



Utilizado por millones de
estudiantes y recomendado
por profesores de todo
el mundo

CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Tercera edición

JOSEPH A. EDMINISTER

Profesor Emérito de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Akron

MAHMOOD NAHVI

Profesor de Ingeniería Eléctrica
Universidad Politécnica de California

Traducción:

RAFAEL SANJURJO NAVARRO

EDUARDO LÁZARO SÁNCHEZ

PABLO DE MIGUEL RODRÍGUEZ

Profesores de la Universidad Politécnica de Madrid

McGraw-Hill

MADRID • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MÉXICO
NUEVA YORK • PANAMÁ • SAN JUAN • SANTAFÉ DE BOGOTÁ • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI • PARÍS
SAN FRANCISCO • SIDNEY • SINGAPUR • ST. LOUIS • TOKIO • TORONTO

CIRCUITOS ELÉCTRICOS. Tercera edición

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del Copyright.

**DERECHOS RESERVADOS © 1997, respecto a la tercera edición en español por
McGRAW-HILL/INTERAMERICANA DE ESPAÑA, S. A. U.**

Basauri, 17
Edificio Valrealty, 1.^a planta
28023 Aravaca (Madrid)

Traducido de la tercera edición en inglés de
SCHAUM'S OUTLINE OF ELECTRIC CIRCUITS

Copyright © MCMXCVII by McGraw-Hill, Inc.
ISBN: 0-07-018999-4

ISBN: 84-481-1061-7
Depósito legal: M. 2.673-1999

Editora: Concepción Fernández
Cubierta: Juan García

1234567890 L.I.-99 0876543219

Impreso en México Printed in Mexico

Esta obra se terminó de
imprimir en Julio de 1999 en
Litográfica Ingramex
Centeno Núm. 162-1
Col. Granjas Esmeralda
Delegación Iztapalapa
09810 México, D.F.

Se tiraron 5,000 ejemplares

JOSEPH A. EDMINISTER es Profesor Emérito de Ingeniería Eléctrica en la Universidad de Akron, en Akron, Ohio, donde también estuvo de *Vicerrector y Rector en Funciones de Ingeniería*. Fue miembro de la Universidad desde 1957 hasta su retiro en 1983. En 1984 fue miembro del equipo del Congresista Dennis Eckart (D-11-OH) en un Congreso de Miembros de la IEEE. Estuvo en la Universidad de Cornell como abogado de patente y más tarde como Director de Relaciones Corporativas de la Escuela de Ingeniería, hasta su retiro en 1995. Recibió su B.S.E.E. en 1957 y su M.S.E. en 1960 en la Universidad de Akron. En 1974 recibe también su J.D. en Akron. El profesor Edminster está colegiado como ingeniero profesional en Ohio, abogado en Ohio y abogado de patentes registrado. Es autor de *Teoría y Problemas de Electromagnetismo de la Serie SCHAUM*.

MAHMOOD NAHVI es profesor de Ingeniería Eléctrica en la Universidad Politécnica Estatal de San Luis Obispo, California. Obtuvo sus B.Sc., M.Sc. y Ph.D. en Ingeniería Eléctrica, llevando más de treinta años enseñando e investigando en este campo. Sus áreas de especial interés, y donde es experto, son teoría de circuitos, teoría de control, ingeniería de comunicaciones, procesamiento de señales, redes neuronales, control adoptivo y aprendizaje en sistemas sintéticos y en tiempo real, comunicación y control en el sistema nervioso central y educación en ingeniería. En este área ha desarrollado modelos de ordenador para circuitos eléctricos, señales y sistemas que mejoran la enseñanza y aprendizaje de ingeniería eléctrica.

Contenido

Prefacio	xiii
----------------	------

X 1. Introducción	1
1.1. Magnitudes eléctricas y unidades del S.I.	1
1.2. Fuerza, trabajo y potencia	2
1.3. Carga y corriente eléctrica	3
1.4. Potencial eléctrico	4
1.5. Energía y potencia eléctricas	4
1.6. Funciones constantes y variables	5
Problemas resueltos	5
Problemas supplementarios	7
X 2. Conceptos de circuitos	9
2.1. Elementos activos y pasivos	9
2.2. Convenios de signos	10
2.3. Relaciones entre la tensión y la intensidad de corriente	11
2.4. Resistencia	13
2.5. Inductancia	13
2.6. Capacitancia	15
2.7. Esquemas de circuitos	16
Problemas resueltos	17
Problemas supplementarios	23
X 3. Leyes de los circuitos	27
3.1. Introducción	27
3.2. Ley de Kirchhoff para las tensiones	27
3.3. Ley de Kirchhoff para las intensidades de corriente	28
3.4. Elementos en serie	28
3.5. Elementos en paralelo	30
3.6. División de tensión	31
Problemas resueltos	33
Problemas supplementarios	37
X 4. Métodos de análisis	41
4.1. Método de las corrientes de rama	41
4.2. Método de las corrientes de malla	42
4.3. Matrices y determinantes	43

4.4.	Métodos de las tensiones en los nudos	45
4.5.	Resistencia de entrada	46
4.6.	Resistencia de transferencia	47
4.7.	Simplificación de circuitos	48
4.8.	Superposición	49
4.9.	Teoremas de Thévenin y Norton	51
4.10.	Teorema de transferencia de máxima potencia	53
	Problemas resueltos	54
	Problemas suplementarios	65
5.	Amplificadores y circuitos con amplificadores operacionales	71
5.1.	Modelo de un amplificador	71
5.2.	Realimentación en circuitos amplificadores	73
5.3.	Amplificadores operacionales	74
5.4.	Análisis de circuitos con amp. op. ideales	78
5.5.	Circuito inversor	79
5.6.	Circuito sumador	80
5.7.	Circuito no-inversor	81
5.8.	Seguidor de tensión	83
5.9.	Amplificadores sustractor y diferenciador	84
5.10.	Circuitos con varios amp. op.	85
5.11.	Circuitos integrador y derivador	87
5.12.	Computadores analógicos	90
5.13.	Filtro pasa-bajos	92
5.14.	Comparador	93
	Problemas resueltos	94
	Problemas suplementarios	113
6.	Señales y formas de onda	117
6.1.	Introducción	117
6.2.	Funciones periódicas	117
6.3.	Funciones sinusoidales	119
6.4.	Desfases temporal y angular	119
6.5.	Combinación de funciones periódicas	122
6.6.	Valores medio y eficaz	124
6.7.	Funciones no periódicas	126
6.8.	La función escalón unidad	127
6.9.	La función impulso unidad	128
6.10.	La función exponencial	131
6.11.	Sinusoidales amortiguadas	133
6.12.	Señales aleatorias	134
	Problemas resueltos	136
	Problemas suplementarios	145
7.	Circuitos de primer orden	149
7.1.	Introducción	149

7.2.	Descarga de un condensador en una resistencia	149
7.3.	Aplicación de una tensión de CC a un condensador	151
7.4.	Círculo RL sin fuente	153
7.5.	Aplicación de una tensión de CC a una bobina	155
7.6.	Repaso de la función exponencial	156
7.7.	Circuitos complejos de primer orden con RL y RC	157
7.8.	Estado estacionario con CC de bobinas y condensadores	159
7.9.	Transitorios después de la conexión	161
7.10.	Respuesta de circuitos de primer orden a un pulso	162
7.11.	Respuestas de circuitos RL y RC a un impulso	165
7.12.	Resumen de las respuestas a escalón y a impulso de circuitos RL y RC ..	166
7.13.	Respuesta de circuitos RL y RC a excitaciones exponenciales súbitas ..	166
7.14.	Respuesta de circuitos RL y RC a excitación sinusoidal súbita	168
7.15.	Resumen de la respuesta forzada de los circuitos de primer orden	169
	Problemas resueltos	170
	Problemas suplementarios	183
8.	Circuitos de orden superior y frecuencia compleja	187
8.1.	Introducción	187
8.2.	Círculo serie RLC	187
8.3.	Círculo paralelo RLC	191
8.4.	Círculo con dos mallas	194
8.5.	Frecuencia compleja	195
8.6.	Impedancia generalizada (R , L , C) en el dominio s	196
8.7.	Función de transferencia y diagramas de polos y ceros	198
8.8.	La respuesta forzada	200
8.9.	La respuesta natural	202
8.10.	Multiplicación de impedancias y de frecuencia	203
	Problemas resueltos	204
	Problemas suplementarios	215
9.	Análisis de circuitos sinusoidales en estado estacionario	223
9.1.	Introducción	223
9.2.	Respuesta de los elementos	223
9.3.	Fasores	226
9.4.	Impedancia y admitancia	229
9.5.	División de la tensión y la corriente en el dominio de la frecuencia ..	232
9.6.	El método de las corrientes de malla	233
9.7.	El método de las tensiones en los nudos	235
9.8.	Teoremas de Thévenin y Norton	236
	Problemas resueltos	237
	Problemas suplementarios	252
X 10.	Potencia en CA	261
10.1.	Potencia en el dominio del tiempo	261
10.2.	Potencia en estado estacionario sinusoidal	263

10.3.	Potencia media o activa.....	265
10.4.	Potencia reactiva.....	266
10.5.	Resumen de la potencia en CA para R , L y C	266
10.6.	Intercambio de energía entre una bobina y un condensador.....	270
10.7.	Potencia compleja, potencia aparente y triángulo de potencias.....	270
10.8.	Circuitos conectados en paralelo.....	275
10.9.	Mejora del factor de potencia.....	276
10.10.	Potencia máxima transferida.....	278
	Problemas resueltos.....	279
	Problemas suplementarios.....	291
X11.	Circuitos polifásicos.....	295
11.1.	Introducción.....	295
11.2.	Sistemas bifásicos.....	295
11.3.	Sistemas trifásicos.....	297
11.4.	Sistemas en triángulo y en estrella.....	298
11.5.	Fasores de las tensiones.....	299
11.6.	Cargas equilibradas en triángulo.....	300
11.7.	Cargas equilibradas en estrella a cuatro hilos.....	301
11.8.	Equivalencia estrella-triángulo.....	302
11.9.	Círculo monofásico equivalente de cargas trifásicas equilibradas.....	303
11.10.	Cargas desequilibradas en triángulo.....	304
11.11.	Cargas desequilibradas en estrella.....	305
11.12.	Potencia trifásica.....	308
11.13.	Medida de potencia y método de los dos vatímetros.....	308
	Problemas resueltos.....	310
	Problemas suplementarios.....	320
12.	Respuesta en frecuencia, filtros y resonancia.....	325
12.1.	Respuesta en frecuencia.....	325
12.2.	Circuitos pasa-altos y pasa-bajos.....	326
12.3.	Frecuencias de media potencia.....	331
12.4.	Circuitos generalizados con dos puertas y dos impedancias.....	331
12.5.	Respuesta en frecuencia y funciones de transferencia.....	332
12.6.	Respuesta en frecuencia según la localización de polos y ceros.....	334
12.7.	Filtros ideales y reales.....	335
12.8.	Filtros activos y pasivos.....	336
12.9.	Filtros pasa-banda y resonancia.....	337
12.10.	Frecuencia natural y factor de amortiguamiento.....	339
12.11.	Círculo serie RLC : resonancia serie.....	340
12.12.	Factor de calidad.....	341
12.13.	Círculo paralelo RLC : resonancia paralelo.....	342
12.14.	Círculo paralelo real LC	343
12.15.	Conversiones serie-paralelo.....	344
12.16.	Diagramas de localización.....	345
	Problemas resueltos.....	348
	Problemas suplementarios.....	362

13. Cuadripolos.....	369
13.1. Terminales y puertas.....	369
13.2. Parámetros Z	369
13.3. Equivalente en T de circuitos recíporcos.....	371
13.4. Parámetros Y	372
13.5. Equivalente en π de circuitos recíprocos.....	373
13.6. Aplicación de las características del cuadripolo.....	374
13.7. Conversión entre los parámetros Z e Y	375
13.8. Parámetros h	376
13.9. Parámetros g	376
13.10. Parámetros de transición.....	377
13.11. Interconexión de cuadripolos.....	378
13.12. Elección del tipo de parámetros.....	379
13.13. Resumen de relaciones entre los parámetros.....	380
Problemas resueltos.....	381
Problemas suplementarios.....	393
14. Inductancia mutua y transformadores.....	397
14.1. Inductancia.....	397
14.2. Coeficiente de acoplamiento.....	399
14.3. Análisis de bobinas acopladas.....	400
14.4. La regla del punto.....	402
14.5. Energía en dos bobinas acopladas.....	403
14.6. Circuitos conductivos equivalentes acoplados.....	404
14.7. Transformador lineal.....	404
14.8. Transformador ideal.....	407
14.9. Autotransformador.....	409
14.10. Impedancia reflejada.....	410
Problemas resueltos.....	412
Problemas suplementarios.....	425
15. Análisis de circuitos usando Spice y PSpice	433
15.1. Spice y PSpice	433
15.2. Descripción de un circuito.....	433
15.3. Partes de un fichero fuente de Spice.....	434
15.4. Sentencias de datos y análisis en CC.....	435
15.5. Sentencias de control y de salida en análisis de CC.....	440
15.6. Equivalente Thévenin.....	443
15.7. Circuitos amplificadores operacionales.....	444
15.8. Estado estacionario en C. A. y respuesta en frecuencia.....	447
15.9. Inductancia mutua y transformadores.....	449
15.10. Herramientas de modelización para la variación de parámetros.....	450
15.11. Respuesta en el tiempo y análisis transitorio.....	453
15.12. Definición de otros tipos de fuentes.....	453
15.13. Sumario.....	458
Problemas resueltos.....	460
Problemas suplementarios.....	475

16. Método de la transformada de Laplace.....	477
16.1. Introducción.....	477
16.2. Transformada de Laplace.....	477
16.3. Algunas transformadas de Laplace.....	478
16.4. Convergencia de la integral.....	481
16.5. Teoremas del valor inicial y final.....	482
16.6. Desarrollo en fracciones simples.....	483
16.7. Circuitos en el dominio s.....	485
Problemas resueltos.....	487
Problemas supplementarios.....	501
17. Análisis de ondas por el método de Fourier.....	507
17.1. Introducción.....	507
17.2. Series de Fourier trigonométricas.....	508
17.3. Series exponenciales de Fourier.....	510
17.4. Simetría de las formas de onda.....	512
17.5. Espectro de una onda.....	515
17.6. Síntesis de ondas.....	515
17.7. Potencia y valor eficaz.....	516
17.8. Aplicaciones en el análisis de circuitos.....	518
17.9. Transformada de Fourier de ondas no periódicas.....	521
17.10. Propiedades de la transformada de Fourier.....	524
17.11. Espectro continuo.....	525
Problemas resueltos.....	527
Problemas supplementarios.....	542
Apéndice A. Sistema de números complejos.....	553
Apéndice B. Matrices y determinantes.....	559
Índice.....	567

Prefacio

Este libro se ha diseñado para ser utilizado como libro de texto para un primer curso de análisis de circuitos, o también como un complemento de otros textos de base. Además podrá ser utilizado tanto por estudiantes de ingeniería eléctrica como por otros estudiantes de otras ramas de la ingeniería. Se hace hincapié en las leyes básicas, teoremas y técnicas de resolución de problemas, como es corriente en la mayoría de los cursos.

La tercera edición representa una revisión más profunda y una adecuada actualización del contenido. La materia está dividida en 17 capítulos, abarcando una serie de áreas de teoría y estudio. Los capítulos comienzan con el enunciado de definiciones, de principios y de teoremas, junto con ejemplos ilustrativos. A continuación se presentan una serie de problemas complementarios y de problemas resueltos. Los problemas tienen diferentes grados de dificultad. Algunos problemas se centran en temas concretos, que ayudan al estudiante a aplicar los principios básicos correctamente y con precisión. Los problemas complementarios son generalmente más numerosos y ofrecen al lector la oportunidad de practicar su habilidad en la resolución de problemas. Cada problema de éstos viene con su solución.

El libro comienza con definiciones fundamentales, elementos de circuitos, incluyendo fuentes dependientes, leyes y teoremas de circuitos y técnicas de análisis como tensiones en los nudos y corrientes de malla. Estos teoremas y métodos inicialmente aplicados a circuitos resistivos de corriente continua, y luego se extiende a circuitos RLC mediante el uso de la impedancia y de la frecuencia compleja. El Capítulo 5, sobre amplificadores y circuitos con amplificadores, es nuevo. Los ejemplos y problemas de amplificadores operacionales han sido cuidadosamente seleccionados para ilustrar sencillos pero prácticos casos que son de interés e importancia para el estudio de otros cursos. El tema de formas de onda y señales se trata en un nuevo capítulo para incrementar el conocimiento de modelos de señales utilizados por los estudiantes.

El comportamiento de los circuitos en estado estacionario y respuesta transitoria a entradas tipo escalón, pulso, impulso y exponencial se tratan para circuitos de primer orden en el Capítulo 7 y luego se extiende a circuitos de orden superior en el Capítulo 8, donde se introduce el concepto de frecuencia compleja. Se tratan también el análisis fasorial, el estado estacionario sinusoidal, la potencia, el factor de potencia y los circuitos polifásicos. Las funciones de red, la respuesta en frecuencia, filtros, resonancias en serie y en paralelo, redes de dos puertas (cuadripolos), inductancias mutuas y transformadores se tratan también en detalle. La aplicación de Spice y PSpice para el análisis de circuitos se introduce en el Capítulo 15. Las ecuaciones de los circuitos se resuelven empleando las clásicas ecuaciones diferenciales y la transformada de Laplace, que permiten una comparación de métodos de resolución muy instructiva. Las series de Fourier y las transformadas de Fourier para la resolución de circuitos se tratan en el Capítulo 17. Finalmente, se presentan dos apéndices muy útiles, como resumen de números complejos y matrices y determinantes.

Este libro está dedicado a nuestros alumnos, de quienes hemos aprendido a enseñar mejor. En gran medida han sido ellos los que han hecho posible nuestras satisfactorias y

recompensadas carreras docentes. Queremos expresar nuestro agradecimiento a McGraw-Hill y MathSoft y a John Carleo y David Leschinsky en particular, por su visión de publicar una versión electrónica de este libro con formato interactivo basado en el Mathcad®, que es el líder en software en técnicas de cálculo. Y, finalmente, queremos agradecer a nuestras esposas, Nina Edminster y Zahra Nahvi, por su apoyo continuo y para quienes todos estos esfuerzos se llevaron a cabo felizmente.

*Joseph A. Edminster
Mahmood Nahvi*

CAPÍTULO 1

Introducción

1.1. MAGNITUDES ELÉCTRICAS Y UNIDADES DEL S.I.

En este libro se utilizará el sistema internacional de unidades (S.I.). En la Tabla 1.1 se relacionan las cuatro magnitudes básicas y sus unidades en el S.I. Las otras tres unidades básicas que no se relacionan en la tabla son: temperatura en grados Kelvin (K), cantidad de sustancia en moles (mol) e intensidad luminosa en candelas (cd).

Tabla 1.1.

Magnitud	Símbolo	Unidad S.I.	Abreviatura
longitud	L, l	metro	m
masa	M, m	kilogramo	kg
tiempo	T, t	segundo	s
intensidad de corriente	I, i	amperio	A

Las otras unidades pueden obtenerse a partir de las siete unidades básicas. Las magnitudes eléctricas y sus símbolos usados normalmente en el análisis de los circuitos eléctricos se relacionan en la Tabla 1.2.

Tabla 1.2.

Magnitud	Símbolo	Unidad S.I.	Abreviatura
carga eléctrica	Q, q	culombio	C
potencial eléctrico	V, v	voltio	V
resistencia	R	ohmio	Ω
conductancia	G	siemens	S
inductancia	L	henrio	H
capacitancia (capacidad)	C	faradio	F
frecuencia	f	hertz	Hz
fuerza	F, f	newton	N
energía, trabajo	W, w	julio	J
potencia	P, p	vatio	W
flujo magnético	ϕ	weber	Wb
densidad de flujo magnético	B	tesla	T

2 CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Dos magnitudes suplementarias son el ángulo plano (también llamado desfase en circuitos eléctricos) y el ángulo sólido. Sus unidades en el SI son el radian (rad) y el estereoradián (sr).

Para el desfase en funciones sinusoidales se utiliza de forma generalizada los grados, o sea $\sin(\omega t + 30^\circ)$. Ya que ωt se expresa en radianes, éste es un caso de utilización de unidades mixtas.

Los múltiplos y submúltiplos decimales del SI deberán usarse siempre que sea posible. Los símbolos de la Tabla 1.3 son los prefijos de las unidades de las Tablas 1.1 y 1.2. Por ejemplo, mV se usa para milivoltios, 10^{-3} V, y MW para megavatios, 10^6 W.

Tabla 1.3.

Multiplo	Valor	Símbolo
pico	10^{-12}	p
nano	10^{-9}	n
micro	10^{-6}	μ
milli	10^{-3}	m
centi	10^{-2}	c
kilo	10^3	k
mega	10^6	M
giga	10^9	G
tera	10^{12}	T

1.2. FUERZA, TRABAJO Y POTENCIA

Las unidades siguientes se obtienen a partir de expresiones matemáticas que relacionan ciertas magnitudes. De la expresión «fuerza igual a masa por aceleración» se define el newton (N) como la fuerza que produce una aceleración de un metro por segundo cuadrado a una masa de un kilogramo. Así, $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$.

Se produce un trabajo cuando una fuerza provoca un desplazamiento. Un julio de trabajo equivale a un newton-metro: $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$. El trabajo y la energía tienen las mismas unidades.

La potencia es el trabajo realizado en la unidad de tiempo o también la variación de la energía por unidad de tiempo. La unidad de potencia es el vatio (W), que es igual a un julio por segundo (J/s).

EJEMPLO 1.1. Una masa de 10 Kg tiene un movimiento rectilíneo con aceleración constante de 2 m/s^2 . a) Calcular la fuerza que actúa sobre la masa. b) Si el cuerpo estaba en reposo para $t = 0$, en $x = 0$, calcular la posición, la energía cinética y la potencia para $t = 4 \text{ s}$.

a) $F = ma = (10 \text{ kg})(2,0 \text{ m/s}^2) = 20,0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 20,0 \text{ N}$

b) Para $t = 4 \text{ s}$ $x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(2,0 \text{ m/s}^2)(4 \text{ s})^2 = 16,0 \text{ m}$

$$EC = Fx = (20,0 \text{ N})(16,0 \text{ m}) = 3200 \text{ N} \cdot \text{m} = 3,2 \text{ kJ}$$

$$P = EC/t = 3,2 \text{ kJ}/4 \text{ s} = 0,8 \text{ kJ/s} = 0,8 \text{ kW}$$

1.3. CARGA Y CORRIENTE ELÉCTRICA

La unidad de la intensidad de la corriente eléctrica, el amperio (A), se define como la intensidad que atraviesa dos conductores paralelos de longitud infinita y sección nula, separados un metro, en el vacío y entre los que existe una fuerza de $2 \cdot 10^{-7}$ N/m. Sin embargo, un concepto más intuitivo es considerar la corriente eléctrica como cargas en movimiento y entonces un amperio es equivalente a un culombio de carga que pasa a través de una superficie en un segundo. Utilizando magnitudes variables con el tiempo se tiene $i(t) = dq/dt$ (C/s). La unidad de carga, el culombio (C), es equivalente a un amperio-segundo.

El movimiento de cargas puede ser positivo o negativo. Los iones positivos moviéndose hacia la izquierda, dentro de un líquido o un plasma, como se indica en la Fig. 1.1(a), producen una corriente de intensidad i hacia la izquierda. Si estos iones atraviesan una superficie S a un ritmo de un culombio por segundo, la intensidad es de un amperio. Los iones negativos moviéndose hacia la derecha, como se indica en la Fig. 1.1(b), producen también una corriente hacia la izquierda.

La corriente eléctrica en conductores metálicos es muy importante en el estudio de los circuitos. Ésta se debe a los electrones de la capa más externa de la estructura atómica de los mismos. En el cobre, por ejemplo, un solo electrón libre se encuentra en la capa más externa y puede moverse por la estructura cristalina de un átomo a otro libremente. A una determinada temperatura, el movimiento al azar de estos electrones es constante. Un modelo con una buena aproximación para la conducción en el cobre es suponer que hay $8,5 \cdot 10^{28}$ electrones libres por metro cúbico.

