Chapitre 4

Introduction au filtrage

Justine Philippe

JUNIA ISEN

Sommaire

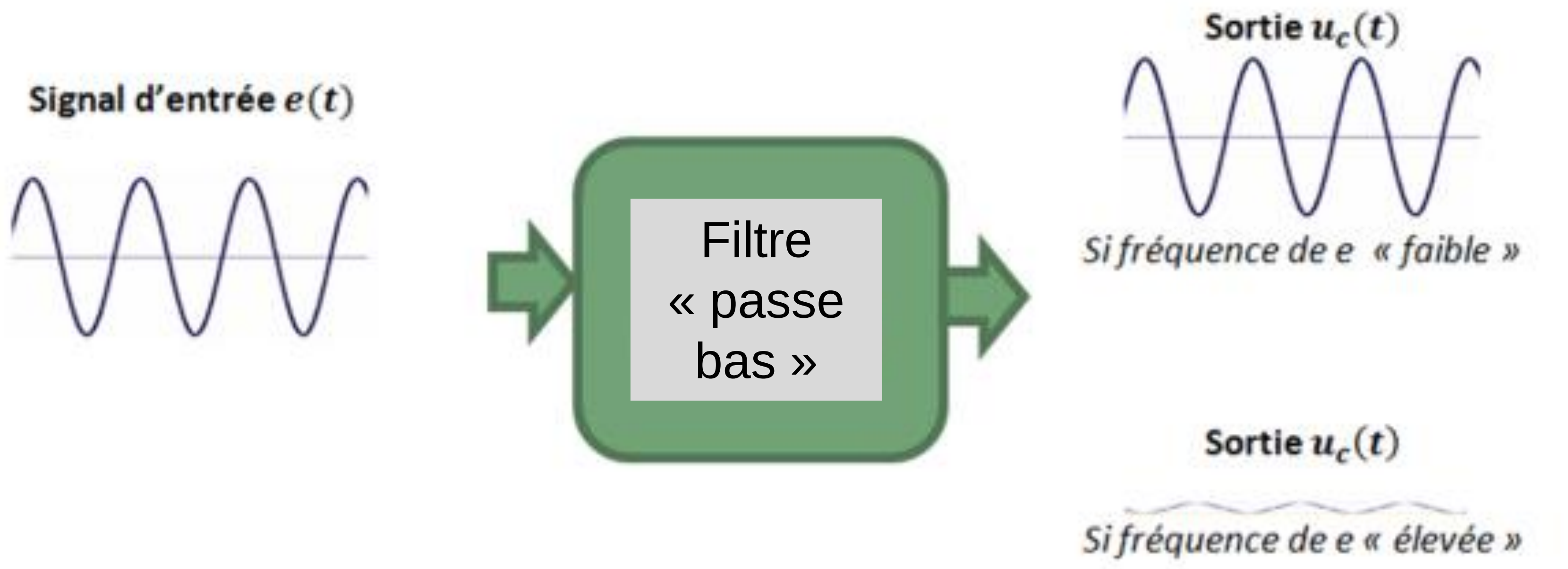
- Introduction
- Types de filtre
- Caractérisation d’un filtre
- Montages fondamentaux
- Analyse spectrale d’une grandeur périodique

Sommaire

- Introduction
- Types de filtre
- Caractérisation d’un filtre
- Montages fondamentaux
- Analyse spectrale d’une grandeur périodique

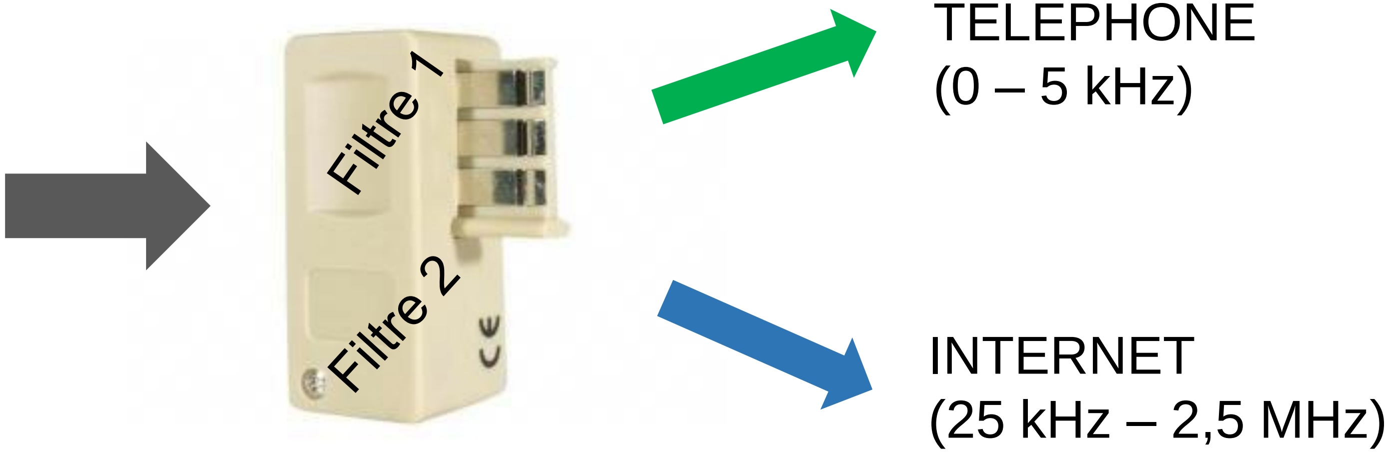
Que fait un filtre ?

Le signal de sortie est **égal au signal d'entrée à certaines fréquences nul à d'autres fréquences**



A quoi sert un filtre ?

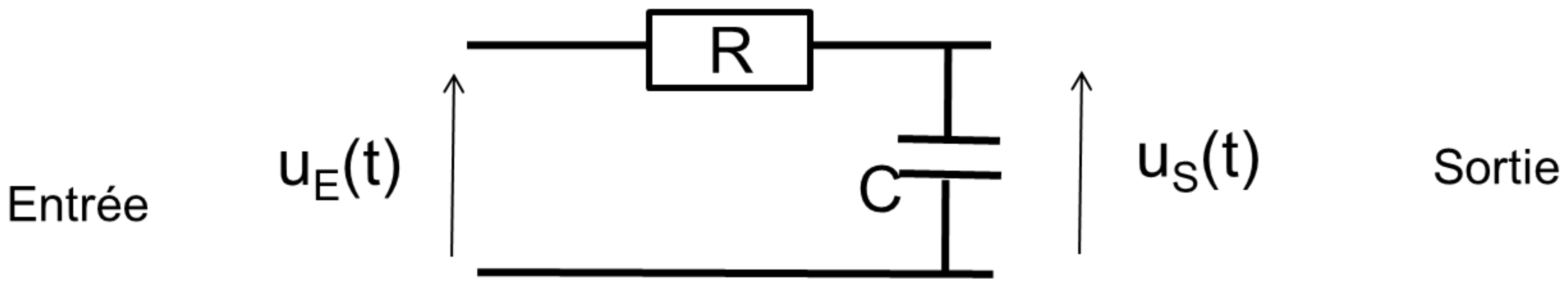
Exemple : filtre ADSL



Pourquoi l'étudie-t-on maintenant ?

On peut faire des filtres avec de simples circuits RLC

Exemple : Filtre passe-bas RC

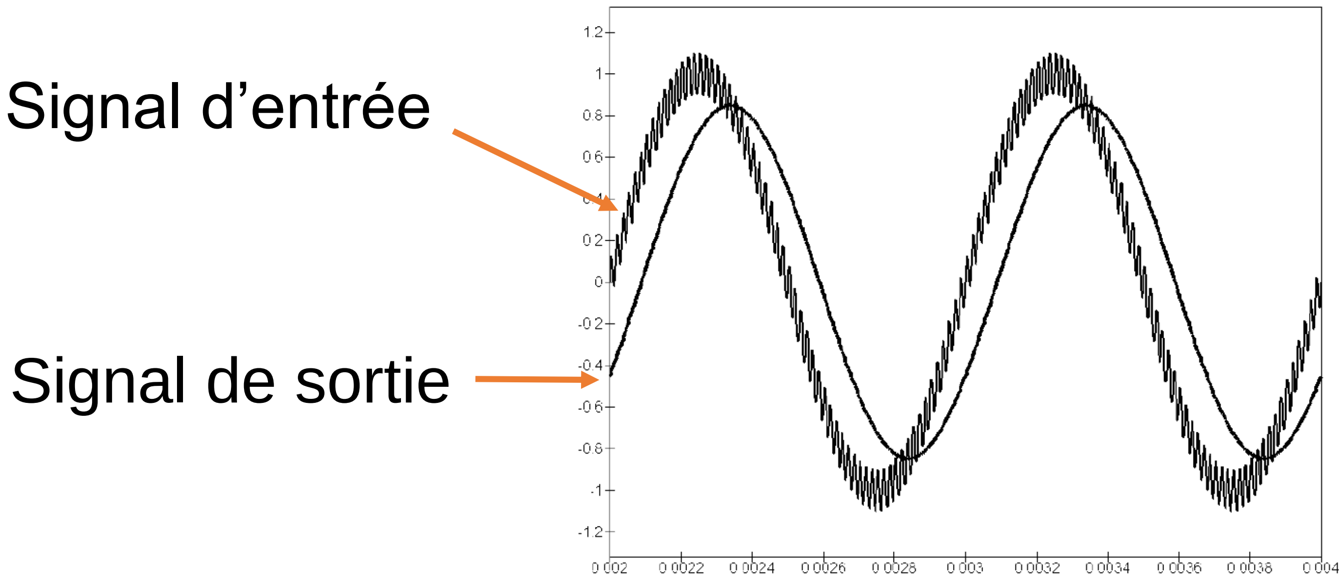


A fréquence (ou pulsation) nulle, condensateur = circuit ouvert ; $u_S = u_E$
A fréquence (ou pulsation) infinie, condensateur = court-circuit ; $u_S = 0$

Pourquoi l'étudie-t-on maintenant ?

On peut faire des filtres avec de simples circuits RLC

Exemple : Filtre passe-bas RC



Le signal de sortie est le même que le signal d'entrée, (déphasé et) nettoyé des « petites oscillations » / oscillations à hautes fréquences

Vue globale du cours d’Electronique

Chapitre 1 et 2
Régime permanent et transitoire des circuits RLC **en courant continu**

Chapitre 3
Circuits RLC avec une **tension d’entrée sinusoïdale**
(on n’a traité que le régime permanent)

Chapitre 4. Filtrage
Circuits RLC avec une **tension d’entrée multifréquences** (= multi sinusoïdale)

Chapitre 5. Amplificateur opérationnel

Chapitre 6. Les diodes

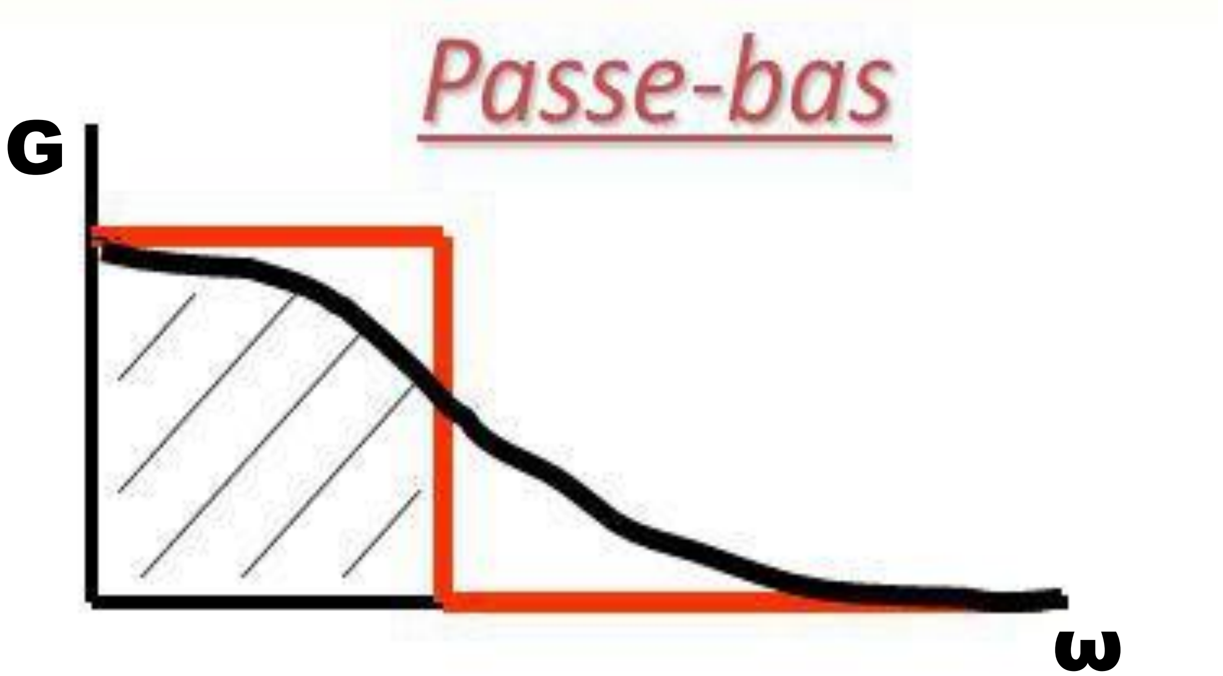
Objectifs du chapitre

- Connaître le vocabulaire associé au filtrage
- Savoir faire une analyse spectrale simple : comportement d'un filtre RLC lorsque $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow \infty$
- Calculer la fonction de transfert d'un filtre passif
- Tracer les diagrammes de Bode associés [donc savoir utiliser des graphes semilog et des dB]

