

# Quiz de Mathématiques

Durée : 1 heure.

Aucun document n'est autorisé.

La calculatrice collège est tolérée.

Veillez ne pas répondre sur le sujet, mais sur la **feuille de réponse** prévue à cet effet.

- Les questions peuvent présenter une ou plusieurs réponses correctes.
- **Noircir les cases, ne pas faire des croix sur les cases.**
- En cas d'erreur, utilisez du « blanco ».
- Une mauvaise réponse enlève des points, une absence de réponse n'a pas d'incidence.

BON COURAGE !

\* \* \* \* \*

1. On considère l'ensemble quotient  $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ .

- (1) ☐  $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}\}$   
 (2) ☐  $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^* = \emptyset$   
 (3) ☒  $\overline{5}$  est un diviseur de zéro.  
 (4) ☐ Cette ensemble n'a pas de diviseurs de zéro.  
 (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

2. Quel est l'ensemble  $S$  des solutions de l'équation diophantienne  $121x + 33y = 22$  ?

- (1) ☐  $S = \{(1 - 11k; -3 + 3k), k \in \mathbb{Z}\}$   
 (2) ☐  $S = \{(-1 - 3k; 3 + 11k), k \in \mathbb{Z}\}$   
 (3) ☒  $S = \{(1 + 3k; -3 - 11k), k \in \mathbb{Z}\}$   
 (4) ☒  $S = \{(1 - 3k; -3 + 11k), k \in \mathbb{Z}\}$   
 (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

3. L'entier 4 est un inverse modulo 11 de ... ?

- (1) ☐ 6      (2) ☐ -6      (3) ☒ 3      (4) ☐ -3      (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

4. Soient  $P = 2X^5 + 3X^2 + X$  et  $Q(X) = 3X^2 - 2X + 3$ .

Quelle(s) est(sont) la(les) assertion(s) vraie(s) pour le polynôme produit  $P(X) \times Q(X)$  ?

- (1) ☐ Le coefficient dominant est 5  
 (2) ☒ Le coefficient du monôme  $X^3$  est -3  
 (3) ☐ Le coefficient du terme constant est 3  
 (4) ☒ Le produit est la somme de 7 monômes ayant un coefficient non nuls  
 (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

5. Soient  $P(X)$  et  $Q(X)$  deux polynômes unitaires de degré  $n \geq 1$ .

Quelle(s) est(sont) la(les) assertion(s) vraie(s) ?

- (1) ☒  $P + Q$  est un polynôme de degré  $n$   
 (2) ☐  $P - Q$  est un polynôme de degré  $n$   
 (3) ☒  $P \times Q$  est un polynôme de degré  $2n$   
 (4) ☐  $P/Q$  est un polynôme de degré 0  
 (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

6. Soit  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ . On associe le polynôme dérivé :  $P'(X) = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1}$ .  
Quelle(s) est(sont) la(les) assertion(s) vraie(s) ?

- (1) ☒ Si  $P$  est de degré  $n \geq 1$  alors  $P'$  est de degré  $n - 1$
- (2) ☐ Si  $P'(X) = nX^{n-1}$  alors  $P(X) = X^n$
- (3) ☒ Si  $P' = P$  alors  $P = 0$
- (4) ☐ Si  $P' - Q' = 0$  alors  $P - Q = 0$
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

7. Soient  $P, S$  deux polynômes, avec  $Q$  non nul. Soit  $P = S \times Q + R$  la division euclidienne de  $P$  par  $S$ .

- (1) ☒ Un tel  $Q$  existe toujours
- (2) ☒ S'il existe,  $R$  est unique
- (3) ☒ On a toujours  $\deg(Q) \leq \deg(P)$
- (4) ☒ On a toujours  $\deg(R) < \deg(S)$
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

8. Soient  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ , avec  $P = (X-1)^2(X-3)^3(X^2+X+1)^3$  et  $Q = (X-1)^2(X-2)(X-3)(X^2+X+1)^2$ .  
Cocher la(les) affirmation(s) correcte(s).

- (1) ☐  $\text{pgcd}(P, Q) = (X-1)^2(X-3)(X^2+X+1)$
- (2) ☐  $\text{ppcm}(P, Q) = (X-1)^2(X-2)(X-3)^3(X^2+X+1)^2$
- (3) ☒  $P \wedge Q = (X-1)^2(X-3)(X^2+X+1)^2$
- (4) ☒  $P \vee Q = (X-1)^2(X-2)(X-3)^3(X^2+X+1)^3$
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

9. Soient  $A = X^4 - X^2$  et  $B(X) = X^2 + X - 2$ . Soit  $D$  le pgcd de  $A$  et  $B$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .  
Cocher la(les) affirmation(s) correcte(s).

- (1) ☐  $D(X) = 1$
- (2) ☒ Il existe  $U, V \in \mathbb{R}[X]$  tels que  $AU + BV = X - 1$
- (3) ☐ Il existe  $u, v \in \mathbb{R}$  tels que  $Au + Bv = 1$
- (4) ☐ Il existe un unique couple  $U, V \in \mathbb{R}[X]$  tels que  $AU + BV = D$
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

10. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme de degré 8.  $P$  admet ...