La carga del electrón es $-e = -1,602 \cdot 10^{-19}$ C, y por tanto una corriente de un amperio representa aproximadamente $6,24 \cdot 10^{18}$ electrones por segundo pasando por una sección determinada de un conductor.

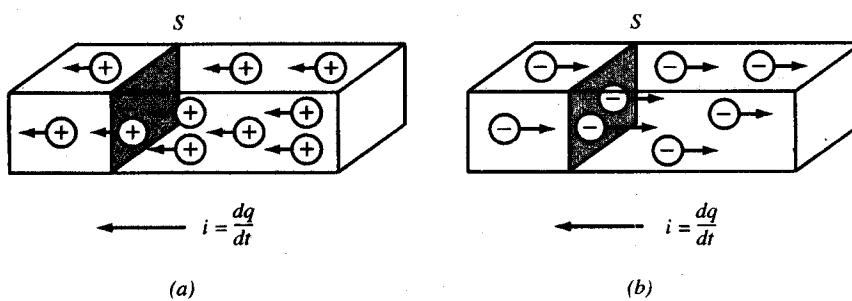


Figura 1.1.

EJEMPLO 1.2. Un conductor tiene una intensidad de corriente de 5 amperios. ¿Cuántos electrones pasarán por un determinado punto del conductor en un minuto?

$$5 \text{ A} = (5 \text{ C/s})(60 \text{ s/min}) = 300 \text{ C/min}$$

$$\frac{300 \text{ C/min}}{1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C/electrón}} = 1.87 \cdot 10^{21} \text{ electrones/min}$$

1.4. POTENCIAL ELÉCTRICO

Una carga eléctrica está sometida a una fuerza cuando se encuentra en un campo eléctrico y puede acelerarse si no está sujeta. Interesa aquí estudiar el trabajo realizado para mover la carga contra el campo, como se indica en la Figura 1.2(a). Si el trabajo necesario para mover una carga Q de *un culombio* es de *un julio* desde la posición 0 a la 1, entonces se dice que el punto 1 tiene un potencial de *un voltio* respecto del punto 0; $1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$. Este potencial eléctrico puede realizar trabajo, de igual manera que la masa de la Figura 1.2(b), que fue elevada contra la fuerza de gravedad g a una altura h , desde el suelo. La energía potencial mgh representa la capacidad de realizar trabajo cuando la masa m se deja libre. Entonces la masa caerá acelerándose y su energía potencial se convierte en energía cinética.

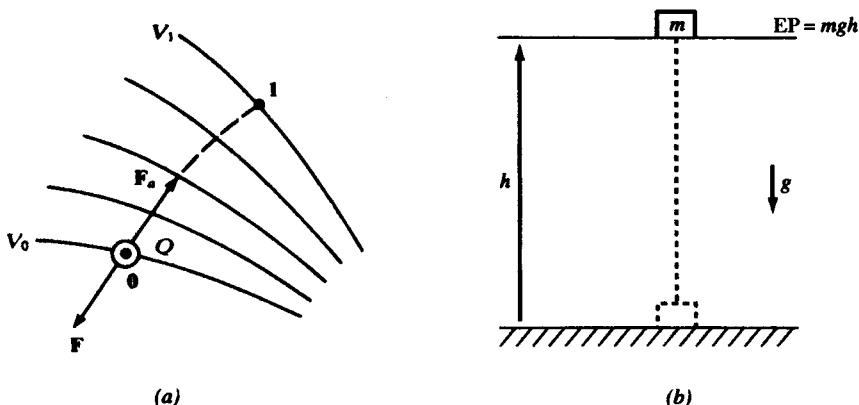


Figura 1.2.

EJEMPLO 1.3. En un circuito eléctrico se necesita una energía de $9,25 \mu\text{J}$ para transportar una carga de $0,5 \mu\text{C}$ desde un punto a a otro b . ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los dos puntos?

$$\text{Un voltio} = \text{un julio por culombio} \quad V = \frac{9,25 \cdot 10^{-6} \text{ J}}{0,5 \cdot 10^{-6} \text{ C}} = 18,5 \text{ V}$$

1.5. ENERGÍA Y POTENCIA ELÉCTRICAS

La energía eléctrica en julios se calculará en capítulos posteriores cuando se trate de condensadores e inductores (bobinas), los cuales acumulan energía en un campo eléctrico o magnético, respectivamente. El ritmo, en julios por segundo, con el que la energía se transfiere es la potencia expresada en vatios. Además, el producto de tensión por intensidad de corriente da la potencia eléctrica, $p = vi$; $1 \text{ W} = 1 \text{ V} \cdot 1 \text{ A}$. También, $\text{V} \cdot \text{A} = (\text{J/C}) \cdot (\text{C/s}) = \text{J/s} = \text{W}$. En un sentido más preciso, la potencia es la derivada de la energía con respecto al tiempo $p = dw/dt$, de tal forma que la potencia p es generalmente función del tiempo. En los siguientes capítulos se calculará la potencia media P_{med} y el valor cuadrático medio (RMS) para tensiones y corrientes sinusoidales.

EJEMPLO 1.4. Una resistencia tiene una diferencia de potencial de 50 V entre sus terminales y por ella pasa una carga de 120 C cada minuto por un determinado punto. Bajo estas condiciones, obtener la energía que se convierte en calor.

$$(120 \text{ C/min})/(60 \text{ s/min}) = 2 \text{ A} \quad P = (2 \text{ A})(50 \text{ V}) = 100 \text{ W}$$

Puesto que 1 W = 1 J/s, la potencia transformada en calor es cien julios por segundo.

1.6. FUNCIONES CONSTANTES Y VARIABLES

Para distinguir las magnitudes constantes de las magnitudes variables con el tiempo se utilizarán letras mayúsculas para las primeras y minúsculas para las segundas. Por ejemplo, una intensidad de corriente de diez amperios se escribirá $I = 10 \text{ A}$, mientras que una intensidad de corriente de diez amperios variable con el tiempo se escribirá $i = 10 f(t) \text{ A}$. Ejemplos de funciones típicas en el análisis de circuitos son la función senoidal $i = 10 \text{ sen } \omega t \text{ (A)}$ y la función exponencial $v = 15 e^{-at} \text{ (V)}$.

PROBLEMAS RESUELTOS

- 1.1.** Sobre un objeto que se mueve en la dirección del eje x actúa una fuerza dada por $F = 12/x^2$ (N). a) Calcular el trabajo realizado en el intervalo $1 \text{ m} \leq x \leq 3 \text{ m}$. b) ¿Cuál será la fuerza constante que realice el mismo trabajo en el mismo intervalo?

a)

$$dW = F dx \quad \text{así} \quad W = \int_1^3 \frac{12}{x^2} dx = 12 \left[\frac{-1}{x} \right]_1^3 = 8 \text{ J}$$

b)

$$8 \text{ J} = F_c(2 \text{ m}) \quad \text{o} \quad F_c = 4 \text{ N}$$

- 1.2.** La energía eléctrica transformada en calor en una resistencia es 7,56 kJ/min cuando pasan por ella 270 C/min. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los extremos de la resistencia?

De $P = VI$,

$$V = \frac{P}{I} = \frac{7,56 \cdot 10^3 \text{ J/min}}{270 \text{ C/min}} = 28 \text{ J/C} = 28 \text{ V}$$

- 1.3.** Un determinado elemento de un circuito tiene una corriente dada por $i = 2,5 \text{ sen } \omega t$ (mA), donde ω es la frecuencia angular (o pulsación) en rad/s, y una diferencia de potencial entre sus extremos de $v = 45 \text{ sen } \omega t$. Calcular la potencia media P_{med} y la energía total W_T disipada en un período de la onda senoidal.

6 CIRCUITOS ELÉCTRICOS

La energía es la integral con respecto al tiempo de la potencia instantánea:

$$W_T = \int_0^{2\pi/\omega} vi \, dt = 112,5 \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2 \omega t \, dt = \frac{112,5 \pi}{\omega} (\text{mJ})$$

La potencia media es entonces

$$P_{\text{med}} = \frac{W_T}{2\pi/\omega} = 56,25 \text{ mW}$$

Observar que la P_{med} es independiente de ω .

- 1.4.** La unidad de energía utilizada por las compañías suministradoras de electricidad es el kilovatio-hora (kWh). a) ¿Cuántos julios son 1 kWh? b) Un aparato de televisión de potencia 75 W está funcionando desde las 7:00 p.m. a las 11:30 p.m. Calcular la energía total consumida en kWh y en megajulios.

a) $1 \text{ kWh} = (1000 \text{ J/s})(3600 \text{ s/h}) = 3,6 \text{ MJ}$

b) $(75 \text{ W})(4,5 \text{ h}) = 337,5 \text{ Wh} = 0,3375 \text{ kWh}$
 $(0,3375 \text{ kWh})(3,6 \text{ MJ/kWh}) = 1,215 \text{ MJ}$

- 1.5.** Un hilo de cobre de calibre AWG # 12 ($3,3 \text{ mm}^2$), tamaño usado normalmente en instalaciones domésticas, contiene aproximadamente $2,77 \cdot 10^{23}$ electrones libres por cada metro de longitud y suponiendo un electrón libre por átomo. ¿Qué porcentaje de estos electrones pasará por una determinada sección si el conductor tiene una intensidad de corriente de 25 A?

$$\frac{25 \text{ C/s}}{1602 \cdot 10^{-19} \text{ C/electrón}} = 1,56 \cdot 10^{20} \text{ electrón/s}$$

$$(1,56 \cdot 10^{20} \text{ electrones/s})(60 \text{ s/min}) = 9,36 \cdot 10^{21} \text{ electrones/min}$$

$$\frac{9,36 \cdot 10^{21}}{2,77 \cdot 10^{23}} (100) = 3,38\%$$

- 1.6.** ¿Cuántos electrones pasan por un determinado punto de una lámpara de 100 vatios, en una hora, si la tensión aplicada es 120 V?

$$100 \text{ W} = (120 \text{ V}) \cdot I(\text{A}) \quad I = 5/6 \text{ A}$$

$$\frac{(5/6 \text{ C/s})(3600 \text{ s/h})}{1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C/electrón}} = 1,87 \cdot 10^{22} \text{ electrones por hora}$$

- 1.7.** Una típica batería de coche de 12 V está caracterizada por sus *amperios-hora*. Una batería de 70 Ah, por ejemplo, tiene una vida de 20 h si se descarga con una corriente de 3,5 A. a) Suponiendo que la tensión permanece constante, obtener la energía y potencia disipadas en una descarga completa de la batería citada. b) Repetir lo mismo para una descarga a 7 A.

a) $(3,5 \text{ A})(12 \text{ V}) = 42 \text{ W} (\text{o J/s})$
 $(42 \text{ J/s})(3600 \text{ s/h})(20 \text{ h}) = 3,02 \text{ MJ}$

$$b) (7 \text{ A})(12 \text{ V}) = 84 \text{ W}$$

$$(84 \text{ J/s})(3600 \text{ s/h})(10 \text{ h}) = 3,02 \text{ MJ}$$

Los amperios-hora es la unidad de medida de la energía acumulada en una batería; por tanto la energía transferida en una descarga total es la misma tanto si se realiza en 10 horas como en 20 horas. Como la potencia es la energía por unidad de tiempo, resulta que la potencia en 10 horas es el doble que la potencia en 20 horas.

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

- 1.8.** Calcular el trabajo y la potencia realizados por una fuerza de $7,5 \cdot 10^{-4} \text{ N}$ que actúa sobre una distancia de dos metros en un tiempo de catorce segundos.

Solución: 1,5 mJ, 0,107 mW.

- 1.9.** Calcular el trabajo y la potencia necesarios para mover una masa de 5 kg sobre un plano inclinado 30° y sin rozamiento, una distancia de 2 m durante 3,5 s.

Solución: 49 J, 14 W.

- 1.10.** Se realiza un trabajo de 136 julios para mover $8,5 \cdot 10^{18}$ electrones entre dos puntos de un circuito eléctrico. ¿Cuál será la diferencia de potencial entre los dos puntos?

Solución: 100 V.

- 1.11.** Se tiene un pulso eléctrico de 305 V, 0,15 A y duración 500 μs . ¿Cuál será la potencia y la energía asociadas al mismo?

Solución: 45,75 W, 22,9 mJ.

- 1.12.** Una unidad de potencia utilizada para los motores eléctricos es el *caballo de vapor* (hp), que es igual a 746 watos. ¿Cuánta energía entrega un motor de 5 hp funcionando durante dos horas? Expresar la respuesta en MJ.

Solución: 26,9 MJ.

- 1.13.** Para $t \geq 0$, $q = (4 \cdot 10^{-4})(1 - e^{-250t})$ (C). Obtener la intensidad para $t = 3 \text{ ms}$.

Solución: 47,2 mA.

- 1.14.** Un cierto elemento de un circuito tiene una corriente y una tensión dadas por

$$i = 10e^{-5000t} \text{ (A)} \quad v = 50(1 - e^{-5000t}) \text{ (V)}$$

Calcular la energía total transferida para $t \geq 0$.

Solución: 50 mJ.

- 1.15.** La capacidad (*capacitancia*) de un elemento de un circuito se define por Q/V , donde Q es la carga acumulada en el elemento y V la diferencia de potencial entre los extremos del mismo. En el SI la unidad de capacidad es el faradio (F). Expresar el faradio en función de las unidades básicas.

Solución: $1 \text{ F} = 1 \text{ A}^2 \cdot \text{s}^4 / \text{kg} \cdot \text{m}^2$.

CAPÍTULO 2

Conceptos de circuitos

2.1. ELEMENTOS ACTIVOS Y PASIVOS

Un equipo eléctrico se representa mediante un circuito o esquema constituido por elementos de dos terminales conectados en serie y en paralelo. El análisis del circuito permite conocer el comportamiento del equipo eléctrico. Un elemento de dos terminales se representa por un rectángulo, como se indica en la Figura 2.1, con dos conductores de resistencia eléctrica nula y terminados en dos extremos de conexión A y B. Los elementos activos son fuentes de tensión o de intensidad capaces de proporcionar energía a una red. Las resistencias (resistores), las bobinas (inductores) y los condensadores (capacitores) son elementos pasivos y toman energía de las fuentes para transformarla en otro tipo de energía o acumularla en forma de campo magnético o eléctrico.



Figura 2.1.

En la Figura 2.2 se han representado siete elementos básicos de circuitos. Los elementos (a) y (b) son fuentes de tensión y los elementos (c) y (d) son fuentes de intensidad. Una fuente de tensión que no se ve afectada por cambios en el circuito al cual está conectada se dice que es una fuente independiente, representándose por un círculo como en la Figura 2.2(a). Una fuente de tensión dependiente es aquella en la que cambian sus características según sean las condiciones de determinados circuitos, y se representa mediante un rombo como en la Figura 2.2(b). Las fuentes de intensidad también pueden ser independientes o dependientes y se representan como se indica en la Figura 2.2(c) y (d), respectivamente. Los tres elementos pasivos de los circuitos se representan como se indica en la Figura 2.2(e), (f) y (g).

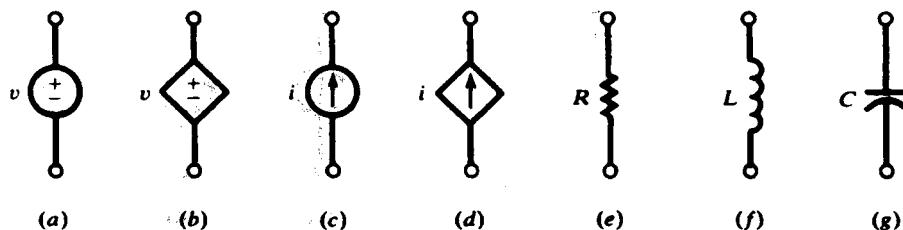


Figura 2.2.

Los esquemas de circuitos utilizados aquí se denominan de *parámetros concentrados*, puesto que con un único parámetro localizado se representa una distribución de resistencia, inductancia o capacidad. Por ejemplo, una bobina consiste en una serie de espiras de hilo conductor recubierto de aislante, que tiene una resistencia eléctrica a través de toda la longitud del hilo. Sin embargo, en la Figura 2.3(b) o (c) se representa una única resistencia concentrada para una resistencia que está distribuida a lo largo de todo el hilo conductor. Asimismo, la inductancia se representa de forma concentrada, ya sea en serie con la resistencia o en paralelo, como se indica en (b) o en (c).

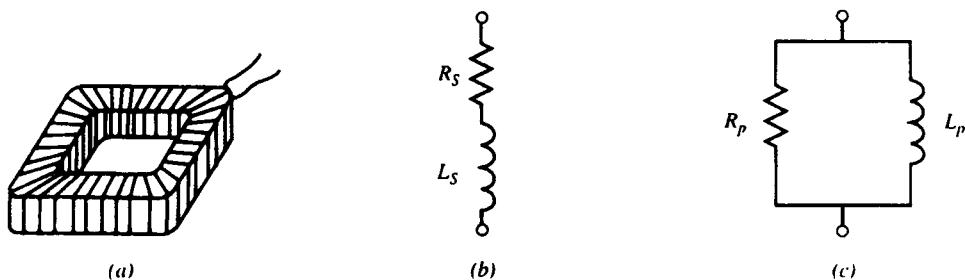


Figura 2.3.

En general, una bobina puede representarse por cualquiera de las dos conexiones, en paralelo o en serie, de sus elementos constitutivos. Es la frecuencia de la tensión aplicada la que determinará cuál de las dos conexiones es la más apropiada.

2.2. CONVENIOS DE SIGNOS

Para completar las especificaciones de una fuente de tensión es necesario asignar una polaridad a sus extremos y una función para la tensión entre los mismos. La polaridad se señala con + y -, dibujados en las proximidades de los extremos del símbolo que representa la fuente de tensión. Si, por ejemplo, es $v = 10 \sin \omega t$ en la Figura 2.4(a), el terminal A es positivo respecto de B para $0 > \omega t > \pi$, y B es positivo respecto de A para $\pi > \omega t > 2\pi$ para el primer ciclo de la función seno.

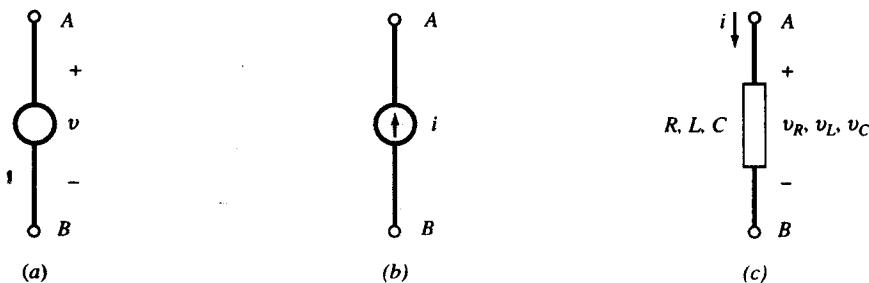


Figura 2.4.

Análogamente, la fuente de intensidad debe especificarse con una dirección y una función para la corriente que la atraviesa, como se indica en la Figura 2.4(b). Para los elementos pasivos *R*, *L* y *C* de un circuito, como se indica en la Figura 2.4(c), el terminal por donde entra la corriente es el positivo y por donde sale es el negativo.

Para estudiar el signo de la potencia se utiliza un circuito de corriente continua como el de la Figura 2.5(a), en el que hay dos fuentes de tensión constantes $V_A = 20\text{ V}$ y $V_B = 5\text{ V}$ y una resistencia de 5 ohmios. La intensidad resultante es de 3 amperios en el sentido de las agujas del reloj. Se establece que la potencia es absorbida por un elemento cuando la corriente entra por el terminal positivo del mismo. Véase Figura 2.5(b). De acuerdo con esto, la potencia, calculada por VI o por I^2R , es absorbida por la resistencia y por la fuente V_B , y da valores, respectivamente, de 45 W y 15 W. Puesto que la corriente entra por el terminal negativo en la fuente V_A , ésta es la fuente de potencia del circuito. La potencia $P = VI = 60\text{ W}$ confirma que la potencia absorbida por la resistencia y la fuente V_B está suministrada por la fuente V_A .

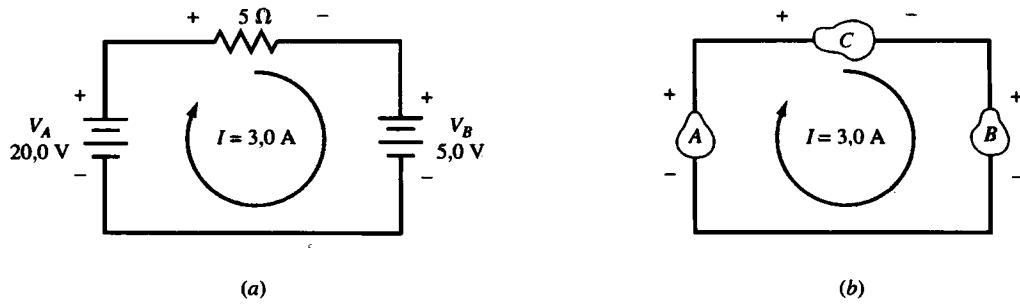


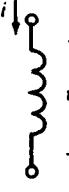
Figura 2.5.

2.3. RELACIONES ENTRE LA TENSIÓN Y LA INTENSIDAD DE CORRIENTE

Los elementos pasivos, resistencia *R*, bobina *L* y condensador *C*, de los circuitos se definen a partir de la relación concreta entre la tensión y la intensidad en cada uno de ellos. Por ejemplo, si la tensión *v* y la intensidad de corriente *i* para un elemento simple están relacionadas por una constante, se dice que el elemento es una resistencia, siendo *R* la

constante de proporcionalidad y verificándose que $v = Ri$. De forma análoga, si la tensión es la derivada con respecto al tiempo de la intensidad, entonces el elemento es una bobina, siendo L la constante de proporcionalidad y verificándose que $v = L di/dt$. Finalmente, si la intensidad a través de un elemento es la derivada con respecto al tiempo de la tensión, entonces el elemento es un condensador, siendo C la constante de proporcionalidad y verificándose que $i = C dv/dt$. En la Tabla 2.1 se resumen todas estas relaciones para los tres elementos pasivos de los circuitos. Obsérvense las direcciones de la intensidad en relación con las polaridades de las tensiones.

Tabla 2.1.

ELEMENTO	TIPO DE PASO	RELACIONES	TIPO DE CARGA	TIPO DE ALIMENTACIÓN
 Resistencia (Resistor)	ohmios (Ω)	$v = Ri$ (Ley de Ohm)	$i = \frac{v}{R}$	$p = vi = i^2 R$
 Inductancia (Inductor)	henrios (H)	$v = L \frac{di}{dt}$	$i = \frac{1}{L} \int v dt + k_1$	$p = vi = Li \frac{di}{dt}$
 Condensador (Capacitor)	faradios (F)	$v = \frac{1}{C} \int i dt + k_2$	$i = C \frac{dv}{dt}$	$p = vi = Cv \frac{dv}{dt}$

2.4. RESISTENCIA

Todos los dispositivos que consumen energía deben tener una resistencia (también llamada *resistor*) en el circuito que lo represente. Las bobinas (también llamadas *inductores*) y los condensadores (también llamados *capacitores*) pueden acumular energía, pero durante un tiempo esa energía retorna a la fuente y durante otro tiempo permanece en el circuito. La potencia en una resistencia viene dada por $p = vi = i^2R = v^2/R$, y es siempre positiva, como se demuestra en el Ejemplo 2.1, que se verá después. La energía viene dada por la integral de la potencia instantánea

$$w = \int_{t_1}^{t_2} p \, dt = R \int_{t_1}^{t_2} i^2 \, dt = \frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} v^2 \, dt$$

EJEMPLO 2.1. Una resistencia de 4Ω está recorrida por una corriente de $i = 2,5 \operatorname{sen} \omega t$ (A). Calcular la tensión, la potencia y la energía en un ciclo. $\omega = 500 \pi$ rad/s.

$$v = Ri = 10 \operatorname{sen} \omega t \text{ (V)}$$

$$p = vi = i^2R = 25 \operatorname{sen}^2 \omega t \text{ (W)}$$

$$w = \int_0^T p \, dt = 25 \left[\frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\omega t}{4\omega} \right] \text{ (J)}$$

Las gráficas de i , p y w se indican en la Figura 2.6, y en ellas se observa que la potencia es siempre positiva y que la energía es creciente en función del tiempo. La energía es absorbida por la resistencia.