Sommaire

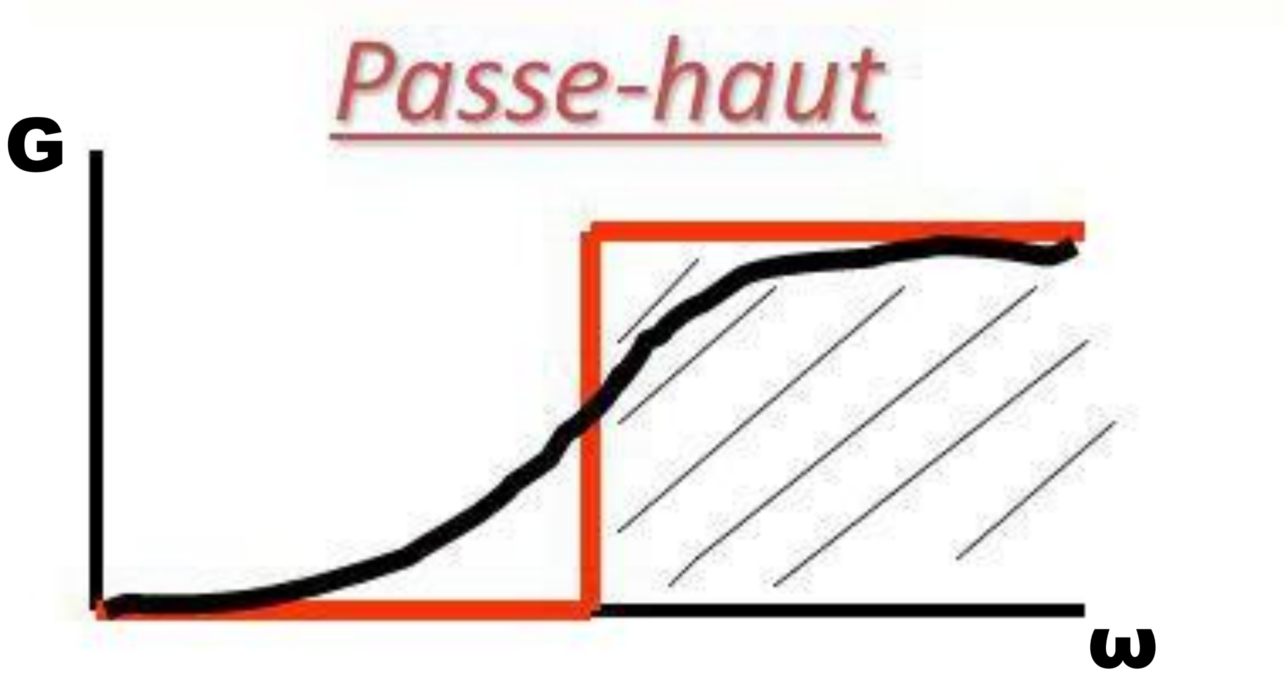
- Introduction
- Types de filtre
- Caractérisation d’un filtre
- Montages fondamentaux
- Analyse spectrale d’une grandeur périodique

Classification des filtres



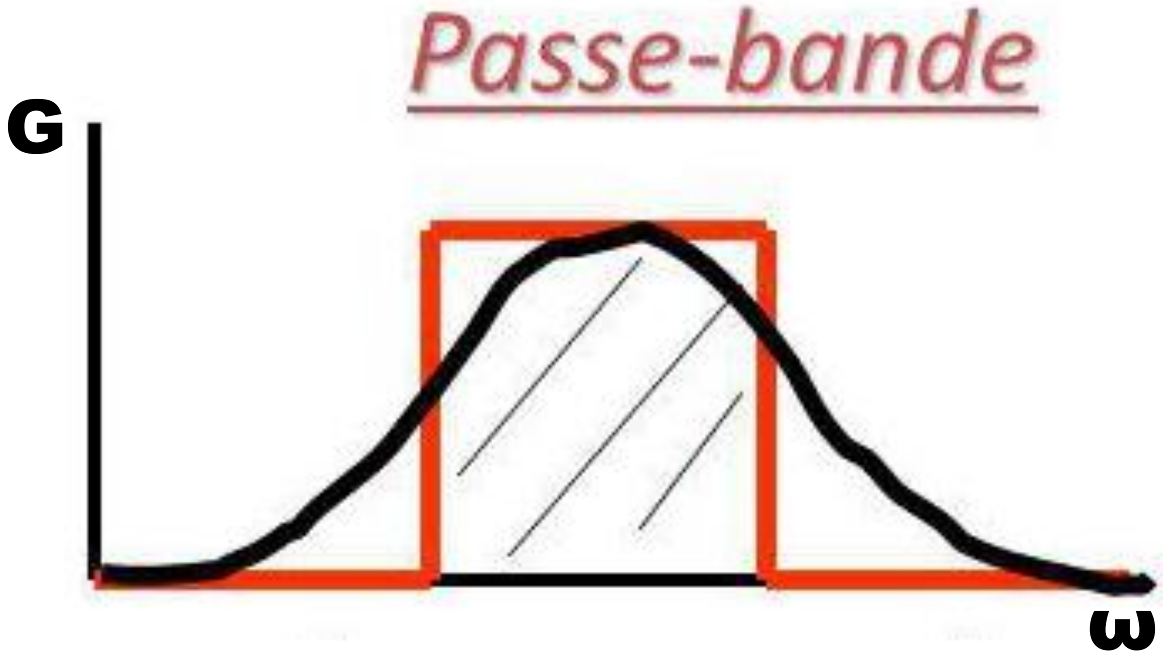
Filtre qui laisse passer les basses fréquences et coupe les hautes fréquences

Classification des filtres



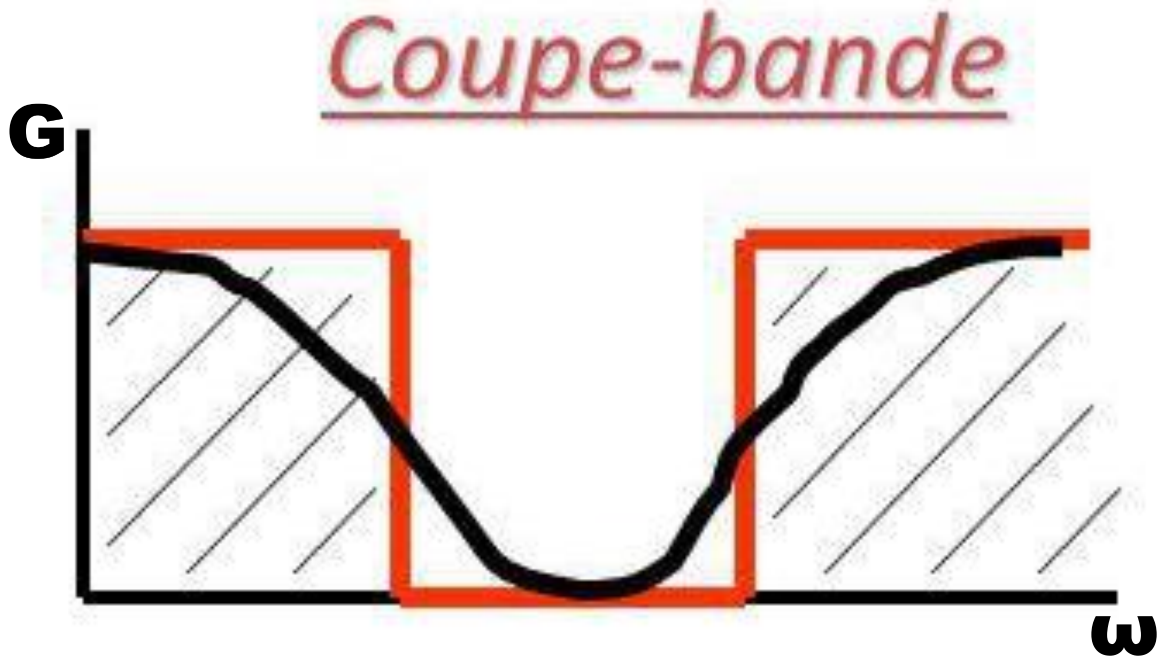
Filtre qui laisse passer les hautes fréquences et coupe les basses fréquences

Classification des filtres



Filtre qui coupe les basses et hautes fréquences et laisse passer le signal sur une bande de fréquence dite bande passante

Classification des filtres



Filtre qui coupe le signal sur une plage de fréquence

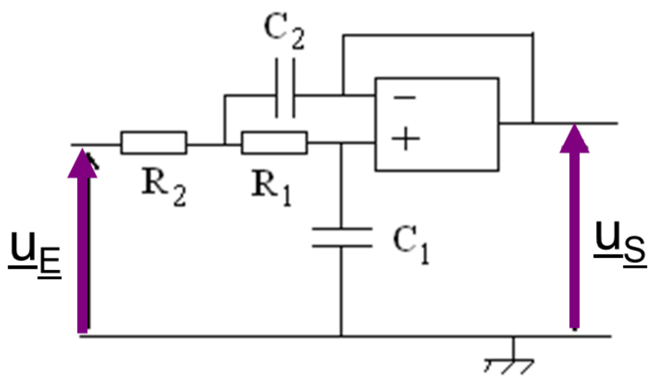
Sommaire

Quelques définitions

Fonction de transfert $\underline{\mathbf{H}}$: $\underline{H} = \dfrac{\underline{u_S}}{\underline{u_E}}$

Gain G : $G = |\underline{H}|$

Déphasage $\mathbf{\Phi_H}$: $\Phi_H = Arg(\underline{H})$



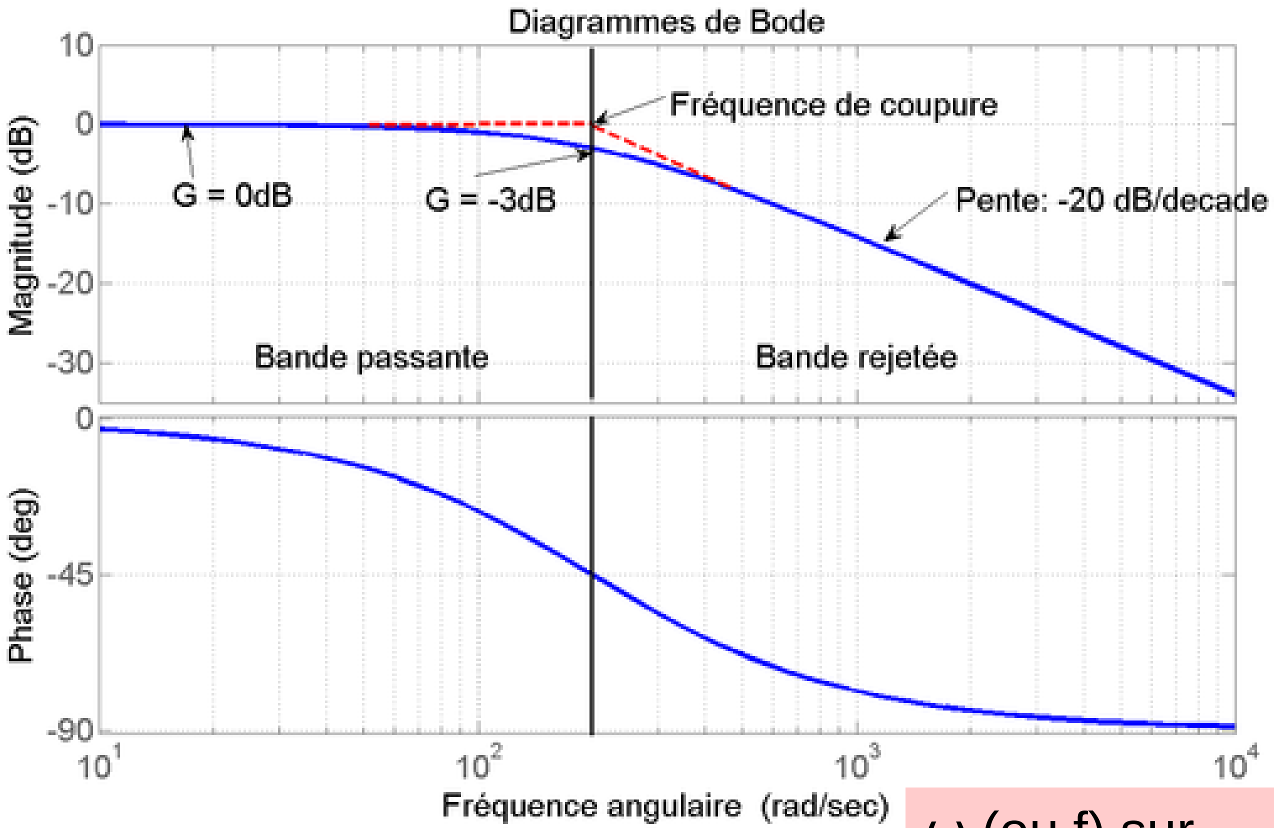
(Exemple pour un circuit quelconque)

Diagramme de Bode

Une représentation particulière du gain et du déphasage en fonction de la pulsation/fréquence

Gain en dB

Phase en Degré (ou rad)



ω (ou f) sur une échelle log

Décibels

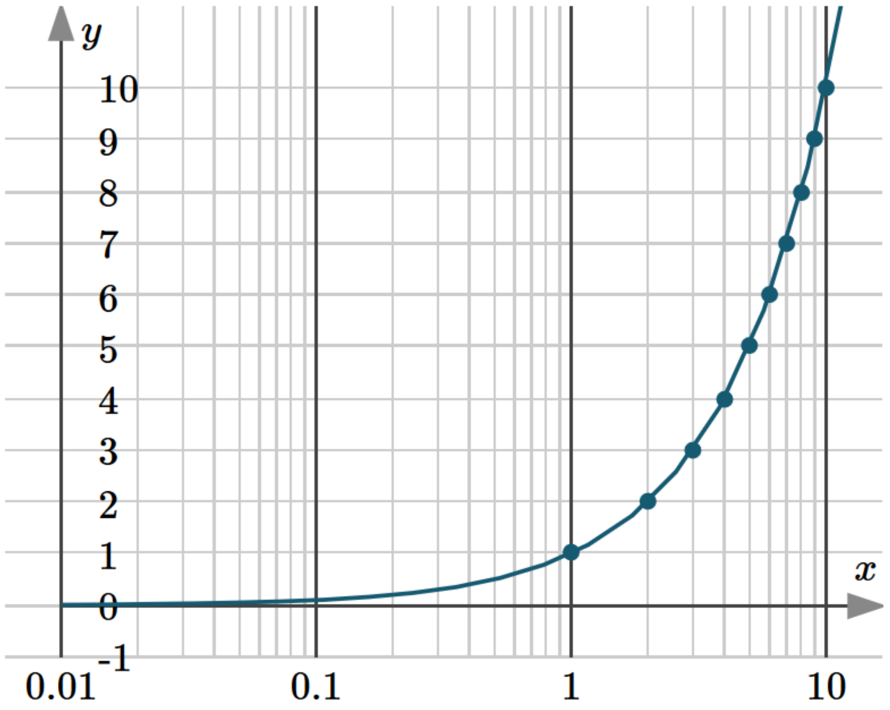
$$G_{dB} = 20\log(G)$$

Exemples :

G	0,01	0,1	0,5	1	10	0
G_{dB}	-40	-20	-6,02	0	+20	$-\infty$

Propriété de la fonction log à savoir par cœur : $\log(10^P) = P\,log\,(10) = P$

Echelle/papier semi log x



Fonction y = x

On utilise ce type d'échelle dans les diagrammes de Bode pour pouvoir comparer la réponse à basse et haute fréquence, sur plusieurs décades

Définitions

Une décade correspond à l’intervalle de pulsation pour passer de la pulsation ω *à* la pulsation *10 ω.*

Une octave correspond à l’intervalle de pulsation pour passer de la pulsation ω *à* la pulsation *2 ω.*

La pente d’une droite dans la représentation du gain en tension G en fonction de log(ω) est exprimée en décibel /décade (dB/dec).

