1 Ensembles

1.1 Opérations

Définition 1.1. Soient E un ensemble et A, B deux sous-ensembles de E.

- L'***union*** des deux ensembles A et B, notée $A \cup B$ est l'ensemble constitué par les éléments de E appartenant à A ou à B, c'est-à-dire :

$$A \cup B := \{x \in E \mid x \in A \text{ } ou \text{ } x \in B\}$$

- L'***intersection*** des deux ensembles A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble constitué par les éléments de E appartenant à A et B. Autrement dit

$$A \cap B := \{x \in E \mid x \in A \text{ } et \text{ } x \in B\}$$

  Si $A \cap B = \emptyset$ alors les deux ensembles A et B sont dits **disjoints**.

- La ***différence*** des ensembles A et B, notée $A \backslash B$ est l'ensemble constitué par les éléments de A qui n'appartiennent pas à B, c'est-à-dire :

$$A \setminus B := \{x \in E \mid x \in A \text{ } et \text{ } x \notin B\}$$

2 Relations, Fonctions, Applications

2.1 Injections, surjections, bijections

Défintion 2.1. Soit $f : E \Rightarrow F$ une application.

- On dit que f est une application ***injective*** ou une ***injection*** si elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :
  - si tout élément f de F possède au plus un antécédent x par f (c'est-à-dire un ou aucun) ;
  - $\forall \ (x_1, x_2) \in E \times E = E^2, si \ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ *;*
  - $\forall \ (x_1, x_2) \in E \times E = E^2, si \ x1 \neq x2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ *;*
  - *deux éléments différents ont toujours des images différentes*
- On dit que f est une application ***surjective*** ou une ***surjection*** si elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :
  - si tout élément y de textitF possède au moins un antécédent x par f (c'est-à-dire un ou plusieurs);
  - $\forall \ y \in F, \exists \ x \in E \ f(x) = y$;
- On dit que f est une application ***bijective*** ou une ***bijection*** si elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

– si f est a la fois injective et surjective;

– si tout les élément y de F possède un et un seul antécédent x par f;

– $\forall\ y \in F$, $\exists!\ x \in E\ f(x) = y$;

2.2 Image et image réciproque

Définition 2.2. Soit $f : E \to F$ une application.

- Soit $A \subset E$. On appelle ***image*** de A par f le sous-ensemble $f(A) = \{\ f(a),\ a \in A\ \}$ de F. $f(A)$ est donc l'ensemble des images par f des éléments de A. On peut écrire : $y \in f(A) \leftrightarrow \exists x \in A,\ f(x) = y$.

- Soit B une partie de F. L'***image réciproque*** de B par f, notée $f1(B)$ est l'ensemble des éléments de E dont l'image est dans B. Autrement dit $f^{-1}(B) = \{\ x \in E,\ f(x) \in B\ \}$.