

EXAMEN 19/01/2016

Consignes :

- Pour cette épreuve de **2** heures aucun document n'est autorisé et la calculatrice collègue est tolérée.
- Les **4** exercices qu'elle comporte sont indépendants.
- Expliquez vos raisonnements avec un maximum de **clarté** et avec le **vocabulaire** adapté.
- Une copie soignée est gage d'une bonne note !

Exercice 1

Soit

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

1. Calculer M^2 .
2. Déterminer α et β appartenant à \mathbb{R} tels que :

$$M^2 = \alpha \cdot I_3 + \beta \cdot M.$$

3. En déduire la matrice inverse de M notée M^{-1} .

Exercice 2

Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}+1} dx$$

de deux manières différentes :

1. en effectuant le changement de variable $u = \sqrt{x+1} + 1$;
2. en supprimant le radical au dénominateur.

Exercice 3

Écrire $\cos(2x)$ sous forme exponentielle complexe et résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 4y = x \cos(2x)$$

qui vérifie $y'(0) = 0$ et $y(0) = 0$.

Exercice 4

1. Calculer $(1 + 2i)^4$.
2. Calculer les racines quatrième de : $-7 - 24i$.