2.5. INDUCTANCIA

El elemento del circuito que acumula energía en forma de campo magnético es el inductor o bobina (también llamado *inductancia*). Con una corriente variable con el tiempo, la energía se acumula durante una parte del ciclo en el elemento y durante la otra parte del ciclo se devuelve a la fuente. Cuando el inductor se desconecta de la fuente, el campo magnético desaparece, y, por tanto, no hay energía acumulada en el elemento. Las bobinas que se encuentran en los motores eléctricos, en los transformadores y en dispositivos similares son inductancias y, por tanto, deben tenerse en cuenta en la representación del circuito correspondiente. La configuración de dos hilos conductores en paralelo presentan efecto de inductancia, que debe tenerse en cuenta cuando la corriente eléctrica es variable. Las expresiones de la potencia y la energía son las siguientes:

$$p = vi = L \frac{di}{dt} i = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} Li^2 \right]$$

$$w_L = \int_{t_1}^{t_2} p \, dt = \int_{t_1}^{t_2} Li \, dt = \frac{1}{2} L[i_2^2 - i_1^2]$$

La energía acumulada en el campo magnético de una inductancia es $w_L = \frac{1}{2} Li^2$.

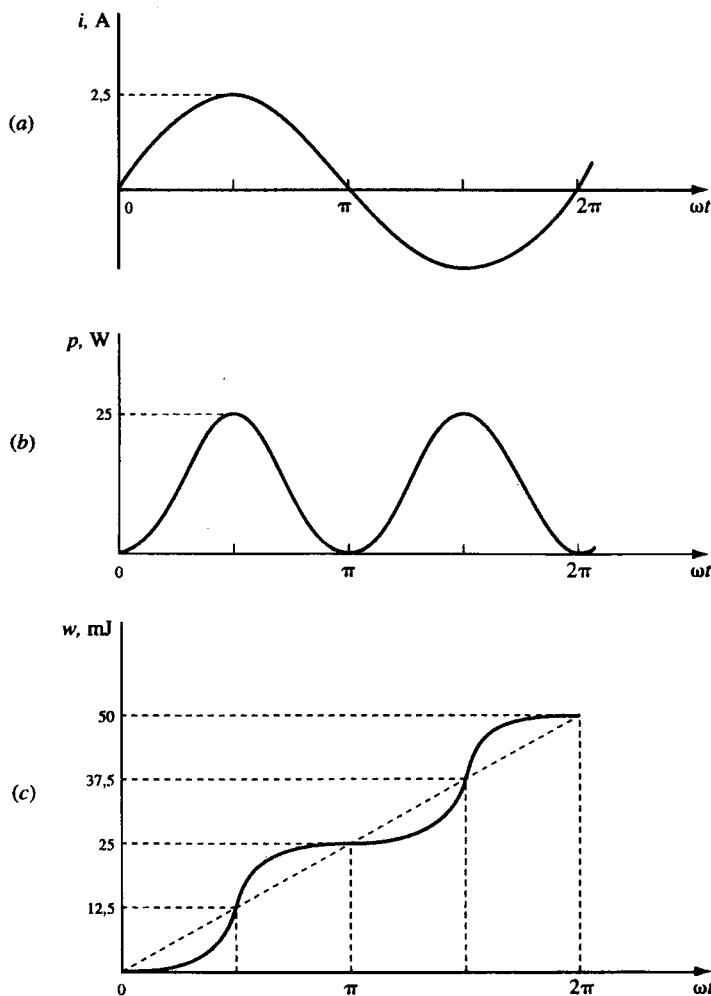


Figura 2.6.

EJEMPLO 2.2. Una inductancia de 30 mH está recorrida por una corriente $i = 10 \operatorname{sen} 50t$ (A) en el intervalo $0 > t > \pi/50$ segundos. Calcular la tensión, la potencia y la energía en la inductancia.

$$v = L \frac{di}{dt} = 15 \cos 50t \text{ (V)}$$

$$p = vi = 75 \operatorname{sen} 100t \text{ (W)}$$

$$w_L = \int_0^t p dt = 0,75(1 - \cos 100t) \text{ (J)}$$

Como se ve en la Figura 2.7, la energía es cero para $t = 0$ y para $t = \pi/50$. Por tanto, la energía fue primero acumulada en la inductancia y luego devuelta a la fuente.

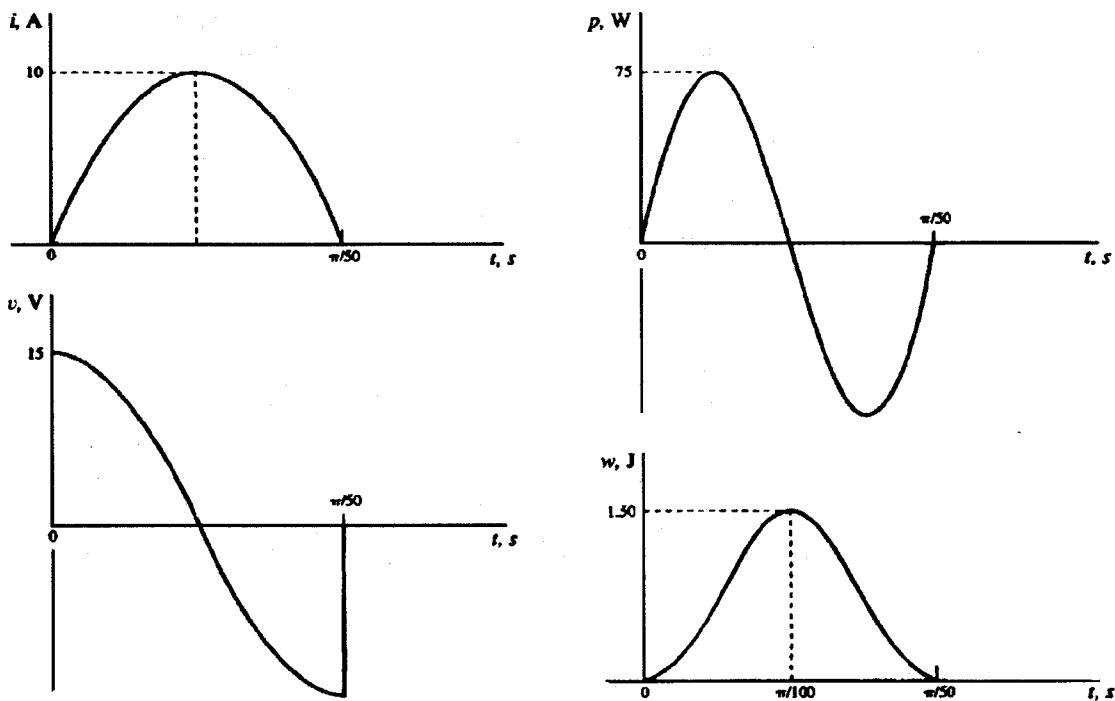


Figura 2.7.

2.6. CAPACITANCIA

El elemento de un circuito que acumula energía en forma de campo eléctrico es un condensador (también llamado *capacitancia* o *capacitor*). Cuando la tensión varía a lo largo de un ciclo, la energía puede acumularse durante un tiempo y ser devuelta a la fuente a continuación. Mientras que en una inductancia no puede mantenerse la energía cuando se desconecta la fuente, porque el campo magnético desaparece, en un condensador la carga eléctrica permanece y en consecuencia el campo eléctrico, aun después de desconectar la fuente. Esta condición de carga del condensador permanece hasta que se provoque una descarga, produciéndose la disipación de energía correspondiente. La carga, $q = Cv$, de un condensador provoca un campo eléctrico en el dieléctrico, el cual acumula la energía correspondiente. En un condensador plano hay exceso de carga en una placa y déficit en la otra. Cuando el condensador se descarga se produce el equilibrio de cargas en las placas. Las ecuaciones para la potencia y la energía son las siguientes:

$$p = vi = Cv \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} Cv^2 \right]$$

$$w_C = \int_{t_1}^{t_2} p dt = \int_{t_1}^{t_2} Cv dv = \frac{1}{2} C [v_2^2 - v_1^2]$$

La energía acumulada en el campo eléctrico de un condensador es $w_C = (\frac{1}{2})Cv^2$.

EJEMPLO 2.3. En el intervalo $0 > t > 5\pi$ ms, un condensador de $20 \mu\text{F}$ tiene una tensión de $v = 50 \sin 200t$ (voltios). Calcular la carga, la potencia y la energía. Dibujar w_C tomando $w = 0$ para $t = 0$.

$$q = Cv = 1000 \sin 200t (\mu\text{C})$$

$$i = C \frac{dv}{dt} = 0,20 \cos 200t (\text{A})$$

$$p = vi = 5 \sin 400t (\text{W})$$

$$w_C = \int_{t_1}^{t_2} p dt = 12,5[1 - \cos 400t] (\text{mJ})$$

En el intervalo $0 > t > 2,5\pi$ ms la tensión y la carga aumentan desde cero hasta 50 V y $1000 \mu\text{F}$, respectivamente. En la Figura 2.8 se muestra cómo la energía se incrementa hasta 25 mJ , para luego descender hasta cero por haber sido devuelta la misma a la fuente.

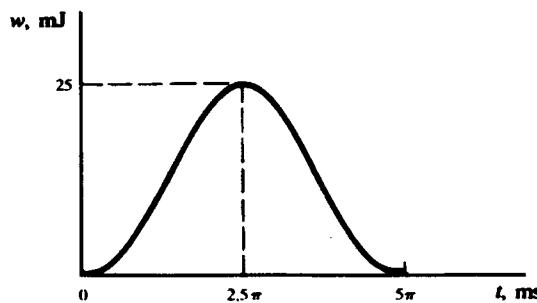
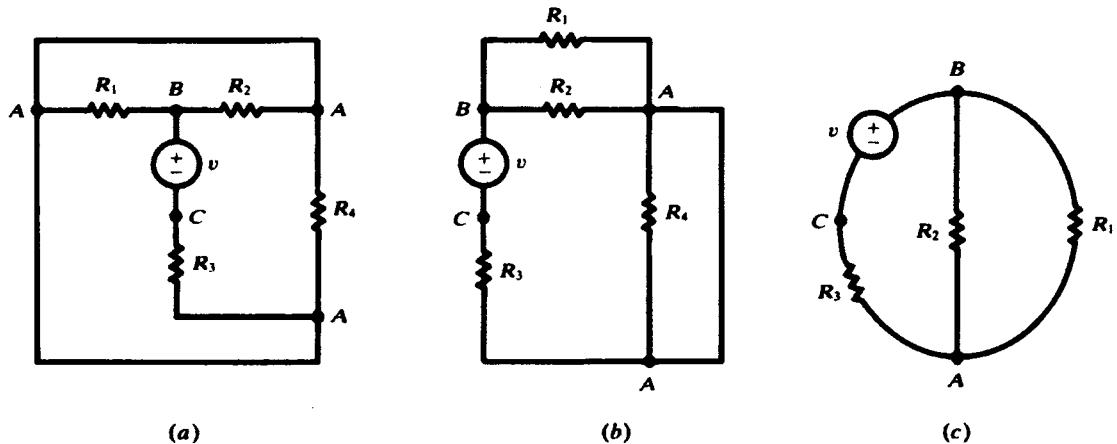


Figura 2.8.

2.7. ESQUEMAS DE CIRCUITOS

El esquema de un circuito puede representarse de múltiples formas, que aun pareciendo diferentes son en realidad idénticas. El esquema presentado inicialmente en un determinado problema puede no ser el más adecuado para sugerir el mejor método de solución del circuito. Por tanto, debe estudiarse en primer lugar el esquema y volverlo a representar, si es necesario, para ver más claramente las interconexiones de los elementos.

Un caso extremo es el que se muestra en la Figura 2.9, donde los tres circuitos son idénticos. En la Figura 2.9(a) las tres uniones denominadas con A se representan como dos uniones en (b). Sin embargo, la resistencia R_4 está en paralelo con un cortocircuito y puede eliminarse a efectos de análisis del circuito. Entonces, en la Figura 2.9(c) la unión A se representa como conexión de tres ramas.



PICORNELAS EXCELENTES

- 2.1. Una resistencia de 25Ω tiene una tensión de $v = 150 \sin 377t$ (V). Calcular la intensidad de corriente i y la potencia p .

$$i = \frac{v}{R} = 6 \operatorname{sen} 377t \text{ (A)} \quad p = vi = 900 \operatorname{sen}^2 377t \text{ (W)}$$

- 2.2.** La intensidad que circula por una resistencia de 5Ω aumenta desde cero hasta 10 A en 2 ms . Para $t = 2^+ \text{ ms}$ la intensidad es cero nuevamente y se incrementa a 10 A para $t = 4 \text{ ms}$. Esta secuencia se repite cada 2 ms . Dibujar la variación de la tensión v .

Puesto que $v = Ri$, la tensión máxima será $(5)(10) = 50$ V. En la Figura 2.10 se indican las gráficas de i y de v . Es evidente que ambas tienen la misma forma.

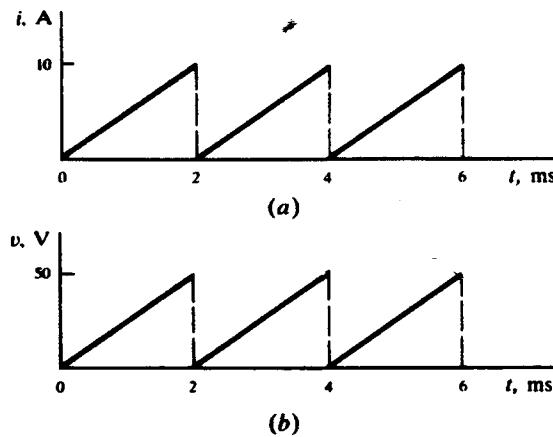


Figura 2.10.

- 2.3. Por una bobina de 2 mH circula una intensidad de $i(t) = 5(1 - e^{-5000t})$. Calcular la tensión y la energía máxima acumulada.

$$v = L \frac{di}{dt} = 50e^{-5000t} \text{ (V)}$$

En la Figura 2.11 se tienen las gráficas de i y de v . La intensidad máxima es 5 A y la energía máxima acumulada viene dada por:

$$W_{\max} = \frac{1}{2} LI_{\max}^2 = 25 \text{ mJ}$$

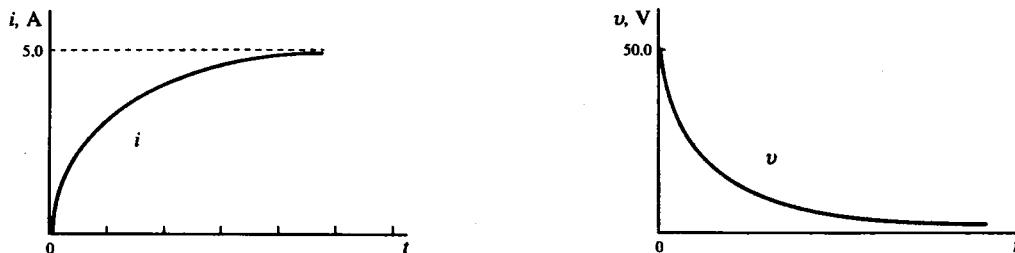


Figura 2.11.

- 2.4. La tensión aplicada a una bobina de 3 mH viene dada por las siguientes características: para $0 > t > 2 \text{ ms}$, $V = 15 \text{ V}$, y para $2 > t > 4 \text{ ms}$, $V = -30 \text{ V}$. Obtener la intensidad de corriente correspondiente y dibujar v_L e i para los diferentes intervalos.

Para $0 > t > 2 \text{ ms}$,

$$i = \frac{1}{L} \int_0^t v dt = \frac{1}{3 \cdot 10^{-3}} \int_0^t 15 dt = 5 \cdot 10^3 t \text{ (A)}$$

Para $t = 2 \text{ ms}$,

$$i = 10 \text{ A}$$

Para $2 > t > 4 \text{ ms}$,

$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{L} \int_{2 \cdot 10^{-3}}^t v dt + 10 = 10 + \frac{1}{3 \cdot 10^{-3}} \int_{2 \cdot 10^{-3}}^t -30 dt \\ &= 10 + \frac{1}{3 \cdot 10^{-3}} [-30t + (60 \cdot 10^{-3})] \text{ (A)} \\ &= 30 - (10 \cdot 10^3 t) \text{ (A)} \end{aligned}$$

Véase Figura 2.12.

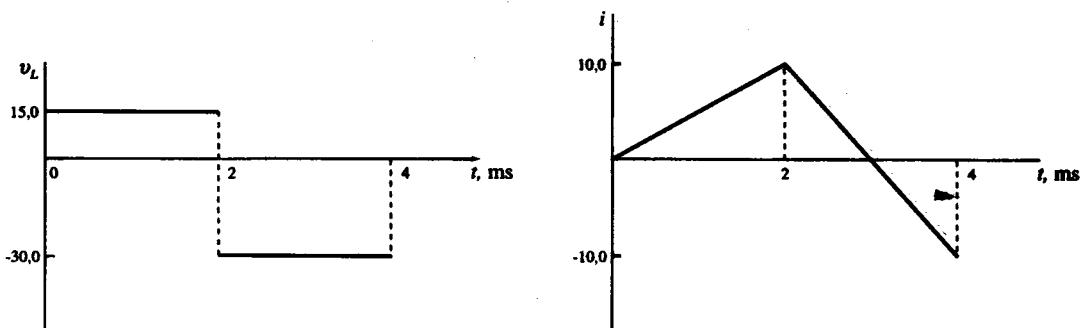


Figura 2.12.

- 2.5. La tensión aplicada a un condensador de $60 \mu\text{F}$ viene dada por: $v = 25 \cdot 10^3 t$ (V) en el intervalo siguiente: $0 > t > 2$ ms. Dibujar i , p y w para el intervalo dado y calcular W_{\max} .

Para $0 > t > 2$ ms,

$$i = C \frac{dv}{dt} = 60 \cdot 10^{-6} \frac{d}{dt} (25 \cdot 10^3 t) = 1,5 \text{ A}$$

$$p = vi = 37,5 \cdot 10^3 t \text{ (W)}$$

$$w_C = \int_0^t p dt = 1,875 \cdot 10^4 t^2 \text{ (mJ)}$$

Véase Figura 2.13.

$$W_{\max} = (1,875 \cdot 10^4)(2 \cdot 10^{-3})^2 = 75 \text{ mJ}$$

$$W_{\max} = \frac{1}{2} CV_{\max}^2 = \frac{1}{2} (60 \cdot 10^{-6})(50)^2 = 75 \text{ mJ}$$

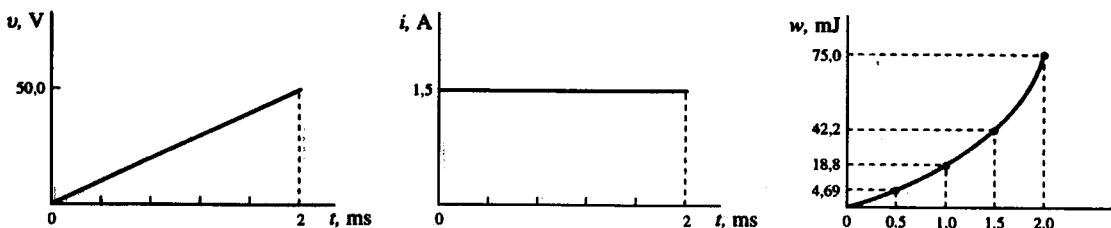


Figura 2.13.

- 2.6. Un condensador de $20 \mu\text{F}$ se carga linealmente desde 0 a $400 \mu\text{C}$ en 5 ms. Obtener la función temporal de la tensión y la W_{\max} .

$$q = \left(\frac{400 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-3}} \right) t = 8 \cdot 10^{-2} t \text{ (C)} \quad v = q/C = 4 \cdot 10^3 t \text{ (V)}$$

$$V_{\max} = (4 \cdot 10^3)(5 \cdot 10^{-3}) = 20 \text{ V} \quad W_{\max} = \frac{1}{2} CV_{\max}^2 = 4 \text{ mJ}$$

- 2.7. Por un circuito serie con $R = 2 \Omega$, $L = 2 \text{ mH}$ y $C = 500 \mu\text{F}$ circula una corriente que aumenta linealmente desde cero hasta 10 A en el intervalo $0 \leq t \leq 1$, permaneciendo en 10 A durante $1 \text{ ms} \leq t \leq 2 \text{ ms}$, para luego descender linealmente desde 10 A en 2 ms y a cero en 3 ms . Dibujar v_R , v_L y v_C .

v_R debe ser una función del tiempo idéntica a i , con $V_{\max} = 2(10) = 20 \text{ V}$.

Para $0 < t < 1 \text{ ms}$,

$$\frac{di}{dt} = 10 \cdot 10^3 \text{ A/s} \quad \text{y} \quad v_L = L \frac{di}{dt} = 20 \text{ V}$$

Cuando $di/dt = 0$ para $1 \text{ ms} < t < 2 \text{ ms}$, $v_L = 0$.

Suponiendo la carga inicial del condensador nula,

$$v_C = \frac{1}{C} \int i \, dt$$

Para $0 \leq t \leq 1 \text{ ms}$,

$$v_C = \frac{1}{5 \cdot 10^{-4}} \int_0^t 10^4 t \, dt = 10^7 t^2 \text{ (V)}$$

La tensión alcanzará el valor de 10 V en 1 ms . Para $1 \text{ ms} < t < 2 \text{ ms}$,

$$v_C = (20 \cdot 10^3)(t - 10^{-3}) + 10 \text{ (V)}$$

Véase Figura 2.14.

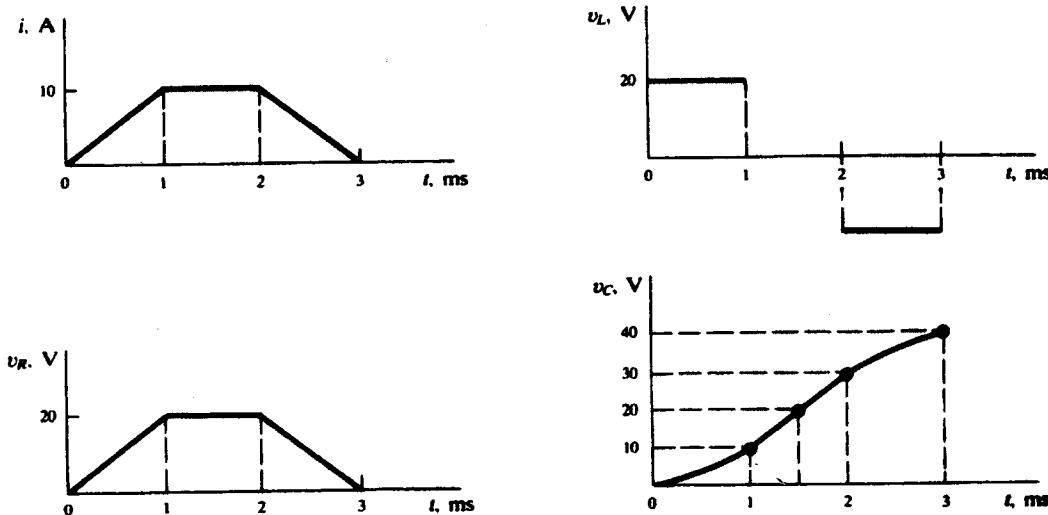


Figura 2.14.

- 2.8. Por un elemento de un circuito circula una corriente eléctrica, con una tensión como se indica en la Figura 2.15. Deducir de qué elemento se trata.

