





Durée : 1 heure.
Aucun document n'est autorisé.
La calculatrice collègue est tolérée.

Veillez ne pas répondre sur le sujet, mais sur la **feuille de réponse** prévue à cet effet.

- Les questions peuvent présenter une ou plusieurs réponses valides.
- Une mauvaise réponse enlève des points, une absence de réponse n'a pas d'incidence.
- En cas d'erreur, utilisez du « blanco ».
- Soyez très vigilant, avant de répondre à une question, de cocher la bonne ligne dans la grille.
- N'oubliez pas vos NOM, PRÉNOM et LOGIN (p62xxx). Par exemple, p62375 s'encode ainsi :

									
									
Identifiant : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9									
Chiffre 1 : <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>									
Chiffre 2 : <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>									
Chiffre 3 : <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>									
Chiffre 4 : <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>									
Chiffre 5 : <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>									
Nom : PEDALETTI									
Prénom : PAOLO									

BON COURAGE !

* * * * *

1. Soient $A, B \in Gl_n(\mathbb{R})$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

- (1) ☐ $|A| > 0$ et $|B| > 0$
 (2) ☐ $A + A^{-1} = I_n$
 (3) ☐ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
 (4) ☐ $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
 (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

2. Soit A une matrice de taille $n \times p$ et B une matrice de taille $p \times q$. Le matrice produit $C = A \cdot B \dots$

- (1) ☐ a pour coefficients $c_{ij} = \sum_{k=1}^q a_{ik}b_{kj}$
 (2) ☐ a pour coefficients $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}$
 (3) ☐ est carrée de taille p .
 (4) ☐ n'existe pas.
 (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

3. Si on reprend les matrices A , B et C de la question précédente et que l'on suppose $n \geq p > q$, que peut-on dire du système $CX = D$ (on suppose que X et D sont correctement dimensionnées par rapport à C de manière à avoir un système linéaire) ...

- (1) ☐ Le système est de Cramer
 (2) ☐ Le système peut avoir une solution unique si $\text{rang}(C) = \text{rang}(C|D)$
 (3) ☐ Le système a toujours au moins une solution.
 (4) ☐ Le système ne peut admettre une infinité de solutions.
 (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

4. Dans quels cas le déterminant d'une matrice vaut zéro ?

- (1) ☐ si les éléments d'une ligne sont tous nuls.
- (2) ☐ si les éléments de la diagonale sont tous nuls.
- (3) ☐ si deux colonnes sont proportionnelles.
- (4) ☐ si les éléments d'une colonne sont tous multiples d'un même élément $k \in \mathbb{R}^*$.
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

5. Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$. Un mineur de A est

- (1) ☐ unique
- (2) ☐ une matrice
- (3) ☐ un réel
- (4) ☐ ± 1
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

6. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- (1) ☐ A est nilpotente pour $k = 3$.
- (2) ☐ $AB = BA$
- (3) ☐ $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
- (4) ☐ $A + B = B + A$
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

7. Soit A une matrice carrée et inversible, alors ...

- (1) ☐ $AA^T = A^T A$
- (2) ☐ AA^T est inversible.
- (3) ☐ $A + A^T$ est inversible.
- (4) ☐ A^T est inversible.
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

8. Pour Pâques une grand-mère souhaite acheter à ses 3 petits enfants des poules en chocolat noir à 70% de cacao et des mini-lapins au chocolat au lait. Pour chacun elle achète aussi un panier en osier afin que le cadeau soit joli. Ses petits-enfants ont 10, 6 et 3 ans.

Elle pense d'abord donner 2 poules à ceux qui ont plus de 5 ans et 1,5 fois leur âge en lapins ; 1 poule pour celui de moins de 5 ans et le double de son âge en lapins. En comptant les paniers, cela fait 79 euros et dépasse malheureusement son budget.

Elle ne veut pas renoncer aux paniers alors elle se dit qu'elle va donner 6 lapins et une poule à chacun. Cette fois elle en aurait pour 57 euros et c'est en-dessous de son budget.

Alors elle décide de prendre 2 poules pour chaque enfant et d'ajouter 5, 4 et 3 lapins respectivement. Elle en a pour 66 euros.

Quelle est la matrice des coefficients associée au système qui décrit ce problème ?

