ISEN **2018/2019**

CIR1 ET CNB1 - MATHÉMATIQUES

EXAMEN II SESSION 17/01/2019

Consignes :

- *Pour cette épreuve de 2 heures aucun document n'est autorisé et la calculatrice collège est tolérée.*
- *Les 4 exercices qu'elle comporte sont indépendants.*
- *Expliquez vos raisonnements avec un maximum de **clarté** et avec le **vocabulaire** adapté.*
- *Une copie soignée est gage d'une bonne note !*

Exercice 1. (Points 4)

Soit

$$G(x) = \int \frac{\ln(x)}{x} \, \mathrm{d}x.$$

Calculer les primitives de $G(x)$:

a) avec une intégration par parties, après avoir donné sa définition ;

b) avec un changement de variable ;

c) en reconnaissant une fonction et sa dérivée.

Exercice 2. (Points 5)

1. Donner la définition d'une limite finie l, avec $l \in \mathbb{R}$, pour x qui tend vers 0 et pour x qui tend vers $+\infty$.
2. Calculer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2} \qquad \text{et} \qquad b) \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 2} - x$$

Exercice 3. (Points 6)

1. Énoncer la formule de Taylor-Young pour une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0.
2. Écrire le développement limité de $\dfrac{1}{1+x}$ au voisinage de 0 à l'ordre 3.
3. En déduire le développement limité de $\dfrac{1}{1+e^x}$ au voisinage de 0 à l'ordre 3.
4. En utilisant ce qui précède, déterminer l'asymptote au graphe de f pour $x \to +\infty$, où

$$f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

Exercice 4. (Points 5)

Soit l'équation différentielle (E) :

$$y'' + 9y = 2\cos(\omega x)$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et ω un paramètre réel positif ou nul.

1. Pourquoi (E) est une équation différentielle ? Combien de solutions peut avoir (E) ?
2. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
3. Résoudre l'équation différentielle (E) dans le cas où $\omega \neq 3$.
4. Résoudre l'équation différentielle (E) dans le cas où $\omega = 3$.