ISEN **2019/2020**

CIR1 ET CNB1 - MATHÉMATIQUES

DEVOIR SURVEILLÉ 17/03/2020

Consignes :

- *Pour cette épreuve de 2 heures aucun document n'est autorisé et la calculatrice collège est tolérée.*
- *Les 3 exercices qu'il comporte sont indépendants et peuvent être faits dans l'ordre de votre choix.*
- *Expliquez vos raisonnements avec un maximum de* ***clarté*** *et avec le* ***vocabulaire*** *adapté.*
- *Une copie soignée est gage d'une bonne note !*

Exercice 1. (5 Points)

1. Énoncer le Petit théorème de Fermat.
2. Déterminer le reste de la division de $N = 222^{333}$ par 7.
3. Énoncer le Théorème de Gauss.
4. Toto veut faire don des livres de sa bibliothèque. S'il les répartit dans des cartons contenant 20 livres ou des cartons qui en contiennent 25, il lui reste toujours 7 livres.

   Sachant que Toto a plus de 10 livres, quel est le nombre minimal de livres dans sa bibliothèque ?

Exercice 2. (4 Points)

Soit $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

1. Combien de racines P aura dans $\mathbb{C}[X]$? Pourquoi ?
2. Montrer que $1 + j = -j^2$
3. Calculer j^3
4. Montrer que j est une racine double de P.

   Qu'est-ce que l'on peut dire de $\overline{j}$?
5. Trouver deux racines réelles évidentes de P.
6. Factoriser P en facteurs irréductible dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3. (4 Points)

Soit $Q = 7X(X+1)(X-j)^2(X-\overline{j})^2$ avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

On considère la fraction rationnelle $\dfrac{1}{Q}$.

Donner sa décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ et dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 4. (7 Points)

Soient les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Est-ce que A est symétrique ? Même question pour anti-symétrique, diagonale, triangulaire inférieure ou supérieure.
2. Calculer le determinant de A et de J.
3. Calculer A^2.
4. Exprimer A et A^2 en fonction de J et I_3.
5. En utilisant la question précédente, écrire une égalité du type $\alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3 = 0$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$.
6. En déduire que A est inversible et préciser son inverse A^{-1}.

Soit le système linéaire

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} y + z & = & 1 \\ x + z & = & 2 \\ x + y & = & 4 \end{array} \right.$$

7. Écrire le système linéaire sous forme matricielle.
8. Justifier de l'existence d'une ou plusieurs solution(s) au système.
9. (BONUS) Calculer la(les) solution(s) du système.
10. (BONUS) Retrouver la(les) solution(s) par une autre méthode.