

DEVOIR SURVEILLÉ 16/03/2016

Consignes :

- Pour cette épreuve de **2** heures aucun document n'est autorisé et la calculatrice collègue est tolérée.
- Les **4** exercices qu'elle comporte sont indépendants.
- Expliquez vos raisonnements avec un maximum de **clarté** et avec le **vocabulaire** adapté.
- Une copie soignée est gage d'une bonne note !

Exercice 1.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3 \ln(1+x) - \ln(1+x^3)}{3x}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f .
2. Énoncer la formule de Taylor-Young pour une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0.
Calculer le développement limité de la fonction f à l'ordre 3 en 0.
3. Donner l'équation de la tangente ainsi que la position de la courbe représentative de f au voisinage du point 0.
Représenter sommairement la courbe de f au voisinage du point 0.

Exercice 2.

Calculer les limites suivantes en justifiant vos calculs :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin(x)) + e^{-x} - 1}{x^4}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{1 - \cos(2x)}$

Exercice 3.

On se place dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On considère $n = 8$. Décrire les éléments de cet ensemble et donner tous ses nombres inversibles.
Justifiez vos réponses.
2. Trouver l'ensemble des solutions entières vérifiant les équations suivantes :
 - (a) $207x \equiv 6 \pmod{18}$
 - (b) $222x \equiv 12 \pmod{18}$
3. Quel est le reste de la division euclidienne de $5^{21} - 7^{12}$ par 11 ?

Exercice 4.

On considère le polynôme $Q = X^5 - X^3 + X^2 - 1$.

1. Factoriser Q dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Décomposer la fraction $\frac{X+1}{Q}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.