

PARTIEL 8/01/2021

Consignes :

- Pour cette épreuve de 2 heures aucun document n'est autorisé et la calculatrice collègue est tolérée.
- Les 3 exercices sont indépendants et peuvent être faits dans l'ordre de votre choix.
- Expliquez vos raisonnements avec un maximum de **clarté** et avec le **vocabulaire adapté**.
- Une copie soignée est gage d'une bonne note !

Bon courage !

Exercice 1. (12 Points)

On considère la fonction $f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{x+2}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f .
2. f est-elle paire ? Impaire ? Périodique ? Continue ? Justifier.
3. Calculer la dérivée de f et en déduire le(s) sens de variation de f .
4. Quel(s) est(sont) le(s) point(s) à tangente horizontale ?
5. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
6. f admet-elle une(des) asymptote(s) ? Si oui, la(es)quelle(s) ?
7. Donner une allure de la courbe représentative de f .
8. Donner un équivalent de f en 0.
9. Donner la formule de l'intégration par parties.
10. Calculer $\int_0^1 \ln(1+x)dx$.
11. En utilisant la question précédente et le fait que $\frac{2x}{x+2} = A + \frac{B}{x+2}$ (on précisera les valeurs de A et B), calculer $\int_0^1 f(x)dx$
12. Montrer que $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[14, 16]$ et donner une approximation de α à 10^{-2} près.

Exercice 2. (5 Points)

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y'' + 4y' + 3y = xe^{-x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

1. Résoudre l'équation différentielle (E_H) homogène associée à (E) en expliquant.

2. Donner la solution particulière de l'équation différentielle (E) non homogène en expliquant.
3. Donner la solution générale de l'équation différentielle (E) .
4. (BONUS) Déterminer, si elle existe, la solution y de (E) qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = -2$.

Exercice 3. (3 Points)

En utilisant des sommes de Riemann, que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + n^2}$?