ISEN **2021/2022**

CIR1/CNB1 - Mathématiques "Fondements"

PARTIEL 15/10/2021

Consignes :

- *Pour cette épreuve de **2** heures aucun document n'est autorisé et la calculatrice collège est tolérée.*
- *Les **3** exercices qu'il comporte sont indépendants et peuvent être faits dans l'ordre de votre choix.*
- *Expliquez vos raisonnements avec un maximum de* **clarté** *et avec le* **vocabulaire** *adapté.*
- *Une copie soignée est gage d'une bonne note !*

Exercice 1. (6 Points)

1. En utilisant un diagramme sagittal donner un exemple d'une application et un exemple d'une relation qui n'est pas une application.
2. Soit f une application. En utilisant les quantificateurs, donner les définitions suivantes :
   (a) f de E dans E est l'identité;
   (b) f de E dans F est injective;
   (c) f de E dans F n'est pas surjective.
3. On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = -|x^2 - 1|$.
   (a) Soit g l'application définie de $[0, 1[$ dans $[-1, 0]$ par $g(x) = f(x)$.
   g est-elle injective ? g est-elle surjective ? Justifier.
   (b) Soit h l'application définie de $[0, 1[$ dans $[-1, 0[$ par $h(x) = f(x)$.
   h est-elle bijective ? Si oui, trouver l'application réciproque h^{-1} de h.

Exercice 2. (7 Points)

Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ on définit

$$S^p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p$$

Le but de cet exercice est présenter une méthode pour calculer $S^p(n)$.

1. Écrire $S^0(n)$, $S^1(n)$, $S^2(n)$ et $S^3(n)$ et donner leur valeur.
2. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^{p+1} = S^{p+1}(n) + (n+1)^{p+1} - 1$$
   Suggestion : utiliser un décalage d'indice.
3. Rappeler la formule du binôme de Newton.
4. Développer l'expression $(k+1)^{p+1}$ en vous servant du symbole $\sum$.
5. En déduire que
$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^{p+1} = S^{p+1}(n) + \sum_{\ell=0}^{p} \binom{p+1}{\ell} S^{\ell}(n)$$

6. À l'aide des résultats des questions précédentes 3 et 5, montrer que

$$S^p(n) = \frac{1}{p+1}\left((n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{\ell=0}^{p-1} \binom{p+1}{\ell} S^\ell(n)\right)$$

Suggestion : simplifier le coefficient binomial $\binom{p+1}{p}$.

7. Utiliser le résultat précédent pour retrouver l'expression de $S^3(n)$.

(BONUS) Donner une expression simplifiée de $S^4(n)$.

Exercice 3. (7 Points)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 4z + 8 = 0$
2. On pose $a = -2 + 2\mathrm{i}$
   (a) Écrire a sous forme exponentielle.
   (b) Résoudre l'équation $z^3 = a$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ sous forme exponentielle.
   (c) On pose $b = e^{2\mathrm{i}\pi/3}$. Simplifier l'ensemble

   $$\{1 + \mathrm{i}, (1 + \mathrm{i})b, (1 + \mathrm{i})b^2\}$$

   Quels éléments identifie-t-on dans cet ensemble ?
3. On considère l'application du plan complexe dans lui-même $f : z \mapsto az + b$, avec a et b les nombres complexes de la question précédente.
   (a) Écrire l'application f avec a et b sous forme algébrique.
   (b) Déterminer et dessiner dans le plan complexe, les images par f des nombres $\frac{1}{4}$ et $-\frac{1}{4}$.
   (c) Déterminer les antécédents par f de 2i.
   (d) Caractériser géométriquement f (type d'application du plan complexe, rapport, points invariants).