ISEN **2020/2021**

CIR1 ET CNB1 - MATHÉMATIQUES

DEVOIR SURVEILLÉ 16/10/2020

Consignes :

- *Pour cette épreuve de **2** heures aucun document n'est autorisé et la calculatrice collège est tolérée.*
- *Les **5** exercices qu'il comporte sont indépendants et peuvent être faits dans l'ordre de votre choix.*
- *Expliquez vos raisonnements avec un maximum de **clarté** et avec le **vocabulaire** adapté.*
- *Une copie soignée est gage d'une bonne note !*

Exercice 1. (4 Points)

(a) Donner les formules d'Euler.

(b) Calculer pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ $S_1 = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} e^{\mathrm{i}k\theta}$.

(c) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $(\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^2$, calculer $S_2 = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \sin(\alpha + k\theta)$.

Exercice 2. (6 Points)

(a) Soit la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow |z| = |z'|.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(b) (BONUS) La classe d'équivalence pour $\mathcal{R}$ de $z \in \mathbb{C}$ est l'ensemble des complexes qui sont en relation avec z : $\mathcal{C}(z) = \{z' \in \mathbb{C} / z\mathcal{R}z'\}$. Montrer que la classe d'équivalence de $z \in \mathbb{C}$ est un cercle dont on donnera les caractéristiques.

(c) Résoudre $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$. *On pourra d'abord poser $Z = z^2$ afin de se ramener à une équation du second degré.*

(d) (BONUS) Les racines trouvées à la question précédente appartiennent-elles à une même classe d'équivalence de $\mathcal{R}$? Justifier.

(e) Soit la similitude $s : z \mapsto iz + 5 + i$. Déterminer les caractéristiques de s : éventuel(s) invariant(s), type de transformation (directe, indirecte, rotation, homothétie, symétrie, composition de plusieurs transformations ?), rapport et angle si applicable.

(f) Déterminer les images par la similitude s des points d'affixes respectives les 4 solutions de l'équation de la question 3. Quelle figure obtient-on ?

Exercice 3. (4 Points)

(a) Soit la fonction $f : [0, 1] \to [0, 1]$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 1 - x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrer que $f \circ f = id$.

(b) Soient $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $g(x) = 3x + 1$ et $h(x) = x^2 - 1$. A-t-on $g \circ h = h \circ g$?

Exercice 4. (6 Points)
On considère l'équation différentielle suivante :

$$y' - 3y = 5\cos(2x) \quad (E)$$

(a) Pourquoi (E) est une équation différentielle ? Définissez son type.

(b) Résolvez l'équation différentielle homogène associée à (E).

(c) Trouvez une solution particulière de (E) en justifiant votre démarche.

(d) Donnez l'ensemble de toutes les solutions de (E).

(e) Soit la condition initiale $y(0) = 1$. Existe-t-il une solution de (E) satisfaisant cette condition ? Si oui, quelle est-elle ?

(f) (BONUS) Résolvez l'équation différentielle : $y' - 3y = 5\cos(2x) + xe^{-3x} \quad (E_2)$

Exercice 5. (BONUS - 2 points)
Soit E un ensemble à p éléments et F un sous-ensemble de E contenant n éléments (avec $(p, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$). Quel est le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de F ?