

Quiz de Mathématiques

Durée : 1 heure.
Aucun document n'est autorisé.
La calculatrice collège est tolérée.

Veuillez ne pas répondre sur le sujet, mais sur la **feuille de réponse** prévue à cet effet.

- Les questions peuvent présenter une ou plusieurs réponses correctes.
- Noircir les cases, ne pas faire des croix sur les cases.
- En cas d'erreur, utilisez du « blanco ».
- Une mauvaise réponse enlève des points, une absence de réponse n'a pas d'incidence.

BON COURAGE !

* * * * *

1. Soit P une assertion vraie et Q une assertion fausse. Quelles sont les assertions vraies ?

- (1) ☐ $\text{non}(P)$ ou Q (2) ☒ P ou $\text{non}(Q)$ (3) ☐ $P \Rightarrow Q$ (4) ☒ $Q \Rightarrow P$
(5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

2. Étant données deux propositions P et Q , la proposition $P \Leftrightarrow Q$ est équivalente à ...

- (1) ☐ $(P \Rightarrow Q)$ et $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$ (2) ☒ $(P \Rightarrow Q)$ et $(\overline{P} \Rightarrow \overline{Q})$ (3) ☒ $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$
(4) ☒ $(Q \Rightarrow P)$ et $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$ (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

3. Par quoi peut-on compléter les pointillées pour avoir les deux assertions vraies ?

$$x \geq 2 \quad \dots \quad x^2 \geq 4 \quad |y| \geq 3 \quad \dots \quad 0 \leq y \leq 3$$

- (1) ☐ \Leftarrow et \Rightarrow (2) ☐ \Rightarrow et \Rightarrow (3) ☐ \Leftarrow et \Leftarrow (4) ☒ \Rightarrow et \Leftarrow
(5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

4. Quelle est la négation de la proposition suivante ?

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, n = k^2 + 1$$

- (1) ☐ $\forall k \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \neq k^2 + 1$
(2) ☒ $\exists n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, n \neq k^2 + 1$
(3) ☐ $\forall n \notin \mathbb{N}, \nexists k \in \mathbb{N}, n \neq k^2 + 1$
(4) ☐ $\exists k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \neq k^2 + 1$
(5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

5. Cocher la(les) assertion(s) vraie(s), s'il y en a.

- (1) ☒ $\exists x > 0 \quad \sqrt{x} = x$
 (2) ☐ $\exists x < 0 \quad e^x < 0$
 (3) ☐ $\exists n \in \mathbb{N} \quad n^2 = 17$
 (4) ☐ $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - x \geq 0$
 (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

6. Cocher, si elle existe, la traduction en langage mathématique de la proposition :

"Tout entier naturel est la somme de trois carrés d'entiers naturels ou bien est supérieur ou égal à 7".

- (1) ☒ $\forall n \in \mathbb{N}, \exists a, b, c \in \mathbb{N}, n = a^2 + b^2 + c^2 \text{ ou } n \geq 7$
 (2) ☒ $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (a, b, c) \in \mathbb{N}^3, n = a^2 + b^2 + c^2 \text{ ou } n \geq 7$
 (3) ☐ $n = a^2 + b^2 + c^2 \text{ ou } n \geq 7, \forall n \in \mathbb{N}, \exists a, b, c \in \mathbb{N}$
 (4) ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, \forall a, b, c \in \mathbb{N}, n = a^2 + b^2 + c^2 \text{ ou } n \geq 7$
 (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

7. Cocher, si elle existe, la traduction en langage mathématique de la phrase ci-dessous :

"L'ensemble des entiers naturels qui sont le produit d'une factorielle et d'un entier naturel impair".

- (1) ☒ $\{a!(2b+1), a, b \in \mathbb{N}\}$
 (2) ☐ $\{n \in \mathbb{N}, n!(2n+1)\}$
 (3) ☒ $\{n \in \mathbb{N}, \exists a, b \in \mathbb{N} \quad n = a!(2b+1)\}$
 (4) ☐ $\{n!(2n+1), n \in \mathbb{N}\}$
 (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

8. Décrire en extension l'ensemble :

$$\left\{ x \in \mathbb{R}, \exists a, b \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, x = \frac{a}{a+b} \right\}$$

- (1) ☒ $\left\{ \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right\}$ (2) ☒ $\left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4} \right\}$ (3) ☐ $\left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4} \right\}$ (4) ☐ $\left\{ \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right\}$
 (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

9. Soit $E = \{a, b, c\}$, quelle(s) écriture(s) est(sont) correcte(s) ?

- (1) ☐ $\{a\} \in E$ (2) ☐ $a \subset E$ (3) ☐ $\{a, b\} \in E$ (4) ☐ $\{a\} \subset \mathcal{P}(E)$
 (5) ☒ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

10. Cocher si c'est correct.

- (1) ☒ $\{2\} \subset \mathbb{N}$ (2) ☐ $3 \subset \mathbb{R}$ (3) ☐ $\mathbb{N} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ (4) ☐ $1 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (5) ☒ $-1 \in \mathbb{Z}$

11. Soit E un ensemble à n éléments et a un élément de E . On note $\mathcal{P}_a(E)$ l'ensemble des parties de E qui contiennent a . Quel est le cardinal de $\mathcal{P}_a(E)$?