L’ordre d’un filtre est le degré du polynôme en x situé au dénominateur de la fonction de transfert complexe $\underline{H}$

Définitions

Une pulsation de coupure à -3dB, notée ω_C d'un filtre est une pulsation pour laquelle

$$G(\omega) = \frac{Gmax}{\sqrt{2}}$$

En effet cela correspond à une diminution du gain de 3 dB :

$$G_{dB}(\omega_C) = 20\log G_{max} - 20\log\sqrt{2} = 20\log G_{max} - 10\log 2$$

$$G_{dB}(\omega_C) = G_{dB}max - 3$$

Définitions

La bande passante d'un filtre est l'intervalle (ou les intervalles) de pulsations pour lequel le gain G a une valeur supérieure au gain max -3 dB .

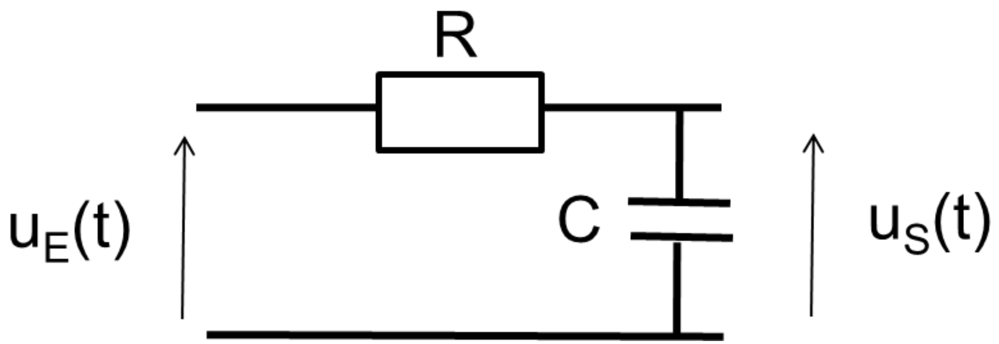
Une bande passante est donc comprise entre deux pulsations de coupures

Cela correspond à une transmission en tension de 1/√2 et donc une transmission en puissance d'entrée de 1/2.

→ lorsqu'on a « perdu » la moitié de la puissance au travers du filtre, alors le signal est considéré comme perdu (il n'a pas transité vers la sortie)

Sommaire

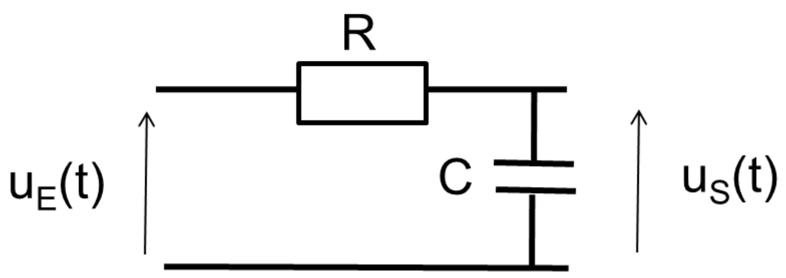
Filtre RC passe-bas



a) Fonction de transfert : $\underline{H} = \frac{\underline{u_S}}{\underline{u_E}} = \frac{1}{1+jRC\omega}$

(On a utilisé le diviseur de tension $\underline{u_S} = \frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_R}+\underline{Z_C}}\underline{u_E}$ puis simplifié en multipliant par jCω au numérateur et au dénominateur)

Filtre RC passe-bas

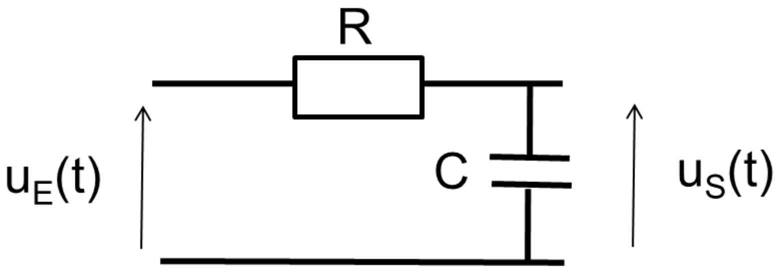


b) Expression avec les variables usuelles ω_0 et x :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{1 + jx}$$

Avec $\begin{cases} \omega_0 = \dfrac{1}{RC} \\ x = \dfrac{\omega}{\omega_0} \end{cases}$

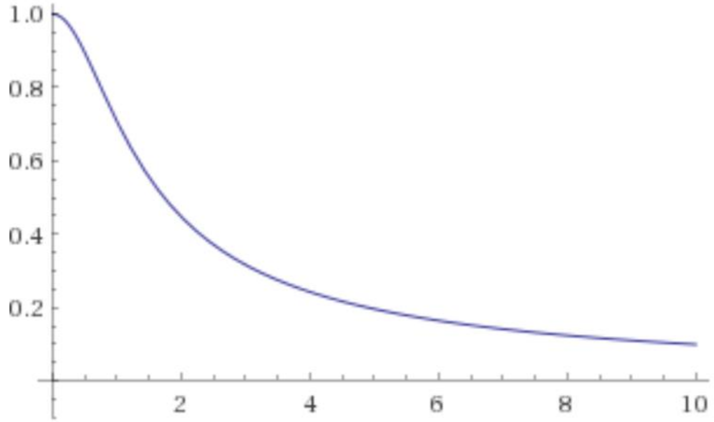
Filtre RC passe-bas



c) Etude du gain G = |<u>H</u>|

$$G = |\underline{H}| = \left|\frac{1}{1+jx}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

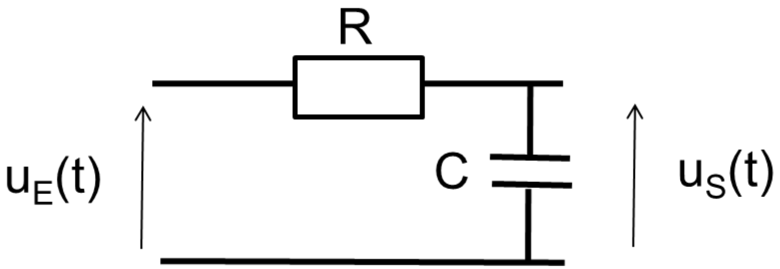
A quoi ressemble G en fonction de x ?
Limite en x = 0 ? En x = +ω ? La fonction √ est croissante, donc ?
On obtient :



Notons que
À x=0 : G=1
À x=1 : G=1/√2
À x→∞ : G=0

Filtre RC passe-bas

e) Diagrammes de Bode :



G_{dB} et Φ_H sur un graphe semi logarithmique

$$G_{dB} = 20\log(G) = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$G_{dB} = -20\log\left(\sqrt{1+x^2}\right) = -10\log(1+x^2)$$

Et on a déjà calculé le déphasage :

$$\Phi_H = Arg(\underline{H}) = Arg\left(\frac{1}{1+jx}\right) = -\arctan x$$

Propriété de la fonction log à savoir par cœur : $\log(A^B) = B\ log\ (A)$

Filtre RC passe-bas

Pour tracer la courbe du gain et la courbe de phase, on fait varier f

$$G_{dB} = -10\log(1 + x^2)$$

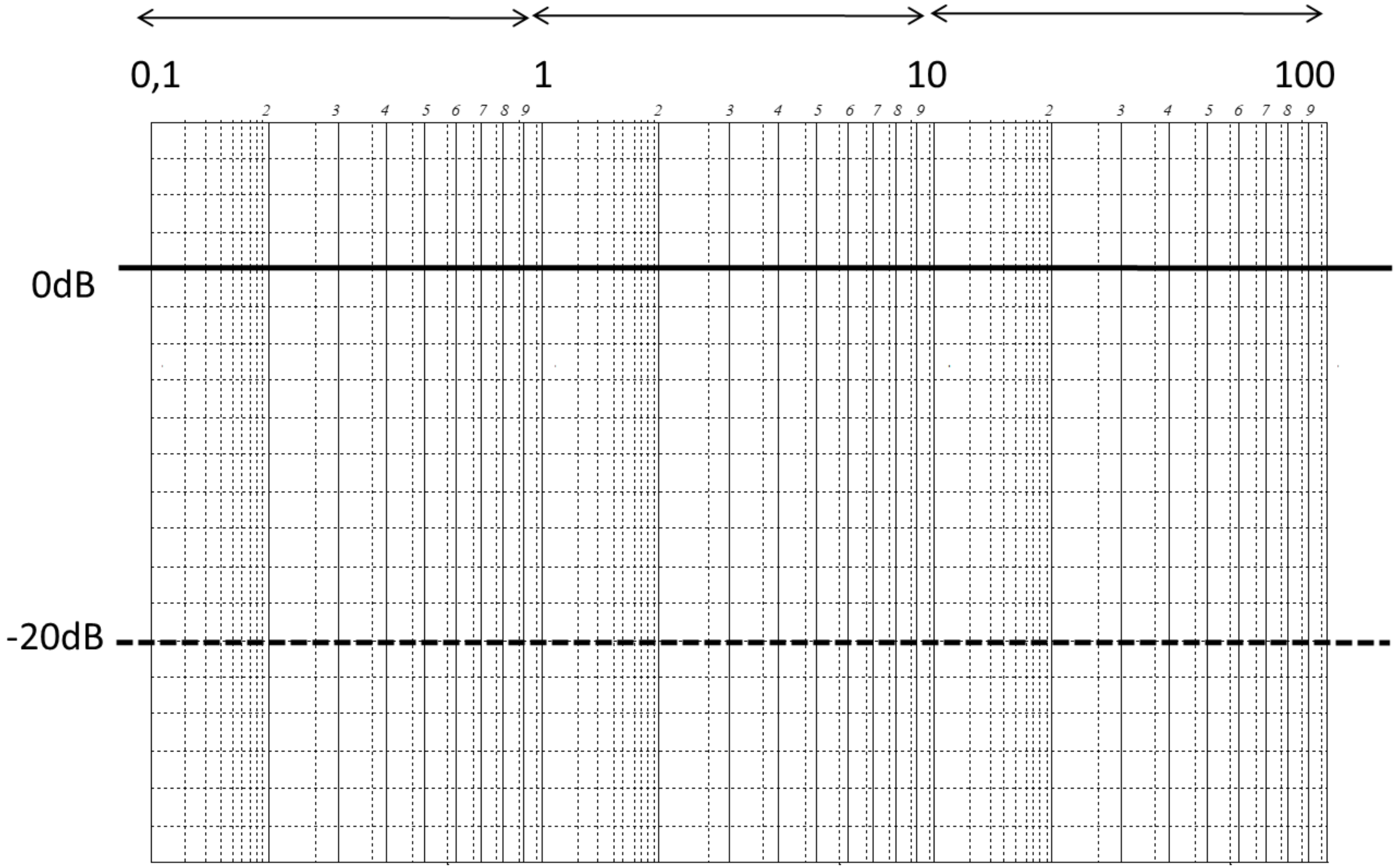
X=f/f0	f0/10	f0/2	f0	2f0	10f0	100f0
G (dB)	-0,04	-0,97	-3	-7	-20	-40

$$\Phi_H = -\arctan x$$

f	f0/10	f0/2	f0	2f0	10f0	100f0
Φ (°)	-5,7	-26,6	-45	-63,4	-84,3	-89,4
Φ (rad)	-0,099	-0,463	-0,78	-1,10	-1,47	-1,57

