ISEN **2018/2019**

CIR1 ET CNB1 - MATHÉMATIQUES

DEVOIR SURVEILLÉ 18/10/2018

Consignes :

- *Pour cette épreuve de 2 heures aucun document n'est autorisé et la calculatrice collège est tolérée.*
- *Les 4 (plus 1 bonus) exercices qu'il comporte sont indépendants.*
- *Expliquez vos raisonnements avec un maximum de* **clarté** *et avec le* **vocabulaire** *adapté.*
- *Une copie soignée est gage d'une bonne note !*

Exercice 1. (Points 5)

Soit $f : E \to F$ une application et soient (a) et (b) les deux propositions suivantes :

$$\text{(a) } \forall (x_1, x_2) \in E^2,\ \text{si } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \qquad \text{et} \qquad \text{(b) } \forall y \in F,\ \exists x \in E\ f(x) = y$$

Soit g la fonction définie sur $[0, 4]$ dans $[-1, 3]$ par :

$$g(x) = \sqrt{16 - x^2} - 1$$

1. Donner la contraposée de (a) et la négation de (b).
2. La fonction g vérifie la proposition (a) ? Et la proposition (b) ?
3. Exprimer à l'aide des quantificateurs la bijection et la bijection réciproque.
4. Est-ce que l'on peut définir la bijection réciproque de g ? Expliquer pourquoi et dans le cas affirmatif, l'expliciter.

Exercice 2. (Points 4)

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n$.

   En déduire la valeur de

$$T_n = \sum_{k=n+1}^{2n} k = (n+1) + (n+2) + \ldots + (2n-1) + 2n$$

   Remarque : $S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} k = 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) + \ldots + 2n$

Exercice 3. (Points 6)
Soit
$$u = 1 + \mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad v = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$$

1. Représenter graphiquement u et v dans le plan complexe.
2. Déterminer les modules de u et v.
3. Déterminer un argument de u et un argument de v.
4. Calculer les racines cubiques de u.
5. Calculer $\dfrac{u}{v}$.
6. En déduire les valeurs de
$$\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) \qquad \text{et} \qquad \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$$
7. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation géométrique : $z \mapsto uz + v$

Exercice 4. (Points 5)
On considère l'équation différentielle suivante :
$$y' + 2y = 2\cos(2x) \quad (E)$$

1. Pourquoi (E) est une équation différentielle ? Définir le type.
2. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
3. Trouver une solution particulière de (E) en expliquant votre démarche.
4. Donner l'ensemble de toutes les solutions de (E).
5. Y-a-t-il des solutions de (E) vérifiant :
$$y(0) = 1?$$

Exercice 5. (BONUS)
Soit n un entier naturel. Calculer, en justifiant les réponses :
$$A = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \qquad \text{et} \qquad B = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$$