Quiz de Mathématiques

Durée : 1 heure.
Aucun document n'est autorisé.
La calculatrice collège est tolérée.

Veuillez ne pas répondre sur le sujet, mais sur la **feuille de réponse** prévue à cet effet.

BON COURAGE !

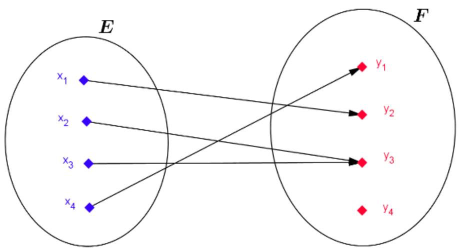
∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗

1. La contraposée de l'implication $P \Rightarrow Q$ est la proposition ...

(1)☐ $non(P) \Rightarrow non(Q)$ (2)☐ $non(Q) \Rightarrow non(P)$ (3)☐ $Q \Rightarrow P$ (4)☐ $non(Q) \Rightarrow P$

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

2. L'application f suivante est ...



(1)☐ surjective (2)☐ injective (3)☐ bijective

(4)☐ n'est pas une application (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

3. Soit f une application de E dans F. Si f est injective ...

(1)☐ $\forall (x, x') \in E^2 \; f(x) \neq f(x') \Rightarrow \; x \neq x'$ (2)☐ $\forall (x, x') \in E^2 \; f(x) = f(x') \Rightarrow \; x = x'$

(3)☐ $\forall y \in F \; \exists x \in E \; y = f(x)$ (4)☐ $\forall y \in F \; \exists! x \in E \; y = f(x)$

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application telle que $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$. Que peut-on dire de f ?

(1)☐ f n'est pas injective (2)☐ f n'est pas surjective (3)☐ f est bijective

(4)☐ f n'est pas une application (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

5. Cochez les affirmations qui traduisent la proposition *"f est l'identité de $\mathbb{R}$"*.

$_{(1)}\square$ $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$ $_{(2)}\square$ $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$ $_{(3)}\square$ $\exists! x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$

$_{(4)}\square$ $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a$ $_{(5)}\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

6. Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble. Peut-on écrire :

$_{(1)}\square$ $a \in E$ $_{(2)}\square$ $a \subset E$ $_{(3)}\square$ $d \not\subset E$ $_{(4)}\square$ $\{a\} \subset E$ $_{(5)}\square$ $\varnothing \in E$

7. Parmi les propositions suivantes lesquelles sont vraies pour tous ensembles A, B et C ?

$_{(1)}\square$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $_{(2)}\square$ $A^c \cup B^c = (A \cup B)^c$

$_{(3)}\square$ $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(B \setminus A)$ $_{(4)}\square$ $A \setminus B = A \cap B^c$

$_{(5)}\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

8. Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$. On note f l'application de E dans E dont le graphe Γ est le suivant :

$$\Gamma = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 1)\}$$

Cochez les affirmations correctes.

$_{(1)}\square$ $f(\{2, 3\})$ est un singleton.
$_{(2)}\square$ $f^{-1}(\{2, 3\})$ est un singleton.
$_{(3)}\square$ 4 n'a pas d'antécédent pour f.
$_{(4)}\square$ L'application f est surjective.
$_{(5)}\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

9. On considère deux fonctions :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{2x+1} \end{cases} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$

Cochez les affirmations correctes.

$_{(1)}\square$ $g \circ f = 2x + 1$ $_{(2)}\square$ $g \circ f = \sqrt{2x^2 + 1}$ $_{(3)}\square$ $g \circ f = f \circ g$

$_{(4)}\square$ $g \circ f : [\frac{1}{2}, +\infty) \to \mathbb{R}$ $_{(5)}\square$ $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

10. Soit $E = \{r, s, t, v, w\}$ un ensemble. Le nombre de sous-ensembles de E est :

$_{(1)}\square$ le cardinal de l'ensemble E. $_{(2)}\square$ un entier naturel.

$_{(3)}\square$ 25 $_{(4)}\square$ 32 $_{(5)}\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

11. Soient $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ et $E = A \cup B$. Cochez les affirmations correctes.

$_{(1)}\square$ $A \cap B = B$ $_{(2)}\square$ $A \cap B = \{1, 2, 3, \varnothing\}$ $_{(3)}\square$ $(A \setminus B)^C = B$ $_{(4)}\square$ $B^C = A$

$_{(5)}\square$ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

12. Soit A une partie de E. Cochez les affirmations qui traduisent l'affirmation "*A est la partie vide*".

(1)☐ Quel que soit x élément de E, x n'est pas un élément de A.
(2)☐ Il existe au plus un élément de E qui n'est pas un élément de A.
(3)☐ $\forall x \in E \; x \notin A$
(4)☐ $\exists x \in E \; x \notin A$
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

13. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{P}(E)$. Cochez les affirmations qui sont correctes.