- (1) ☐ $\begin{bmatrix} 5 & 30 & 3 \\ 3 & 18 & 3 \\ 6 & 12 & 3 \end{bmatrix}$
- (2) ☐ $\begin{bmatrix} 5 & 30 & 3 \\ 3 & 18 & 3 \end{bmatrix}$
- (3) ☐ $\begin{bmatrix} 5 & 30 \\ 3 & 18 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$
- (4) ☐ $\begin{bmatrix} 5 & 30 & 79 \\ 3 & 18 & 57 \\ 6 & 12 & 66 \end{bmatrix}$
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

9. Quel est le prix des poules et des lapins de la question précédente ?

- (1) ☐ Poule : 6 euros. Lapin : 1,5 euro.
- (2) ☐ Poule : 5 euros. Lapin : 1 euro.
- (3) ☐ On ne peut résoudre le système car certaines conditions sont incompatibles
- (4) ☐ On ne peut résoudre le système car il y a trop d'inconnues.
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

10. La grand-mère de la question précédente souhaite dépenser tout son budget et s'achète donc 4 lapins. De combien était son budget (en euros) ?

- (1) ☐ 74
 (2) ☐ 70
 (3) ☐ 72
 (4) ☐ Elle ne peut pas faire ça, cette question est un poisson d'avril
 (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

11. On considère le produit C des deux matrices suivantes, formées de mots, en omettant les signes d'opérations. Quelle phrase se trouve à la position $c_{2,1}$?

$$\begin{bmatrix} \text{le} & \text{a} & \text{le} \\ \text{un} & \text{a} & \text{un} \\ \text{le} & \text{avait} & \text{un} \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} \text{chat} & \text{rat} & \text{lion} \\ \text{mangé} & \text{dévoré} & \text{dégusté} \\ \text{poisson} & \text{fromage} & \text{touriste} \end{bmatrix}$$

- (1) ☐ le rat a dévoré le fromage
 (2) ☐ un chat a mangé un poisson
 (3) ☐ le chat avait mangé un poisson
 (4) ☐ le lion a dégusté le touriste
 (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

12. On considère la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$$

La comatrice de A est :

- (1) ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ (2) ☐ $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$ (3) ☐ $\begin{bmatrix} -1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ (4) ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$
 (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

13. Parmi les matrices suivantes, cocher celles qui sont antisymétriques.

- (1) ☐ $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (2) ☐ $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ (3) ☐ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ (4) ☐ $\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$
 (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

14. Le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

est équivalent à ...

- (1) ☐ $7 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (2) ☐ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ (3) ☐ $-7 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (4) ☐ -7
 (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

15. Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont échelonnées ?

- (1) ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ (3) ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \end{bmatrix}$ (4) ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

16. On considère un système linéaire de 3 équations et 2 inconnues. Le rang de la matrice associée au système est 3. Sa matrice augmentée a pour rang 2.

Le système a ...

- (1) ☐ une infinité de solutions
 (2) ☐ une unique solution
 (3) ☐ deux solutions
 (4) ☐ aucune solution
 (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

17. On considère un système linéaire de 3 équations et 4 inconnues. Le rang de la matrice associée au système est 2. Sa matrice augmentée a pour rang 2.

Le système a ...

- (1) ☐ une infinité de solutions
 (2) ☐ une unique solution
 (3) ☐ deux solutions
 (4) ☐ aucune solution
 (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

18. Soit $A = B + 3I$ une matrice. Cocher les affirmations correctes.

- (1) ☐ A et B commutent
 (2) ☐ $A^n = 3^n + B^n$
 (3) ☐ $A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{n-k} B^k$
 (4) ☐ $A^2 = B^2 + 6B + 9$
 (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

19. Un système est compatible si ...

- (1) ☐ il a une infinité de solutions.
 (2) ☐ il a une unique solution.
 (3) ☐ il n'a aucune solution.
 (4) ☐ le nombre d'équations est égal au nombre d'inconnues.
 (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

20. On considère le système linéaire homogène associé à la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -5 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \\ 6 & -9 & 0 \end{bmatrix}$$

Combien d'inconnues a ce système ?

- (1) ☐ 2 (2) ☐ 3 (3) ☐ 4 (4) ☐ 5 (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.