ISEN **2016/2017**

CIR1 - Mathématiques

DEVOIR SURVEILLÉ 3/11/2016

Consignes :

- *Pour cette épreuve de **2** heures aucun document n'est autorisé et la calculatrice collège est tolérée.*
- *Les **4** exercices qu'il comporte sont indépendants.*
- *Expliquez vos raisonnements avec un maximum de **clarté** et avec le **vocabulaire** adapté.*
- *Une copie soignée est gage d'une bonne note !*

Exercice 1. (Points 4)

Soient les propriétés suivantes, où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) La fonction f est injective et b) La fonction f ne prend jamais la même valeur.

1. Éxprimer à l'aide de quantificateurs a) et b).
2. Donner à l'aide de quantificateurs leur négation.
3. Si f est définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, f est elle injective ? surjective ? bijective ? Pourquoi ?

Exercice 2. (Points 4)

Soit la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1)^3$.

1. Écrire S_n sans utiliser de symbole somme. De combien de termes cette somme est-elle composée ?
2. Calculer S_n en développant $(2k+1)^3$, en sachant que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$.
3. On pose $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k)^3$ et $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} k^3$. Expliquer pourquoi $U_n = S_n + T_n$ (à l'aide d'une phrase si vous n'arrivez pas à le faire par le calcul!).
4. Calculer T_n et U_n.
5. Retrouver la valeur de S_n à l'aide des deux questions précédentes.

Exercice 3. (Points 6)

1. Déterminer les racines carrées de $-\mathrm{i}$ dans $\mathbb{C}$, sous forme exponentielle et sous forme algébrique.
2. Soit Δ le nombre complexe $\Delta = -50\mathrm{i}$. Déterminer les racines carrées de Δ dans $\mathbb{C}$ sous forme algébrique.
3. Déterminer, sous forme algébrique, les deux solutions complexes de l'équation :
$$z^2 + 3(1-\mathrm{i})z + 8\mathrm{i} = 0.$$
4. Soient A, B et C les points du plan complexe d'affixe : $z_A = 2+2\mathrm{i}$, $z_B = 1-\mathrm{i}$ et $z_C = -4+4\mathrm{i}$.

   Représenter les trois points A, B, C dans le plan complexe.

   Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
5. Soit O l'origine du plan complexe. Calculer les affixes des images de A, B, C par la rotation de centre O et d'angle $-\pi/4$.

Exercice 4. (Points 6)
Résoudre les équations différentielles

$$a) \quad y' + 2y = 4e^x + \frac{3}{4}\sin x \qquad \text{et} \qquad b) \quad y' + 2y = -\frac{1}{4}\sin 3x.$$

En déduire la solution générale de l'équation $y' + 2y = 4e^x + \sin^3 x$.

Suggestion : pensez à linéariser $\sin^3 x$.