- (1) ☐ exactement 8 racines réelles comptées avec multiplicité.
- (2) ☐ au moins une racine réelle.
- (3) ☒ au plus 8 racines réelles comptées avec multiplicité.
- (4) ☐ au moins 8 racines réelles comptées avec multiplicité.
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

11. Cocher la(les) affirmation(s) correcte(s).

- (1) ☐  $2X^2 + 3X + 1$  est irréductible sur  $\mathbb{R}$
- (2) ☒  $2X^2 - 3X + 2$  est irréductible sur  $\mathbb{R}$
- (3) ☐  $2X^2 - X + 3$  est irréductible sur  $\mathbb{C}$
- (4) ☐  $X^3 + X^2 + X + 4$  est irréductible sur  $\mathbb{R}$

12. Soit  $P(X) = X^6 + 4X^5 + X^4 - 10X^3 - 4X^2 + 8X$ .

Cocher la(les) racine(s) double de  $P$ .

- (1) ☐  $-1$
- (2) ☐  $0$
- (3) ☒  $1$
- (4) ☐  $-2$
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

13. Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  un polynôme de degré  $n \geq 1$ .

Cocher la(les) affirmation(s) correcte(s).

- (1) ☒  $\alpha$  est racine de  $P \Leftrightarrow X - \alpha$  divise  $P$
- (2) ☒  $\alpha$  est racine de  $P$  de multiplicité  $\geq k \Leftrightarrow (X - \alpha)^k$  divise  $P$
- (3) ☐  $\alpha$  est racine de  $P$  de multiplicité  $\geq k \Leftrightarrow P(\alpha) = 0, P'(\alpha) = 0, \dots, P^{(k)}(\alpha) = 0$  divise  $P$
- (4) ☒ La somme des multiplicités des racines est  $\leq n$
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

14. Le polynôme  $2(X - 1)(X + 5)(X - 3)$  est ...

- (1) ☒ irréductible dans  $\mathbb{R}$
- (2) ☒ irréductible dans  $\mathbb{C}$
- (3) ☒ scindé sur  $\mathbb{R}$
- (4) ☒ scindé sur  $\mathbb{C}$
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

15. On considère le polynôme  $P(X) = X^6 - 1$ . Cocher les affirmations correctes.

- (1) ☐  $P$  est irréductible sur  $\mathbb{R}$
- (2) ☐  $P$  est irréductible sur  $\mathbb{C}$
- (3) ☒ La décomposition de  $P$  sur  $\mathbb{C}$  est  $\prod_{k=0}^5 (X - e^{\frac{ik\pi}{3}})$
- (4) ☐ La décomposition de  $P$  sur  $\mathbb{R}$  est  $\prod_{k=0}^6 (X - e^{\frac{ik\pi}{3}})$
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

16. Quelle(s) sont la(les) affirmation(s) vraies ?

- (1) ☒ Les éléments simples sur  $\mathbb{C}$  peuvent être de la forme  $\frac{a}{X - \alpha}, a, \alpha \in \mathbb{C}$
- (2) ☐ Les éléments simples sur  $\mathbb{R}$  peuvent être de la forme  $\frac{aX + b}{X - \alpha}, a, b, \alpha \in \mathbb{R}$
- (3) ☒ Les éléments simples sur  $\mathbb{C}$  peuvent être de la forme  $\frac{a}{(X - \alpha)^k}, a, \alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}^*$
- (4) ☒ Les éléments simples sur  $\mathbb{R}$  peuvent être de la forme  $\frac{a}{(X - \alpha)^k}, a, \alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}^*$
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

17. Soit  $F(X) = \frac{1}{(X^2 + 1)X^3}$ . Quelle(s) sont la(les) affirmation(s) vraies ?

- (1) ☐  $F \in R[X]$
- (2) ☒  $F$  est impaire
- (3) ☐  $F$  est paire
- (4) ☐  $F$  a degré 0
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

18. Soit  $F$  la fraction de la question précédente.

On écrit

$$F(X) = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X^3} + \frac{dX + e}{X^2 + 1}$$

Quelle(s) sont la(les) affirmation(s) vraies ?

- (1) ☒  $c = 1$
- (2) ☒  $b = 0$
- (3) ☐  $d = 0$
- (4) ☒  $e = 0$
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

19. Soient  $P(X) = X - 1$  et  $Q(X) = (X + 1)^2(X^2 + X + 1)$ .

On décompose en éléments simples la fraction  $F = \frac{P}{Q}$  sur  $\mathbb{R}$ .

Quelle(s) sont la(les) affirmation(s) vraies ?

- (1) ☒ La partie polynomiale est nulle.
- (2) ☐ Il peut y avoir un élément simple  $\frac{a}{X-1}$
- (3) ☐ Il peut y avoir un élément simple  $\frac{a}{X+1}$  mais pas  $\frac{a}{(X+1)^2}$
- (4) ☒ Il peut y avoir un élément simple  $\frac{aX+b}{X^2+X+1}$  mais pas  $\frac{aX+b}{(X^2+X+1)^2}$
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

20. Soit  $\frac{P}{Q} = \frac{2X^2}{X^4 - 1}$ . La décomposition de  $\frac{P}{Q}$  dans ...

- (1) ☐  $\mathbb{R}$  a un seul élément simple.
- (2) ☐  $\mathbb{C}$  admet 2 pour partie entière.
- (3) ☐  $\mathbb{R}$  contient les deux éléments simples  $\frac{1}{X^2 - 1}$  et  $\frac{1}{X^2 + 1}$
- (4) ☒  $\mathbb{C}$  contient quatre éléments simples.
- (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.