(1)☐ $\forall x \in E,\; x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ et $x \in A$
(2)☐ $\forall x \in E,\; x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in B$ et $x \notin A$
(3)☐ $\forall x \in E,\; x \in ((A \cap B) \cup (B \setminus A)) \Leftrightarrow x \in B$
(4)☐ $\forall x \in E,\; x \in (A \cap (B \cup B \setminus A)) \Leftrightarrow x \in B$
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

14. Chercher un contre-exemple à une assertion du type "$\forall x \in E$ l'assertion $P(x)$ est vraie" revient à prouver l'assertion :

(1)☐ $\exists! x \in E$ l'assertion $P(E)$ est fausse.
(2)☐ $\exists x \in E$ l'assertion $P(E)$ est fausse.
(3)☐ $\forall x \notin E$ l'assertion $P(E)$ est fausse.
(4)☐ $\forall x \in E$ l'assertion $P(E)$ est fausse.
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

15. Je veux montrer que $e^x > x$ pour tout x réel avec $x \geqslant 1$. L'initialisation est vraie pour $x = 1$, car $e^1 = 2,718... > 1$. Pour l'hérédité, je suppose $e^x > x$ et je calcule :

$$e^{x+1} = e^x \cdot e > x \cdot e \geqslant x \cdot 2 \geqslant x + 1$$

Je conclus par le principe de récurrence. Cochez les affirmations correctes.

(1)☐ Cette preuve est valable.
(2)☐ Cette preuve n'est pas valable car il faudrait commencer l'initialisation à $x = 0$.
(3)☐ Cette preuve n'est pas valable car l'inégalité $e^x > x$ est fausse pour $x \leqslant 0$.
(4)☐ Cette preuve n'est pas valable car la suite d'inégalités est fausse.
(5)☐ Cette preuve n'est pas valable car x est un réel.

16. Pour montrer que l'assertion "$\forall n \in \mathbb{N} \; n^2 > 3n - 1$" est fausse, quels sont les arguments valables ?

(1)☐ L'assertion est fausse, car pour $n = 0$ l'inégalité est fausse.
(2)☐ L'assertion est fausse, car pour $n = 1$ l'inégalité est fausse.
(3)☐ L'assertion est fausse, car pour $n = 2$ l'inégalité est fausse.
(4)☐ L'assertion est fausse, car pour $n = 1$ et $n = 2$ l'inégalité est fausse.
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

17. Je veux montrer que $\sqrt{13} \notin \mathbb{Q}$ par un raisonnement par l'absurde. Quel schéma de raisonnement est adapté ?

(1)☐ Je suppose que $\sqrt{13}$ est rationnel et je cherche une contradiction.
(2)☐ Je suppose que $\sqrt{13}$ est irrationnel et je cherche une contradiction.
(3)☐ J'écris $13 = \frac{p}{q}$ (avec p, q entiers) et je cherche une contradiction.
(4)☐ J'écris $\sqrt{13} = \frac{p}{q}$ (avec p, q entiers) et je cherche une contradiction.
(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

18. Soit $A = [-1, 3]$ et $B = [0, 4]$. Cochez les réponses correctes.

(1)☐ $A \cap B = \varnothing$ (2)☐ $A \cap B = [0, 3]$ (3)☐ $A \cup B = \varnothing$ (4)☐ $A \cup B = [0, 3]$

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

19. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$$

Cochez les bonnes réponses.

(1)☐ $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (2)☐ $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$ (3)☐ $f(\mathbb{R}) =]1, +\infty[$ (4)☐ $f(\mathbb{R}) = [1, +\infty[$

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

20. Soit $f(x) = \ln(x-1)$ et $g(x) = \sqrt{x+1}$. Cochez les affirmations correctes.

(1)☐ $D_f \cup D_g = [-1, +\infty[$ (2)☐ $D_f \cup D_g =]-1, +\infty[$ (3)☐ $D_{f\circ g} =]0, +\infty[$

(4)☐ $D_{g\circ f} =]1, +\infty[$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.