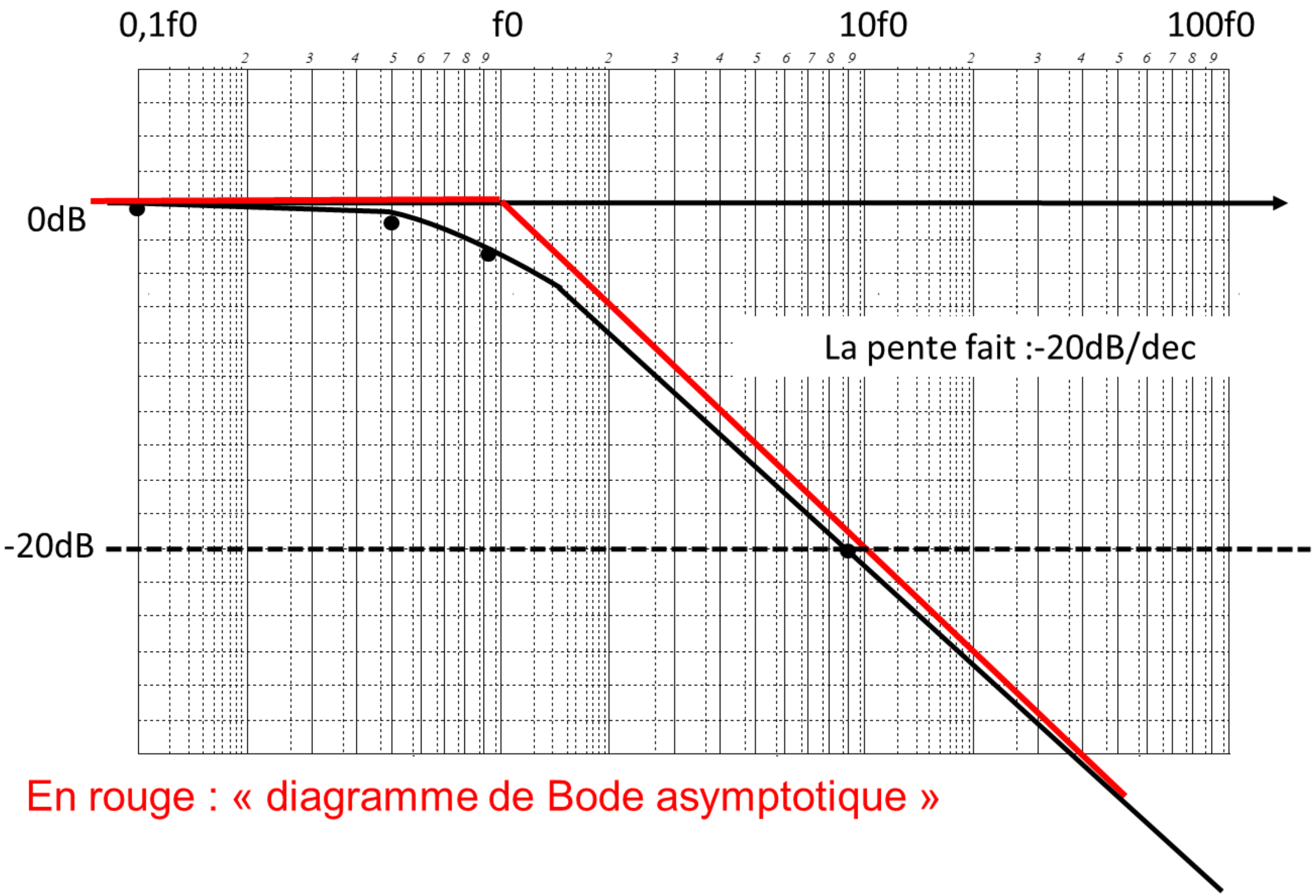
Filtre RC passe-bas

Papier semi-log : 3 décades



Filtre RC passe-bas

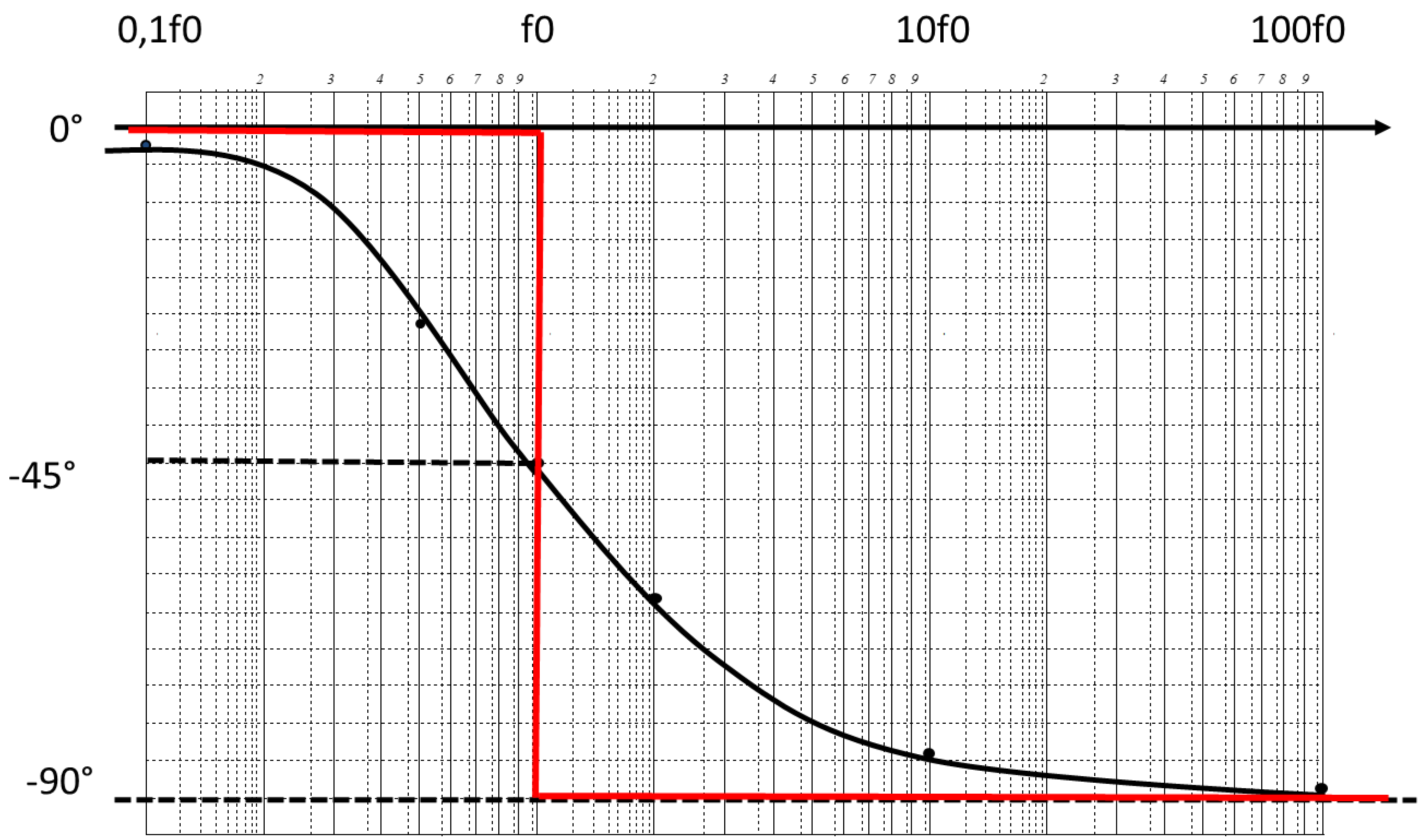
Tracé du diagramme de Bode : le gain



En rouge : « diagramme de Bode asymptotique »

Filtre RC passe-bas

Tracé du diagramme de Bode : la phase



En rouge : « diagramme de Bode asymptotique »

Filtre RC passe-bas

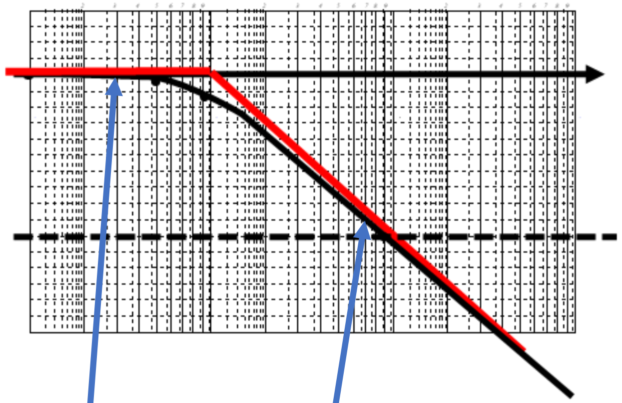
f) Diagrammes de Bode asymptotiques

Pour déterminer les équations des demi-droites du diag. Asymptotique, le plus simple est de revenir à la fonction de transfert complexe

$$\underline{H} = \frac{1}{1+jx} \quad avec \;\; x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Lorsque ω → 0, $\underline{H}$ ~ 1 => G = |$\underline{H}$| ~ 1
Donc la première asymptote est : $G_{dB} = 20\log G \sim 0$

Filtre RC passe-bas



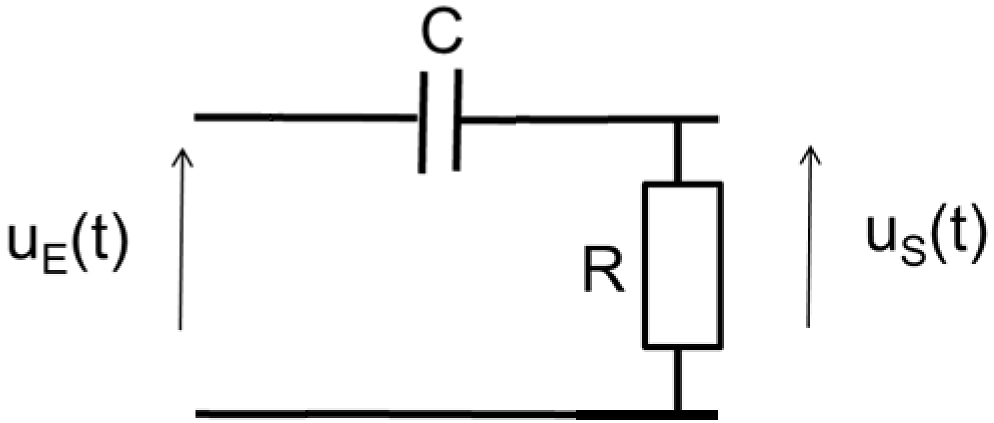
$$\underline{H} = \frac{1}{1+jx} \quad avec \;\; x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Lorsque ω → 0, $\underline{H}$ ~ 1 => G = |$\underline{H}$| ~ 1
Donc la première asymptote est : $G_{dB} = 20\log G \sim 0$

Lorsque ω → ∞, $\underline{H}$ ~ 1/jx => G = |$\underline{H}$| ~ 1/x
Donc la première asymptote est : $G_{dB} = 20\log G = -20\log x$

=> La pente est de -20 dB par décade

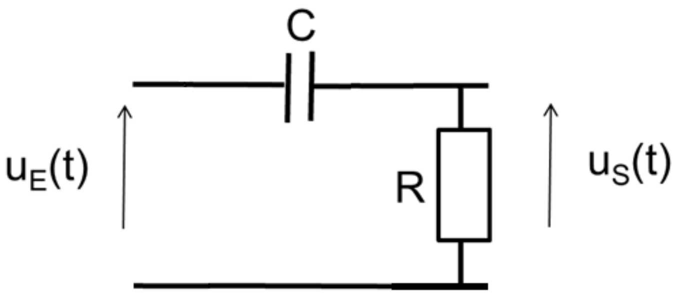
Filtre RC passe-haut



a) Fonction de transfert : $\underline{H} = \frac{\underline{u_S}}{\underline{u_E}} = \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega}$

(On a utilisé le diviseur de tension $\underline{u_S} = \frac{\underline{Z_R}}{\underline{Z_R}+\underline{Z_C}}\underline{u_E}$ puis simplifié en multipliant par jCω au numérateur et au dénominateur)

Filtre RC passe-haut

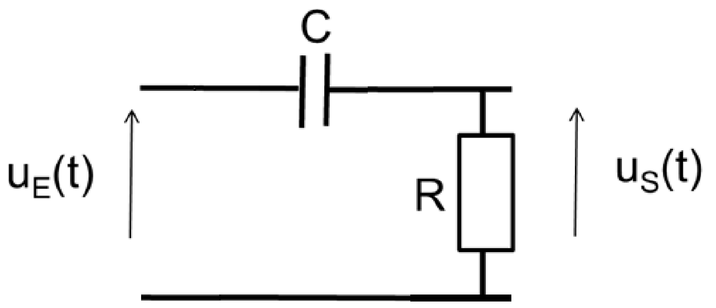


b) Expression avec les variables usuelles ω_0 et x :

$$\underline{H} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}} = \frac{jx}{1 + jx}$$

Avec $\begin{cases} \omega_0 = \dfrac{1}{RC} \\ x = \dfrac{\omega}{\omega_0} \end{cases}$

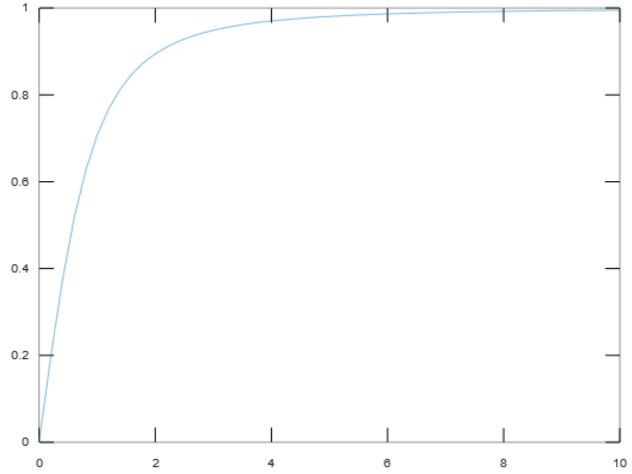
Filtre RC passe-haut



c) Etude du gain G = |$\underline{H}$|

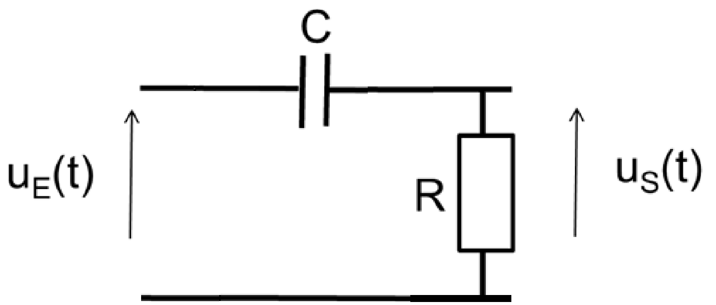
$$G = \left|\underline{H}\right| = \left|\frac{jx}{1+jx}\right| = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

A quoi ressemble G en fonction de x ?
Limite en x = 0 ? En x = +ω ? La fonction √ est croissante, donc ?
On obtient :



Notons que
À x=0 : G=0
À x=1 : G=1/√2
À x→∞ : G=1

Filtre RC passe-bas



e) Diagrammes de Bode :

G_{dB} et Φ_H sur un graphe semi logarithmique

$$G_{dB} = 20\log(G) = 20\log\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$G_{dB} = 20\log x - 20\log\left(\sqrt{1+x^2}\right) = 20\log x - 10\log(1+x^2)$$

