Durée : 1 heure.
Aucun document n'est autorisé.
La calculatrice collège est tolérée.

Veuillez ne pas répondre sur le sujet, mais sur la **feuille de réponse** prévue à cet effet.

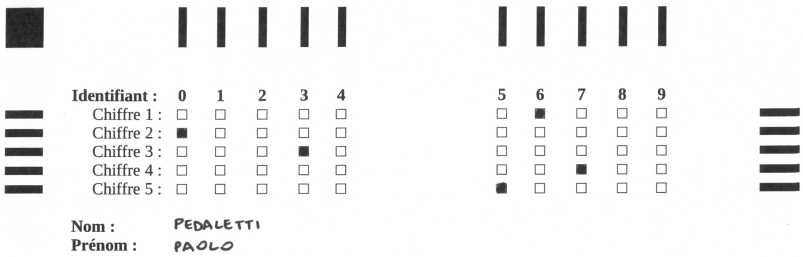
— Les questions peuvent présenter une ou plusieurs réponses valides.

— Une mauvaise réponse enlève des points, une absence de réponse n'a pas d'incidence.

— En cas d'erreur, utilisez du « blanco ».

— Soyez très vigilant, avant de répondre à une question, de cocher la bonne ligne dans la grille.

— N'oubliez pas vos NOM, PRÉNOM et LOGIN (p62xxx). Par exemple, p62375 s'encode ainsi :



BON COURAGE !

⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂⁂

1. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a et ne s'annulant pas au voisinage de a (sauf à la rigueur en a). On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de a si

(1)☐ $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$
(2)☐ $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$
(3)☐ $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$
(4)☐ $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 1$
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

2. Soit la primitive $I = \displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. Cocher la (les) affirmation(s) correcte(s)

(1)☐ $I = \arctan x + c$ (2)☐ $I = \arcsin x + c$ (3)☐ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$
(4)☐ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

3. Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$.

(1)☐ 0 (2)☐ -2 (3)☐ 2 (4)☐ $2\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

4. Parmi les limites suivantes lesquelles sont vraies ?

(1)☐ $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-\cos(x)-\sin(x)}{x^2} = -1$ (2)☐ $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-\cos(x)-\sin(x)}{x^2} = 1$

(3)☐ $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-\cos(x)-\sin(x)}{x^2} = +\infty$ (4)☐ $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(x)}{x^2-1} = +\infty$ (5)☐ $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(x)}{x^2-1} = 1$

5. La valeur de la limite $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x+2}{|x|-2}$ est ...

(1)☐ 0 (2)☐ 1 (3)☐ -1 (4)☐ $+\infty$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

6. On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \dfrac{\cos^2(t)}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin^2(t)}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t$. Le calcul de $I-J$ donne comme résultat :

(1)☐ $I-J=\dfrac{\pi}{6}$ (2)☐ $I-J=\dfrac{\pi}{12}$ (3)☐ $I-J=\dfrac{\pi}{3}$ (4)☐ $I-J=1$

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

7. Pour I et J définis à la question précédente, on souhaite calculer $I+J$ en posant $x=\tan(t)$. L'intégrale obtenue après changement de variable est :

(1)☐ $I+J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ (2)☐ $I+J=\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ (3)☐ $I+J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

(4)☐ $I+J=\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

8. Une primitive de la fonction sous l'intégrale $I+J$ définie à la question précédente est :

(1)☐ $[I+J]=\frac{1}{2}(-\ln|1-x|+\ln|1+x|)$ (2)☐ $[I+J]=\frac{1}{2}(1-x^2)^2$ (3)☐ $[I+J]=\mathrm{Arctan}(x)$

(4)☐ $[I+J]=\mathrm{Arctan}(-x)$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

