ISEN **2016/2017**

CIR1 - Mathématiques

DEVOIR SURVEILLÉ 29/05/2017

Consignes :

- *Pour cette épreuve de 2 heures aucun document n'est autorisé et la calculatrice collège est tolérée.*
- *Les **3 exercices** qu'elle comporte sont indépendants et le barème uniformément distribué.*
- ***Expliquez et justifiez** vos raisonnements avec un maximum de clarté et avec le vocabulaire adapté.*

Exercice 1.

Soit f l'application linéaire définie par

$$f([x,y,z]) = [-2x+5y-2z, -3x+6y-3z, -x+y-z]$$

1. Donner la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Définir et déterminer le noyau de f avec la méthode du Pivot de Gauss.
   L'application f est injective ? Justifier.
3. On considère les vecteurs suivants :

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad w = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

   (a) Montrez que $\{u, v, w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Quelle est la matrice P de passage de la base canonique à la base $\{u, v, w\}$?
   (c) Déterminer en fonction de $\{u, v, w\}$ les images par f des vecteurs $\{u, v, w\}$.
   (d) En déduire, sans calculer P^{-1}, la valeur de $B = P^{-1}AP$.
   Qu'est-ce que représente la matrice B ?

Exercice 2.

On considère la fonction f définie par

$$f(x,y) = \frac{x}{y^2+y}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer et décrire les courbes de niveau $f(x,y) = k$ pour $k = 0$ et $k = 1$.
3. Calculer la limite en $(0,0)$, si elle existe.
4. Calculer $\nabla f(x,y)$ et les points critiques, s'ils existent.

Exercice 3.

On considère trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$

$$u = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad w = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

et l'application linéaire suivante :

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (4x - 5y, 2x - 3y)$$

1. Donner la définition d'un vecteur propre et vérifier si u, v et w sont vecteurs propres de h. Dans le cas affirmatif, donner la valeur propre associée.

2. Écrire un système d'équations différentielles $Y'(t) = A \cdot Y(t)$ associé à l'application h et décrire sa solution.

3. Décrire la solution du système avec conditions initiales : $Y(0) = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$