**CIR1 2016/2017**

## QUIZ de MATHÉMATIQUES N°6

## 27/01/2017

*Durée : 40 minutes.*
*Aucun document n'est autorisé. La calculatrice collège est tolérée.*

*Veuillez ne pas répondre sur le sujet, mais sur la* ***feuille de réponse*** *prévue à cet effet.*

*Les questions peuvent présenter une ou plusieurs réponses valides.*
*Une mauvaise réponse enlève des points, une absence de réponse n'a pas d'incidence.*

**Question 1.** Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies ?

1. Une fonction $f$ admet toujours un développement limité.
2. Le développement limité d'un polynôme de degré $n$ au voisinage de 0 est lui-même.
3. Une fonction peut admettre plusieurs développements limités d'ordre $n$ au voisinage de 0.
4. Si $f$ est paire, la partie principale de son développement limité au voisinage de 0 ne contient que des exposants impairs.
5. aucune des réponses précédentes n'est correcte.

**Question 2.** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant 0, telle que $f(x) = x + x^2 + o(x^4)$.

1. $f(0)$ vaut 1.
2. La dérivée de $f$ en 0 est égale à 1.
3. Si $f$ est 2 fois dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0, alors $f^{(2)} = 1$.
4. Si $f$ est 3 fois dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0, alors $f^{(3)} = 0$.
5. aucune des réponses précédentes n'est correcte.

**Question 3.** Soit $f$ la même fonction de la question 2. On peut déduire que :

1. $f^2(x) = x^2 + x^4 + o(x^6)$ 2. $f(x^2) = x^2 + x^4 + o(x^6)$ 3. $f(2x) = 2x + 2x^2 + o(x^4)$

4. $f(x^4) = o(x^4)$ 5. aucune des réponses précédentes n'est correcte.

**Question 4.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions telles que au voisinage de 0 :

$$f(x) = x + x^3 + o(x^3) \text{ et } g(x) = -x + x^3 + o(x^3).$$

1. $f(x) + g(x) = o(x^2)$
2. $f(x) - g(x) = o(x)$
3. $f(x) + 2g(x) = -x + o(x^3)$
4. $f(x)g(x) = -x^2 + x^6 + o(x^6)$
5. aucune des réponses précédentes n'est correcte.

**Question 5.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions admettant un développement limité d'ordre $n$ en 0.

1. Si $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, alors $f(x)/g(x)$ n'admet pas un développement limité d'ordre $n$ en 0.
2. Alors $f(x) + g(x)$ admet un développement limité à l'ordre $n$ en 0.
3. Si $f(x)$ admet un $DL_n(0)$ en $g(0)$, alors $f(g(x))$ admet un $DL_n(0)$.
4. Si $f(x)$ et $g(x)$ n'admettent pas de $DL_n(0)$, alors $f(g(x))$ n'admet pas un $DL_n(0)$.
5. aucune des réponses précédentes n'est correcte.

**Question 6.** Soit $f$ une fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R})$. On suppose qu'au voisinage de 0 :

$$f(x) = 3 + 2x + x^2 + o(x^4).$$

Soit $F$ la primitive de $f$ telle que $F(0) = 1$.

1. $F(x) = 3x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^5)$
2. $F(x) = 1 + 3x + x^2 + o(x^2)$
3. $F(x) = 1 + 3x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^5)$
4. $F(x) = 1 + 3x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(\frac{1}{x^5})$
5. aucune des réponses précédentes n'est correcte.

**Question 7.** Au voisinage de 0 :

1. $\cos(2x) = 1 - 2x^2 + o(x^3)$
2. $e^{1+2x} = e(1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3))$
3. $\sin(x) = x^2 - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$
4. $\dfrac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + o(x^3)$
5. $\ln(1 + 2x) = 2x - 2x^2 + o(x^2)$

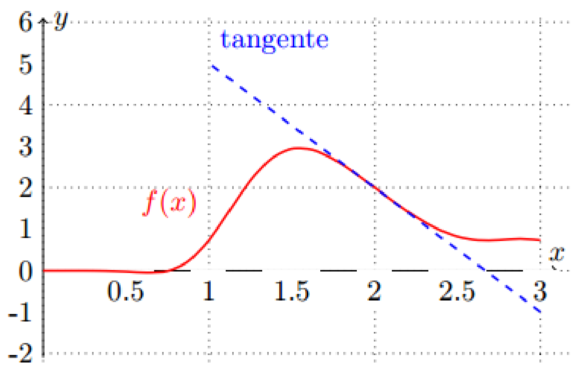
**Question 8.** Au voisinage de $+\infty$ :

1. $\ln\left(1 + \dfrac{1}{2x}\right) = \dfrac{1}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$
2. $\ln\left(1 + \dfrac{1}{2x}\right) = 1 + \dfrac{1}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$
3. $\ln\left(1 + \dfrac{1}{2x}\right) = 1 + 2x + o(x)$
4. $\ln\left(1 + \dfrac{1}{2x}\right) = 1 + 2x + o\left(\dfrac{1}{2x}\right)$
5. aucune des réponses précédentes n'est correcte.

