

Durée : 30 minutes.

Aucun document n'est autorisé.

La calculatrice collègue est tolérée.

*Veillez ne pas répondre sur le sujet, mais sur la **feuille de réponse** prévue à cet effet.*

BON COURAGE !

* * * * *

1. Au voisinage de 0 :

- (1) ☐ $\frac{1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$
 (2) ☐ $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + o(x^2)$
 (3) ☐ $\frac{1}{x-1} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$
 (4) ☐ $\frac{1}{x-1} = 1 - x + x^2 + o(x)$
 (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

2. Soient A et B deux matrices réelles. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies :

- (1) ☐ $A \cdot B$ est défini si et seulement si le nombre de lignes de A est égal au nombre de colonnes de B
 (2) ☐ si $AB = AC$, alors $B = C$
 (3) ☐ si $AB = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$
 (4) ☐ on peut avoir $A \cdot B = \alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$
 (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

3. Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies ?

- (1) ☐ $\det(A) = -\det(A^T)$
 (2) ☐ Si on ajoute à la première ligne le double de la seconde, le déterminant est doublé.
 (3) ☐ Si on ajoute à la première ligne de A la somme des autres, alors $\det(A)$ est inchangé.
 (4) ☐ Si une des lignes de A est combinaison linéaire des autres, alors $|A| = 0$.
 (5) ☐ Si A est triangulaire, alors $\det(A)$ est le produit des coefficients diagonaux.

4. Une relation binaire R est une relation d'ordre dans un ensemble E si elle est :

- (1) ☐ réflexive, symétrique et transitive
 (2) ☐ réflexive, antisymétrique et transitive
 (3) ☐ $\forall x \in E, xRx; \forall x, y \in E, (xRy \text{ et } yRx) \Rightarrow x = y; \forall x, y, z \in E, (xRy \text{ et } yRz) \Rightarrow xRz$
 (4) ☐ $\forall x \in E, xRx; \forall x, y \in E, xRy \Rightarrow yRx; \forall x, y, z \in E, (xRy \text{ et } yRz) \Rightarrow xRz$
 (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

5. Soit $D(n)$ l'ensemble des diviseurs de n dans \mathbb{Z} et soit $n\mathbb{Z}$ l'ensemble des multiples de n . Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

- (1) ☐ $D(0) = \mathbb{Z}$ et $0\mathbb{Z} = \{0\}$
 (2) ☐ $D(1) = \mathbb{Z}$ et $1\mathbb{Z} = \{1\}$
 (3) ☐ $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2 : b|a \Leftrightarrow D(b) \subset D(a)$
 (4) ☐ $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2 : b|a \Leftrightarrow b \in a\mathbb{Z}$
 (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

6. $b|a$ signifie ...

- (1) ☐ b est diviseur de a
- (2) ☐ b est multiple de a
- (3) ☐ le reste de la division euclidienne de a par b est nul
- (4) ☐ le reste de la division euclidienne de b par a est nul
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

7. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

- (1) ☐ $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2 : b|a \Leftrightarrow a \in D(b)$
- (2) ☐ $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2 : b|a \Leftrightarrow a \in b\mathbb{Z}$
- (3) ☐ $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2 : b|a \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} \ b = aq$
- (4) ☐ $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2 : b|a \Leftrightarrow \forall q \in \mathbb{Z} \ a = bq$
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

8. Soit $a = bq + r$ la division euclidienne de $a \in \mathbb{Z}$ par $b \in \mathbb{N}^*$. Alors

- (1) ☐ $0 < r < b$
- (2) ☐ $a \wedge b = b \wedge r$
- (3) ☐ on peut avoir différentes valeurs pour r et q
- (4) ☐ $b|a$
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

9. Soient a et b deux entiers relatifs et $d = \text{pgcd}(a, b)$.

- (1) ☐ $d|a$ et $d|b$
- (2) ☐ Il existe un couple $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $au + bv = 1$.
- (3) ☐ Il existe un couple $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $au + bv = d$.
- (4) ☐ Il existe un couple unique $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = d$.
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

10. Soient a, b et c trois entiers relatifs. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

- (1) ☐ $a \vee b = 1$ et $a|bc \Rightarrow a|c$
- (2) ☐ $a \wedge b = 1$ et $a|bc \Rightarrow b|c$
- (3) ☐ $a \vee b = 1$ et $a|bc \Rightarrow b|c$
- (4) ☐ $a \wedge b = 1$ et $a|bc \Rightarrow a|c$
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.