ISEN **2017/2018**

CIR1 - Mathématiques

DEVOIR SURVEILLÉ 4/06/2018

Consignes :

- *Pour cette épreuve de **2** heures aucun document n'est autorisé et la calculatrice collège est tolérée.*
- *Les **3** exercices qu'il comporte sont indépendants.*
- *Expliquez vos raisonnements avec un maximum de clarté et avec le vocabulaire adapté.*

Exercice 1. (8 points)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

1. Soit $u = [x, y, z] \in \mathbb{R}^3$. Écrire $f(u)$.
2. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Justifiez vos réponses.
3. L'application f est-elle un homomorphisme? Endomorphisme ? Automorphisme ? Justifiez vos réponses.
4. On considère les vecteur $b_1 = [1, -2, 1]$, $b_2 = [0, 1, 0]$ et $b_3 = [1, 0, -1]$.
   Montrer que $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Calculer les valeurs propres de A.
6. Calculer les vecteurs propres associés aux valeurs propres de A.
7. La matrice A est diagonalisable ? Justifiez.
8. Déterminer $D = Mat_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
9. Donner une matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ et calculer P^{-1}.
10. Que représente la matrice PDP^{-1} ?
11. En déduire A^{2018}.

Exercice 2. (6 points)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x, y) = \sin(xy)$.

1. Cette fonction appartient-elle à la classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$? Justifiez.
2. Calculer le gradient de f.
3. Calculer la matrice hessienne de f.
4. Donner la formule de Taylor de degré 2 pour la fonction f au point $(x_0, y_0) = (\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$.
5. Le point (x_0, y_0) est-il critique pour f ? Peut-on conclure qu'il est un extremum ? Justifiez.

Exercice 3. (6 points)

On considère la courbe paramétrée γ de composantes : $\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}$

1. Donner le domaine de définition de la courbe γ. Si possible, réduire ce domaine.

2. Montrer que la courbe γ admet trois symétries et définir lesquelles. Réduire le domaine de définition.

3. Donner la définition de point régulier et de point singulier (ou stationnaire). La courbe possède des points singuliers ? Justifier.

4. Déterminer pour quelles valeurs de t la courbe γ possède une tangente horizontale.

5. Donner une représentation approximative de la courbe γ.