






Durée : 1 heure.

Aucun document n'est autorisé.

La calculatrice collège est tolérée.

Veillez ne pas répondre sur le sujet, mais sur la **feuille de réponse** prévue à cet effet.

- Les questions peuvent présenter une ou plusieurs réponses valides.
- Une mauvaise réponse enlève des points, une absence de réponse n'a pas d'incidence.
- En cas d'erreur, utilisez du « blanco ».
- Soyez très vigilant, avant de répondre à une question, de cocher la bonne ligne dans la grille.
- N'oubliez pas vos NOM, PRÉNOM et LOGIN (p62xxx). Par exemple, p62375 s'encode ainsi :

																																																																						
	<table border="0"> <tr> <td style="text-align: right;">Identifiant :</td> <td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td> <td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td> </tr> <tr> <td>Chiffre 1 :</td> <td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td>Chiffre 2 :</td> <td><input checked="" type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td>Chiffre 3 :</td> <td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td>Chiffre 4 :</td> <td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td>Chiffre 5 :</td> <td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td> <td><input checked="" type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td><td><input type="checkbox"/></td> </tr> </table>				Identifiant :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Chiffre 1 :	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Chiffre 2 :	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Chiffre 3 :	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Chiffre 4 :	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	Chiffre 5 :	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Identifiant :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9																																																												
Chiffre 1 :	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																												
Chiffre 2 :	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																												
Chiffre 3 :	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																												
Chiffre 4 :	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																												
Chiffre 5 :	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																																																												
<table border="0"> <tr> <td style="text-align: right;">Nom :</td> <td>PEDALETTI</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">Prénom :</td> <td>PAOLO</td> </tr> </table>											Nom :	PEDALETTI	Prénom :	PAOLO																																																								
Nom :	PEDALETTI																																																																					
Prénom :	PAOLO																																																																					

BON COURAGE !

\*\*\*\*\*

1. Parmi les croissances comparées suivantes, lesquelles sont vraies ?

- (1) ☐  $(\ln x)^3 \underset{+\infty}{=} o(x^4)$    
 (2) ☐  $\ln x \underset{0}{=} o(x^2)$    
 (3) ☐  $x^2 \underset{+\infty}{=} o(e^x)$    
 (4) ☐  $x \underset{0}{=} o(\ln x)$   
 (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

2. Parmi les limites suivantes lesquelles sont vraies ?

- (1) ☐  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$  avec  $\alpha > 0$   
 (2) ☐  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = +\infty$  avec  $\alpha, \beta > 0$   
 (3) ☐  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$  avec  $\alpha, \beta > 0$   
 (4) ☐  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^m}{x^n} = 1$  si  $m > n$   
 (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

3. Soit  $f$  une fonction telle que  $\forall \varepsilon > 0 \exists A \in \mathbb{R} \forall x \in I \ x \geq A \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$ . Alors on a :

- (1) ☐  $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = l$    
 (2) ☐  $\lim_{x \rightarrow l} f(x) = +\infty$    
 (3) ☐  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$   
 (4) ☐  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$    
 (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

4. Parmi les équivalentes suivantes, lesquelles sont vraies ?

- (1) ☐ Si  $f \underset{a}{\sim} g$  et  $h \underset{a}{\sim} g'$ , alors  $f + h \underset{a}{\sim} g + g'$
- (2) ☐ Si  $f \underset{a}{\sim} g$ , alors  $f = O(g)$  et  $g = O(f)$
- (3) ☐  $f$  est dominée par  $g$  au voisinage de  $a$  si  $f/g$  est borné au voisinage de  $a$ .
- (4) ☐ Si deux fonctions ont la même limite en  $a$ , elles sont équivalentes au voisinage de  $a$ .
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

5. Au voisinage de 0 :

- (1) ☐  $\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$
- (2) ☐  $\frac{1}{1-x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + o(x^2)$
- (3) ☐  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$
- (4) ☐  $\frac{1}{1-x} = 1 - x + x^2 + o(x)$
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

6. Le développement limité de  $f(x) = \cos(x) \cdot \sin(x)$  à l'ordre 3 au voisinage de 0 est ...

- (1) ☐  $1 + x - \frac{2}{3}x^3 + o(x)$
- (2) ☐  $x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^2)$
- (3) ☐  $x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$
- (4) ☐  $x + o(x^3)$
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

7. Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant 0, telle que  $f(x) = 1 + x + o(x^2)$ .