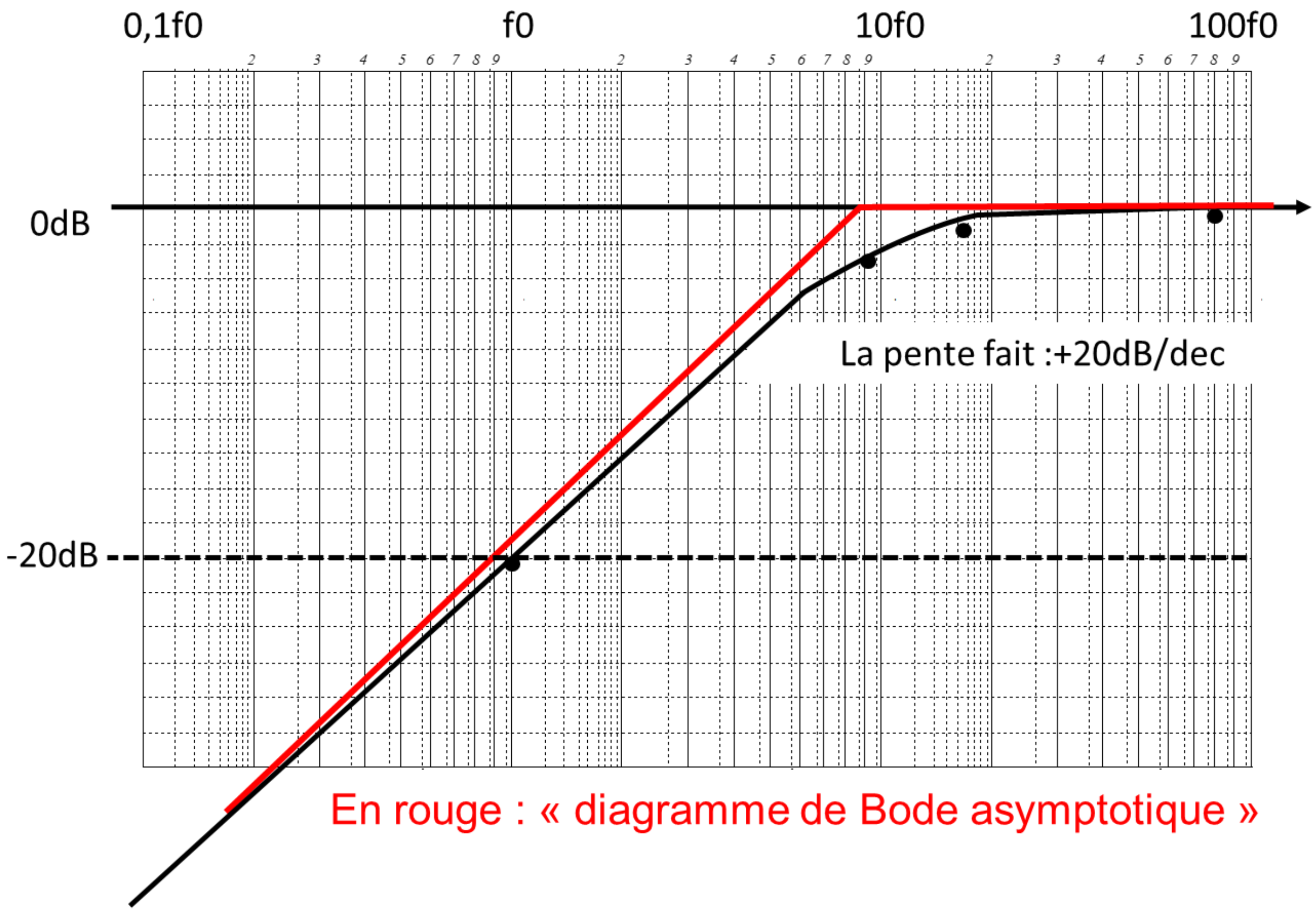
Et on a déjà calculé le déphasage :

$$\Phi_H = Arg(\underline{H}) = Arg\left(\frac{jx}{1+jx}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

Propriété de la fonction log à savoir par cœur : $\log(A^B) = B\ log\ (A)$

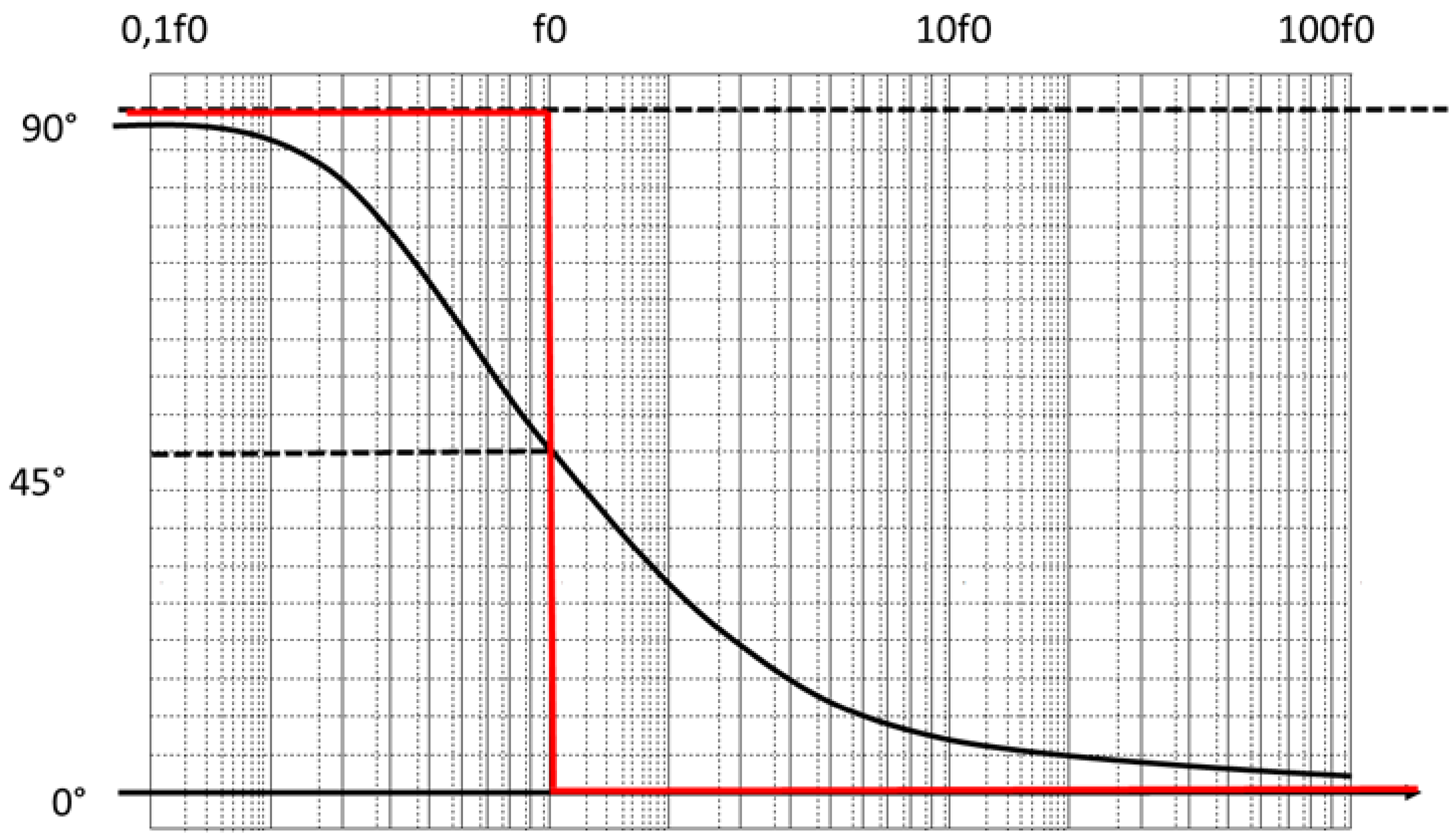
Filtre RC passe-haut

Tracé du diagramme de Bode : le gain



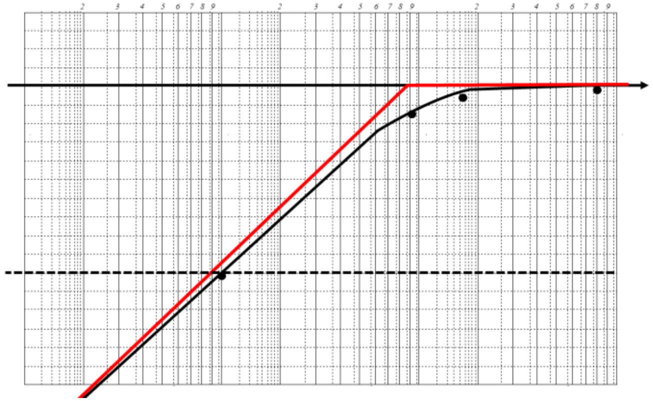
Filtre RC passe-haut

Tracé du diagramme de Bode : la phase



En rouge : « diagramme de Bode asymptotique »

Filtre RC passe-haut



f) Diagrammes de Bode asymptotiques

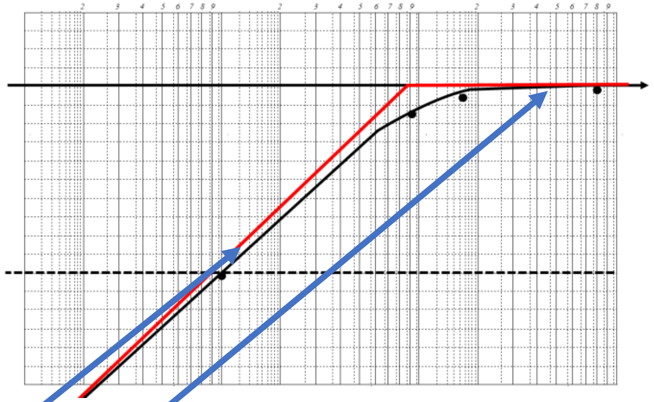
Pour déterminer les équations des demi-droites du diag. Asymptotique, le plus simple est de revenir à la fonction de transfert complexe

$$\underline{H} = \frac{jx}{1+jx} \quad avec \;\; x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Lorsque ω → 0, $\underline{H}$ ~ jx => G = |$\underline{H}$| ~ x

Donc la première asymptote est : $G_{dB} = 20\log x$

Filtre RC passe-haut



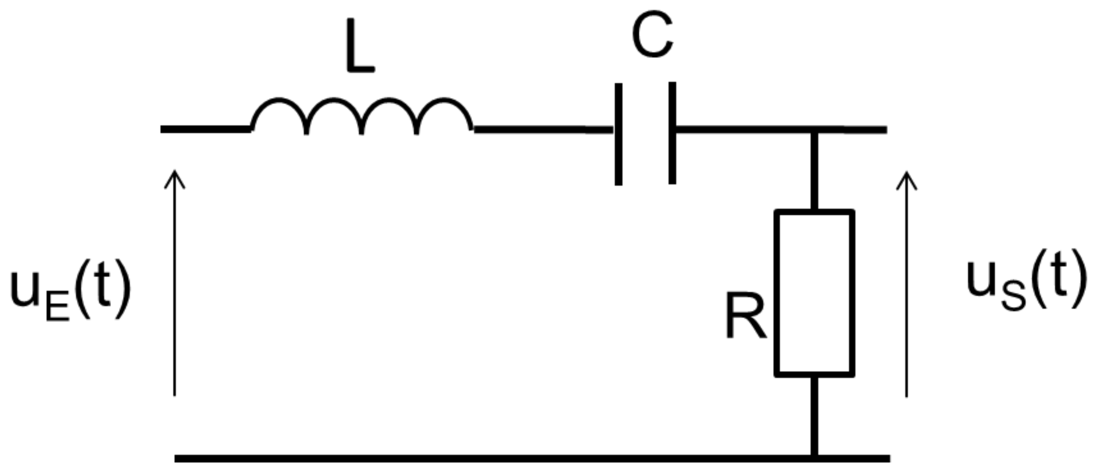
$$\underline{H} = \frac{jx}{1+jx} \quad avec \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Lorsque ω → 0, $\underline{H}$ ~ jx => G = |$\underline{H}$| ~ x
Donc la première asymptote est : $G_{dB} = 20\log x$

Lorsque ω → ∞, $\underline{H}$ ~ 1 => G = |$\underline{H}$| ~ 1
Donc la première asymptote est : $G_{dB} = 0$

=> La pente est de +20 dB par décade

Filtre RLC passe-bande



Quel type de filtre est-ce ?
Quand ω→0, condensateur = circuit ouvert
Quand ω→+∞, bobine = circuit ouvert
Donc c'est un filtre qui coupe les basses et hautes fréquences ; c'est un **filtre passe bande**

Filtre RLC passe-bande

a) Fonction de transfert : $\underline{H} = \frac{\underline{u_S}}{\underline{u_E}} = \frac{R}{R+j\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)}$

b) Expression avec les variables usuelles ω_0, x et Q

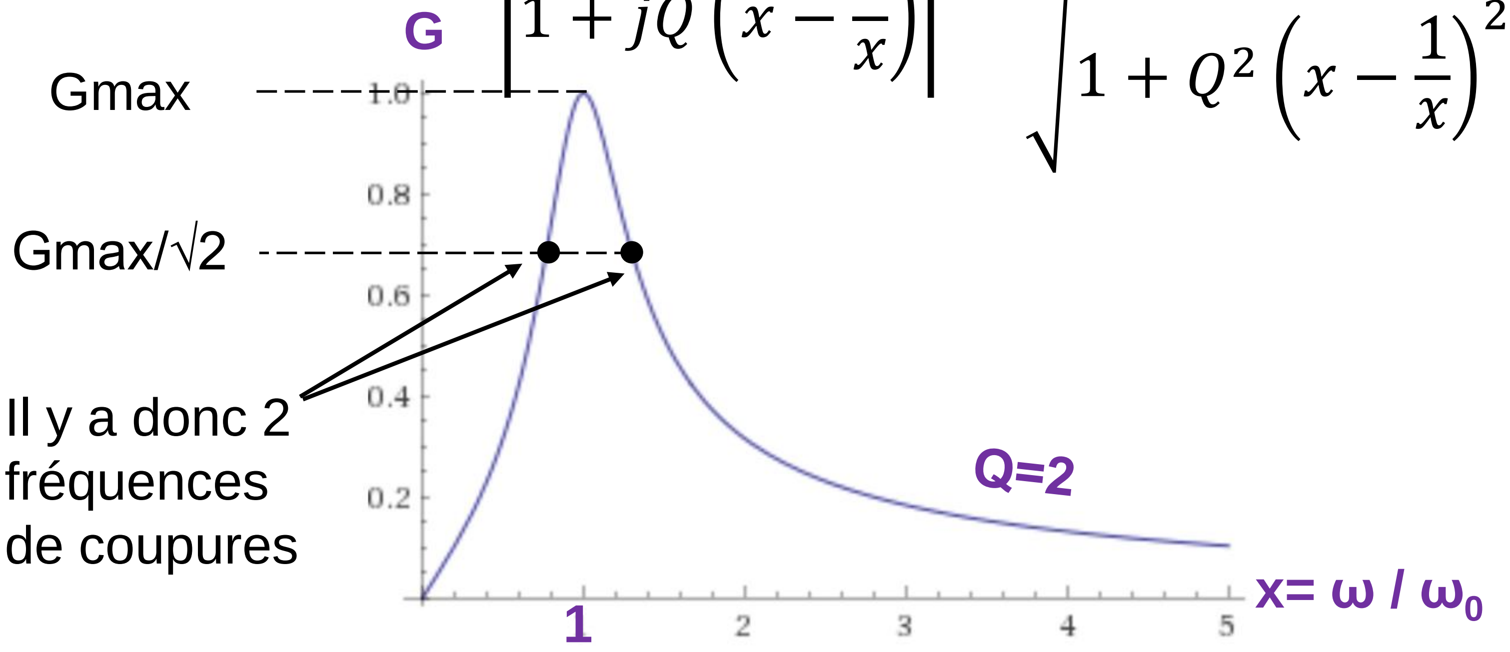
$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \quad avec \quad \begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ x = \frac{\omega}{\omega_0} \\ Q = \frac{L\omega_0}{R} \end{cases}$$

