ISEN **2018/2019**

CIR1 ET CNB1 - MATHÉMATIQUES

DEVOIR SURVEILLÉ 18/12/2018

Consignes :

— *Pour cette épreuve de 2 heures aucun document n'est autorisé et la calculatrice collège est tolérée.*
— *Expliquez vos raisonnements avec un maximum de* ***clarté*** *et avec le* ***vocabulaire*** *adapté.*
— *Une copie soignée est gage d'une bonne note !*

Exercice 1. (Points 4)

1. Calculer
$$F(t) = \int \frac{2t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$$
en sachant que $\frac{t^2}{t^2-1} = 1 + \frac{1}{t^2-1}$.

2. En déduire
$$G(x) = \int \sqrt{e^x+1}\,\mathrm{d}x$$
à l'aide du changement de variable $t = \sqrt{e^x+1}$.

Exercice 2. (Points 5)
Soient a et b deux réels.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ e^{bx} - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Donner la définition d'une fonction prolongeable par continuité en un point a.
2. Déterminer a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer la limite suivante :
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)x - \sin(x)}{x^2}$$
4. Qu'est-ce que ça signifie que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$? Déterminer a et b pour que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 3. (Points 5)
On considère l'équation différentielle (E) :
$$y'' + 3y' + 2y = xe^{-x}$$
où y est une fonction de la variable réelle x deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_H) homogène associée à (E).
2. Déterminer, si elle existe, la solution y_H de l'équation différentielle (E_H) homogène qui vérifie $y_H(0) = 1$ et $y'_H(0) = 1$.
3. (a) En utilisant le fait que y_H est solution de (E_H), exprimer $y_H(x)$ en fonction de $y'_H(x)$ et $y''_H(x)$.
   (b) En déduire une primitive de y_H.
4. Résoudre l'équation différentielle (E) non homogène.

Exercice 4. (Points 6)
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 1\right)e^{-x}$$

1. Décrire le voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
2. Énoncer la formule de Taylor-Young à l'ordre n au voisinage de 0 pour une fonction f.
3. Déterminer le développement limité d'ordre 2 de f au voisinage de 0.
4. En déduire une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 et la position de la tangente par rapport à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de ce point.
5. Soit λ un réel strictement positif et $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.
   (a) Calculer $A(\lambda)$.
   (b) Déterminer la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tende vers $+\infty$.