Quiz de Mathématiques

Durée : 1 heure.
Aucun document n'est autorisé.
La calculatrice collège est tolérée.

Veuillez ne pas répondre sur le sujet, mais sur la **feuille de réponse** prévue à cet effet.

BON COURAGE !

⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂

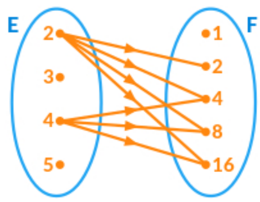
1. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies ?

(1)☐ $(P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow P) \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow Q)$ (2)☐ $(\textit{non } P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$

(3)☐ La contraposée de $(P \Rightarrow Q)$ est $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$ (4)☐ L'implication réciproque de $P \Rightarrow Q$ est $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

2. Le graphe sur la figure ci-dessous représente une ...



(1)☐ relation (2)☐ fonction (3)☐ application

(4)☐ application surjective (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

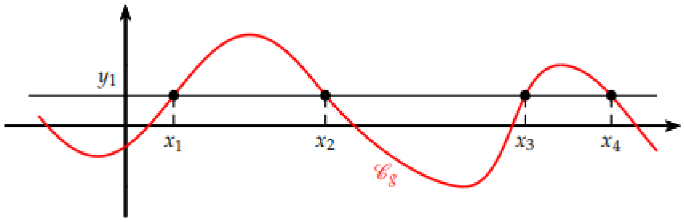
3. Soit f une application de E dans F. Si f est injective ...

(1)☐ $\forall (x, x') \in E^2 \ f(x) \neq f(x') \Rightarrow \ x \neq x'$ (2)☐ $\forall (x, x') \in E^2 \ f(x) = f(x') \Rightarrow \ x = x'$

(3)☐ $\forall y \in F \ \exists x \in E \ y = f(x)$ (4)☐ $Card(E) \leqslant Card(F)$ si E et F finis

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

4. Soit g une application de $[-1, 6]$ dans $\mathbb{R}$. Le graphe de g est représenté sur la figure ci-dessous.



g est ...

(1)☐ injective (2)☐ surjective (3)☐ bijective

(4)☐ n'est pas une application (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

5. Cochez les affirmations qui traduisent la proposition *"f est l'identité de* $\mathbb{R}$*"*.

(1)☐ $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$ (2)☐ $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$ (3)☐ $\exists! x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$

(4)☐ $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

6. Soit $E = \{a, b, c, d\}$ un ensemble. Peut-on écrire :

(1)☐ $\{a\} \in E$ (2)☐ $d \subset E$ (3)☐ $\{a, c\} \subset E$ (4)☐ $\varnothing \subset \mathcal{P}(E)$ (5)☐ $Card(E) = 4^2$

7. Je veux montrer que $e^x > x$ pour tout x réel avec $x \geqslant 1$. L'initialisation est vraie pour $x = 1$, car $e^1 = 2,718... > 1$. Pour l'hérédité, je suppose $e^x > x$ et je calcule :

$$e^{x+1} = e^x \cdot e > x \cdot e \geqslant x \cdot 2 \geqslant x + 1$$

Je conclus par le principe de récurrence. Cochez les affirmations correctes.

(1)☐ Cette preuve est valable.
(2)☐ Cette preuve n'est pas valable car il faudrait commencer l'initialisation à $x = 0$.
(3)☐ Cette preuve n'est pas valable car l'inégalité $e^x > x$ est fausse pour $x \leqslant 0$.
(4)☐ Cette preuve n'est pas valable car la suite d'inégalités est fausse.
(5)☐ Cette preuve n'est pas valable car x est un réel.

8. Parmi les propositions suivantes lesquelles sont vraies pour tous ensembles A, B et C ?

(1)☐ $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$ (2)☐ $A^c \cup B^c = (A \cup B)^c$

(3)☐ $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$ (4)☐ $A \setminus B = A \cap B^c$

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

9. Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$. On note f l'application de E dans E dont le graphe Γ est le suivant :

$$\Gamma = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 1)\}$$

Cochez les affirmations correctes.

(1)☐ $f(\{2, 3\})$ est un singleton.
(2)☐ $f^{-1}(\{2, 3\})$ est un singleton.
(3)☐ 4 n'a pas d'antécédent pour f.
(4)☐ L'application f est surjective.
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

10. On considère trois applications :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{C} \to [0,1] \\ x \mapsto \varphi(x) \end{cases} \qquad \xi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \xi(x) \end{cases} \qquad \psi : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto \psi(x) \end{cases}$$

Quelles sont les compositions qui ont un sens ?

