ISEN **2021/2022**

CIR1/CNB1 - Mathématiques "Analyse"

PARTIEL 3/01/2022

Consignes :

- *Pour cette épreuve de **2** heures aucun document n'est autorisé et la calculatrice collège est tolérée.*
- *Les **3** exercices qu'il comporte sont indépendants et peuvent être faits dans l'ordre de votre choix.*
- *Expliquez vos raisonnements avec un maximum de clarté et avec le vocabulaire adapté.*
- *Une copie soignée est gage d'une bonne note !*

BONNE ANNÉE !

⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂

Exercice 1. (6 Points + Bonus)

On considère l'équation différentielle suivante :

$$y'' + y = \frac{3}{4}\sin(x) \qquad (E)$$

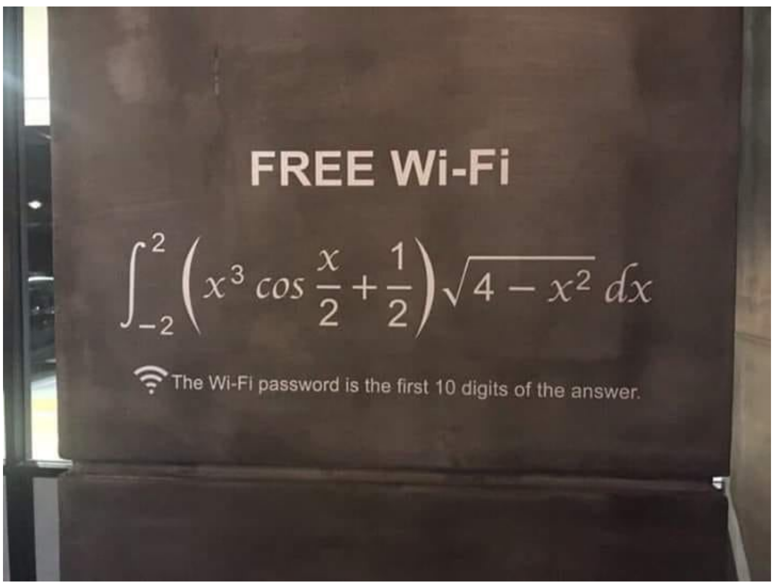
1. Pourquoi (E) est une équation différentielle ? Définir le type.
2. Écrire l'équation différentielle homogène associée à (E) et la résoudre.
3. Trouver une solution particulière de (E) en expliquant votre démarche.
4. Donner l'ensemble de toutes les solutions de (E).
5. Déterminer la solution de E dont la courbe représentative passe par le point A de coordonnées $(0,0)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 0.
6. (BONUS) Résoudre $y'' + y = \dfrac{1}{4}\sin(3x)$

   En déduire la solution générale de $y'' + y = \sin^3(x)$

   Suggestion : linéariser $\sin^3(x)$

Exercice 2. (6 Points)

Pendant les vacances de Noël, j'ai trouvé dans un restaurant le panneau suivant :



1. (a) Calculer

$$A = \int_{-2}^{2} \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

Suggestion : utiliser le changement de variable $x = 2\sin(t)$.

   (b) Donner une interprétation géométrique de l'intégrale A.

2. Calculer

$$B = \int_{-2}^{2} x^3 \cos\left(\frac{x}{2}\right)\sqrt{4 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

Suggestion : vérifier la parité et imparité de la fonction intégrande.

3. Quel est le mot de pass du WiFi de ce restaurant ?

Exercice 3. (8 Points)

1. Énoncer la formule de Taylor-Young pour une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0.
2. Donner le développement limité de $g(x) = \ln(1 + x^3)$ au voisinage de 0 à l'ordre 6.
3. Donner le développement limité de $h(x) = \sqrt{1 + x^2} - 1$ au voisinage de 0 à l'ordre 5.
4. Donner le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 4 de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$.
5. Soit I un intervalle, a un point de I et $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction.

   Donner la définition d'une fonction prolongeable par continuité en a.
6. $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui, déterminer son prolongement.
7. Déterminer la position de la courbe $2x + \dfrac{x^3}{2} - x^4$ par rapport à la tangente au voisinage de 0.