parmi les suivantes affirmations, lesquelles sont vraies ?

1. le vecteur $u = [0\ 0]^T$ est vecteur propre de A.
2. le vecteur $v = [1\ 0]^T$ est vecteur propre de A.
3. $\lambda = 1$ est une valeur propre de A.
4. $\lambda = 2$ est une valeur propre de multiplicité 2.
5. aucune des affirmations précédentes n'est correcte.

Question 55. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. Parmi les suivantes affirmations, lesquelles sont vraies ?

1. On peut toujours écrire A comme PDP^{-1}, avec P une matrice inversible et D une matrice diagonale.
2. Si A est symétrique, alors A est diagonalisable.
3. A est diagonalisable si et seulement si elle possède n vecteurs propres formant une base.
4. A est diagonalisable si et seulement si les valeurs propres sont simples.
5. aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 56. Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont diagonalisables :

1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

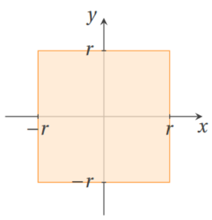
5. aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 57. Parmi les suivantes affirmations, lesquelles sont vraies ?

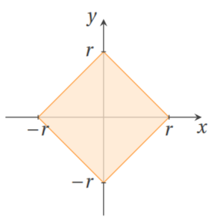
1. Le vecteur propre associé à une valeur propre est unique.
2. Une valeur propre peut être nulle.
3. Le calcul des valeurs propres dépend de la base choisie.
4. Un vecteur propre peut être nul.
5. aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 58. Parmi les graphes suivants, lesquels représentent la boule unité de centre 0 et rayon 1 dans la norme qui les précède (avec $X \in \mathbb{R}^2$) ?

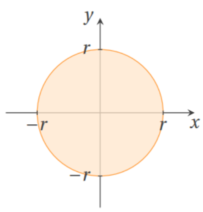
1.$||X||_1 < r$



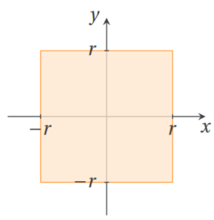
2.$||X||_1 < r$



3.$||X||_2 < r$



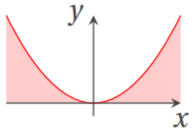
4.$||X||_{+\infty} < r$

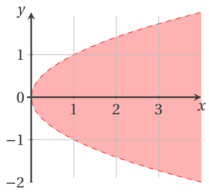


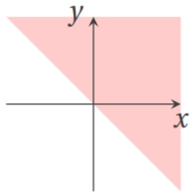
5. aucune des réponses précédentes n'est correcte.

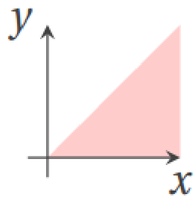
Question 59. Parmi les graphes suivants, lesquels décrivent le domaine de définition de la fonction qui le précède?

1.$f(x,y) = \frac{\sqrt{-y+x^2}}{\sqrt{y}}$ 2.$f(x,y) = \frac{\ln y}{\sqrt{x-y}}$ 3.$f(x,y) = \ln(x+y)$ 4.$f(x,y) = \ln(x^2+y)$









5. aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 60. Soit $f(x,y) = \dfrac{x^2(y+1)}{x^2+(y+1)^2}$. Au point $(0,-1)$, en coordonnées polaires on a :

1. $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$
2. $x = -1 + r\cos(\theta)$ et $y = -1 + r\sin(\theta)$
3. $x = r\cos(\theta)$ et $y = -1 + r\sin(\theta)$
4. $f(r,\theta) = r\cos^2(\theta)\sin(\theta)$
5. aucune des réponses précédentes n'est correcte.