Durée : 1 heure.
Aucun document n'est autorisé.
La calculatrice collège est tolérée.

— Veuillez ne pas répondre sur le sujet, mais sur le Formulaire Forms prévu à cet effet.

— Les questions peuvent présenter une ou plusieurs réponses valides.

— Une mauvaise réponse enlève des points, une absence de réponse n'a pas d'incidence.

— A la fin du QCM la dernière question sur le formulaire vous proposera de valider vos réponses.

Attention le choix sera définitif et vous ne pourrez plus revenir sur vos réponses.

BON COURAGE !

⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂

1. On considère l'équation différentielle suivante :

$$y^{''} + 3y' - 4y = e^{-x}(x^2 + x + 1).$$

Dans ce cas, on cherche une solution particulière de la forme :

(1)☐ $y_p = xe^{-x}(x^2 + x + 1)$
(2)☐ $y_p = e^{-x}(ax^2 + bx + c)$
(3)☐ $y_p = e^{-x}(ax^3 + bx^2 + cx + d)$
(4)☐ $y_p = x^2 e^{-x}(ax^2 + bx + c)$
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

2. Cocher la (les) affirmation(s) correcte(s).

(1)☐ $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + c$ (2)☐ $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + c$ (3)☐ $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$
(4)☐ $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

3. Soit $c \in \mathbb{R}$ et soit $f'(x) = \dfrac{-3}{x^2}$. Alors $f(x) = \dots$

(1)☐ $\dfrac{3}{x} + c$ (2)☐ $\dfrac{2}{x^3} + c$ (3)☐ $-\ln(x^3) + c$ (4)☐ $3\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right) + c$
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

4. On considère l'équation différentielle (ε) $y^{''} + y = 0$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies ?

(1)☐ L'équation caractéristique de (ε) est $r^2 + 1 = 0$.
(2)☐ Les solutions de l'équation caractéristique sont $r_1 = i$ et $r_2 = \overline{r_1}$.
(3)☐ Les solutions de (ε) sont du type $y(x) = (k_1 x + k_2)e^{rx}$, avec $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.
(4)☐ L'équation (ε) a des solutions complexes.
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

5. On considère $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. Si on utilise le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$, on peut écrire :

(1)☐ $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ (2)☐ $\displaystyle\int_1^2 t\,\mathrm{d}t$ (3)☐ $\displaystyle -\int_{\frac{1}{2}}^{1} t\,\mathrm{d}t$

(4)☐ $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

6. Calculer $\displaystyle\int_0^1 2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

(1)☐ 0 (2)☐ 1 (3)☐ $\dfrac{\pi}{2}$ (4)☐ $\dfrac{\pi}{4}$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

7. Une fonction f est solution de l'équation différentielle $y' = 3y + e^x$. Que peut-on en déduire de la fonction g définie par $f(x) = g(x) - e^x$? g est solution de l'équation différentielle ...

(1)☐ $y' = 3y + 3$ (2)☐ $y' = y + 3$ (3)☐ $y' = 3y$ (4)☐ $y' = 3y + e^x$

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

8. Parmi les fonctions suivantes cocher celle(s) qui peu(ven)t être primitive(s) de $\ln(x)$

(1)☐ $\dfrac{1}{x}$ (2)☐ $x\ln(x) - x$ (3)☐ $\ln(|\ln(x)|)$ (4)☐ $x\ln(x)$

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

9. Soient f une fonction continue définie sur I et ϕ définie sur J une bijection telle que $\phi(J) \subset I$. Cocher la(les) affirmation(s) correcte(s)

(1)☐ $\displaystyle\int f(\phi(x)) \cdot \phi'(x)\,\mathrm{d}x = (F \circ \phi)(x) + c$, avec F une primitive de f sur I et $c \in \mathbb{R}$.

(2)☐ $\displaystyle\int \phi'(x) \cdot \phi^r(x)\,\mathrm{d}x = (r+1)\phi^{r+1}(x) + c$, avec r, c réels.

(3)☐ $\displaystyle\int e^{\phi(x)}\,\mathrm{d}x = e^{\phi(x)} + c$

(4)☐ $\displaystyle\int \frac{\phi'(x)}{\phi(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|\phi(x)| + c$, avec $c \in \mathbb{R}$.