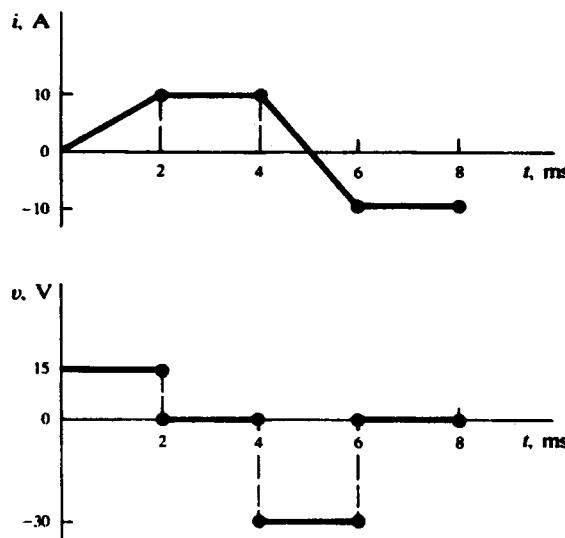


Figura 2.15.

El elemento no puede ser una resistencia porque v e i no son proporcionales. v es la integral de i . Para $2 \text{ ms} < t < 4 \text{ ms}$, i no es cero, pero v es constante (cero); por tanto, el elemento no puede ser un condensador. Para $0 < t < 2 \text{ ms}$,

$$\frac{di}{dt} = 5 \cdot 10^3 \text{ A/s} \quad \text{y} \quad v = 15 \text{ V}$$

En consecuencia,

$$L = v \sqrt{\frac{di}{dt}} = 3 \text{ mH}$$

(Comprobar para el intervalo $4 \text{ ms} < t < 6 \text{ ms}$: L debe tener el mismo valor.)

- 2.9.** Calcular la tensión v en la rama de la Figura 2.16 para a) $i_2 = 1 \text{ A}$, b) $i_2 = -2 \text{ A}$, c) $i_2 = 0 \text{ A}$.

La tensión v es la suma de la tensión de 10 V de la fuente independiente y la tensión de la fuente dependiente v_x . Observar que en el factor 15 de la corriente de control tiene unidades de ohmios.

$$\begin{aligned} a) \qquad v &= 10 + v_x = 10 + 15(1) = 25 \text{ V} \\ b) \qquad v &= 10 + v_x = 10 + 15(-2) = -20 \text{ V} \\ c) \qquad v &= 10 + 15(0) = 10 \text{ V} \end{aligned}$$

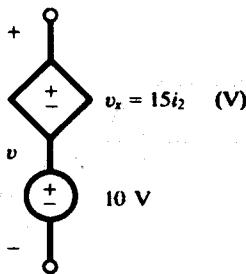


Figura 2.16.

- 2.10. Calcular la potencia absorbida por el elemento generalizado de un circuito de la Figura 2.17, para a) $v = 50 \text{ V}$, b) $v = -50 \text{ V}$.

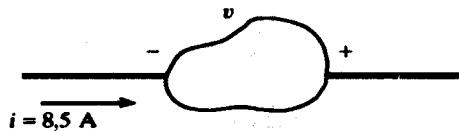


Figura 2.17.

Puesto que la corriente entra al elemento por el terminal negativo, se tendrá:

$$\begin{aligned} a) \quad p &= -vi = -(50)(8,5) = -425 \text{ W} \\ b) \quad p &= -vi = -(-50)(8,5) = 425 \text{ W} \end{aligned}$$

- 2.11. Calcular las potencias suministradas por las fuentes del circuito de la Figura 2.18.

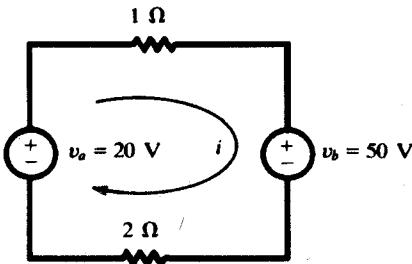


Figura 2.18.

$$i = \frac{20 - 50}{3} = -10 \text{ A}$$

Las potencias *absorbidas* por las fuentes son:

$$\begin{aligned} p_a &= -v_a i = -(20)(-10) = 200 \text{ W} \\ p_b &= v_b i = (50)(-10) = -500 \text{ W} \end{aligned}$$

Puesto que la potencia suministrada y la absorbida son iguales y de signo contrario, la fuente v_b suministrará 500 W y la fuente v_a absorberá 200 W. La potencia consumida por las dos resistencias es de 300 W.

- 2.12.** Una resistencia de $25\ \Omega$ tiene una tensión de $v = 150 \operatorname{sen} 377t$ (V). Calcular la potencia p y la potencia media P_{med} a lo largo de un ciclo.

$$i = v/R = 6 \operatorname{sen} 377t \text{ (A)}$$

$$p = vi = 900 \operatorname{sen}^2 377t \text{ (W)}$$

Un período completo se cumple cuando $377t = 2\pi$. Para calcular P_{med} se tomará medio ciclo para la integración. Así:

$$P_{\text{med}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 900 \operatorname{sen}^2(377t) d(377t) = 450 \text{ (W)}$$

- 2.13.** Calcular la tensión sobre la resistencia de $10\ \Omega$ de la Figura 2.19 si la intensidad de control i_x de la fuente dependiente es a) 2 A y b) -1 A.

$$i = 4i_x - 4; \quad v_R + iR = 40i_x - 40 \text{ (V)}$$

$$i_x = 2; \quad v_R = 40 \text{ V}$$

$$i_x = -1; \quad v_R = -80 \text{ V}$$

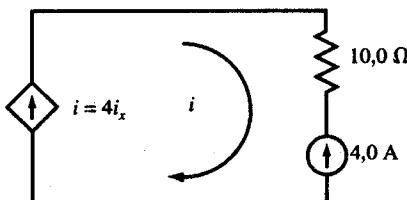


Figura 2.19.

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

- 2.14.** Una resistencia tiene una tensión aplicada de $V = 1,5\text{ mV}$. Calcular la intensidad si la potencia absorbida es a) $27,75\text{ nW}$ y b) $1,20\text{ }\mu\text{W}$.

Solución: $18,5\text{ }\mu\text{A}$, $0,8\text{ mA}$.

- 2.15.** Por una resistencia de $5\ \Omega$ circula una intensidad de $i = 5 \cdot 10^3 t$ (A) en el intervalo $0 \geq t \geq 2\text{ ms}$. Calcular la potencia instantánea y media.

Solución: $125t^2$ (A), 167 (W).

- 2.16.** Una intensidad i entra por el terminal positivo de un elemento generalizado de un circuito, siendo la tensión entre el mismo de $3,91\text{ V}$. Calcular la intensidad si la potencia absorbida es -25 mW .

Solución: $-6,4\text{ mA}$.

24 CIRCUITOS ELÉCTRICOS

- 2.17. Deducir qué elemento simple de un circuito tiene una tensión y una intensidad en el intervalo $0 \geq 10^3 t \geq \pi$ dados por $i = 2 \operatorname{sen} 10^3 t$ (mA) y $v = 5 \cos 10^3 t$ (mV).

Solución: Una bobina de 2,5 mH.

- 2.18. Una inductancia de 4 mH tiene una tensión aplicada $v = 2e^{-1000t}$ (V). Calcular la energía máxima acumulada. Para $t = 0$ la intensidad es cero.

Solución: 0,5 mW.

- 2.19. Un condensador de $2 \mu\text{F}$ con una carga inicial Q_0 se conecta en serie con una resistencia de 10Ω . Obtener el valor de Q_0 si la energía disipada en la resistencia es 3,6 mJ.

Solución: $120 \mu\text{C}$.

- 2.20. Suponiendo un condensador de capacidad C faradios, por el que circula una corriente $i = (V_m/R)e^{-t(R/C)}$ (A), demostrar que la potencia máxima acumulada es $\frac{1}{2}CV_m^2$. Suponer que la carga inicial es nula.

- 2.21. En la Figura 2.20 se representa la corriente que circula por un elemento de un circuito después de $t = 0$. Calcular la tensión eléctrica entre los extremos del elemento, para $t = 6,5 \mu\text{s}$, si es a) $10 \text{ k}\Omega$, b) 15 mH , c) $0,3 \text{ nF}$ con $Q(0) = 0$.

Solución: a) 25 V; b) -7,5 V; c) 81,3 V.

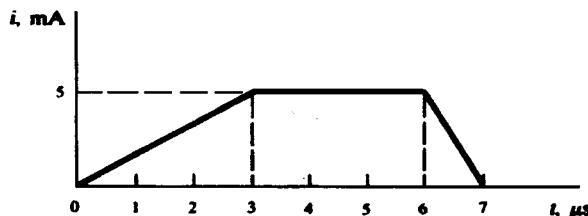


Figura 2.20.

- 2.22. El condensador de $20 \mu\text{F}$ del circuito de la Figura 2.21 tiene una tensión aplicada de $v = 100e^{-t/0.015}$ para $t > 0$. Calcular la energía en función del tiempo durante la descarga del condensador y compararla con la energía total absorbida por la resistencia de 750Ω .

Solución: $0,10 (1 - e^{-t/0.0075})$ (J).

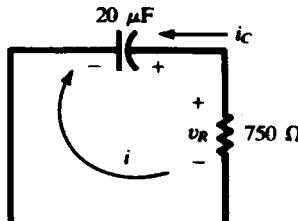


Figura 2.21.

- 2.23. Calcular la intensidad por el circuito de la Figura 2.22, si la tensión v_2 de control de la fuente dependiente tiene el valor de a) 4 V, b) 5 V, c) 10 V.

Solución: a) 1 A; b) 0 A; c) -5 A.

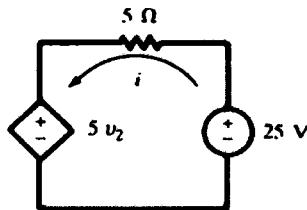


Figura 2.22.

- 2.24. Calcular la intensidad i del circuito de la Figura 2.23 en los siguientes casos: a) $i_1 = 2$ A, $i_2 = 0$ A; b) $i_1 = -1$ A, $i_2 = 4$ A; c) $i_1 = i_2 = 1$ A.

Solución: a) 10 A; b) 11 A; c) 9 A.

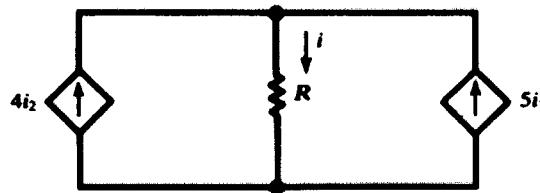


Figura 2.23.

CAPÍTULO 3

Leyes de los circuitos

3.1. INTRODUCCIÓN

Un circuito eléctrico o red consiste en una serie de elementos simples, como los descritos en el Capítulo 2, interconectados entre sí. El circuito debe tener al menos una fuente de tensión o una fuente de intensidad. La interconexión de estos elementos y las fuentes conduce a unas nuevas relaciones entre las corrientes eléctricas y las tensiones en los mismos. Estas relaciones y sus ecuaciones correspondientes, junto con la relación corriente-tensión de cada elemento individual, permitirán resolver el circuito.

El objetivo de estudiar los elementos individuales, su conexiónado en los circuitos y resolver las ecuaciones de los mismos es para analizar el comportamiento de dispositivos como motores eléctricos, generadores, transformadores, transductores eléctricos y algunas partes de equipos electrónicos. Generalmente, el problema es conocer el comportamiento del circuito cuando cambian las condiciones de la fuente de energía.

3.2. LEY DE KIRCHHOFF PARA LAS TENSIONES

Para un camino cerrado en un circuito, la *ley de Kirchhoff para las tensiones* (LKT) establece que la suma algebraica de las tensiones es cero. Algunas de las tensiones serán debidas a las fuentes y otras debidas a la existencia de elementos pasivos, y entonces se hablará de *caídas de tensión*. Esta ley se aplica igualmente a los circuitos alimentados por fuentes constantes (llamadas de corriente continua), CC, como a circuitos alimentados por fuentes variables $v(t)$ e $i(t)$, y por otras fuentes que se introducirán en el Capítulo 9. El método de las corrientes de malla, que se verá en la Sección 4.2, se basa en la ley de Kirchhoff para las tensiones.

EJEMPLO 3.1. Escribir la ecuación de la LKT para el circuito de la Figura 3.1.

Comenzando por la esquina izquierda más baja y siguiendo la dirección de la intensidad, tendremos:

$$-v_a + v_1 + v_b + v_2 + v_3 = 0$$

$$-v_a + iR_1 + v_b + iR_2 + iR_3 = 0$$

$$v_a - v_b = i(R_1 + R_2 + R_3)$$

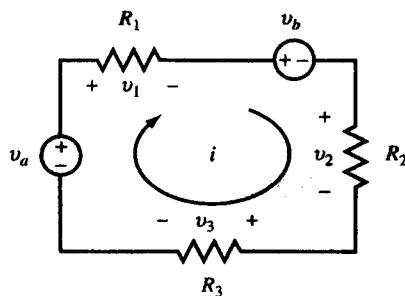


Figura 3.1.

3.3. LEY DE KIRCHHOFF PARA LAS INTENSIDADES DE CORRIENTE

La unión de dos o más elementos de un circuito constituye una conexión denominada *nudo*. La unión de dos elementos se llama *nudo simple* y en él no hay derivación de corriente. La unión de tres o más elementos se llama *nudo principal*, y en este caso sí hay derivación de corriente. La *ley de Kirchhoff para las intensidades de corriente* (LKC) establece que la suma algebraica de las corrientes en un nudo es cero. Expresándolo de otra manera, significa que la suma de las intensidades que entran en un nudo es igual a la suma de las intensidades que salen del mismo. El método de las tensiones en los nudos, que se explicará en la Sección 4.3, se basa en las ecuaciones que se plantean para los nudos principales de un circuito al aplicar la ley de Kirchhoff de las intensidades de corriente. La base de esta ley es el principio de conservación de la carga eléctrica.

EJEMPLO 3.2. Escribir la ecuación de la LKC para el nudo principal indicado en la Figura 3.2.

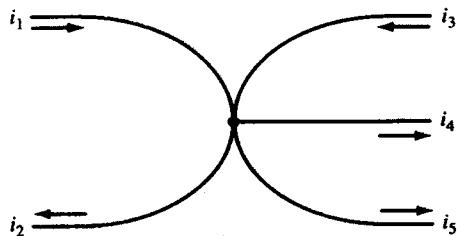


Figura 3.2.

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 + i_3 - i_4 - i_5 &= 0 \\ i_1 + i_3 &= i_2 + i_4 + i_5 \end{aligned}$$

3.4. ELEMENTOS EN SERIE

Los tres elementos pasivos conectados en serie, como se indica en la Figura 3.3, son recorridos por la misma corriente eléctrica i . Las tensiones en los elementos son v_1 , v_2 y v_3 . La tensión total es suma de las tres tensiones individuales: $v = v_1 + v_2 + v_3$.

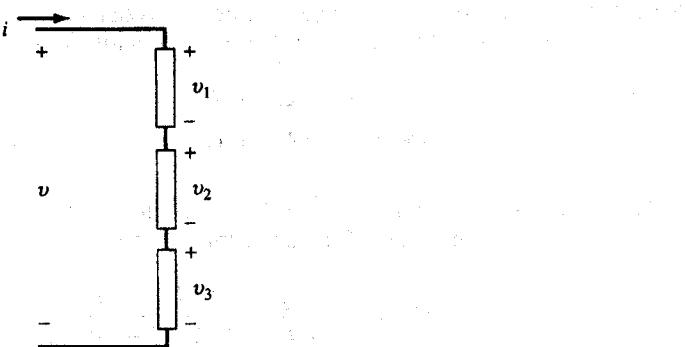


Figura 3.3.

Si los tres elementos son resistencias,

$$\begin{aligned} v &= iR_1 + iR_2 + iR_3 \\ &= i(R_1 + R_2 + R_3) \\ &= iR_{eq} \end{aligned}$$

donde R_{eq} es la resistencia equivalente de las tres resistencias en serie. La relación entre v e i sigue cumpliéndose.

Para cualquier número de resistencias en serie tendremos $R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots$

Si los tres elementos pasivos son bobinas (o inductancias),

$$\begin{aligned} v &= L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + L_3 \frac{di}{dt} \\ &= (L_1 + L_2 + L_3) \frac{di}{dt} \\ &= L_{eq} \frac{di}{dt} \end{aligned}$$

Generalizando esto a cualquier número de inductancias en serie tendremos $L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots$

Si los tres elementos son condensadores, suponiendo que la carga sea nula en el instante inicial para que las constantes de integración sean nulas, tendremos:

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{C_1} \int i dt + \frac{1}{C_2} \int i dt + \frac{1}{C_3} \int i dt \\ &= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) \int i dt \\ &= \frac{1}{C_{eq}} \int i dt \end{aligned}$$

La capacidad de varios condensadores en serie es $1/C_{eq} = 1/C_1 + 1/C_2 + \dots$

EJEMPLO 3.3. La resistencia equivalente de tres resistencias en serie es 750Ω . Dos resistencias son de 40Ω y de 410Ω , respectivamente. ¿Cuál será el valor de la tercera resistencia?

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + R_3$$

$$750 = 40 + 410 + R_3 \quad \text{y} \quad R_3 = 300 \Omega$$

EJEMPLO 3.4. Se conectan en serie dos condensadores $C_1 = 2 \mu\text{F}$ y $C_2 = 10 \mu\text{F}$. Calcular la capacidad equivalente de ambos. Repetir lo mismo si C_2 es 10 pF .

$$C_{\text{eq}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{(2 \cdot 10^{-6})(10 \cdot 10^{-6})}{2 \cdot 10^{-6} + 10 \cdot 10^{-6}} = 1,67 \mu\text{F}$$

Si $C_2 = 10 \text{ pF}$,

$$C_{\text{eq}} = \frac{(2 \cdot 10^{-6})(10 \cdot 10^{-12})}{2 \cdot 10^{-6} + 10 \cdot 10^{-12}} = \frac{20 \cdot 10^{-18}}{2 \cdot 10^{-6}} = 10 \text{ pF}$$

donde la contribución de $10 \cdot 10^{-12}$ en la suma de $C_1 + C_2$ en el denominador es muy pequeña y puede despreciarse frente al otro sumando.

Nota. Cuando los condensadores tienen valores muy diferentes, la capacidad equivalente es fundamentalmente debida al condensador de menor capacidad.

3.5. ELEMENTOS EN PARALELO

Para los tres elementos conectados en paralelo, como se indica en la Figura 3.4, la LKC establece que la corriente i que entra por el nudo principal es la suma de las tres corrientes que salen de los otros nudos hacia las ramas.

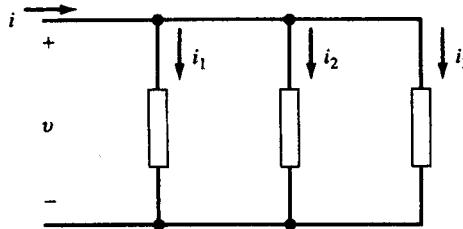


Figura 3.4.

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

Si los tres elementos son resistencias,

$$i = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} + \frac{v}{R_3} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) v = \frac{1}{R_{\text{eq}}} v$$

Para varias resistencias en paralelo,

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots$$

El caso de dos resistencias en paralelo se presenta frecuentemente y merece una especial mención. La resistencia equivalente de dos resistencias en paralelo es igual al producto de ambas dividido por la suma de dichas resistencias.

$$R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

EJEMPLO 3.5. Calcular la resistencia equivalente de: a) dos resistencias de 60Ω en paralelo, y b) tres resistencias de 60Ω en paralelo.

a)

$$R_{\text{eq}} = \frac{(60)^2}{120} = 30 \Omega$$

b)

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} \quad R_{\text{eq}} = 20 \Omega$$

Nota. Para n resistencias iguales en paralelo, la resistencia equivalente viene dada por R/n .

Las combinaciones de resistencias en paralelo tienen expresiones similares a las de las resistencias:

$$\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots \quad \text{y para dos bobinas,} \quad L_{\text{eq}} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

EJEMPLO 3.6. Se conectan en paralelo dos bobinas $L_1 = 3 \text{ mH}$ y $L_2 = 6 \text{ mH}$. Calcular L_{eq} .

$$\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{3 \text{ mH}} + \frac{1}{6 \text{ mH}} \quad \text{y} \quad L_{\text{eq}} = 2 \text{ mH}$$

Con tres condensadores en paralelo,

$$i = C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} + C_3 \frac{dv}{dt} = (C_1 + C_2 + C_3) \frac{dv}{dt} = C_{\text{eq}} \frac{dv}{dt}$$

Para varios condensadores en paralelo resulta $C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + \dots$, que es la misma expresión que para resistencias en serie.

3.6. DIVISIÓN DE TENSIÓN

Un conjunto de resistencias en serie como las de la Figura 3.5 se denomina *divisor de tensión*. El concepto, que aquí se refiere a resistencias, puede extenderse a impedancias, como se verá en el Capítulo 9.

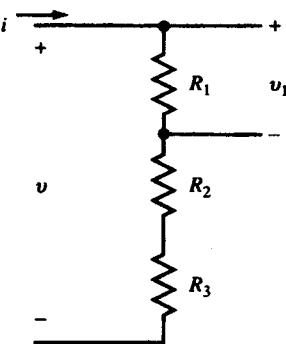


Figura 3.5.

Puesto que \$v_1 = iR_1\$ y \$v = i(R_1 + R_2 + R_3)\$,

$$v_1 = v \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \right)$$

EJEMPLO 3.7. Un circuito divisor de tensión tiene dos resistencias cuya suma es \$50 \Omega\$. Si la tensión de salida es el 10 por 100 de la de entrada, calcular el valor de las dos resistencias.

$$\frac{v_1}{v} = 0,10 \quad 0,10 = \frac{R_1}{50 \cdot 10^3}$$

de donde \$R_1 = 5 \Omega\$ y \$R_2 = 45 \Omega\$.

3.7. DIVISIÓN DE CORRIENTE

Una organización de resistencias, como se indica en la Figura 3.6, constituye un *divisor de corriente*. La relación entre la corriente \$i_1\$ por una rama y la corriente \$i\$ muestra el funcionamiento de divisor.

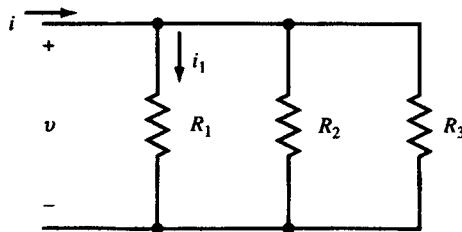


Figura 3.6.

$$i = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} + \frac{v}{R_3} \quad \text{y} \quad i_1 = \frac{v}{R_1}$$

Entonces $\frac{i_1}{i} = \frac{1/R_1}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3} = \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$

Para el caso de un divisor con dos ramas tendremos:

$$\frac{i_1}{i} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Esto puede expresarse de la siguiente forma: En un circuito con dos ramas en paralelo, la relación entre las intensidades por una rama y la total es igual a la relación entre la resistencia por la otra rama y la suma de ambas resistencias.

EJEMPLO 3.8. Una corriente de 30 mA se divide en dos ramas por las que pasan 20 mA y 10 mA, constituida por dos resistencias en paralelo cuya resistencia equivalente es mayor de 10 Ω. Calcular los valores de las resistencias de ambas ramas.

$$\frac{20 \text{ mA}}{30 \text{ mA}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \frac{10 \text{ mA}}{30 \text{ mA}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \geq 10 \Omega$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene $R_1 \geq 15 \Omega$ y $R_2 \geq 30 \Omega$.

PROBLEMAS RESUELTOS

- 3.1. Obtener el valor de V_3 y su polaridad I sabiendo que la intensidad de la corriente es 0,4 A, en la Figura 3.7.

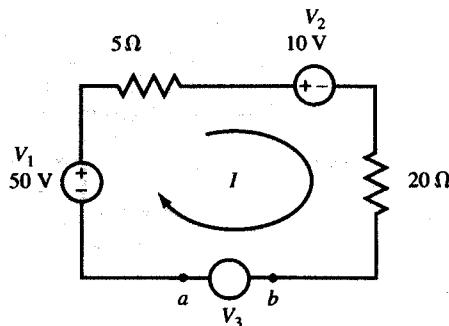


Figura 3.7.