**Question 9.** Au voisinage de $+\infty$ :

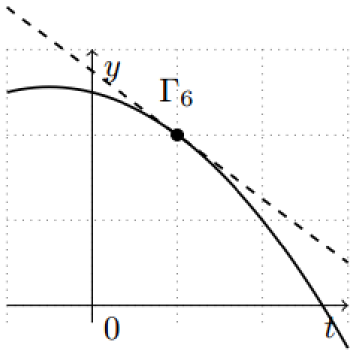
1. $\dfrac{1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$
2. $\dfrac{1}{x-1} = \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$
3. $\dfrac{1}{x-1} = -1 - x + o(x)$
4. $\dfrac{1}{x-1} = -\frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})$
5. aucune des réponses précédentes n'est correcte.

**Question 10.** Ci-dessous apparaît le graphe de la fonction $f$ au voisinage du point $x = 2$. Quel est le seul développement limité qui soit possible ?




1. $2 + 3(x-2) + (x-2)^2 + o((x-2)^2)$
2. $2 - 3(x-2) + (x-2)^3 + o((x-2)^2)$
3. $2 - 3(x-2) + (x-2)^2 + o((x-2)^2)$
4. $2 + 3(x-2) - (x-2)^3 + o((x-2)^2)$
5. $2 - 3x - x^3 + o(x^3)$

**Question 11.** Retrouvez le graphe local (trait plein, la tangente est tiretée) :




1. $1 + \frac{3}{4}(x-1) + o((x-1)^4)$
2. $1 + \frac{1}{4}(x-1)^2 + o((x-1)^4)$
3. $2 - \frac{3}{4}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + o((x-1)^4)$
4. $2 + \frac{3}{4}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^3 + o((x-1)^4)$
5. $2 - \frac{3}{4}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 + o((x-1)^4)$

**Question 12.** Soit $f$ une application définie sur un intervalle ouvert contenant 0. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont équivalentes à

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

1. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - 1| < \delta$
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - 1| > \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$
3. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x| < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$
4. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$
5. aucune des réponses précédentes n'est correcte.

**Question 13.** Soit $f$ une application définie sur un intervalle ouvert. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont équivalentes à

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$$

1. $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : |x| < \delta \Rightarrow f(x) > A$
2. $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : |x| > \delta \Rightarrow f(x) < A$
3. $\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R} : x < B \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon$
4. $\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R} : x > B \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$
5. aucune des réponses précédentes n'est correcte.

**Question 14.** La limite de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{1 - e^{2x}}$ vaut ...

1. 1 2. -1 3. $+\infty$ 4. $-\infty$ 5. aucune des réponses précédentes n'est correcte.

**Question 15.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies au voisinage de $a$ et ne s'annulant pas au voisinage de $a$ (sauf à la rigueur en $a$). On dit que $f$ et $g$ sont équivalentes au voisinage de $a$ si

1. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$
2. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$
3. $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$
4. $f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))$ avec $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$
5. aucune des réponses précédentes n'est correcte.

**Question 16.** Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

1. Au voisinage de $\pm\infty$, un polynôme est équivalent à son terme de plus bas degré.
2. Au voisinage de 0, un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré.
3. Si $f(x) = o_a(g(x))$ alors $f(x) + g(x) \underset{a}{\sim} g(x)$
4. $f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = o_a(g(x))$
5. aucune des réponses précédentes n'est correcte.

**Question 17.** Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies ?

1. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $h \underset{a}{\sim} g'$, alors $f + h \underset{a}{\sim} g + g'$
2. Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $f = O_a(g)$ et $g = O_a(f)$
3. $f$ est dominée par $g$ au voisinage de $a$ si $f/g$ est borné au voisinage de $a$.
4. Si deux fonctions ont la même limite en $a$, elles sont équivalentes au voisinage de $a$.
5. aucune des réponses précédentes n'est correcte.

**Question 18.** Soit $f(x) = x^3 e^{-x}$. On peut déduire que

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ 2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ 3. $x^3 = o_{+\infty}(e^x)$ 4. $e^x = o_{+\infty}(x^3)$
5. aucune des réponses précédentes n'est correcte.

**Question 19.** Soit $f(x) = x^{-1/3} \ln^3(x)$. On peut déduire que

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ 2. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ 3. $\ln^3(x) = o_0(x^{1/3})$ 4. $x^{1/3} = o_0(\ln^3(x))$
5. aucune des réponses précédentes n'est correcte.

**Question 20.** Parmi les équivalents suivants, lesquels sont vrais ?

1. $\sin x \underset{0}{\sim} x$
2. $\sqrt{x^2+1} \underset{+\infty}{\sim} x$
3. $e^x - 1 \underset{0}{\sim} e^x$
4. $\ln(1 + 2\tan x) \underset{0}{\sim} 2x$
5. aucune des réponses précédentes n'est correcte.