ISEN **2015/2016**

CIR1 - Mathématiques

DEVOIR SURVEILLÉ 30/05/2016

Consignes :

- Pour cette épreuve de **2** heures aucun document n'est autorisé et la calculatrice collège est tolérée.
- Les **3** exercices qu'elle comporte sont indépendants.
- Expliquez vos raisonnements avec un maximum de **clarté** et avec le **vocabulaire** adapté.
- Une copie soignée est gage d'une bonne note !

Exercice 1.
Soit $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice définie par

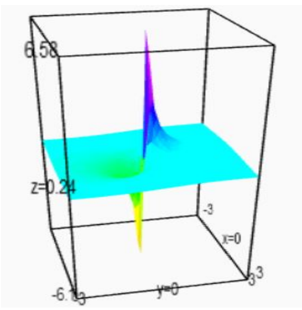
$$A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 0 \\ 10 & 6 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

associée à l'endomorphisme f dans $\mathcal{B}$, la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Soit $X = [x\ y\ z]^T$. Déterminer $f(X)$.
2. f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?
3. On considère $u_1 = [1\ -2\ 0]^T$, $u_2 = [-3\ 5\ 1]^T$ et $u_3 = [0\ 0\ 1]^T$.
   (a) Démontrer que $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer N, la matrice associée à f dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$.
   (c) Donner un lien matriciel entre A et N.
   (d) La matrice A et la matrice N sont semblabes ? Pourquoi ?

Exercice 2.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.
2. Calculer $\nabla f(x,y)$.
3. Calculer la matrice hessienne de f en (x,y).
   La matrice hessienne est toujours symétrique ? Justifier.

Exercice 3.

On considère le système d'équations différentielles suivant:

$$\begin{cases} x'(t) = -15x(t) + 44y(t) \\ y'(t) = -10x(t) + 27y(t) \end{cases} \tag{1}$$

1. Écrire le système sous forme matricielle $Y'(t) = A \cdot Y(t)$.
2. Déterminer les vecteurs propres associés aux valeurs propres de A. Est-ce qu'ils sont linéairement indépendants ?
3. Écrire la solution du système (1).