Suponiendo que V_3 tiene la misma polaridad que V_1 y aplicando la LKT, comenzando por la esquina inferior izquierda, se obtiene:

$$V_1 - I(5) - V_2 - I(20) + V_3 = 0$$

$$50 - 2 - 10 - 8 + V_3 = 0$$

$$V_3 = -30 \text{ V}$$

El extremo b es positivo respecto del a .

- 3.2. Calcular las intensidades I_1 e I_2 en el circuito de la Figura 3.8.

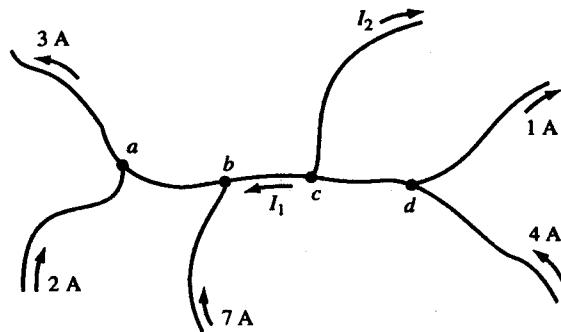


Figura 3.8.

a y b constituyen un solo nudo. Aplicando la LKC,

$$2 + 7 + I_1 = 3 \quad \text{o} \quad I_1 = -6 \text{ A}$$

También c y d forman un nudo, y así:

$$4 + 6 = I_2 + 1 \quad \text{o} \quad I_2 = 9 \text{ A}$$

- 3.3. Obtener la intensidad I por el circuito de la Figura 3.9.

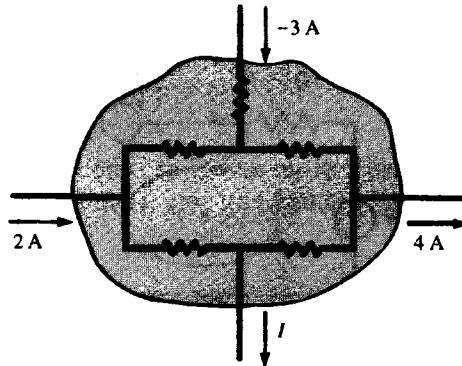


Figura 3.9.

Las intensidades por el interior de la zona sombreada no se pueden calcular al no conocer los valores de las resistencias. Sin embargo, al aplicar la LKC a toda la zona considerándola como un nudo, se obtiene:

$$2 - 3 - 4 - I = 0 \quad \text{o} \quad I = -5 \text{ A}$$

- 3.4. Calcular la resistencia equivalente del circuito de la Figura 3.10.

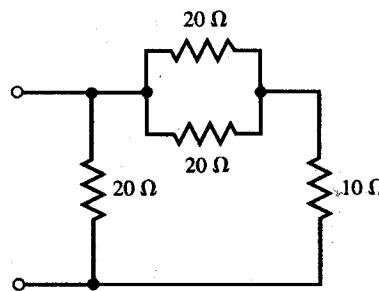


Figura 3.10.

Las dos resistencias de $20\ \Omega$ en paralelo son equivalentes a una resistencia $R_{eq} = [(20)(20)/(20 + 20)] = 10\ \Omega$. Ésta se encuentra en serie con la resistencia de $10\ \Omega$, cuya suma será $20\ \Omega$. Ahora esta última calculada se encuentra en paralelo con la de $20\ \Omega$, y así se obtiene que la resistencia equivalente es $10\ \Omega$.

- 3.5. Calcular la inductancia equivalente de las tres bobinas en paralelo de la Figura 3.11.

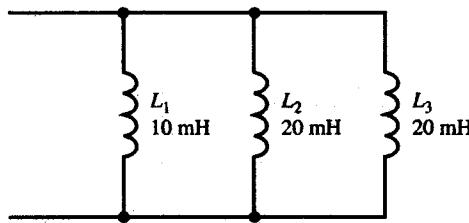


Figura 3.11.

Las dos inductancias de $20\ mH$ son equivalentes a una de $10\ mH$. Ésta se encuentra en paralelo con la de $10\ mH$, siendo por tanto $5\ mH$ la equivalente del conjunto. Análogamente se puede obtener de

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} = \frac{1}{10\ mH} + \frac{1}{20\ mH} + \frac{1}{20\ mH} = \frac{4}{20\ mH} \quad \text{o sea} \quad L_{eq} = 5\ mH$$

- 3.6. Calcular la capacidad total de los tres condensadores de la Figura 3.12.

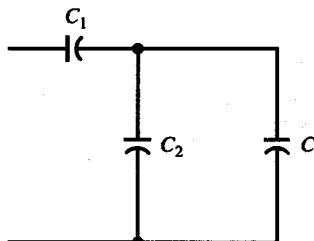


Figura 3.12.

Para C_2 y C_3 en paralelo, $C_{\text{eq}} = C_2 + C_3$. Entonces para C_1 y C_{eq} en serie,

$$C_T = \frac{C_1 C_{\text{eq}}}{C_1 + C_{\text{eq}}} = \frac{C_1 (C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}$$

- 3.7. El circuito de la Figura 3.13 es un divisor de tensión, también llamado *atenuador*. Cuando se trata de una resistencia con un contacto deslizante se denomina *potencímetro*. Para comprobar el efecto de carga, provocada por la resistencia R del voltímetro VM, calcular la relación $V_{\text{sal}}/V_{\text{ent}}$ para los casos: a) $R = \infty$, b) $R = 1 \text{ M}\Omega$, c) $R = 10 \text{ k}\Omega$, d) $R = 1 \text{ k}\Omega$.

a)

$$V_{\text{sal}}/V_{\text{ent}} = \frac{250}{2250 + 250} = 0,100$$

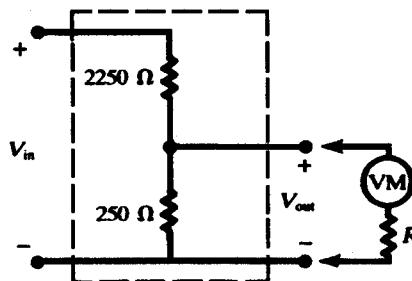


Figura 3.13.

- b) La resistencia equivalente de R , en paralelo con la de 250Ω , será:

$$R_{\text{eq}} = \frac{250(10^6)}{250 + 10^6} = 249,9 \Omega \quad \text{y} \quad V_{\text{sal}}/V_{\text{ent}} = \frac{249,9}{2250 + 249,9} = 0,1$$

c)

$$R_{\text{eq}} = \frac{(250)(10000)}{250 + 10000} = 243,9 \Omega \quad \text{y} \quad V_{\text{sal}}/V_{\text{ent}} = 0,098$$

d)

$$R_{\text{eq}} = \frac{(250)(1000)}{250 + 1000} = 200 \Omega \quad \text{y} \quad V_{\text{sal}}/V_{\text{ent}} = 0,082$$

- 3.8. Calcular todas las intensidades que pasan por las ramas de la Figura 3.14(a).

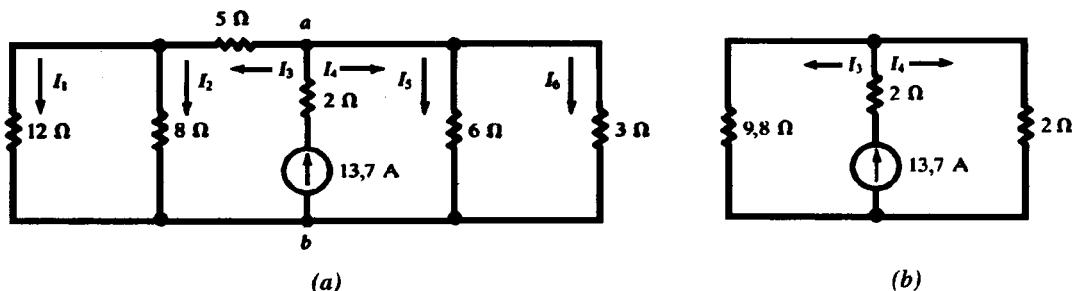


Figura 3.14.

La resistencia equivalente de las partes izquierda y derecha desde los nudos *a* y *b* son:

$$R_{\text{eq(izda)}} = 5 + \frac{(12)(8)}{20} = 9,8 \Omega$$

$$R_{\text{eq(dcha)}} = \frac{(6)(3)}{9} = 2 \Omega$$

Ahora, utilizando el circuito de la Figura 3.14(b),

$$I_3 = \frac{2}{11,8} (13,7) = 2,32 \text{ A}$$

$$I_4 = \frac{9,8}{11,8} (13,7) = 11,38 \text{ A}$$

Utilizando el circuito original,

$$I_1 = \frac{8}{20} (2,32) = 0,93 \text{ A} \quad I_2 = 2,32 - 0,93 = 1,39 \text{ A}$$

$$I_5 = \frac{3}{9} (11,38) = 3,79 \text{ A} \quad I_6 = 11,38 - 3,79 = 7,59 \text{ A}$$

- 3.9. Deducir la tensión *V* y la polaridad de la fuente de la Figura 3.15 en los casos: a) *I* = 2 A y b) *I* = -2 A.

Solución: a) 50 V, extremo *b* positivo; b) 10 V, extremo *a* positivo.

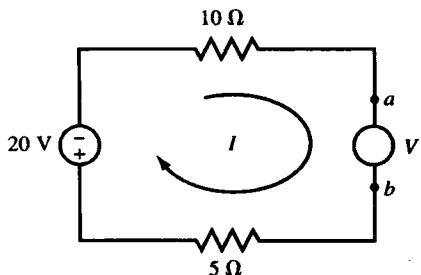


Figura 3.15.

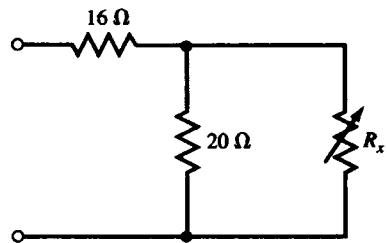


Figura 3.16.

- 3.10. Calcular R_{eq} en el circuito de la Figura 3.16 para: a) $R_x = \infty$, b) $R_x = 0$, c) $R_x = 5 \Omega$.

Solución: a) 36Ω , b) 16Ω , c) 20Ω .

- 3.11. Una bobina de 8 mH se encuentra en serie con otras dos que están en paralelo, de valores 3 mH y 6 mH . Calcular L_{eq} .

Solución: 10 mH .

- 3.12. Demostrar que la C_{eq} de los tres condensadores iguales de la Figura 3.17 es $1,5 \text{ C}$.

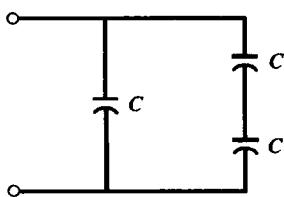


Figura 3.17.

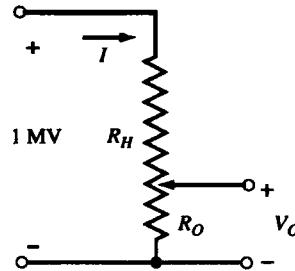


Figura 3.18.

- 3.13. Calcular los valores de R_H y R_O del divisor de tensión de la Figura 3.18 suponiendo que la corriente está limitada a $0,5 \text{ A}$ cuando la tensión $V_o = 100 \text{ V}$.

Solución: $R_H = 2 \text{ M}\Omega$, $R_O = 200 \text{ M}\Omega$.

- 3.14. Utilizando la división de tensiones, calcular V_1 y V_2 en el circuito de la Figura 3.19.

Solución: $11,4 \text{ V}$, $73,1 \text{ V}$.

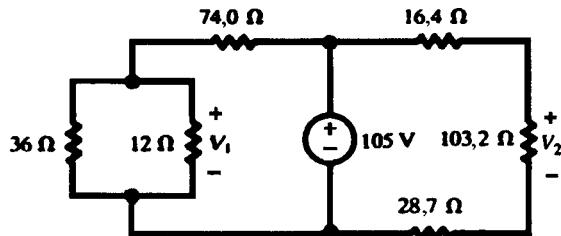


Figura 3.19.

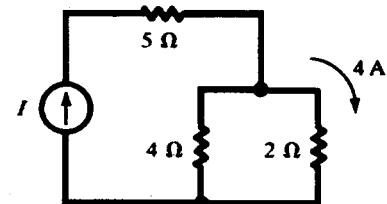


Figura 3.20.

- 3.15. Calcular la intensidad I de la fuente y la potencia disipada en el circuito de la Figura 3.20.

Solución: 6 A , 228 W .

- 3.16. Demostrar que para cuatro resistencias en paralelo la corriente por una rama, por ejemplo la que tiene en R_4 , viene dada en función de la corriente total I_T por

$$I_4 = I_T \left(\frac{R'}{R_4 + R'} \right) \quad \text{siendo} \quad R' = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

Nota. Este caso es similar al de una división de corrientes por dos ramas en paralelo, donde la otra resistencia se ha sustituido por R' .

CAPÍTULO 4

Métodos de análisis

4.1. MÉTODO DE LAS CORRIENTES DE RAMA

En el método de las corrientes de rama se asigna a cada rama una determinada intensidad de corriente. Se aplica entonces la ley de Kirchhoff de las corrientes a cada uno de los nudos principales del circuito y la de las tensiones entre los nudos correspondientes. Esto proporciona un sistema de ecuaciones que permite calcular las corrientes por cada rama.

EJEMPLO 4.1. Calcular las corrientes en cada rama del circuito de la Figura 4.1 utilizando el método de las corrientes de rama.

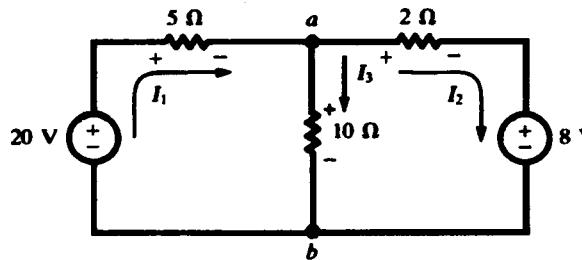


Figura 4.1.

Se supone que las corrientes por cada rama son I_1 , I_2 e I_3 , tal como se indica. Aplicando la LKC al nudo a ,

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad (1)$$

La tensión V_{ab} puede escribirse en función de los elementos de cada rama; $V_{ab} = 20 - I_1(5)$, $V_{ab} = I_3(10)$ y $V_{ab} = I_2(2) + 8$. Por tanto, pueden escribirse las siguientes ecuaciones:

$$20 - I_1(5) = I_3(10) \quad (2)$$

$$20 - I_1(5) = I_2(2) + 8 \quad (3)$$

Resolviendo el sistema de las tres ecuaciones (1), (2) y (3) se obtiene $I_1 = 2$ A, $I_2 = 1$ A e $I_3 = 1$ A.

Se podían haber escogido otros sentidos para las corrientes de rama, y con el signo obtenido en el resultado final se deduciría el sentido correcto. Cuando la red es más compleja, el método de las corrientes de rama es difícil de aplicar, porque no se ve claramente el proceso de escoger las ramas y nudos para obtener las ecuaciones adecuadas al problema

concreto. Además, pueden resultar más ecuaciones independientes que las que se necesitan con los métodos de corrientes de malla o de tensiones en los nudos.

4.2. MÉTODO DE LAS CORRIENTES DE MALLA

En el método de las corrientes de malla se asigna a cada *ventana* del circuito una corriente total como cerrada en un bucle. A veces se denomina *corriente de bucle*. Por cada elemento y rama circulará una corriente independiente. Si por una rama circulan dos corrientes de malla, la corriente total por la rama es la suma algebraica de las de malla. El sentido asignado a las corrientes de malla puede ser el sentido de las agujas del reloj o el contrario, si bien es preferible asignar un mismo sentido a todas las mallas, que puede ser el de las agujas del reloj. Una vez asignadas las corrientes se escribe la ley de Kirchhoff de las tensiones para cada bucle con el fin de obtener las ecuaciones necesarias.

EJEMPLO 4.2. Calcular las intensidades por cada rama del circuito de la Figura 4.2 (el mismo que el de la Figura 4.1) utilizando el método de las corrientes de malla.

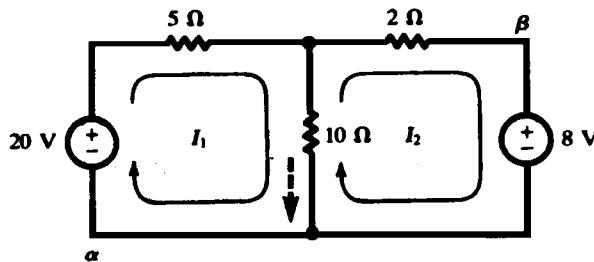


Figura 4.2.

En la figura se indican las corrientes I_1 e I_2 escogidas. Aplicando la LKT a lo largo del bucle izquierdo a partir del punto α ,

$$-20 + 5I_1 + 10(I_1 - I_2) = 0$$

y a lo largo del bucle de la derecha comenzando por el punto β ,

$$8 + 10(I_2 - I_1) + 2I_2 = 0$$

Reordenando términos,

$$15I_1 - 10I_2 = 20 \quad (4)$$

$$-10I_1 + 12I_2 = -8 \quad (5)$$

Resolviendo el sistema de (4) y (5) se obtiene $I_1 = 2$ A e $I_2 = 1$ A. La intensidad por la rama central, señalada por línea de puntos, es $I_1 - I_2 = 1$ A. En el Ejemplo 4.1 ésta era la corriente de rama I_3 .

Para obtener el sistema de ecuaciones correspondiente no es necesario restringirse a escoger las intensidades en las *ventanas*, aunque sea lo más usual en este método. Por ejemplo, ver el Problema 4.6, en el que las corrientes pasan todas por la misma fuente. En ese problema se denominan corrientes de bucle. La regla a aplicar es que cada elemento en el

circuito debe tener una corriente o combinación de corrientes, y que dos elementos en distintas ramas no pueden tener asignadas la misma corriente o combinación de corrientes.

4.3. MATRICES Y DETERMINANTES

Las n ecuaciones de un circuito con n -mallas se pueden escribir en forma matricial. (En el Apéndice B hay una introducción al estudio de matrices y determinantes.)

EJEMPLO 4.3. Al aplicar la LKT a las tres mallas del circuito de la Figura 4.3 se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} (R_A + R_B)I_1 - R_B I_2 &= V_a \\ -R_B I_1 + (R_B + R_C + R_D)I_2 - R_D I_3 &= 0 \\ -R_D I_2 + (R_D + R_E)I_3 &= -V_b \end{aligned}$$

Que escritas en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} R_A + R_B & -R_B & 0 \\ -R_B & R_B + R_C + R_D & -R_D \\ 0 & -R_D & R_D + R_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_a \\ 0 \\ -V_b \end{bmatrix}$$

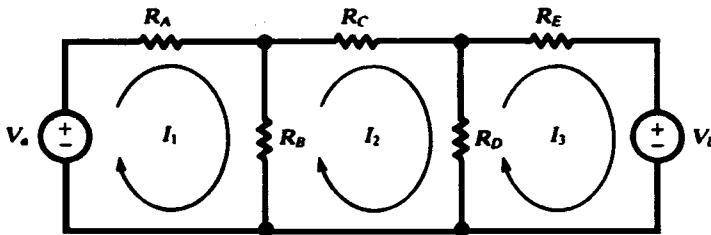


Figura 4.3.

Los elementos de una matriz pueden representarse en general de la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

El elemento R_{11} (fila 1, columna 1) es la suma de todas las resistencias que son atravesadas por la corriente de malla I_1 . En la Figura 4.3 vale $R_A + R_B$. De forma análoga los elementos R_{22} y R_{33} son la suma de las resistencias atravesadas por I_2 e I_3 , respectivamente.

El elemento R_{12} (fila 1, columna 2) es la suma de todas las resistencias que son atravesadas por las dos corrientes de malla I_1 e I_2 . El signo de R_{12} es $+$ si ambas corrientes atraviesan la resistencia en el mismo sentido, y $-$ si lo hacen en sentidos contrarios. En la Figura 4.3, R_B es la única resistencia común a I_1 e I_2 ; y los sentidos de las corrientes son opuestos, así que el signo será negativo.

Análogamente, los elementos R_{21} , R_{23} , R_{13} y R_{31} son la suma de las resistencias comunes a las dos corrientes de mallas que indican los subíndices de cada elemento, y con el signo correspondiente de acuerdo con el criterio definido para R_{12} . Se observa que para cualquier i y j resulta $R_{ij} = R_{ji}$. Por tanto, la matriz de resistencias es una matriz simétrica respecto de la diagonal principal.

La matriz de corrientes no requiere de una explicación especial, puesto que los elementos están en una columna y son las intensidades correspondientes a cada malla. Éstas son las incógnitas en el método de análisis de circuitos por corrientes de mallas.

El elemento V_1 de la matriz de tensiones es la suma de las tensiones de las fuentes de la malla I_1 . La tensión de una fuente es positiva si I_1 pasa del extremo – al + de la fuente; en caso contrario, es negativa. En otras palabras, una tensión es positiva si la fuente conduce en la dirección de la corriente de malla. En la Figura 4.3 la malla 1 tiene una fuente V_a que conduce en la dirección de I_1 ; la malla 2 no tiene fuentes y la malla 3 tiene una fuente V_b que conduce en dirección contraria a I_3 , lo que hace que V_3 sea negativa.

La ecuación matricial ocasionada por el método de las corrientes de malla puede solucionarse por varias técnicas. Una de ellas es el *método de los determinantes* (regla de Cramer), que se explicará ahora. Es necesario decir que con circuitos más complejos hay otras técnicas más efectivas.

EJEMPLO 4.4. Resolver la ecuación matricial (6) del Ejemplo 4.3 por el método de los determinantes.

La intensidad I_1 se obtiene como cociente de dos determinantes. El determinante del denominador es el que tiene los elementos de la matriz de resistencias. Éste se puede denominar como *determinante de los coeficientes* y ser representado por el símbolo Δ_R . El determinante del numerador tiene los mismos elementos que Δ_R excepto que la primera columna está compuesta por los elementos de la matriz de tensiones. Así:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & R_{12} & R_{13} \\ V_2 & R_{22} & R_{23} \\ V_3 & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}} \equiv \frac{1}{\Delta_R} \begin{vmatrix} V_1 & R_{12} & R_{13} \\ V_2 & R_{22} & R_{23} \\ V_3 & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}$$

Análogamente,

$$I_2 = \frac{1}{\Delta_R} \begin{vmatrix} R_{11} & V_1 & R_{13} \\ R_{21} & V_2 & R_{23} \\ R_{31} & V_3 & R_{33} \end{vmatrix} \quad I_3 = \frac{1}{\Delta_R} \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & V_1 \\ R_{21} & R_{22} & V_2 \\ R_{31} & R_{32} & V_3 \end{vmatrix}$$

Un desarrollo de los determinantes por los adjuntos de los términos de tensión proporciona un sistema de ecuaciones que puede ayudar a entender el circuito en función de sus resistencias de transferencia y de las tensiones de excitación:

$$I_1 = V_1 \left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_R} \right) + V_2 \left(\frac{\Delta_{21}}{\Delta_R} \right) + V_3 \left(\frac{\Delta_{31}}{\Delta_R} \right) \quad (7)$$

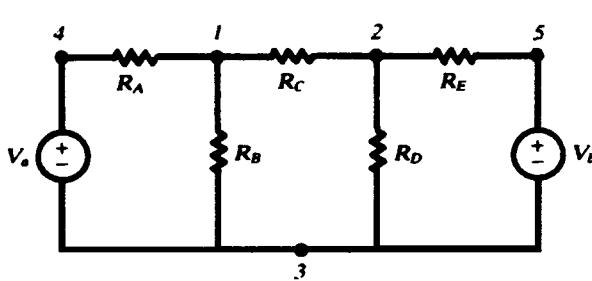
$$I_2 = V_1 \left(\frac{\Delta_{12}}{\Delta_R} \right) + V_2 \left(\frac{\Delta_{22}}{\Delta_R} \right) + V_3 \left(\frac{\Delta_{32}}{\Delta_R} \right) \quad (8)$$

$$I_3 = V_1 \left(\frac{\Delta_{13}}{\Delta_R} \right) + V_2 \left(\frac{\Delta_{23}}{\Delta_R} \right) + V_3 \left(\frac{\Delta_{33}}{\Delta_R} \right) \quad (9)$$

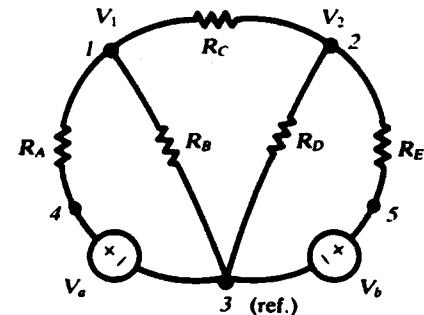
Aquí, Δ_{ij} es el adjunto de R_{ij} (elemento de la fila i , columna j) de Δ_R . Deberán ponerse con los signos de los menores complementarios (véase Apéndice B).