Filtre RLC passe-bande

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

c) Etude du gain G = |$\underline{H}$|

$$G = |\underline{H}| = \left| \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$



Rmq. Quand Q augmente, le pic devient plus étroit

Filtre RLC passe-bande

d) Pulsations de coupure à -3 dB, bande passante

- Gain maximum G_{max} = 1 pour x = 1
- Pulsations réduites de coupures x_{c1} et x_{c2} pour $G = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$

On trouve **(preuve page suivante) :**

$$\begin{cases} x_{c1} = -\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \\ x_{c2} = +\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \end{cases}$$

- La bande passante est donc : $\Delta x_c = \frac{1}{Q}$

Quand Q est élevé, Δx petit et filtre plus sélectif

Filtre RLC passe-bande

- *Pulsations réduites de coupure x_{c1} et x_{c2} pour $G=G_{max}/\sqrt{2}$*

Donc pour :

$$\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Équivalent à $$Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=1$$

Soit $$\left|x-\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{Q}$$

En multipliant par x

$$|x^2-1|=\frac{x}{Q}$$

On a donc deux équations du second degré à résoudre : $x^2\pm\frac{x}{Q}-1=0$

Le discriminant commun à ces deux équations est :

$$\Delta=\frac{1}{Q^2}+4$$

Discriminant positif, donc 2 solutions par équation. Sachant que x est une grandeur physique positive, on ne retient que les solutions positives, il y en a bien deux :

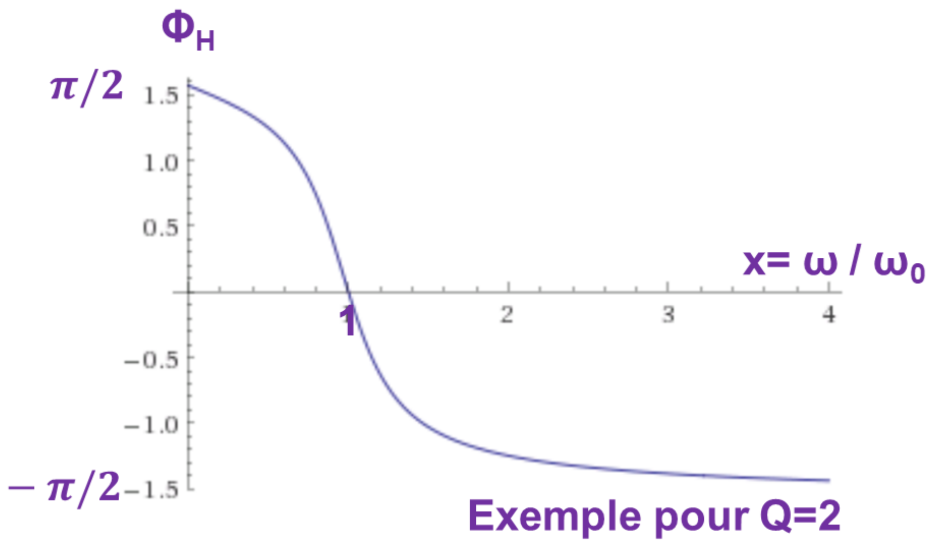
$$x_{c1}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{Q}+\sqrt{\frac{1}{Q^2}+4}\right)$$

$$x_{c2}=\frac{1}{2}\left(+\frac{1}{Q}+\sqrt{\frac{1}{Q^2}+4}\right)$$

Filtre RLC passe-bande

e) Etude du déphasage $\Phi_H = Arg\left(\underline{H}\right)$

$$\Phi_H = Arg\left(\underline{H}\right) = Arg\left(\frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}\right) = -\arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$$



Filtre RLC passe-bande

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

Lorsque x → 0, $\underline{H} \sim \frac{1}{-\frac{jQ}{x}} = \frac{jx}{Q}$

Donc le gain est : $G = \left|\underline{H}\right| \sim \frac{x}{Q}$

La 1ère asymptote du diagramme de Bode en gain est ainsi :

$$G_{dB} = 20 \log G \sim 20 \log x - 20 \log Q$$

Elle a une pente de +20 dB par décade

Pour le déphasage, on peut ainsi montrer qu'on a l'asymptote horizontale $\Phi_H = +\frac{\pi}{2}$

Filtre RLC passe-bande

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

Lorsque x → ∞, $\underline{H} \sim \frac{1}{jQx} = -\frac{j}{Qx}$

Donc le gain est : $G = \left|\underline{H}\right| \sim \frac{1}{Qx}$

La 1ère asymptote du diagramme de Bode en gain est ainsi :

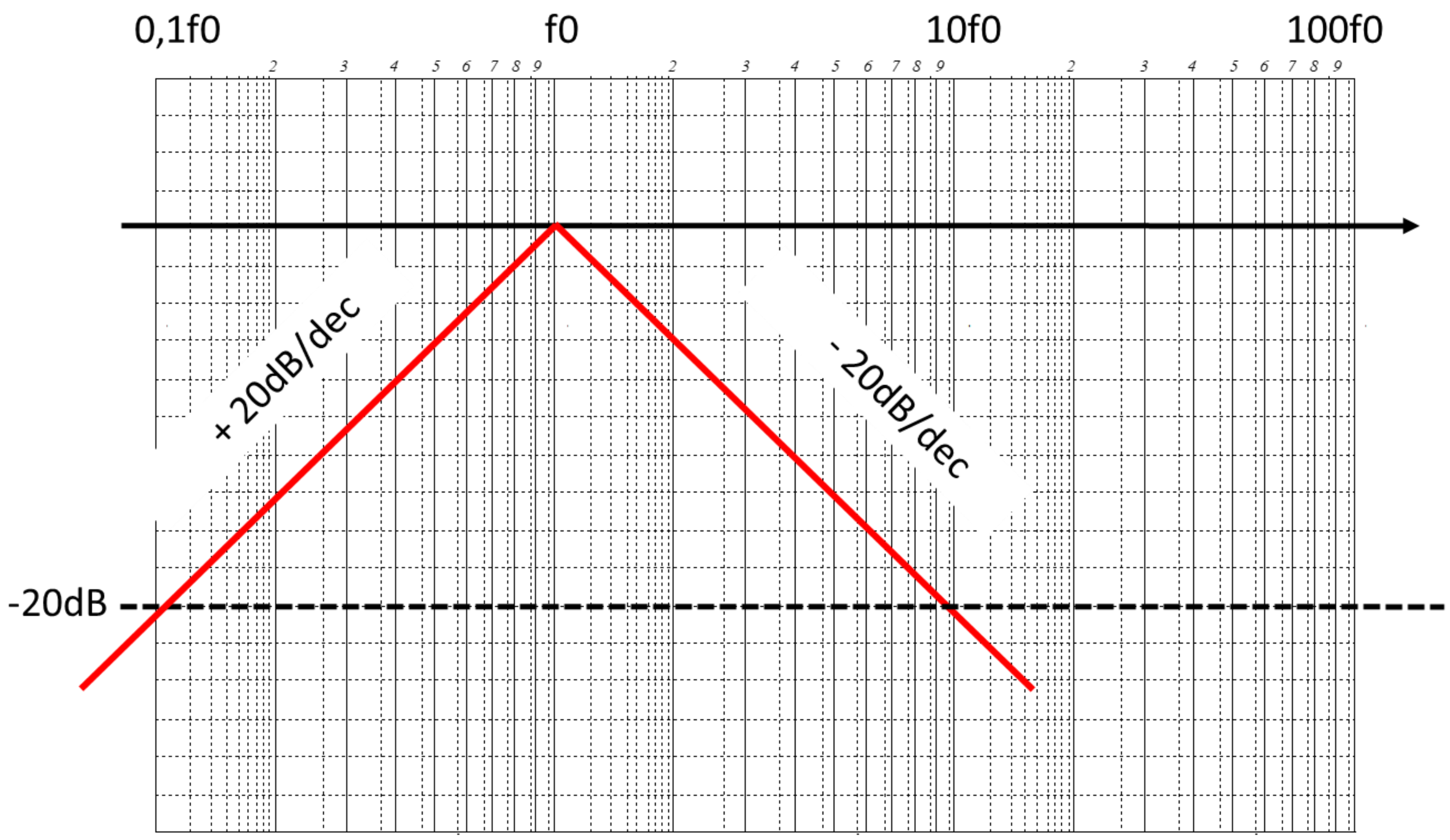
$$G_{dB} \sim -20 \log x - 20 \log Q$$

Elle a une pente de -20 dB par décade

Pour le déphasage, on peut ainsi montrer qu'on a l'asymptote horizontale $\Phi_H = -\frac{\pi}{2}$

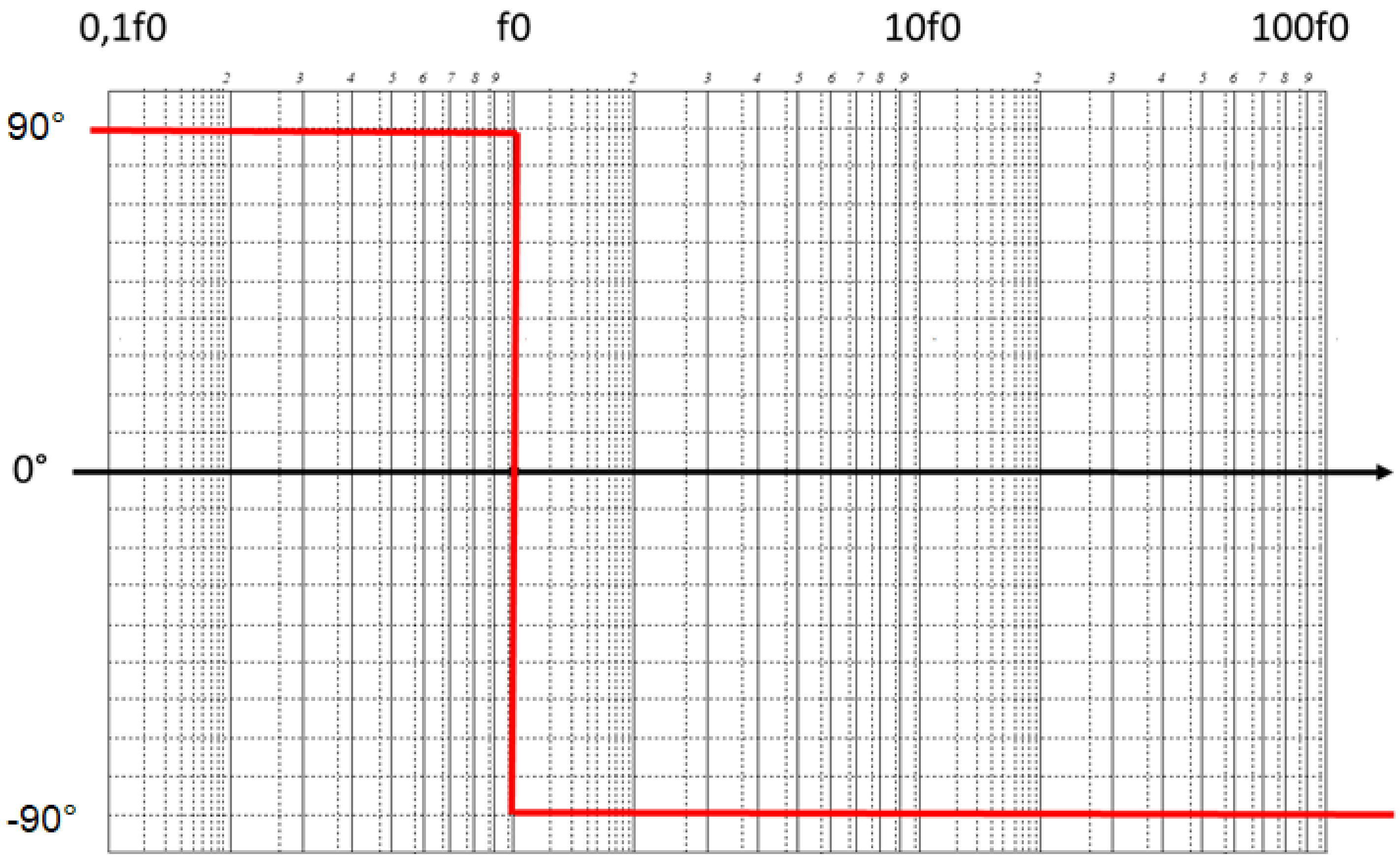
Filtre RLC passe-bande

Diagramme de Bode asymptotique du gain

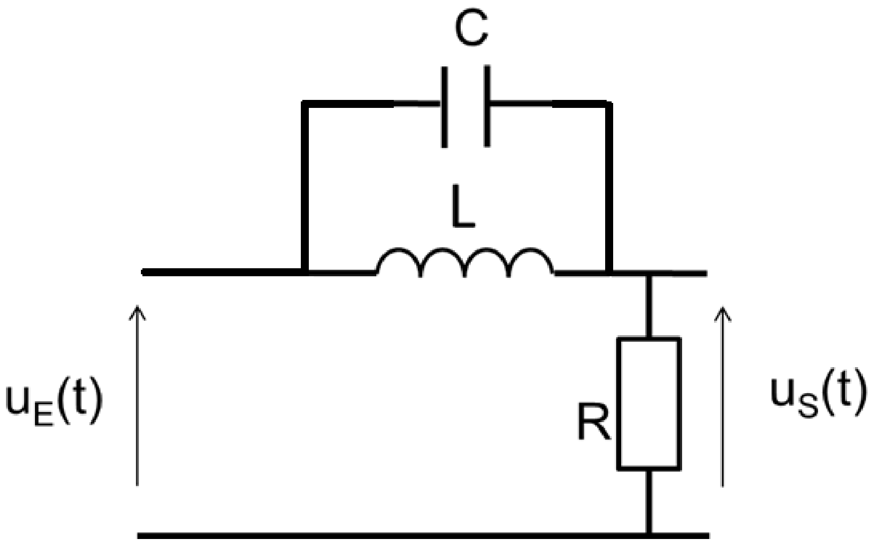


Filtre RLC passe-bande

Diagramme de Bode asymptotique de la phase



Filtre RLC coupe-bande



Quel type de filtre est-ce ?
Quand $\omega \rightarrow 0$, condensateur = circuit ouvert
Quand $\omega \rightarrow +\infty$, bobine = circuit ouvert
Donc c'est un filtre qui laisse passer les basses et hautes fréquences ; c'est un **filtre coupe bande**