9. Soit a un réel. On dit que :

(1)☐ f tend vers $+\infty$ en a si $\forall A\in\mathbb{R}\ \exists\delta>0\ \forall x\in I\ \ |x-a|\leqslant\delta \Rightarrow f(x)\geqslant A$
(2)☐ f tend vers $+\infty$ en a si $\forall\varepsilon>0\ \exists A\in\mathbb{R}\ \forall x\in I\ \ |x|\geqslant A \Rightarrow |f(x)-a|\leqslant\varepsilon$
(3)☐ f tend vers $+\infty$ en $-\infty$ si $\forall A\in\mathbb{R}\ \exists B\in\mathbb{R}\ \forall x\in I\ \ x\leqslant B \Rightarrow f(x)\geqslant A$
(4)☐ f tend vers $+\infty$ en $-\infty$ si $\forall A\in\mathbb{R}\ \exists B\in\mathbb{R}\ \forall x\in I\ \ x\geqslant B \Rightarrow f(x)\leqslant A$
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

10. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,\mathrm{d}x$.

(1)☐ 0 (2)☐ 1 (3)☐ $\dfrac{\ln(2)}{2}$ (4)☐ $\ln(\sqrt{2})$

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

11. Soit $I=\displaystyle\int_1^2 t\ \ \ln(t)\,\mathrm{d}t$. Calculer I en intégrant par parties :

(1)☐ $I=2\ln(2)+\frac{3}{4}$ (2)☐ $I=e^2+\frac{3}{4}$ (3)☐ $I=2\ln(2)-\frac{3}{4}$

(4)☐ $I=\ln(2)-\frac{7}{4}$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

12. Donner un équivalent en 0 de $\tan(x)$.

(1)☐ 1 (2)☐ x (3)☐ $\cos(x)$ (4)☐ $1-x$

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

13. On cherche à calculer $I=\int_3^4 \dfrac{x+2}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x$.

Pour cela on écrit $\dfrac{x+2}{x^2-3x+2}$ sous la forme $\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-1}$, avec

(1)☐ $A=-1$ et $B=-3$ (2)☐ $A=2$ et $B=1$ (3)☐ $A=4$ et $B=-3$

(4)☐ $A=-3$ et $B=4$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

14. Pour l'intégrale I définie à la question précédente, on trouve alors comme résultat :

(1)☐ $I=7\ln(2)-3\ln(3)$ (2)☐ $I=4\ln(3)-3\ln(2)$ (3)☐ $I=3\ln(2)-4\ln(3)$ (4)☐ $I=0$

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

15. Calculer $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x$.

(1)☐ 0 (2)☐ -2 (3)☐ 2 (4)☐ $\displaystyle 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x$

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

16. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

(1)☐ Au voisinage de $+\infty$, un polynôme est équivalent à son terme de plus bas degré.
(2)☐ Au voisinage de $-\infty$, un polynôme est équivalent à son terme de plus bas degré.
(3)☐ Au voisinage de 0, un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré.
(4)☐ Au voisinage de 0, un polynôme est équivalent à une exponentielle.
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

17. Parmi les équivalents suivants, lesquels sont vrais ?

(1)☐ $\sin x \underset{0}{\sim} x$ (2)☐ $\cos x \underset{0}{\sim} x$ (3)☐ $e^x-1 \underset{0}{\sim} e^x$ (4)☐ $\ln(1+2x) \underset{0}{\sim} 2x$

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

18. La limite de $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{1-e^{2x}}$ vaut ...

(1)☐ -1 (2)☐ 1 (3)☐ $+\infty$ (4)☐ $-\infty$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

19. Calculer $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{-x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

(1)☐ $-\frac{1}{9}$ (2)☐ 2 (3)☐ 0 (4)☐ $\frac{3}{4}$

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

20. On dit que f admet une limite finie l en a, si f est définie au voisinage de a et :

(1)☐ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in I \quad |x - a| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - l| \geqslant \varepsilon$
(2)☐ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in I \quad |x - a| \geqslant \delta \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$
(3)☐ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in I \quad |x - a| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$
(4)☐ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta \neq 0 \; \forall x \in I \quad |x - a| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.