- (1) ☐  $f(2x) = 1 + 2x + o(x^2)$
- (2) ☐  $2f(x) = 1 + 2x + o(x)$
- (3) ☐  $f^2(x) = 1 + x^2 + o(x^2)$
- (4) ☐  $f(x) - x = o(x^2)$
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

8. Soit  $f(x) = x^2 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right)$ . Cocher la(les) limite(s) correcte(s)

- (1) ☐  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$
- (2) ☐  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$
- (3) ☐  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$
- (4) ☐  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

9. Un polynôme est équivalent à

- (1) ☐ son terme de plus bas degré au voisinage de  $\pm \infty$ .
- (2) ☐ son terme de plus haut degré au voisinage de  $\pm \infty$ .
- (3) ☐ son terme de plus bas degré au voisinage de 0.
- (4) ☐ son terme de plus haut degré au voisinage de 0.
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

10. Soit  $f(x) = x^{-1/3} \ln^3(x)$ . On peut écrire que ...

- (1) ☐  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$
- (2) ☐  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$
- (3) ☐  $\ln^3(x) = o(x^{1/3})$
- (4) ☐  $x^{1/3} = o(\ln^3(x))$
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

11. Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = -1$ . Quelle(s) affirmation(s) est(sont) correcte(s) ?

- (1) ☐  $f$  est constante sur  $[0, 1]$
- (2) ☐  $f$  s'annule sur  $[1, 2]$
- (3) ☐  $f$  est décroissante sur  $[1, 2]$
- (4) ☐ On ne peut rien affirmer sur le(s) sens de variation de  $f$  sur  $[0, 2]$
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

12. Soit  $P$  un polynôme de degré 3 et  $Q$  un polynôme de degré 2. On suppose que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} Q(x) = +\infty$ . Alors

- (1) ☐  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = +\infty$ .
- (2) ☐  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ .
- (3) ☐  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = -\infty$ .
- (4) ☐  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(x)}{Q(x)} = +\infty$ .
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

13. Au voisinage de 0 :

- (1) ☐  $\cos(x) = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
- (2) ☐  $e^{1+x} = e(1 + x + x^2 + o(x^2))$
- (3) ☐  $\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + o(x^3)$
- (4) ☐  $\frac{1}{1-x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$
- (5) ☐  $\ln(1 + 2x) = 2x - 2x^2 + o(x^2)$

14. Soit  $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$  et  $\tilde{f}$  son prolongement s'il existe.  
Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies ?

- (1) ☐  $f(x)$  est prolongeable par continuité en  $x = 1$  et  $\tilde{f}(1) = -\frac{1}{2}$
- (2) ☐  $f(x)$  n'est pas prolongeable par continuité en  $x = 1$
- (3) ☐  $f(x)$  est prolongeable par continuité en  $x = -1$  et  $\tilde{f}(1) = 0$
- (4) ☐  $f(x)$  n'est pas prolongeable par continuité en  $x = -1$
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

15. La valeur de la limite  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}}$  est ...

- (1) ☐ 0
- (2) ☐ 1
- (3) ☐ -1
- (4) ☐  $+\infty$
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

16. La valeur de la limite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1+x}-1}$  est ...

- (1) ☐ 0
- (2) ☐ 1
- (3) ☐ 4
- (4) ☐  $+\infty$
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

17. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

- (1) ☐ Au voisinage de  $\pm\infty$ , un polynôme est équivalent à son terme de plus bas degré.
- (2) ☐ Au voisinage de 0, un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré.
- (3) ☐ Si  $f(x) = o_a(g(x))$  alors  $f(x) + g(x) \underset{a}{\sim} g(x)$
- (4) ☐  $f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = o_a(g(x))$
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

18. Soit  $f(x) = \frac{\cos(x)-1}{\sin^2(x)}$ . On peut déduire que ...

- (1) ☐  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$
- (2) ☐  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$
- (3) ☐  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$
- (4) ☐  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{1}{2}$
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

19. Le développement limité de  $f(x) = \arcsin(x)$  à l'ordre 3 au voisinage de 0 est ...

- (1) ☐  $\frac{\pi}{2} + x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$
- (2) ☐  $x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$
- (3) ☐  $x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^3)$
- (4) ☐  $\frac{\pi}{2} + x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{7}{9}x^5 + o(x)$
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

20. La formule de Taylor-Young à l'ordre  $n$  d'une fonction  $f \in \mathcal{C}^n$  au voisinage de  $a$  avec  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$  est ...

- (1) ☐  $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x)$
- (2) ☐  $f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^{n+1} \varepsilon(x)$
- (3) ☐  $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + (x-a)^{n+1} \varepsilon(x)$
- (4) ☐  $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x)$
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.