(1)☐ $\varphi \circ \xi \circ \psi$ (2)☐ $\varphi \circ \psi \circ \xi$ (3)☐ $\xi \circ \varphi \circ \psi$

(4)☐ $\xi \circ \psi \circ \varphi$ (5)☐ $\psi \circ \xi \circ \varphi$

11. Soit $E = \{r, s, t, v, w\}$ un ensemble. Le nombre de sous-ensembles de E est :

(1)☐ le cardinal de l'ensemble E. (2)☐ un entier naturel.

(3)☐ 25 (4)☐ 32 (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

12. Soient $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ et $E = A \cup B$. Cochez les affirmations correctes.

(1)☐ $A \cap B = B$ (2)☐ $A \cap B = \{1, 2, 3, \varnothing\}$ (3)☐ $(A \setminus B)^C = B$ (4)☐ $B^C = A$

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

13. Soit A une partie de E. Cochez les affirmations qui traduisent l'affirmation "*A est la partie vide*".

(1)☐ Quel que soit x élément de E, x n'est pas un élément de A.
(2)☐ Il existe au plus un élément de E qui n'est pas un élément de A.
(3)☐ $\forall x \in E \; x \notin A$
(4)☐ $\exists x \in E \; x \notin A$
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

14. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{P}(E)$. Cochez les affirmations qui sont correctes.

(1)☐ $\forall x \in E, \; x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ et $x \in A$
(2)☐ $\forall x \in E, \; x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in B$ et $x \notin A$
(3)☐ $\forall x \in E, \; x \in ((A \cap B) \cup (B \setminus A)) \Leftrightarrow x \in B$
(4)☐ $\forall x \in E, \; x \in (A \cap (B \cup B \setminus A)) \Leftrightarrow x \in B$
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

15. Pour montrer que l'assertion "$\forall n \in \mathbb{N} \; n^2 > 3n - 1$" est fausse, quels sont les arguments valables ?

(1)☐ L'assertion est fausse, car pour $n = 0$ l'inégalité est fausse.
(2)☐ L'assertion est fausse, car pour $n = 1$ l'inégalité est fausse.
(3)☐ L'assertion est fausse, car pour $n = 2$ l'inégalité est fausse.
(4)☐ L'assertion est fausse, car pour $n = 1$ et $n = 2$ l'inégalité est fausse.
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

16. Le produit $\prod_{i=1}^{n}(5a_i)$ est égal à

(1)☐ $5\prod_{i=1}^{n} a_i$ (2)☐ $5^n \prod_{i=1}^{n} a_i$ (3)☐ $5^{n-1} \prod_{i=1}^{n} a_i$

(4)☐ $5n \prod_{i=1}^{n} a_i$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

17. Je veux montrer que $\sqrt{13} \notin \mathbb{Q}$ par un raisonnement par l'absurde. Quel schéma de raisonnement est adapté ?

(1)☐ Je suppose que $\sqrt{13}$ est rationnel et je cherche une contradiction.
(2)☐ Je suppose que $\sqrt{13}$ est irrationnel et je cherche une contradiction.
(3)☐ J'écris $13 = \frac{p}{q}$ (avec p, q entiers) et je cherche une contradiction.
(4)☐ J'écris $\sqrt{13} = \frac{p}{q}$ (avec p, q entiers) et je cherche une contradiction.
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

18. Soit $A = [-1, 3]$ et $B = [0, 4]$. Cochez les réponses correctes.

(1)☐ $A \cap B = \varnothing$ (2)☐ $A \cap B = [0, 3]$ (3)☐ $A \cup B = \varnothing$ (4)☐ $A \cup B = [0, 3]$
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

19. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^4 - 2$$

Cochez les bonnes réponses.

(1)☐ $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (2)☐ $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$ (3)☐ $f(\mathbb{R}) = [-2, +\infty[$ (4)☐ $f(\mathbb{R}) =]2, +\infty[$
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

20. Soient les fonctions $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$ et $g(x) = \sqrt{x}$. L'ensemble de définition de la fonction composée $f \circ g$ ($D_{f \circ g}$) est ...

(1)☐ $D_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ (2)☐ $D_{f \circ g} = [0, +\infty[$ (3)☐ $D_{f \circ g} = [0, 4[\cup]4, +\infty[$
(4)☐ $D_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{4\}$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.