

EXAMEN 6/01/2016

Consignes :

- Pour cette épreuve de **2** heures aucun document n'est autorisé et la calculatrice collège est tolérée.
- Les **3** exercices qu'elle comporte sont indépendants.
- Expliquez vos raisonnements avec un maximum de **clarté** et avec le **vocabulaire** adapté.
- Une copie soignée est gage d'une bonne note !

Exercice 1

On considère

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } S = \frac{1}{4} M^T M.$$

Justifier vos réponses.

1. La matrice S est-elle carrée ? Quelle est sa dimension ? Est-elle symétrique ?
2. Calculer
 - (a) la trace de S .
 - (b) le déterminant de S .
 - (c) l'inverse de S .
3. On considère le système linéaire $A \cdot X = b$, avec $X = [x \ y \ z]^T$, $b = [1/2 \ 1/2 \ 3/8]^T$ et $A = S - \frac{3}{4} Id_3$, où Id_3 est la matrice identité d'ordre 3.
 - (a) Écrire les équations du système linéaire.
 - (b) Résoudre le système linéaire avec la méthode du pivot de Gauss et en déduire le rang de A .

Exercice 2

On souhaite calculer

$$A = \int_0^{\pi/2} e^x \cos(x) dx \text{ et } B = \int_0^{\pi/2} e^x \sin(x) dx.$$

1. Calculez A et B :
 - (a) par intégration par parties ;
 - (b) en utilisant $A + iB$.
2. En utilisant la primitive de B , en déduire la solution générale de

$$y'(x) = -y(x) + \sin(x).$$

Suggestion : en multipliant l'équation par e^x , avec x une primitive quelconque de 1, on obtient une équation équivalente

Exercice 3

En posant d'abord $t = \pi - u$, calculer

$$\int_0^\pi \frac{t \sin t}{1 + \cos^2 t} dt.$$

On admet que $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.