Filtre RLC coupe-bande

a) Fonction de transfert : $\underline{H} = \frac{\underline{u_S}}{\underline{u_E}} = \frac{1-LC\omega^2}{1+j\frac{L}{R}\omega-LC\omega^2}$

b) Expression avec les variables usuelles ω_0, x et Q

$$\underline{H} = \frac{1-x^2}{1+j\frac{1}{Q}x-x^2} \quad avec \quad \begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ x = \frac{\omega}{\omega_0} \\ Q = \frac{R}{L\omega_0} \end{cases}$$

Filtre RLC passe-bande

$$\boldsymbol{\underline{H} = \frac{1 - x^2}{1 + j\frac{1}{Q}x - x^2}}$$

c) Etude du gain G = |$\underline{H}$|

$$G = |\underline{H}| = \left|\frac{1 - x^2}{1 + j\frac{1}{Q}x - x^2}\right| = \frac{1 - x^2}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$$

d) Etude du déphasage $\Phi_H = Arg\,(\underline{H})$

$$\Phi_H = Arg\,(\underline{H}) = Arg\left(\frac{1 - x^2}{1 + j\frac{1}{Q}x - x^2}\right) = -\arctan\left(\frac{\frac{x}{Q}}{1 - x^2}\right)$$

Filtre RLC coupe-bande

$$\underline{\boldsymbol{H}} = \frac{\mathbf{1} - \boldsymbol{x}^2}{\mathbf{1} + \boldsymbol{j}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^2}$$

Lorsque x → 0, $\underline{H} \sim 1$

Donc le gain est : $G = |\underline{H}| \sim 0$

La 1ère asymptote du diagramme de Bode en gain est ainsi :

$$G_{dB} = 0$$

Pour le déphasage, on peut ainsi montrer qu'on a $\Phi_H = 0$

Filtre RLC coupe-bande

$$\boldsymbol{\underline{H}} = \frac{\mathbf{1} - \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{1} + \boldsymbol{j}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}$$

Lorsque x → ∞, $\underline{H} \sim 1$

Donc le gain est : $G = |\underline{H}| \sim 0$

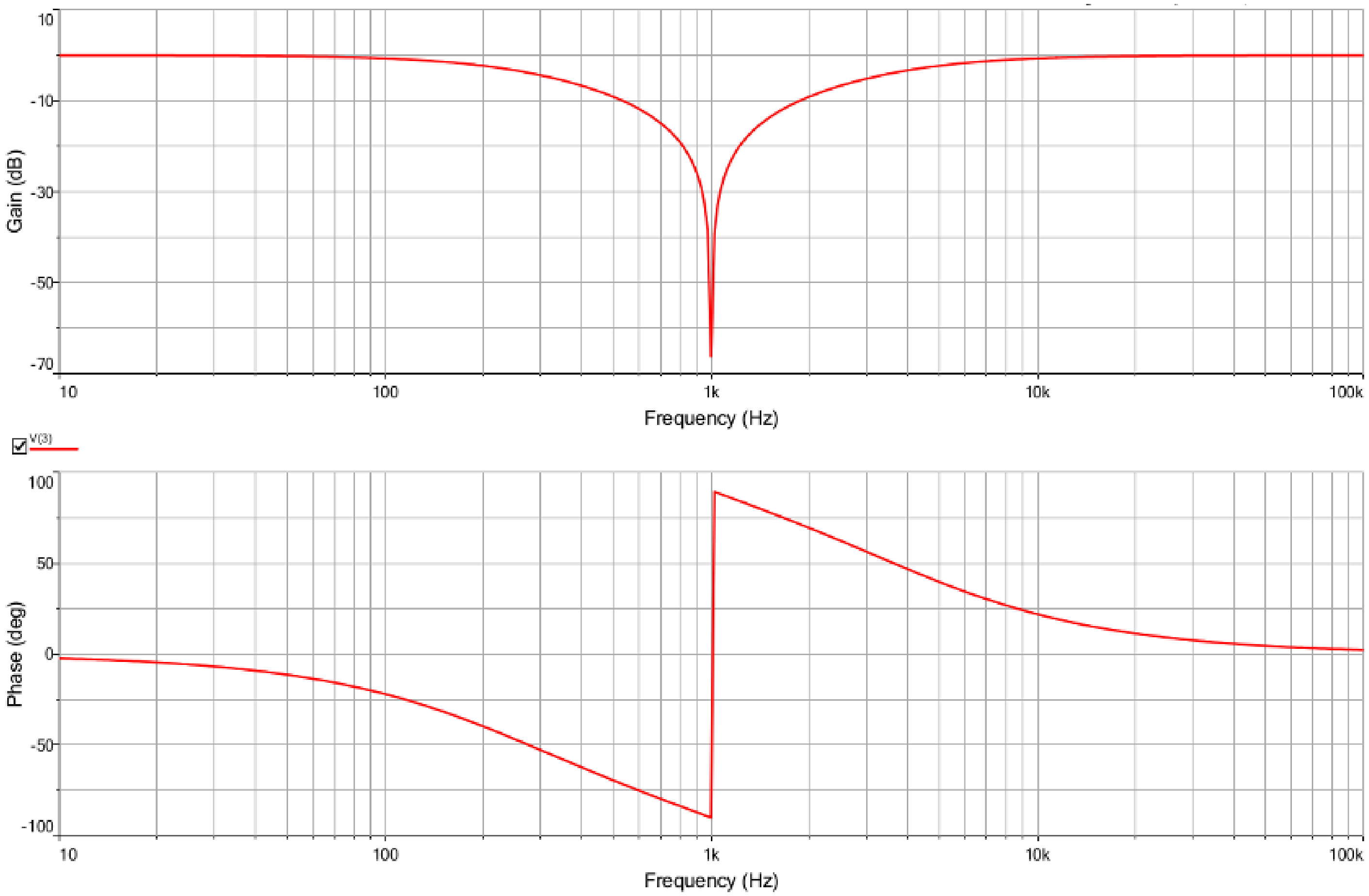
La 2ème asymptote du diagramme de Bode en gain est ainsi :

$$G_{dB} = 0$$

Pour le déphasage, on peut ainsi montrer qu'on a $\Phi_H = 0$

Filtre RLC coupe-bande

Diagramme de Bode



Sommaire

Analyse spectrale d’une grandeur périodique

On ne traite que le cas de signaux sinusoïdaux,

Pourquoi ?

Tout signal peut être décrit comme une somme de sinusoïdes

Analyse spectrale d'une grandeur périodique

Un théorème très utilisé : le théorème de Fourier

Tout signal périodique de période T peut s'écrire sous la forme d'une somme de fonctions sinusoïdales de pulsations multiples de la pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$:

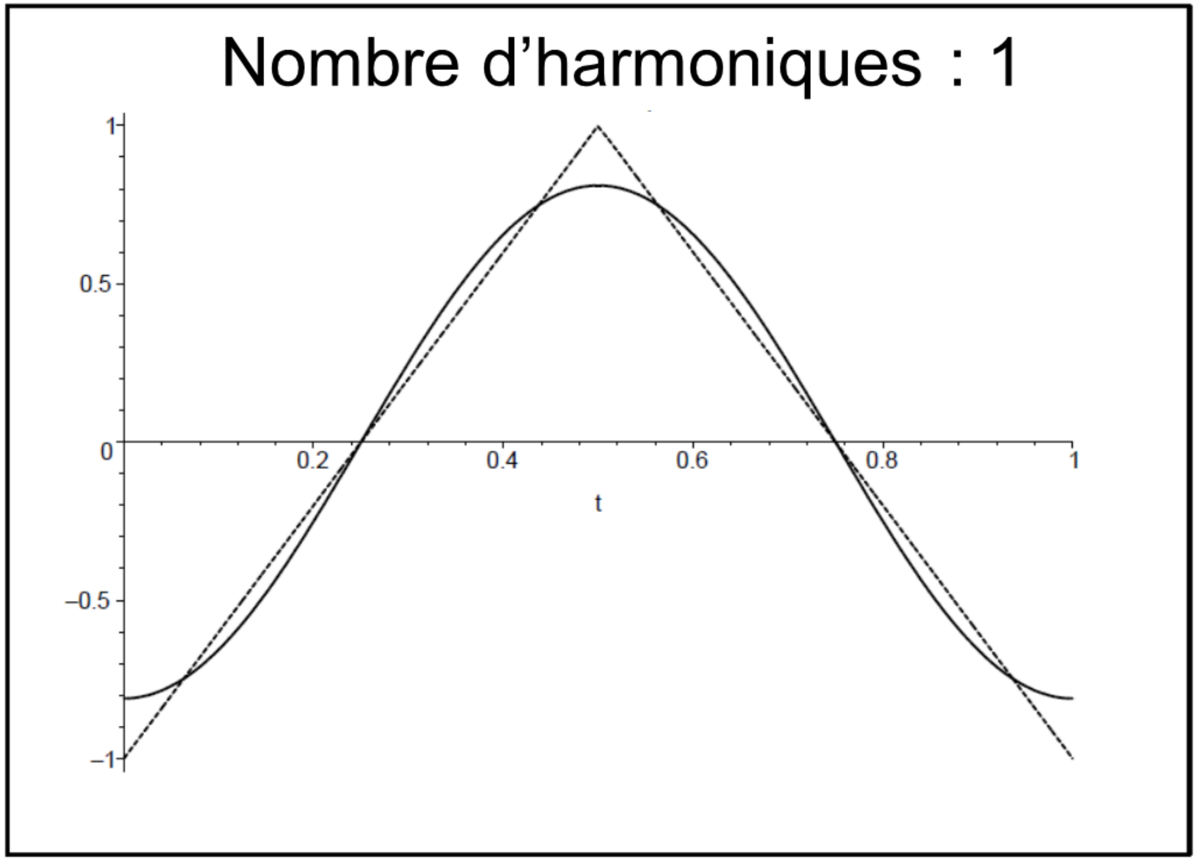
$$u(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\,\omega\,t + \varphi_n)$$

Cette écriture est appelée *décomposition en série de* FOURIER.

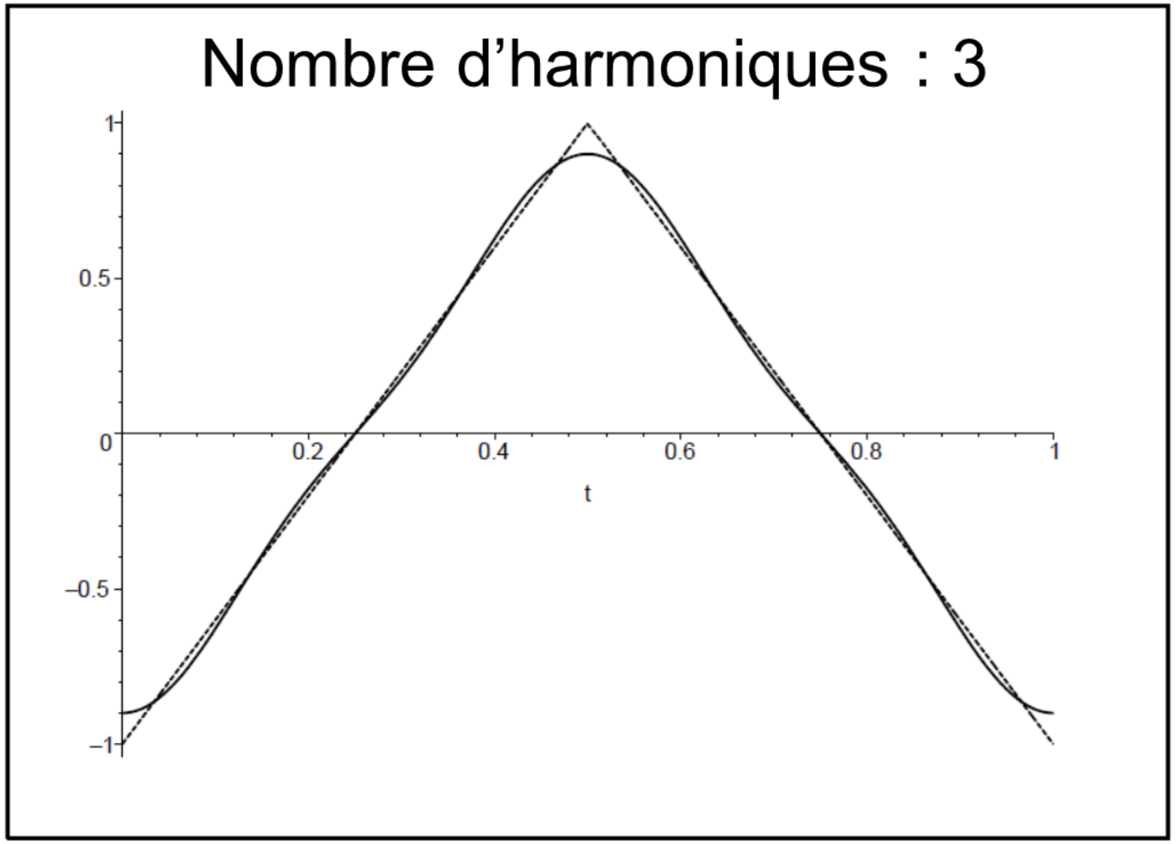
Tous les signaux périodiques sont des sommes de sinusoïdes