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

10. On considère l'équation différentielle $(x^2+3)y'' - 4y = \cos(x)$.

(1)☐ C'est une équation différentielle d'ordre 1.
(2)☐ C'est une équation différentielle non linéaire.
(3)☐ Pour résoudre le problème de Cauchy on impose une condition initiale.
(4)☐ C'est une équation non homogène.
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

11. On considère $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t \sin t\,\mathrm{d}t$. En utilisant le changement de variable $\cos t = x$ ou en remarquant que $\sin t = (\cos t)'$, on obtient :

(1)☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t \sin t\,\mathrm{d}t = \frac{7}{24}$ (2)☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t \sin t\,\mathrm{d}t = -\frac{7}{24}$ (3)☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t \sin t\,\mathrm{d}t = \frac{7}{8}$

(4)☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t \sin t\,\mathrm{d}t = -\frac{7}{8}$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

12. Parmi les fonctions suivantes cocher celle(s) qui peu(ven)t être primitive de $\dfrac{2x+3}{x^2+3x+1}$.

(1)☐ $\ln|x^2+3x+1|$ (2)☐ $\dfrac{-1}{(x^2+3x+1)^2}$ (3)☐ $\dfrac{(2x+3)(x^2+3x+1)^2}{2}$ (4)☐ $(\ln|x^2+3x+1|)^2$

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

13. On considère l'équation différentielle suivante :

$$y^{''}+4y=x\cos(2x).$$

Dans ce cas, on cherche une solution particulière de la forme :

(1)☐ $y_p=\cos(2x)(ax^2+bx+c)$
(2)☐ $y_p=\cos(2x)(ax+b)$
(3)☐ $y_p=\cos(2x)(ax^2+bx+c)+\sin(2x)(dx^2+fx+g)$
(4)☐ $y_p=\cos(2x)(ax+b)+\sin(2x)(cx+d)$
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

14. Soit $I=\displaystyle\int 2t\ \ e^t\,\mathrm{d}t$

(1)☐ $I=t^2\ e^t-\displaystyle\int t\ \ e^t\,\mathrm{d}t$ (2)☐ $I=2e^t(t-1)+c$ (3)☐ $I=2e^t-\displaystyle\int 2t\ \ e^t\,\mathrm{d}t$

(4)☐ $I=2t\ e^t-\displaystyle\int 2e^t\,\mathrm{d}t$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

15. On considère la fonction partie entière sur $[-1,2]$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies ?

(1)☐ $(-1,0,\frac{1}{4},1,\frac{3}{2},2)$ est une subdivision uniforme adaptée
(2)☐ $(-1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2)$ est une subdivision uniforme
(3)☐ $(-1,0,1,\frac{3}{2},2)$ est une subdivision non uniforme adaptée
(4)☐ $(-1,0,\frac{1}{2},2)$ est une subdivision non uniforme adaptée
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

16. Parmi les fonctions y suivantes définies sur $\mathbb{R}$, lesquelles peuvent être solutions de l'équation différentielle $y^{''}=12x$:

(1)☐ $y(x)=6x^2+k$, avec $k\in\mathbb{R}$
(2)☐ $y(x)=2x^3+k_1x+k_2$, avec $k_1,k_2\in\mathbb{R}$
(3)☐ $y(x)=x^3+kx$, avec $k\in\mathbb{R}$
(4)☐ $y(x)=2x^3+k$, avec $k\in\mathbb{R}$
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

17. La formule d'intégration par parties est :

(1)☐ $\displaystyle\int_a^b u'v=[uv]_a^b+\int_a^b uv'$
(2)☐ $\displaystyle\int_a^b u'v=[uv]_a^b-\int_a^b uv'$
(3)☐ $\displaystyle\int_a^b u'v=[u'v']_a^b+\int_a^b uv'$
(4)☐ $\displaystyle\int_a^b u'v=[u'v']_a^b-\int_a^b uv'$
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

18. Soient a et b des réels quelconques. Cocher la(les) affirmation(s) correcte(s)

(1)☐ Toute fonction intégrable sur $[a,b]$ est continue.

(2)☐ Si φ intégrable sur $[a,b]$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(x)\ \forall x \in [a,b]$.

(3)☐ Si f et g sont intégrables sur $[a,b]$ alors fg l'est aussi.

(4)☐ Si f et g sont intégrables sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b (fg)(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

19. Calculer $\displaystyle\int_0^1 2 - x + 3x^2\,\mathrm{d}x$.

(1)☐ 0 (2)☐ 1 (3)☐ $\dfrac{7}{2}$ (4)☐ $\dfrac{5}{2}$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

20. Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

(1)☐ f prend uniquement des valeurs positives sur $\mathbb{R}$.

(2)☐ f prend uniquement des valeurs négatives sur $\mathbb{R}$.

(3)☐ $f(1) = \dfrac{\pi}{2}$

(4)☐ $f(1) = 0$

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

.