4.4. MÉTODOS DE LAS TENSIONES EN LOS NUDOS

El circuito de la Figura 4.4(a) tiene cinco nudos, donde el 4 y el 5 son sencillos y el 1, 2 y 3 son principales. En el método de las tensiones en los nudos, uno de los nudos principales se toma como nudo de referencia y se aplica la LKC a los otros nudos principales. A cada uno de estos nudos principales se les asigna una tensión, que es *respecto de la del nudo de referencia*. Estas tensiones son las incógnitas, y cuando se calculan por un método apropiado se tiene la solución del circuito.



(a)



(b)

Figura 4.4.

El circuito está dibujado de otra forma en la Figura 4.4(b), habiendo tomado el nudo 3 como referencia para las tensiones V_1 y V_2 . La LKC establece que las corrientes en el nudo 1 se anulen:

$$\frac{V_1 - V_a}{R_A} + \frac{V_1}{R_B} + \frac{V_1 - V_2}{R_C} = 0$$

De forma análoga, las corrientes en el nudo 2 deben anularse:

$$\frac{V_2 - V_1}{R_C} + \frac{V_2}{R_D} + \frac{V_2 - V_b}{R_E} = 0$$

(Aplicar la LKC de esta forma no implica que las corrientes reales por todas las ramas sean salientes de los nudos. Evidentemente, la corriente en la rama 1-2 debe ser *saliente* de un nudo y *entrante* en otro.) Poniendo en forma matricial las ecuaciones para V_1 y V_2 :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} & -\frac{1}{R_C} \\ -\frac{1}{R_C} & \frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_D} + \frac{1}{R_E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_a/R_A \\ V_b/R_E \end{bmatrix}$$

Observar la simetría de los coeficientes de la matriz. El elemento 1,1 es la suma de las inversas de todas las resistencias conectadas al nudo 1; el 1,2 y el 2,1 son iguales al valor de la suma de las inversas de las resistencias que se encuentran conectadas en las ramas que unen los nudos 1 y 2 y con signo *negativo*. (En este caso, sólo hay una rama.)

El segundo miembro de la ecuación es la matriz de corrientes con V_a/R_A y V_b/R_E , que son las corrientes de las fuentes. Estos dos términos se han tomado positivos porque ambos conducen corriente hacia un nudo. Más adelante, en el Capítulo 9, se tratarán de forma más completa estos términos, cuando se estudie el método de las tensiones en los nudos para circuitos con ondas sinusoidales estacionarias.

EJEMPLO 4.5. Resolver el circuito del Ejemplo 4.2 usando el método de las tensiones en los nudos.

El circuito se ha dibujado de nuevo en la Figura 4.5. Con dos nudos principales sólo se necesita una ecuación. Si se suponen todas las corrientes salientes en el nudo superior y se toma el nudo inferior como referencia,

$$\frac{V_1 - 20}{5} + \frac{V_1}{10} + \frac{V_1 - 8}{2} = 0$$

de donde $V_1 = 10$ V. Entonces $I_1 = (10 - 20)/5 = -2$ A (el signo menos indica que la corriente I_1 entra en el nudo 1); $I_2 = (10 - 8)/2 = 1$ A; $I_3 = 10/10 = 1$ A. La corriente I_3 del Ejemplo 4.2 es la que se indica con línea de puntos.

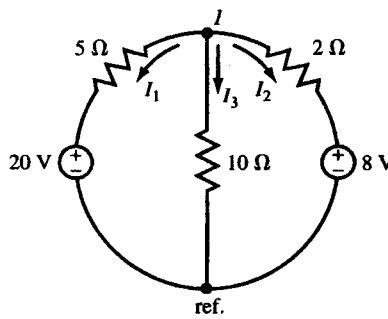


Figura 4.5.

4.5. RESISTENCIA DE ENTRADA

En los circuitos con una sola fuente es importante conocer los *bornes de conexión o entrada*. En la Figura 4.6 la tensión aplicada se designa por V_1 y la intensidad de corriente absorbida es I_1 . Puesto que sólo hay una fuente V_1 , la corriente I_1 viene dada por la expresión (7) del Ejemplo 4.4:

$$I_1 = V_1 \left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_R} \right)$$

La resistencia de entrada es la relación entre V_1 e I_1 :

$$R_{\text{input},1} = \frac{\Delta_R}{\Delta_{11}}$$

El lector comprobará que las unidades de Δ_R/Δ_{11} son Ω .

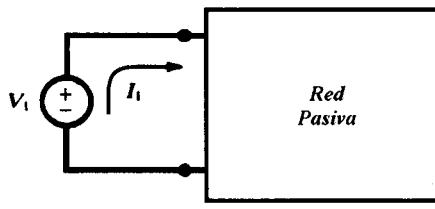


Figura 4.6.

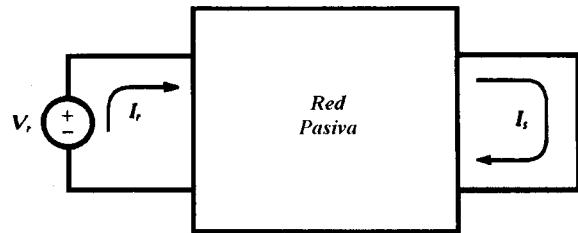


Figura 4.7.

4.6. RESISTENCIA DE TRANSFERENCIA

Una tensión aplicada en una parte de un circuito provoca una corriente en todas las ramas del mismo. Por ejemplo, una fuente de tensión conectada a una red pasiva produce una corriente de salida en una parte del circuito donde se conectaría una resistencia de carga. Se dice entonces que el circuito tiene una resistencia de transferencia. Consideremos el circuito pasivo de la Figura 4.7, donde la fuente de tensión se ha denominado V_r y la corriente de salida I_s . La ecuación de la corriente de malla para I_s contiene solamente un término, el debido a V_r en el determinante del numerador:

$$I_s = (0) \left(\frac{\Delta_{1s}}{\Delta_R} \right) + \dots + 0 + V_r \left(\frac{\Delta_{rs}}{\Delta_R} \right) + 0 + \dots$$

La resistencia de transferencia es la relación entre V_r e I_s :

$$R_{\text{transfer},rs} = \frac{\Delta_R}{\Delta_{rs}}$$

Como la matriz de resistencias es simétrica, $\Delta_{rs} = \Delta_{sr}$, se tendrá que:

$$R_{\text{transfer},rs} = R_{\text{transfer},sr}$$

Esto expresa una importante propiedad de los circuitos lineales. Si una determinada tensión en una malla r produce una determinada elevación de corriente en una malla s , entonces la misma tensión en la malla s produce la misma corriente en la malla r .

Consideremos ahora el caso más general con n -mallas y con varias fuentes de tensión. La solución para la corriente de la malla k puede escribirse en función de las resistencias de entrada y de transferencia [véanse las expresiones (7), (8) y (9) del Ejemplo 4.4]:

$$I_k = \frac{V_1}{R_{\text{transfer},1k}} + \cdots + \frac{V_{k-1}}{R_{\text{transfer},(k-1)k}} + \frac{V_k}{R_{\text{input},k}} + \frac{V_{k+1}}{R_{\text{transfer},(k+1)k}} + \cdots + \frac{V_n}{R_{\text{transfer},nk}}$$

Esta expresión no aporta nada nuevo matemáticamente, pero escrita en esta forma ilustra muy claramente el principio de superposición, poniendo de manifiesto cómo las resistencias controlan el efecto de las tensiones sobre una corriente de malla concreta. Si una determinada fuente se suprime y la corriente de malla se ve poco afectada, entonces es que la resistencia de transferencia es muy grande. La fuente V_k y las fuentes adyacentes a la malla k deberán contribuir de forma importante a la corriente I_k .

4.7. SIMPLIFICACIÓN DE CIRCUITOS

Los métodos de corrientes de malla y tensiones en los nudos son las principales técnicas de análisis de circuitos. Sin embargo, la resistencia equivalente en las ramas en serie y en paralelo (Secciones 3.4 y 3.5), combinadas con las reglas de la división de corrientes y tensiones, proporcionan otro método de análisis de circuitos. Este método es tedioso y requiere normalmente que se dibujen algunos circuitos adicionales. No obstante, el proceso de reducir el circuito proporciona una visión más clara del funcionamiento completo del mismo en términos de tensiones, corrientes y potencias. La reducción comienza por una exploración para detectar las combinaciones de resistencias en serie y en paralelo.

EJEMPLO 4.6. Calcular la potencia suministrada por la fuente de 60 V y la potencia absorbida en cada resistencia del circuito de la Figura 4.8.

$$R_{ab} = 7 + 5 = 12 \Omega$$

$$R_{cd} = \frac{(12)(6)}{12 + 6} = 4 \Omega$$

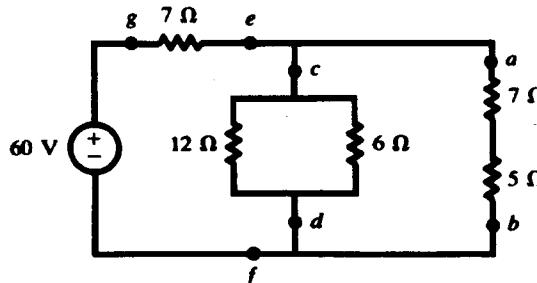


Figura 4.8.

Las equivalentes de las dos ramas están en paralelo (Figura 4.9) y darán:

$$R_{eq} = \frac{(4)(1)}{4 + 12} = 3 \Omega$$

Entonces ésta de 3Ω está en serie con la de 7Ω (Figura 4.10), así que para el circuito completo,

$$R_{eq} = 7 + 3 = 10 \Omega$$

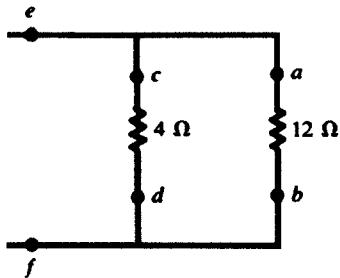


Figura 4.9.

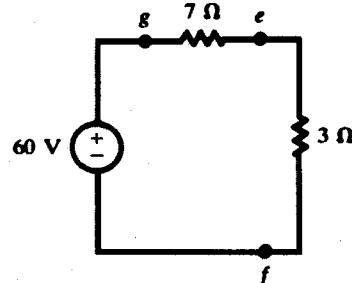


Figura 4.10.

La potencia total absorbida, que es igual a la suministrada por la fuente, puede ahora calcularse como

$$P_T = \frac{V^2}{R_{eq}} = \frac{(60)^2}{10} = 360 \text{ W}$$

Esta potencia está repartida entre R_{ge} y R_{ef} de la forma siguiente:

$$P_{ge} = P_{7\Omega} = \frac{7}{7 + 3} (360) = 252 \text{ W} \quad P_{ef} = \frac{3}{7 + 3} (360) = 108 \text{ W}$$

La potencia P_{ef} se divide a su vez entre R_{cd} y R_{ab} de la siguiente forma:

$$P_{cd} = \frac{12}{4 + 12} (108) = 81 \text{ W} \quad P_{ab} = \frac{4}{4 + 12} (108) = 27 \text{ W}$$

Finalmente, estas potencias se dividen entre las resistencias individuales como se indica:

$$P_{12\Omega} = \frac{6}{12 + 6} (81) = 27 \text{ W} \quad P_{7\Omega} = \frac{7}{7 + 5} (27) = 15,75 \text{ W}$$

$$P_{6\Omega} = \frac{12}{12 + 6} (81) = 54 \text{ W} \quad P_{5\Omega} = \frac{5}{7 + 5} (27) = 11,25 \text{ W}$$

4.8. SUPERPOSICIÓN

Un circuito lineal que contenga dos o más fuentes *independientes* puede analizarse obteniendo las tensiones y corrientes en las ramas debida a cada una de las fuentes por separado y luego superponiendo los resultados. Este principio es aplicable porque hay una relación

lineal entre corrientes y tensiones. Con fuentes *dependientes*, la superposición sólo puede utilizarse cuando las funciones de control son externas al circuito que tiene las fuentes, haciendo que los controles no cambien cuando actúa la fuente correspondiente. Las fuentes de tensión se suprimen sustituyéndolas por un cortocircuito; las fuentes de intensidad se suprimen por un circuito abierto. La superposición no puede aplicarse directamente para el cálculo de la potencia, ya que la potencia de un elemento es proporcional al cuadrado de la corriente o al cuadrado de la tensión, por lo que no es lineal.

Como una ilustración adicional de la superposición podemos considerar la ecuación (7) del Ejemplo 4.4:

$$I_1 = V_1 \left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_R} \right) + V_2 \left(\frac{\Delta_{21}}{\Delta_R} \right) + V_3 \left(\frac{\Delta_{31}}{\Delta_R} \right)$$

la cual contiene el principio de superposición implícitamente. Observar que los tres términos del segundo miembro se suman para obtener la corriente I_1 . Si hay fuentes en cada una de las mallas, entonces cada término contribuye a I_1 . Si solamente la malla 3 contiene una fuente, V_1 y V_2 serán cero y la corriente I_1 está determinada por el tercer término.

EJEMPLO 4.7. Calcular la intensidad de corriente que circula por la resistencia de $23\ \Omega$ de la Figura 4-11(a) aplicando el principio de superposición. Con la fuente de 200 V actuando sola, la fuente de intensidad de 20 A se sustituirá por un circuito abierto, Figura 4.11(b).

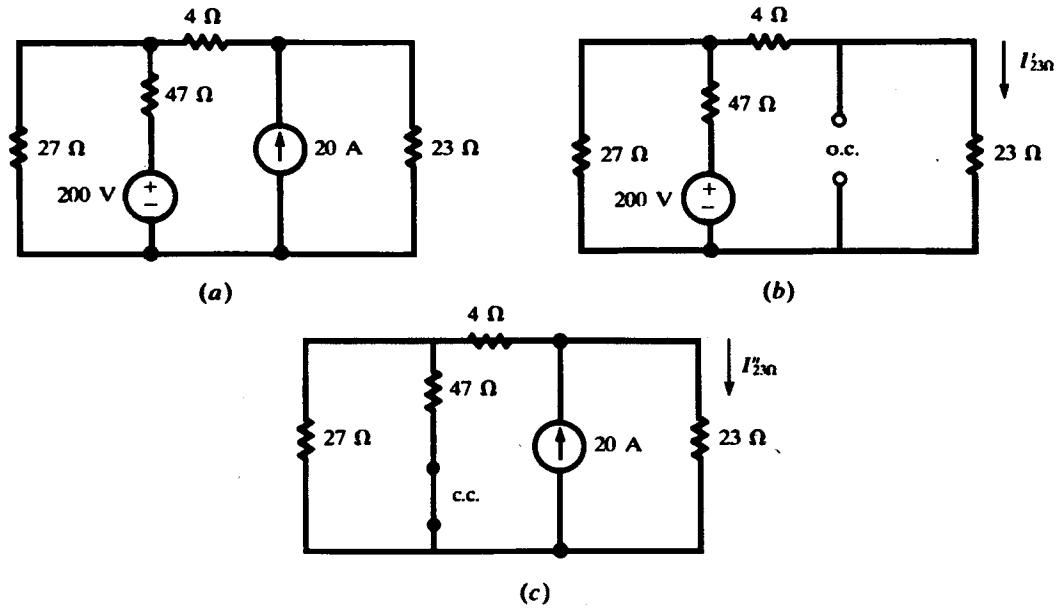


Figura 4.11.

$$R_{eq} = 47 + \frac{(27)(4 + 23)}{54} = 60,5 \Omega$$

$$I_T = \frac{200}{60,5} = 3,31 \text{ A}$$

$$I'_{23\Omega} = \left(\frac{27}{54}\right)(3,31) = 1,65 \text{ A}$$

Cuando la fuente de 20 A actúa sola, la fuente de 200 V se sustituye por un cortocircuito, Figura 4.11(c). La resistencia equivalente de la parte izquierda de la fuente es:

$$R_{eq} = 4 + \frac{(27)(47)}{74} = 21,15 \Omega$$

Entonces $I''_{23\Omega} = \left(\frac{21,15}{21,15 + 23}\right)(20) = 9,58 \text{ A}$

La corriente total por la resistencia de 23Ω es

$$I_{23\Omega} = I'_{23\Omega} + I''_{23\Omega} = 11,23 \text{ A}$$

4.9. TEOREMAS DE THÉVENIN Y NORTON

Un circuito lineal con resistencias que tiene una o más fuentes de tensión o de intensidad puede sustituirse por una fuente de tensión y una resistencia en serie (*Teorema de Thévenin*) o por una fuente de intensidad y una resistencia en paralelo (*Teorema de Norton*). La tensión se denomina *Tensión equivalente de Thévenin*, V' , y la intensidad de corriente de la fuente *Corriente equivalente de Norton*, I' . Las dos resistencias son la misma, R' . Cuando los terminales ab de la Figura 4.12 están *abiertos*, aparecerá una tensión entre los mismos.

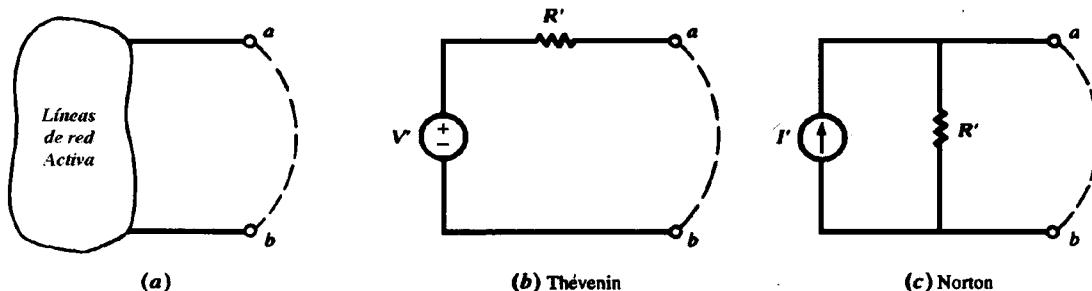


Figura 4.12.

La tensión V' del circuito equivalente Thévenin de la Figura 4.12(b) será la tensión ab en circuito abierto. Si se cortocircuitan los extremos ab , como se indica por la línea de puntos en la Figura 4.12(a), pasará una corriente. Esta corriente será la de la fuente de intensidad I' de la Figura 4.12(c) del circuito equivalente de Norton. Ahora, si los circuitos (b) y (c) son

equivalentes del mismo circuito activo, ellos serán equivalentes entre sí. Se deduce entonces que $R' = V'/I'$.

EJEMPLO 4.8. Obtener los circuitos equivalentes Thévenin y Norton del circuito de la Figura 4.13(a).

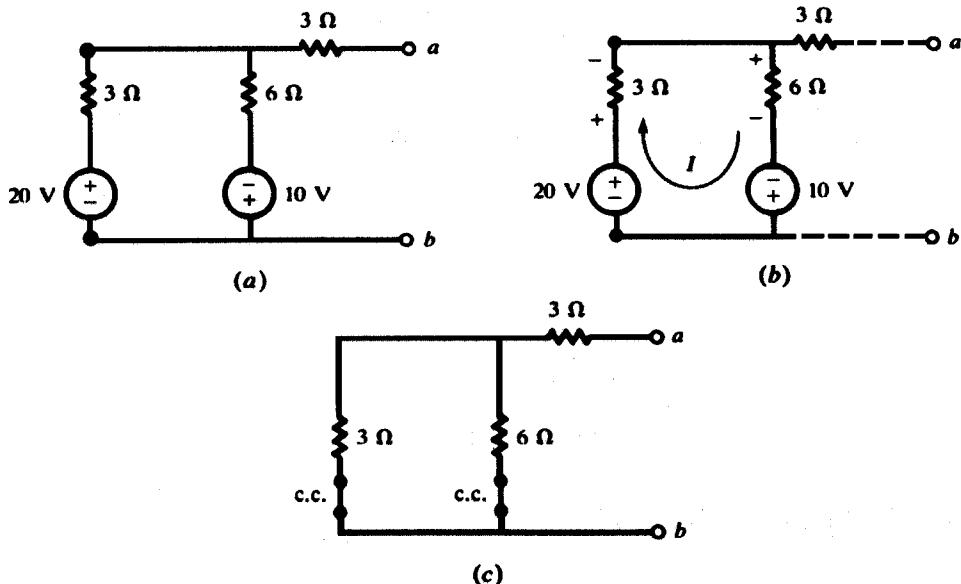


Figura 4.13.

Con los terminales ab abiertos, las dos fuentes y las resistencias de $3\ \Omega$ y de $6\ \Omega$ están atravesadas por una corriente en sentido de las agujas del reloj [Figura 4.13(b)] de:

$$I = \frac{20 + 10}{3 + 6} = \frac{30}{9}\text{ A}$$

Puesto que no pasa corriente por la resistencia de $3\ \Omega$ de la parte superior, la tensión de Thévenin puede calcularse a partir de cualquiera de las dos ramas activas:

$$V_{ab} = V' = 20 - \left(\frac{30}{9}\right)(3) = 10\text{ V}$$

$$V_{ab} = V' = \left(\frac{30}{9}\right)6 - 10 = 10\text{ V}$$

La resistencia R' se puede calcular cortocircuitando las fuentes de tensión [Figura 4.13(c)] y encontrando la resistencia equivalente del circuito entre los terminales ab :

$$R' = 3 + \frac{(3)(6)}{9} = 5\ \Omega$$

Cuando se hace un cortocircuito entre los terminales aparece una corriente I_{cc} debida a las dos fuentes. Suponiendo que la corriente pasa de a hacia b , por superposición tendremos

$$I_{cc} = I' = \left(\frac{6}{6+3} \right) \left[\frac{20}{3 + \frac{(3)(6)}{9}} \right] - \left(\frac{3}{3+3} \right) \left[\frac{10}{6 + \frac{(3)(3)}{6}} \right] = 2 \text{ A}$$

En la Figura 4.14 se representan los dos circuitos equivalentes. En este caso los valores de V' , R' e I' se obtuvieron de forma independiente. Como están relacionados por la ley de Ohm, dos de ellos pueden utilizarse para obtener el tercero.

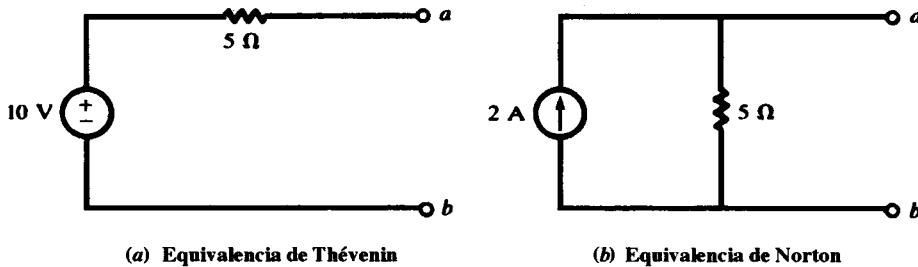


Figura 4.14.

La utilidad de los circuitos equivalentes Thévenin y Norton está clara cuando se tiene que estudiar un circuito con diferentes cargas, representadas por una resistencia. En la Figura 4.15 se tiene esta situación, en la que varias resistencias R_1 , R_2 , ..., R_n se pueden conectar una cada vez, y obtener la intensidad y la potencia en cada caso. Si esto se hubiese intentado con el circuito primitivo, la tarea habría sido tediosa y el tiempo empleado mayor.