Sinusoïde de pulsation ω : « le fondamental »
Les multiples : « les harmoniques »

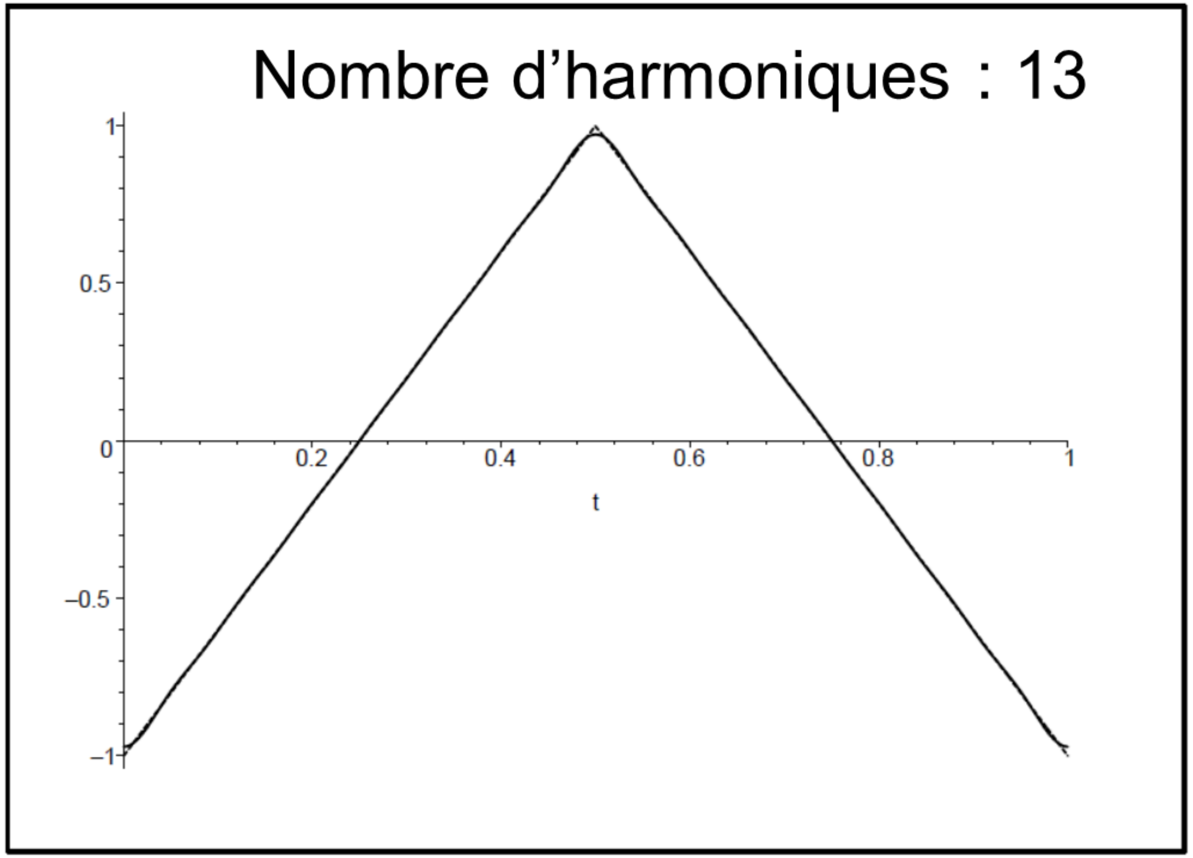
Un signal triangulaire décomposé en sinusoïdes



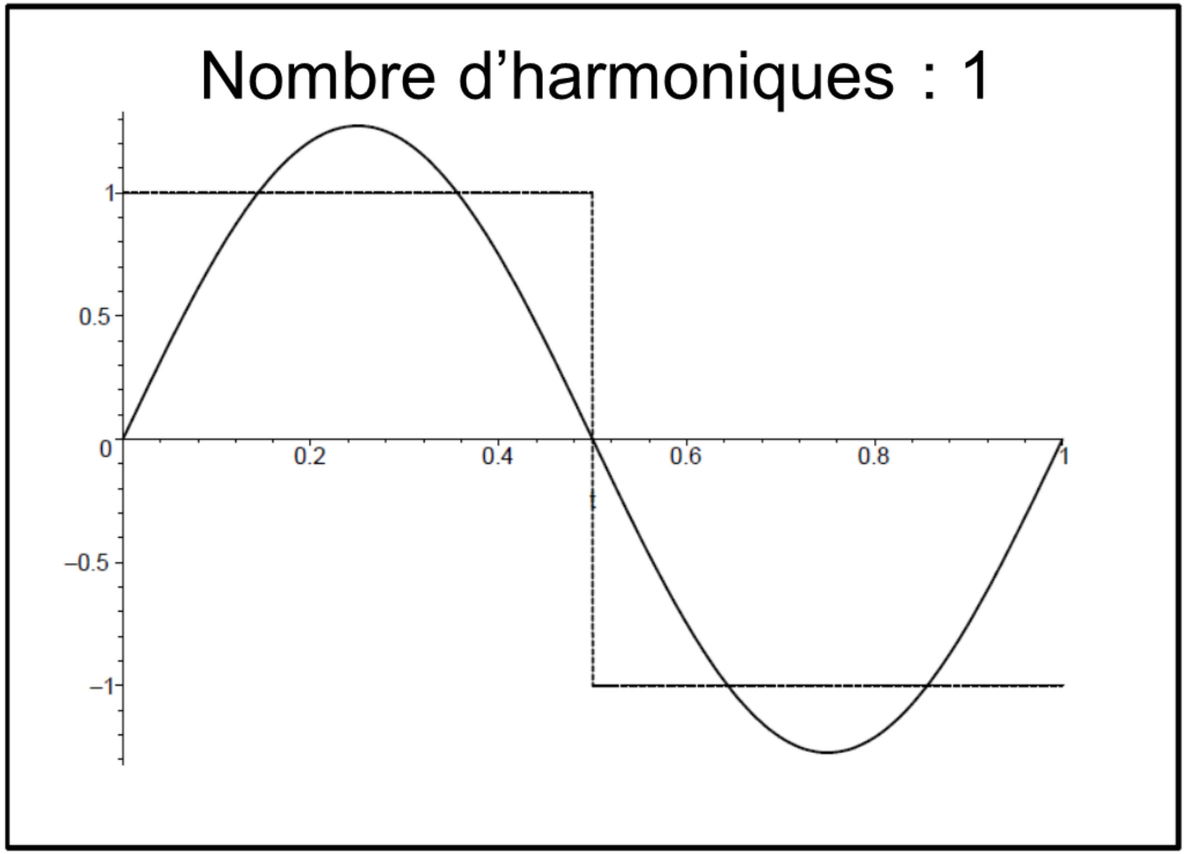
Un signal triangulaire décomposé en sinusoïdes



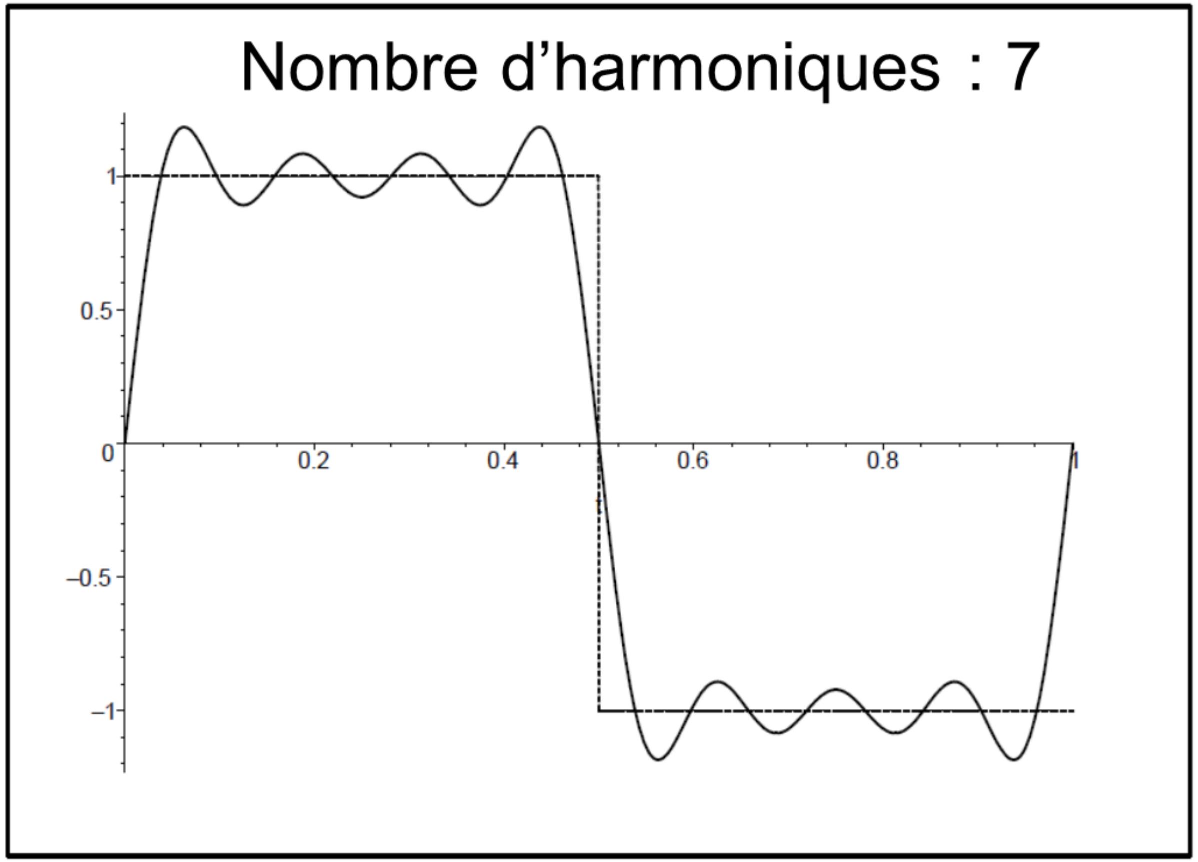
Un signal triangulaire décomposé en sinusoïdes



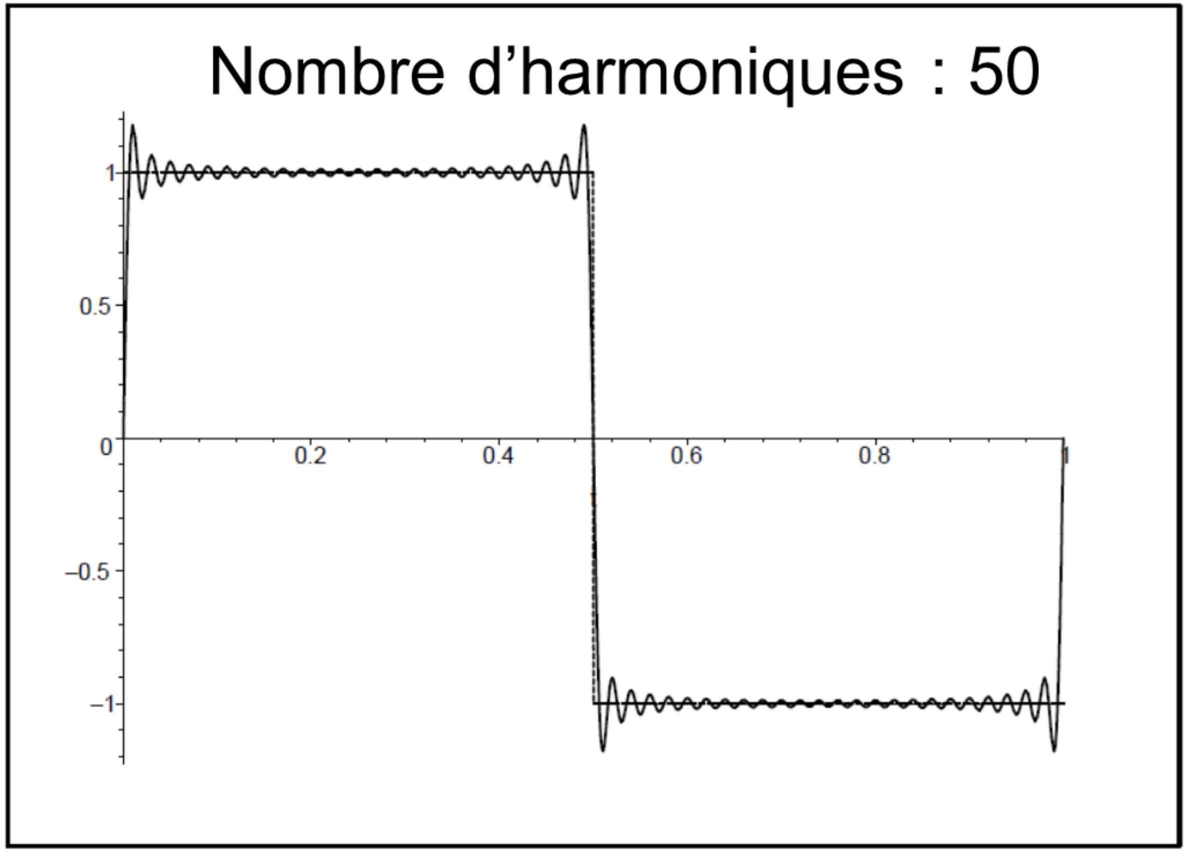
Un signal rectangulaire décomposé en sinusoïdes



Un signal rectangulaire décomposé en sinusoïdes



Un signal rectangulaire décomposé en sinusoïdes



Récapitulatif (à savoir)

- Notion de filtrage
- Fonction de transfert
- Diagramme de Bode
- Filtres de premier et second ordre
- Analyse spectrale

Fin du Chapitre 4