Durée : 1 heure.
Aucun document ni calculatrice n'est autorisé.

Veuillez répondre sur le sujet.

NOM ....

PRÉNOM ....

Sans indiquer votre raisonnement, compléter ci-dessous.

Pour toutes les questions

$$P = (X^2 + X + 1)(X - 2)(X + 2), \quad Q = (X^2 + X + 1)(X^2 + 4) \quad \text{et} \quad F = \frac{X^2 - 4}{X^2 + 4}$$

1. Écrire en langage mathématiques que P appartient à l'ensemble des polynômes à coefficients réels : $P \in \mathbb{R}[X]$
2. Un polynôme est unitaire si le coefficient dominant vaut 1.
3. α est une racine d'un polynôme P si $P(\alpha) = 0$.
4. 2 est une racine simple de P car $X - 2 | P$ mais $(X - 2)^2 \nmid P$ ou $P(2) = 0$ et $P'(2) \neq 0$.
5. $\deg(P + Q)$ est 4
6. $\deg(F)$ est 0
7. $P \wedge Q = X^2 + X + 1$
8. $P \vee Q = (X^2 + X + 1)(X - 2)(X + 2)(X^2 + 4)$
9. Factorisation de Q sur $\mathbb{R}$: $(X^2 + X + 1)(X^2 + 4)$
10. Factorisation de Q sur $\mathbb{C}$: $(X - \frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2})(X - \frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2})(X + 2\mathrm{i})(X - 2\mathrm{i}) = (X - e^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}})(X - e^{\frac{4\pi}{3}\mathrm{i}})(X + 2\mathrm{i})(X - 2\mathrm{i})$
11. Les polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ sont de degré 1 ou 2 avec discriminant négatif.
12. Théorème d'Alembert-Gauss : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Alors P admet autant de racines, comptées avec leur ordre de multiplicité que son degré.
13. Théorème de Bézout : Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $P \neq 0$ ou $Q \neq 0$. Il existe deux polynômes $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $PU + QV = pgcd(P, Q)$.
14. Partie entière de F : 1
15. Décomposition en éléments simples théorique de F sur $\mathbb{R}$: $F = 1 + \frac{aX+b}{X^2+4}, \ a, b \in \mathbb{R}$
16. Décomposition en éléments simples théorique de F sur $\mathbb{C}$: $F = 1 + \frac{a}{X+2\mathrm{i}} + \frac{b}{X-2\mathrm{i}}, \ a, b \in \mathbb{C}$
17. Éléments simples (non théoriques) de F sur $\mathbb{C}$: $\frac{-2\mathrm{i}}{X+2\mathrm{i}}$ et $\frac{2\mathrm{i}}{X-2\mathrm{i}}$
18. A est un polynôme de degré 5. Si $A(1) = 0, \ A'(1) = 0, \ A''(1) = 0$ et $A^{(3)}(1) \neq 0$ alors 1 est racine d'ordre de multiplicité 3.
19. Factorisation sur $\mathbb{C}$ de $X^5 - 1$: $\prod_{k=0}^{4}(X - e^{\frac{2k\pi}{5}\mathrm{i}})$
20. La méthode de Ruffini permet de diviser un polynôme par $(X - \alpha)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$