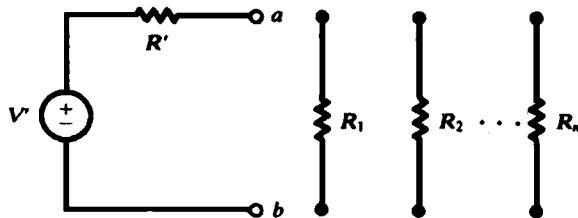


Figura 4.15.

4.10. TEOREMA DE TRANSFERENCIA DE MÁXIMA POTENCIA

A veces se quiere calcular la máxima potencia que es capaz de transferir un circuito activo a una resistencia exterior R_L . Suponiendo que el circuito es lineal, se puede reducir a un circuito equivalente como el de la Figura 4.16. Entonces

$$I = \frac{V'}{R' + R_L}$$

y así la potencia absorbida por la carga es

$$P_L = \frac{V'^2 R_L}{(R' + R_L)^2} = \frac{V'^2}{4R'} \left[1 - \left(\frac{R' - R_L}{R' + R_L} \right)^2 \right]$$

Se ve que P_L alcanza su valor máximo, $V'^2/4R'$, cuando $R_L = R'$, con lo que la potencia en R' es también $V'^2/4R'$. En consecuencia, cuando la potencia transferida es máxima, el rendimiento es el 50 por 100.

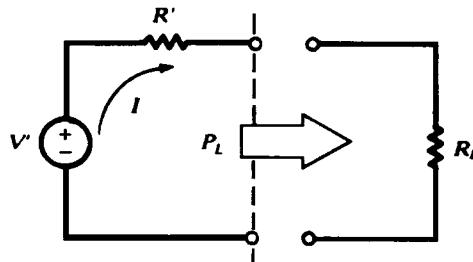


Figura 4.16.

PROBLEMAS RESUELTOS

- 4.1. Utilizando las corrientes por las ramas en el circuito de la Figura 4.17, calcular la corriente que pasa por la fuente de 60 V.

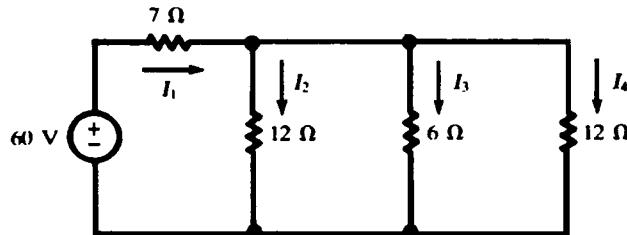


Figura 4.17.

La LKT y la LKC dan:

$$I_2(12) = I_3(6) \quad (10)$$

$$I_2(12) = I_4(12) \quad (11)$$

$$60 = I_1(7) + I_2(12) \quad (12)$$

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4 \quad (13)$$

Sustituyendo (10) y (11) en (13),

$$I_1 = I_2 + 2I_2 + I_2 = 4I_2 \quad (14)$$

Ahora sustituyendo (14) en (12):

$$60 = I_1(7) + \frac{1}{4}I_1(12) = 10I_1 \quad \text{o} \quad I_1 = 6 \text{ A}$$

4.2. Resolver el Problema 4.1 por el método de las corrientes de malla.

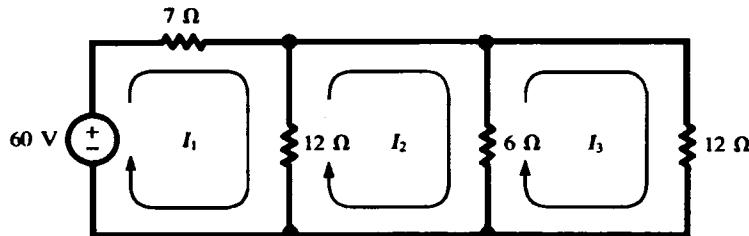


Figura 4.18.

Aplicando la LKC a cada malla (véase Figura 4.18) resulta:

$$\begin{aligned} 60 &= 7I_1 + 12(I_1 - I_2) \\ 0 &= 12(I_2 - I_1) + 6(I_2 - I_3) \\ 0 &= 6(I_3 - I_2) + 12I_3 \end{aligned}$$

Reordenando los términos y poniendo las ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{array}{lcl} 19I_1 - 12I_2 & = 60 \\ -12I_1 + 18I_2 - 6I_3 & = 0 \\ -6I_2 + 18I_3 & = 0 \end{array} \quad \text{o} \quad \begin{bmatrix} 19 & -12 & 0 \\ -12 & 18 & -6 \\ 0 & -6 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando la regla de Cramer para obtener I_1 ,

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 60 & -12 & 0 \\ 0 & 18 & -6 \\ 0 & -6 & 18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 19 & -12 & 0 \\ -12 & 18 & -6 \\ 0 & -6 & 18 \end{vmatrix}} = \frac{17280}{2880} = 6 \text{ A}$$

4.3. Resolver el circuito de los Problemas 4.1 y 4.2 por el método de las tensiones en los nudos. Véase Figura 4.19.

Con dos nudos principales sólo hace falta una ecuación:

$$\frac{V_1 - 60}{7} + \frac{V_1}{12} + \frac{V_1}{6} + \frac{V_1}{12} = 0$$

de donde $V_1 = 18 \text{ V}$. Entonces,

$$I_1 = \frac{60 - V_1}{7} = 6 \text{ A}$$

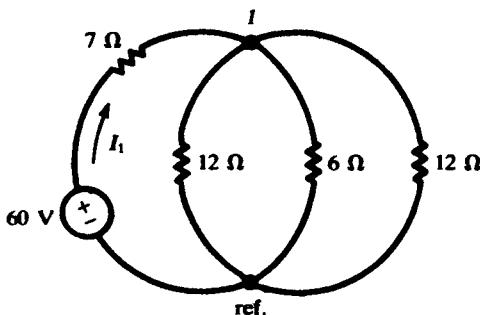


Figura 4.19.

- 4.4. Obtener la $R_{\text{in},1}$ del Problema 4.2 y utilizar el resultado para calcular I_1 .

$$R_{\text{in},1} = \frac{\Delta_R}{\Delta_{11}} = \frac{2880}{\begin{vmatrix} 18 & -6 \\ -6 & 18 \end{vmatrix}} = \frac{2880}{288} = 10 \Omega$$

Entonces

$$I_1 = \frac{60}{R_{\text{in},1}} = \frac{60}{10} = 6 \text{ A}$$

- 4.5. Obtener $R_{\text{transfer},12}$ y $R_{\text{transfer},13}$ para el circuito del Problema 4.2 y utilizar el resultado para calcular I_2 e I_3 .

El adjunto del elemento 1,2 de Δ_R tiene signo menos:

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -12 & -6 \\ 0 & 18 \end{vmatrix} = 216 \quad R_{\text{transfer},12} = \frac{\Delta_R}{\Delta_{12}} = \frac{2880}{216} = 13,33 \Omega$$

Entonces, $I_2 = 60/13,33 = 4,50 \text{ A}$.

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -12 & 18 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 72 \quad R_{\text{transfer},13} = \frac{\Delta_R}{\Delta_{13}} = \frac{2880}{72} = 40 \Omega$$

Entonces, $I_3 = 60/40 = 1,50 \text{ A}$.

- 4.6. Resolver el Problema 4.1 usando las corrientes de bucles indicadas en la Figura 4.20.

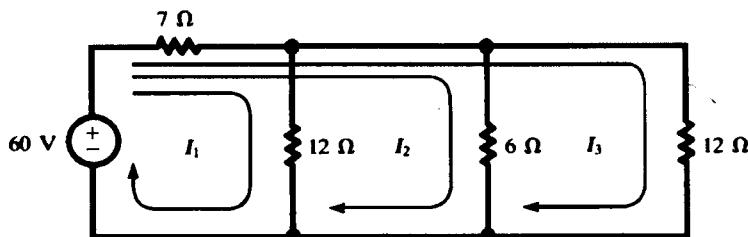


Figura 4.20

Los elementos de la matriz para incluir en la ecuación correspondiente se deducen de la observación del circuito siguiendo las indicaciones de la Sección 4.2.

$$\begin{bmatrix} 19 & 7 & 7 \\ 7 & 13 & 7 \\ 7 & 7 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 60 \\ 60 \end{bmatrix}$$

Así,

$$\Delta_R = \begin{bmatrix} 19 & 7 & 7 \\ 7 & 13 & 7 \\ 7 & 7 & 19 \end{bmatrix} = 2880$$

Observar que en el Problema 4.2 también es $\Delta_R = 2880$, aunque los elementos del determinante sean diferentes. *Todos los conjuntos de mallas o bucles válidos dan el mismo valor de Δ_R .* Los tres determinantes para los numeradores son:

$$N_1 = \begin{bmatrix} 60 & 7 & 7 \\ 60 & 13 & 7 \\ 60 & 7 & 19 \end{bmatrix} = 4320 \quad N_2 = 8642 \quad N_3 = 4320$$

Por consiguiente,

$$I_1 = \frac{N_1}{\Delta_R} = \frac{4320}{2880} = 1,5 \text{ A} \quad I_2 = \frac{N_2}{\Delta_R} = 3 \text{ A} \quad I_3 = \frac{N_3}{\Delta_R} = 1,5 \text{ A}$$

La corriente proporcionada por la fuente de tensión de 60 V es la suma de las tres corrientes de bucle, $I_1 + I_2 + I_3 = 6 \text{ A}$.

- 4.7. Escribir la ecuación matricial de las corrientes de malla para el circuito de la Figura 4.21, por análisis del mismo, y calcular las corrientes correspondientes.

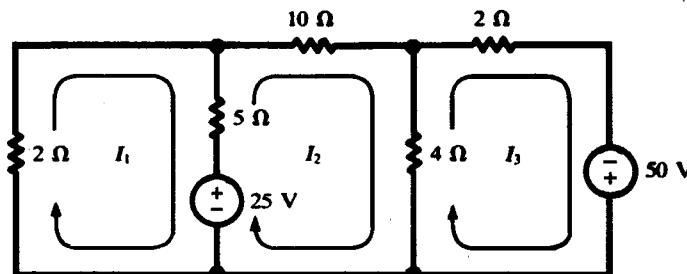


Figura 4.21.

$$\begin{bmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 19 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 \\ 25 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Resolviendo,

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} -25 & -5 & 0 \\ 25 & 19 & -4 \\ 50 & -4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 19 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{(-700)}{536} = -1,31 \text{ A}$$

Análogamente,

$$I_2 = \frac{N_2}{\Delta_R} = \frac{1700}{536} = 3,17 \text{ A} \quad I_3 = \frac{N_3}{\Delta_R} = \frac{5600}{536} = 10,45 \text{ A}$$

4.8. Resolver el Problema 4.7 por el método de las tensiones en los nudos.

El circuito se ha dibujado de nuevo en la Figura 4.22, con dos nudos principales designados 1 y 2, y el tercero se toma como nudo de referencia. Según la LKC, la corriente neta por el nudo 1 debe ser cero.

$$\frac{V_1}{2} + \frac{V_1 - 25}{5} + \frac{V_1 - V_2}{10} = 0$$

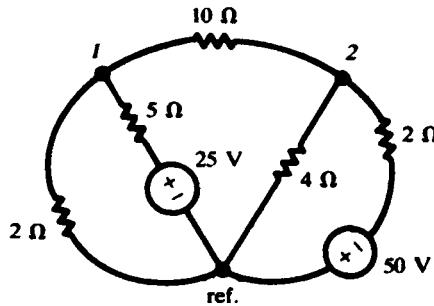


Figura 4.22.

De forma análoga, en el nudo 2,

$$\frac{V_2 - V_1}{10} + \frac{V_2}{4} + \frac{V_2 + 50}{2} = 0$$

Poniendo las dos ecuaciones en forma matricial,

$$\left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 5 \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} & -25 \end{array} \right] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -25 \end{bmatrix}$$

El determinante de los coeficientes y los determinantes del numerador son

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0,80 & -0,10 \\ -0,10 & 0,85 \end{vmatrix} = 0,670$$

$$N_1 = \begin{vmatrix} 5 & -0,10 \\ -25 & 0,85 \end{vmatrix} = 1,75 \quad N_2 = \begin{vmatrix} 0,80 & 5 \\ -0,10 & -25 \end{vmatrix} = -19,5$$

De donde,

$$V_1 = \frac{1,75}{0,670} = 2,61 \text{ V} \quad V_2 = \frac{-19,5}{0,670} = -29,1 \text{ V}$$

En función de estas tensiones, las corrientes en la Figura 4.21 se calculan como sigue:

$$I_1 = \frac{-V_1}{2} = -1,31 \text{ A} \quad I_2 = \frac{V_1 - V_2}{10} = 3,17 \text{ A} \quad I_3 = \frac{V_2 + 50}{2} = 10,45 \text{ A}$$

- 4.9. Calcular, en el circuito de la Figura 4.23, el valor V_s que hace que $I_0 = 7,5 \text{ mA}$.

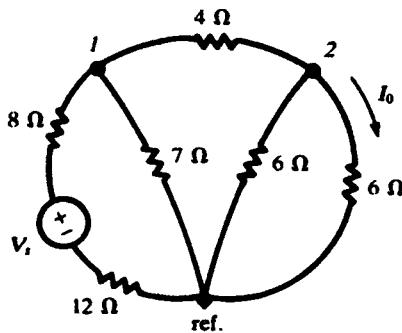


Figura 4.23.

Directamente por observación del circuito se escribe la ecuación matricial del método de las tensiones en los nudos.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{20} + \frac{1}{7} + \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_s/20 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo para V_2 ,

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0,443 & V_s/20 \\ -0,250 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0,443 & -0,250 \\ -0,250 & 0,583 \end{vmatrix}} = 0,0638 V_s$$

Entonces $7,5 \cdot 10^{-3} = I_0 = \frac{V_2}{6} = \frac{0,0638 V_s}{6}$

de donde $V_s = 0,705$ V.

- 4.10. En el circuito de la Figura 4.24, calcular la intensidad de corriente que circula por la resistencia de 10Ω .

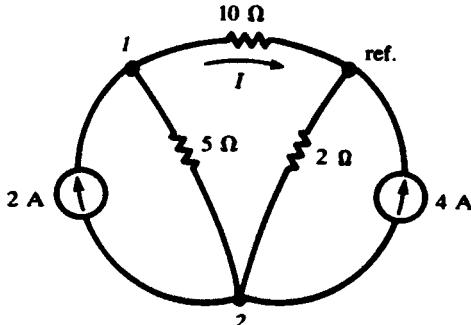


Figura 4.24.

La ecuación en forma matricial para los nudos obtenida directamente de la figura es

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} + \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -0,20 \\ -6 & 0,70 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0,30 & -0,20 \\ -0,20 & 0,70 \end{vmatrix}} = 1,18 \text{ V}$$

Entonces, $I = V_1/10 = 0,118$ A.

- 4.11. Calcular la tensión V_{ab} del circuito de la Figura 4.25.

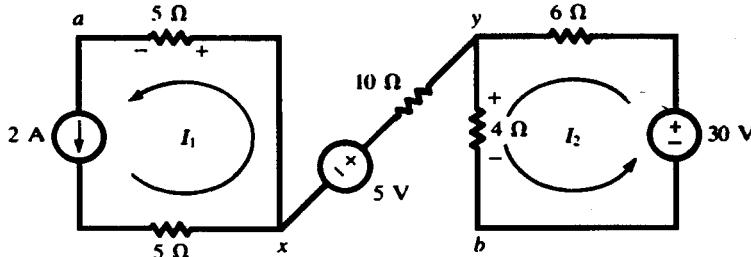


Figura 4.25.

Los dos bucles cerrados son independientes y no hay paso de corriente por la rama de interconexión.

$$I_1 = 2 \text{ A} \quad I_2 = \frac{30}{10} = 3 \text{ A}$$

$$V_{ab} = V_{ax} + V_{xy} + V_{yb} = -I_1(5) - 5 + I_2(4) = -3 \text{ V}$$

- 4.12. Para la red en escalera de la Figura 4.26, obtener la resistencia de transferencia como la relación entre V_{in} e I_4 .

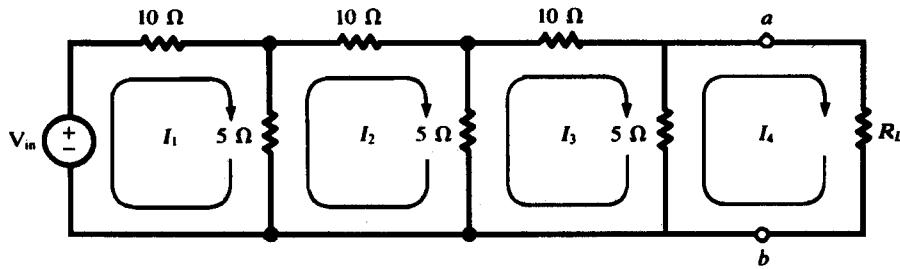


Figura 4.26.

Por observación directa del circuito resulta

$$\begin{bmatrix} 15 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 20 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 20 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 + R_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{in} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_R = 5125 R_L + 18750 \quad N_4 = 125 V_{in}$$

$$I_4 = \frac{N_4}{\Delta_R} = \frac{V_{in}}{41 R_L + 150} \text{ (A)} \quad \text{y} \quad R_{\text{transfer},14} = \frac{V_{in}}{I_4} = 41 R_L + 150 \text{ (\Omega)}$$

- 4.13. Obtener el circuito equivalente Thévenin de la Figura 4.26, a la izquierda de los terminales ab .

La corriente de cortocircuito I_{cc} se obtiene a partir de las tres corrientes de malla de la Figura 4.27.

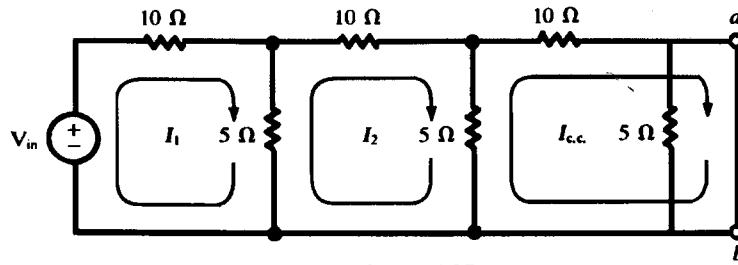


Figura 4.27.

$$\begin{bmatrix} 15 & -5 & 0 \\ -5 & 20 & -5 \\ 0 & -5 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_{cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{in} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_{cc} = \frac{V_{in} \begin{vmatrix} -5 & 20 \\ 5 & -5 \end{vmatrix}}{\Delta_R} = \frac{V_{in}}{150}$$

La tensión de circuito abierto V_{ca} es la tensión en la resistencia de 5Ω , como se indica en la Figura 4.28.

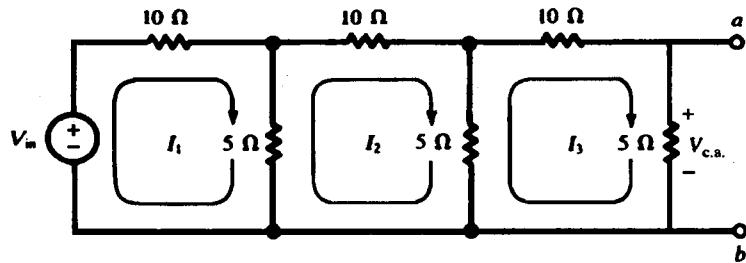


Figura 4.28.

$$\begin{bmatrix} 15 & -5 & 0 \\ -5 & 20 & -5 \\ 0 & -5 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{in} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \frac{25V_{in}}{5125} = \frac{V_{in}}{205} \text{ (A)}$$

Entonces, la fuente de Thévenin $V' = V_{ca} = I_3(5) = V_{in}/41$, y

$$R_{Th} = \frac{V_{ca}}{I_{cc}} = \frac{150}{41} \Omega$$

El circuito equivalente de Thévenin es el de la Figura 4.29. Con R_L conectada entre ab la intensidad de corriente es

$$I_4 = \frac{V_{in}/41}{(150/41) + R_L} = \frac{V_{in}}{41R_L + 150} \text{ (A)}$$

de acuerdo con el Problema 4.12.

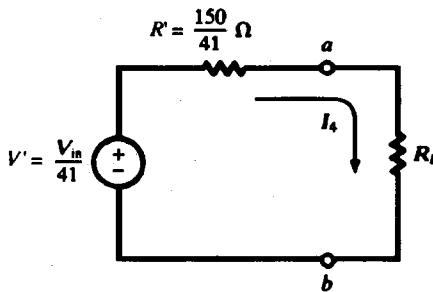


Figura 4.29.

- 4.14.** Utilizando superposición, calcular la intensidad I debida a cada fuente de tensión en el circuito de la Figura 4.30.

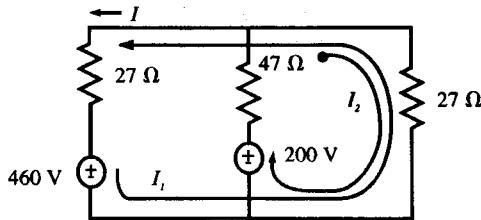


Figura 4.30.

Las corrientes de bucle se eligen de tal forma que por cada fuente circule solamente una de ellas.

$$\begin{bmatrix} 54 & -27 \\ -27 & 74 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -460 \\ 200 \end{bmatrix}$$

De la fuente de tensión de 460 V,

$$I'_1 = I' = \frac{(-460)(74)}{3267} = -10,42 \text{ A}$$

y de la de 200 V

$$I''_1 = I'' = \frac{-(200)(-27)}{3267} = 1,65 \text{ A}$$

Entonces,

$$I = I' + I'' = -10,42 + 1,65 = -8,77 \text{ A}$$

- 4.15.** Obtener la intensidad de corriente por cada resistencia de la Figura 4-31(a) utilizando el método de reducción del circuito.

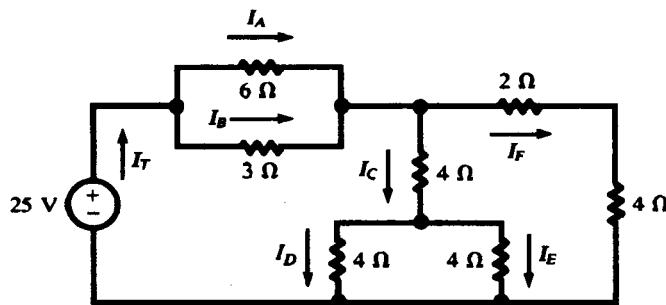


Figura 4.31(a).

Un primer paso es calcular la resistencia equivalente de las que se encuentran en paralelo. Para las de $6\ \Omega$ y la de $3\ \Omega$, $R_{eq} = (6)(3)/(6 + 3) = 2\ \Omega$. Para las dos resistencias de $4\ \Omega$, $R_{eq} = 2\ \Omega$. Entonces el circuito se vuelve a dibujar con las resistencias que están en serie sumadas [Figura 4.31(b)]. Ahora las dos resistencias de $6\ \Omega$ que están en paralelo tienen $R_{eq} = 3\ \Omega$, y ésta se encuentra en serie con la de $2\ \Omega$. Así, $R_T = 5\ \Omega$, como se indica en la Figura 4.31(c). La corriente resultante es

$$I_T = \frac{25}{5} = 5\text{ A}$$

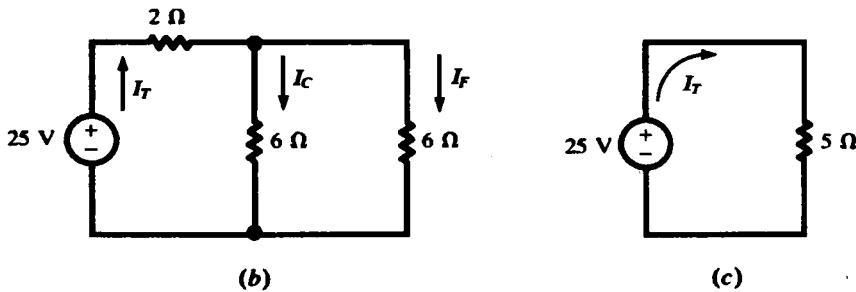


Figura 4.31 (cont.).

