

DEVOIR SURVEILLÉ 27/02/2019

Consignes :

- Pour cette épreuve de 2 heures aucun document n'est autorisé et la calculatrice collègue est tolérée.
- Expliquez vos raisonnements avec un maximum de **clarté** et avec le **vocabulaire** adapté.
- Une copie soignée est gage d'une bonne note !

Exercice 1. (Points 4)

On considère

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Calculer $(A - 2I)^3$.
2. Donner la définition d'une matrice inversible.
3. En déduire si A est inversible. Dans le cas affirmatif, déterminer A^{-1} en fonction de I , A et A^2 .

Exercice 2. (Points 8.5)

Soit $k \in \mathbb{R}$. On considère le système linéaire (s) suivant :

$$\begin{cases} kx & + t & = 1 \\ x + ky & & = 1 \\ & kz + t & = 1 \\ & y & + kt & = 1 \end{cases}$$

1. Pourquoi (s) est linéaire ?
2. Écrire le système (s) sous forme matricielle.
3. Calculer le déterminant de la matrice associée à (s) .
4. Qu'est-ce que c'est le rang d'une matrice ?
Calculer le rang de la matrice associée à (s) en fonction du paramètre k .
5. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles le système (s) admet
 - a) une unique solution
 - b) aucune solution
 - c) une infinité de solutions
6. Écrire le système linéaire homogène (s_h) associée à (s) .
7. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles le système homogène (s_h) admet
 - a) une unique solution
 - b) aucune solution
 - c) une infinité de solutions

Exercice 3. (Points 7.5)

On pose $P(X) = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ et $Q(X) = X^2 + X + 1$.

1. Qu'est que ça veut dire $Q|P$?
Est-ce que l'on a $Q|P$? Vérifiez-le.
2. Décomposer $P(X)$ en produit de facteurs irréductibles sur \mathbb{C} et sur \mathbb{R} .
3. On considère la fraction rationnelle donnée par $F(X) = \frac{1}{Q(X)}$.
Décomposer F en éléments simples sur \mathbb{C} et sur \mathbb{R} .