- (1) ☐ $\text{Card}(\mathcal{P}_a(E)) = n - 1$ (2) ☐ $\text{Card}(\mathcal{P}_a(E)) = n$ (3) ☒ $\text{Card}(\mathcal{P}_a(E)) = 2^{n-1}$
 (4) ☐ $\text{Card}(\mathcal{P}_a(E)) = 2^n$ (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

12. On note f la fonction $x \mapsto \frac{x}{x-1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Cocher la(les) affirmation(s) correcte(s), si il y en a.

- (1) ☒ f est injective.
- (2) ☒ f est surjective.
- (3) ☒ f est bijective.
- (4) ☐ f n'est ni injective ni surjective.
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

13. On note f la fonction $x \mapsto e^x + x$ sur \mathbb{R} . Cocher la(les) affirmation(s) correcte(s), si il y en a.

- (1) ☒ f est injective.
- (2) ☐ f est surjective.
- (3) ☐ f est bijective.
- (4) ☐ f n'est pas une fonction.
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

14. Cocher la(les) bonne(s) affirmation(s), si il y en a.
L'image de ...

- (1) ☐ $x \mapsto \ln x$ est \mathbb{R}^*
- (2) ☐ $x \mapsto \sin x$ est \mathbb{R}
- (3) ☐ $x \mapsto \frac{1}{x}$ est \mathbb{R}_+
- (4) ☒ $x \mapsto \tan([0, \frac{\pi}{4}])$ est $[0, 1]$
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

15. On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$$

Quelle(s) est(sont) la(les) bonne(s) réponse(s) ?

- (1) ☐ $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
- (2) ☐ $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$
- (3) ☐ $f(\mathbb{R}) =]1, +\infty[$
- (4) ☒ $f(\mathbb{R}) = [1, +\infty[$
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

16. On considère la fonction de la question précédente. Quelle(s) est(sont) la(les) bonne(s) réponse(s) ?

- (1) ☒ $f^{-1}([1, 5]) = [-2, 2]$
- (2) ☒ $f^{-1}([0, 5]) = [-2, 2]$
- (3) ☐ $f^{-1}([1, 5]) = [0, 2]$
- (4) ☐ $f^{-1}([0, 5]) = [0, 2]$
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

17. La somme $\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i}$ est équivalente à ...

- (1) ☒ $\sum_{j=n+2}^{2n+1} \frac{1}{j-1}$
- (2) ☒ $\sum_{i=n+2}^{2n+1} \frac{1}{i-1}$
- (3) ☒ $\sum_{j=n}^{2n-1} \frac{1}{j+1}$
- (4) ☐ $\sum_{i=n+1}^{2n-1} \frac{1}{i+1}$
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

18. Si on simplifie la somme suivante

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k+1}{2^{k+1}} - \frac{k}{2^k} \right)$$

on obtient ...

- (1) ☒ $\frac{n}{2^n}$
- (2) ☐ $\frac{n+1}{2^{n+1}}$
- (3) ☐ $\frac{n}{2^{n+1}}$
- (4) ☐ 1
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

19. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\binom{2n+2}{n+1}$$

Cocher la(les) bonne(s) équivalence(s), s'il y en a.

$$\begin{array}{llll} (1) \blacksquare & \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} & (2) \square & \frac{(n+1)!}{(2n+2)!(2n+2)!} \quad (3) \blacksquare \quad 2\binom{2n+1}{n+1} \quad (4) \square \quad \binom{2n+1}{n+1} \\ & & (5) \square & \text{aucune des réponses précédentes n'est correcte.} \end{array}$$

20. Soit deux entiers naturels n et p tels que $p \leq n$, on considère le produit :

$$\prod_{k=p}^n 5$$

Cocher la(les) bonne(s) équivalence(s), s'il y en a.

$$\begin{array}{llll} (1) \blacksquare & 5^{n-p+1} & (2) \square & 5^{n-p} \quad (3) \square \quad (n-p+1)5 \quad (4) \square \quad (n-p)5 \\ & & (5) \square & \text{aucune des réponses précédentes n'est correcte.} \end{array}$$