Durée : 1 heure.
Aucun document ni calculatrice n'est autorisé.

Veuillez répondre sur le sujet.

NOM ....

PRÉNOM ....

Sans indiquer votre raisonnement, compléter ci-dessous.

Pour toutes les questions :

$$S : \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x + 2y \\ y' & = & 3x + 2y \end{array} \right. , \qquad B' = \{e_1', e_2'\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad u = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

B la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et f l'application linéaire associée au système S.

1. La matrice A associée canoniquement au système S est $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

2. Pourquoi B' est base de $\mathbb{R}^2$? $det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right) \neq 0$

3. La matrice de passage de la base B à la base B' est $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

4. La matrice de passage de la base B' à la base B est $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

5. Exprimer u avec la base B' $[\frac{5}{3} \;\; -\frac{1}{3}]^T$

6. L'image de u par f est $[8 \;\; 12]^T$

7. Une matrice A est semblable à une matrice N si et seulement si $A = PNP^{-1}$ ou $N = P^{-1}AP$

8. $Mat_{B'}(f) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

9. $Ker(f) = \{[0 \;\; 0]^T\}$

10. $Im(f) = \{[1 \;\; 2]^T, [3 \;\; 2]^T\}$

11. $\dim(Ker(f)) = 0$

12. $\dim(Im(f)) = 2$

13. Théorème du Rang pour $f : E \to F$: $dimE = dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = dim(Ker(f)) + rg(f)$

14. Condition nécessaire et suffisante afin qu'un endomorphisme $f : E \to F$ soit injectif est

    $Ker(f) = \{0_F\}$ ou $dim(Ker(f)) = 0$

15. Un vecteur v est un vecteur propre d'un endomorphisme f si $v \neq 0$ et $f(v) = \lambda v,\ \lambda \in \mathbb{R}$

16. Le polynôme caractéristique de f est $(\lambda - 4)(\lambda + 1) = \lambda^2 - 3\lambda - 4$

17. La valeur propre associée à u est 4

18. Les vecteurs propres de A sont $\{[2\ 3]^T, [-1\ 1]^T\}$

19. Si possible, écrire A sous forme diagonale. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

20. Les solutions du système différentielle S sont $\begin{cases} k_1 e^{-t} + 2k_2 e^{4t} \\ -k_1 e^{-t} + 3k_2 e^{4t} \end{cases}$

21. (BONUS) Quel est le domaine de recherche de Mme Saini ? CGAO ou Infographie (Computer graphics)