Ahora, para calcular las corrientes por las ramas, se utilizarán los circuitos de la Figura 4.31(b) y 4.31(a).

$$I_C = I_F = \frac{1}{2}I_T = 2,5\text{ A}$$

$$I_D = I_E = \frac{1}{2}I_C = 1,25\text{ A}$$

$$I_A = \frac{3}{6 + 3} I_T = \frac{5}{3}\text{ A}$$

$$I_B = \frac{6}{6 + 3} I_T = \frac{10}{3}\text{ A}$$

- 4.16. Calcular el valor de la resistencia regulable que proporciona la máxima transferencia de potencia a través de los terminales *ab* del circuito de la Figura 4.32.

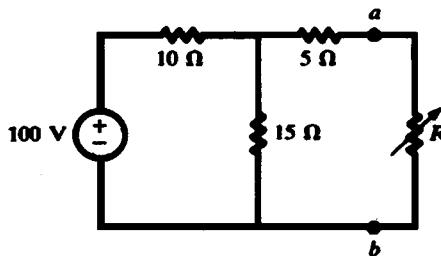


Figura 4.32.

Primero se calcula el Thévenin equivalente, obteniéndose $V' = 60$ V y $R' = 11 \Omega$. De acuerdo con la Sección 4.10, la máxima potencia transferida se presenta cuando $R = R' = 11 \Omega$, y vale

$$P_{\max} = \frac{V'^2}{4R'} = 81,82 \text{ W}$$

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

- 4.17. Aplicar el método de las corrientes de mallas al circuito de Figura 4.33 y escribir la ecuación matricial directamente. Obtener la corriente I_1 mediante el desarrollo del determinante del numerador por los elementos de la columna que tienen las tensiones de las fuentes, comprobando que cada fuente contribuye con una corriente de 2,13 A a I_1 .

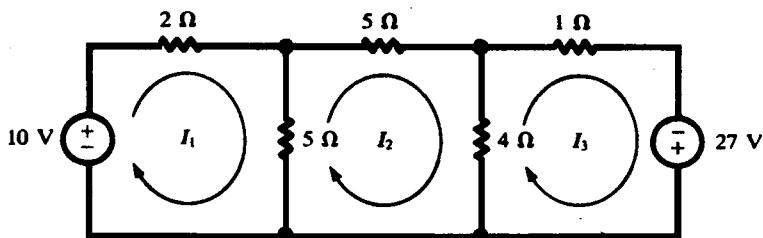


Figura 4.33.

- 4.18. En la Figura 4.34 se indican las corrientes de bucle de un determinado circuito. Escribir la ecuación matricial y obtener las tres intensidades.

Solución: 3,55 A, -1,98 A, -2,98 A.

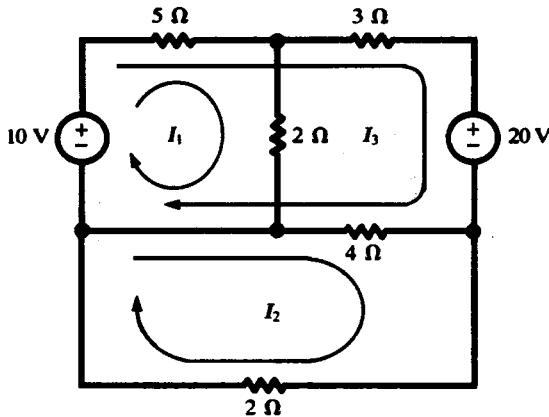


Figura 4.34.

- 4.19. El circuito del Problema 4.18 se ha vuelto a dibujar en la Figura 4.35 para solucionarlo por el método de las tensiones en los nudos. Calcular las tensiones en los nudos V_1 y V_2 y comprobar las corrientes obtenidas en el Problema 4.18.

Solución: 7,11 V, -3,96 V.

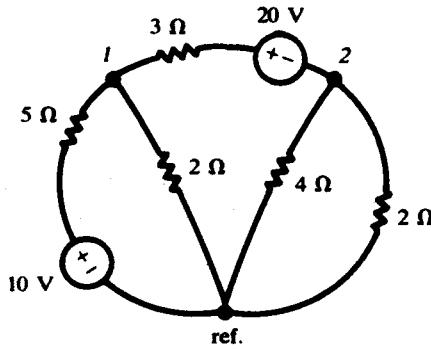


Figura 4.35.

- 4.20. En el circuito de la Figura 4.36, $I_0 = 7,5$ mA. Utilizando el método de las corrientes de malla, calcular el valor de V_s de la fuente de tensión.

Solución: 0,705 V.

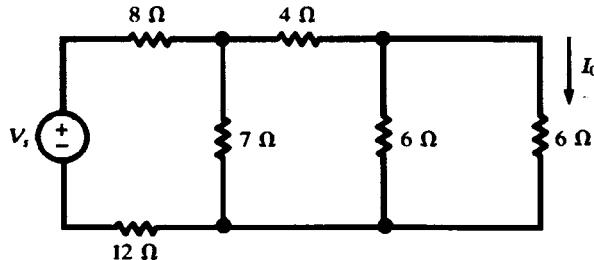


Figura 4.36.

- 4.21. Utilizando el determinante adecuado del Problema 4.20, calcular la resistencia de entrada vista desde la fuente de tensión V_s . Comprobar el resultado por el método de reducción de la red.

Solución: $23,5 \Omega$.

- 4.22. En el circuito de la Figura 4.36, calcular la resistencia de transferencia como relación entre la corriente I_0 y la tensión V_s .

Solución: 94Ω .

- 4.23. Obtener las corrientes de malla del circuito de la Figura 4.37.

Solución: 5 A, 1 A, 0,5 A.

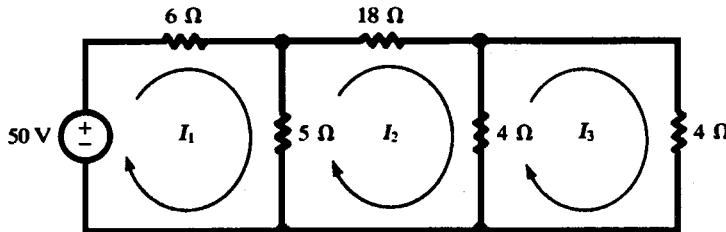


Figura 4.37.

- 4.24. Usando las matrices del Problema 4.23, calcular $R_{\text{input},1}$, $R_{\text{transfer},12}$ y $R_{\text{transfer},13}$.

Solución: 10Ω , 50Ω , 100Ω .

- 4.25. Obtener las cuatro corrientes de malla del circuito de la Figura 4.38.

Solución: 2,11 A, -0,263 A, -2,34 A, 0,426 A.

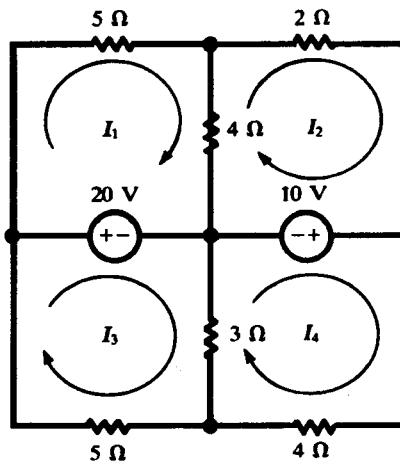


Figura 4.38.

- 4.26. Para el circuito de la Figura 4.39 calcular V_{ca} , I_{cc} y R' en los extremos ab , utilizando el método de las corrientes de malla o las tensiones en los nudos. Suponer que el terminal a es positivo respecto del b .

Solución: $-6,29 \text{ V}$, $-0,667 \text{ A}$, $9,44 \Omega$.

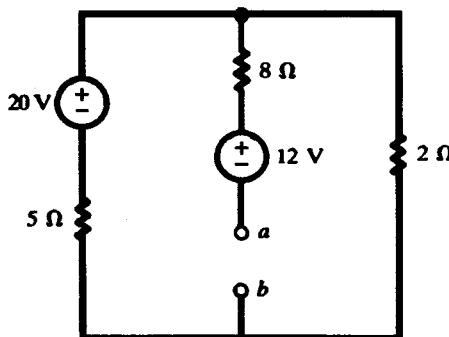


Figura 4.39.

- 4.27. Utilizando el método de las tensiones en los nudos, calcular V_{ca} e I_{cc} desde los terminales ab del circuito de la Figura 4.40. Suponer que a es positivo respecto de b .

Solución: $-11,2 \text{ V}$, $-7,37 \text{ A}$.

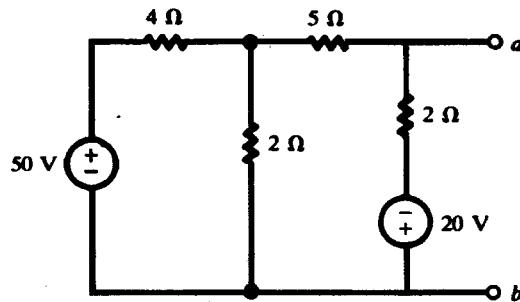


Figura 4.40.

- 4.28. Calcular las intensidades de corriente por cada resistencia del circuito de la Figura 4.41 por el método de reducción del mismo.

Solución: Por la de $2,45 \Omega$, $3,1 \text{ A}$; por la de $6,7 \Omega$, $0,855 \text{ A}$; por la de 10Ω , $0,466 \text{ A}$; por la de 12Ω , $0,389 \text{ A}$; por la de $17,47 \Omega$, $0,595 \text{ A}$; por la de $6,3 \Omega$, $1,65 \text{ A}$.

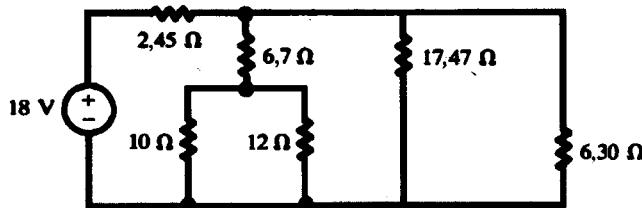


Figura 4.41.

- 4.29. Los dos amperímetros del circuito de la Figura 4.42 indican 1,7 A. Si la fuente de alimentación suministra 300 W, calcular R_1 y R_2 .

Solución: 23,9 Ω, 443 Ω.

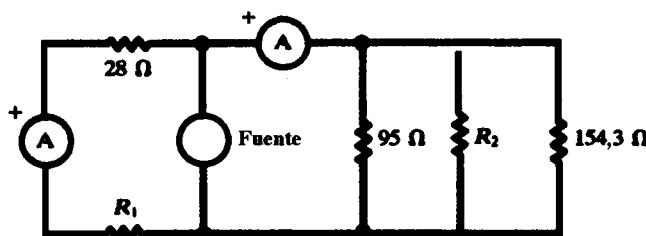


Figura 4.42.

- 4.30. En el circuito de la Figura 4.43 las dos fuentes de intensidad proporcionan I' e I'' , siendo $I' + I'' = I$. Calcular estas corrientes utilizando superposición.

Solución: 1,2 A, 15 A, 16,2 A.

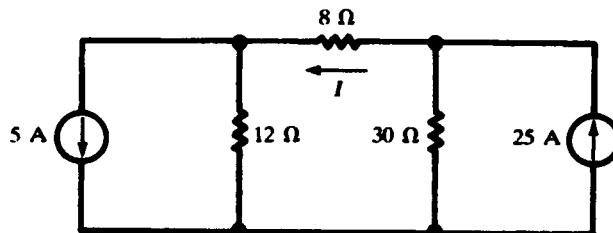


Figura 4.43.

- 4.31. Calcular la corriente I en el circuito de la Figura 4.44.

Solución: -12 A.

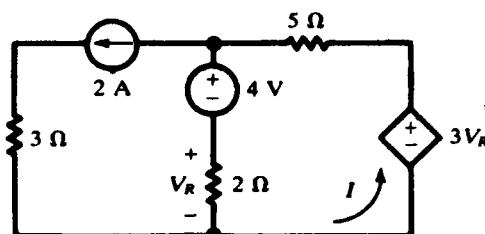


Figura 4.44.

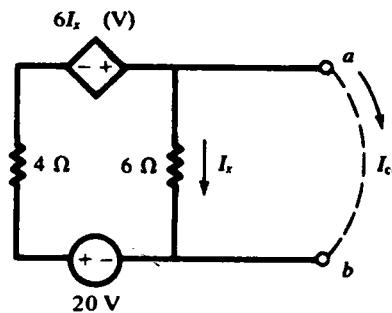


Figura 4.45.

- 4.32. Calcular los circuitos equivalentes Thévenin y Norton de la Figura 4.45.

Solución: $V' = 30$ V, $I' = 5$ A, $R' = 6$ Ω.

- 4.33. En el circuito de la Figura 4.46 calcular la potencia máxima que el circuito activo a la izquierda de los terminales *ab* puede suministrar a la resistencia variable *R*.

Solución: 8,44 W.

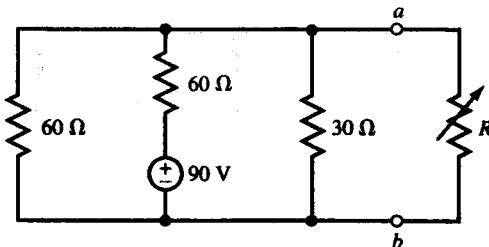


Figura 4.46.

- 4.34. En condiciones de vacío un generador de CC tiene una tensión entre sus terminales de 120 V. Cuando suministra una corriente de 40 A, la tensión entre sus terminales cae a 112 V. Encontrar los circuitos equivalentes Thévenin y Norton.

Solución: $V' = 120$ V, $I' = 600$ A, $R' = 0,2$ Ω.

- 4.35. El circuito del Problema 4.14 se ha dibujado de nuevo en la Figura 4.47 y se han señalado los terminales *a* y *b*. Obtener el circuito equivalente Thévenin o Norton de la parte izquierda de los terminales *ab* y calcular la intensidad *I*.

Solución: -8,77 A.

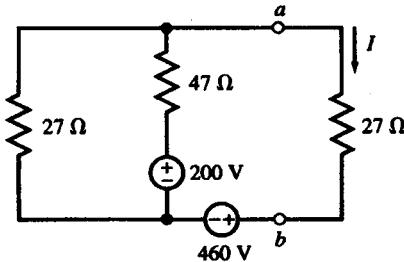


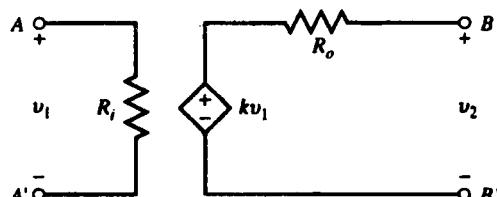
Figura 4.47.

CAPÍTULO 5

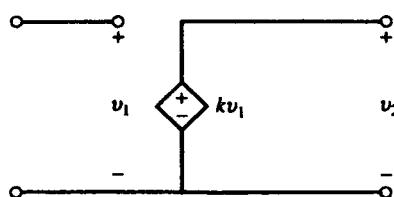
Amplificadores y circuitos con amplificadores operacionales

5.1. MODELO DE UN AMPLIFICADOR

Un *amplificador* es un dispositivo que aumenta el valor de una señal. El núcleo de un amplificador es una fuente controlada por una señal de entrada. Un modelo simplificado de un amplificador de tensión es el que se representa en la Figura 5.1(a). Los terminales de referencia de la entrada y de la salida suelen conectarse juntos y son el nudo de referencia común. Cuando la salida está en circuito abierto tenemos que $v_2 = kv_1$, donde k es el factor de multiplicación, llamado ganancia en circuito abierto. Las resistencias R_i y R_o son las resistencias de entrada (input) y la de salida (output) del amplificador, respectivamente. Para el mejor funcionamiento del amplificador es deseable que R_i sea grande y R_o sea pequeña. En un amplificador ideal, $R_i = \infty$ y $R_o = 0$, como se ve en la Figura 5.1(b). Si los valores de las resistencias difieren de los anteriores, la ganancia total puede quedar reducida.



(a)



(b)

Figura 5.1.

EJEMPLO 5.1. Una fuente de tensión real de v_s con una resistencia interna R_s se conecta a la entrada de un amplificador de tensión que tiene una resistencia de entrada R_i , como se indica en la Figura 5.2. Calcular v_2/v_s .

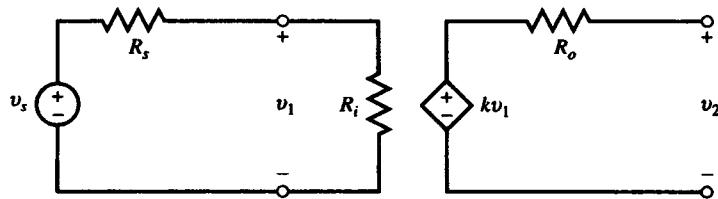


Figura 5.2.

La tensión de entrada al amplificador se obtiene repartiendo v_s entre R_i y R_s :

$$v_1 = \frac{R_i}{R_i + R_s} v_s$$

La tensión de salida v_2 es

$$v_2 = kv_1 = \frac{kR_i}{R_i + R_s} v_s$$

de donde se deduce

$$\frac{v_2}{v_s} = \frac{R_i}{R_i + R_s} k \quad (1)$$

El amplificador carga la fuente de tensión. La ganancia en lazo abierto se reduce por el factor $R_i/(R_i + R_s)$.

EJEMPLO 5.2. En la Figura 5.3 una fuente real de tensión v_s con resistencia interna R_s alimenta una carga R_l a través de un amplificador con unas resistencias de entrada y salida R_i y R_o , respectivamente. Calcular v_2/v_s .

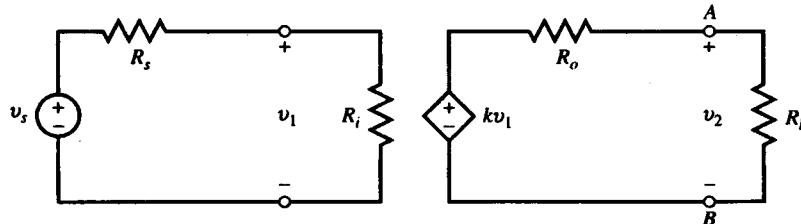


Figura 5.3.

Por división de tensión,

$$v_1 = \frac{R_i}{R_i + R_s} v_s$$

Análogamente, la tensión de salida es

$$v_2 = kv_1 \frac{R_l}{R_l + R_o} = k \frac{R_i R_l}{(R_i + R_s)(R_l + R_o)} v_s \quad \text{o} \quad \frac{v_2}{v_s} = \frac{R_i}{R_i + R_s} \cdot \frac{R_l}{R_l + R_o} k \quad (2)$$

Observar que la ganancia en lazo abierto se reduce aún más por el factor $R_l/(R_l + R_o)$, el cual hace que la tensión de salida dependa de la carga.

5.2. REALIMENTACIÓN EN CIRCUITOS AMPLIFICADORES

La ganancia de un amplificador puede ser controlada por la realimentación de una parte de su salida a su entrada como se hace con el amplificador ideal de la Figura 5.4 a través de la resistencia R_2 . La relación de realimentación $R_2/(R_1 + R_2)$ afecta a la ganancia total y hace al amplificador menos sensible a las variaciones de k .

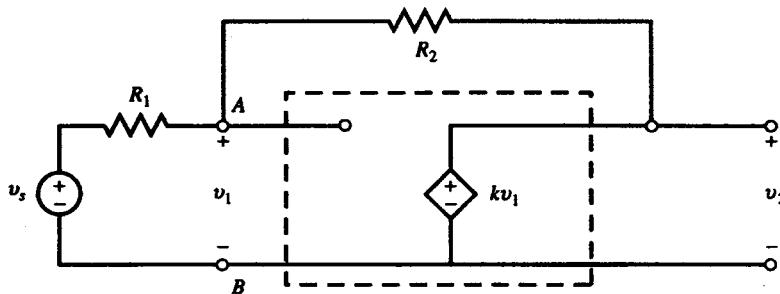


Figura 5.4.

EJEMPLO 5.3. Obtener v_2/v_s en la Figura 5.4 y expresarlo en función de la relación $b = R_2/(R_1 + R_2)$.

Del amplificador sabemos que

$$v_2 = kv_1 \quad \text{o} \quad v_1 = v_2/k \quad (3)$$

Aplicando la LKC al nudo A,

$$\frac{v_1 - v_s}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = 0 \quad (4)$$

Sustituyendo v_1 de (3) en (4) se obtiene:

$$\frac{v_2}{v_s} = \frac{R_2 k}{R_2 + R_1 - R_1 k} = (1 - b) \frac{k}{1 - bk} \quad \text{donde} \quad b = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (5)$$

EJEMPLO 5.4. En la Figura 5.5, $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ y $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$. a) Calcular v_2/v_s en función de la ganancia en lazo abierto. b) Calcular v_2/v_s para $k = 100$ y 1000 y comentar el resultado.

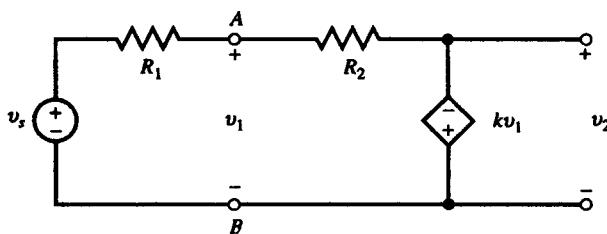


Figura 5.5.

- a) Las Figuras 5.4 y 5.5 difieren solamente en la polaridad de la fuente dependiente de tensión. Para calcular v_2/v_s se utiliza el resultado del Ejemplo 5.3 y se cambia k por $-k$ en (5).

$$\frac{v_2}{v_s} = (1 - b) \frac{-k}{1 + bk} \quad \text{donde} \quad b = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{v_2}{v_s} = \frac{-5k}{6 + k}$$

- b) Para $k = 100$, $v_2/v_s = -4,72$; para $k = 1000$, $v_2/v_s = -4,97$. Esto es, un aumento de diez veces en el valor de k provoca únicamente un 5,3 por 100 de cambio en v_2/v_s , ya que $(4,97 - 4,72)/4,72 = 5,3\%$. Obsérvese que para valores mayores de k , v_2/v_s se approxima a $-R_2/R_1$, que es independiente de k .

5.3. AMPLIFICADORES OPERACIONALES

El *amplificador operacional* (amp. op.) es un dispositivo con dos terminales de entrada denominados $+$ y $-$ o bien «no-inversora» e «inversora», respectivamente. El dispositivo se conecta además a una fuente de corriente continua ($+V_{cc}$ y $-V_{cc}$). La referencia común para la entrada, la salida y la fuente de alimentación está fuera del amp. op. y se denomina *tierra* (Figura 5.6).

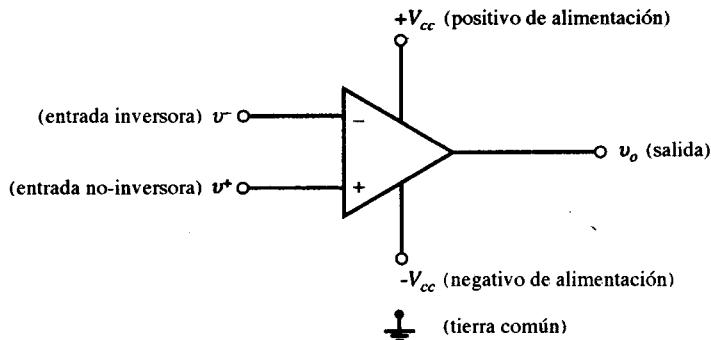


Figura 5.6.

La tensión de salida v_o depende de $v_d = v^+ - v^-$. Despreciando los efectos capacitivos, la función de transferencia es la indicada en la Figura 5.7. En la zona lineal $v_o = Av_d$. La ganancia A en circuito abierto es generalmente muy alta. El valor de v_o se satura cuando la entrada v_d está por encima de la zona lineal $|v_d| > V_{cc}/A$, alcanzando valores de $+V_{cc}$ y $-V_{cc}$.

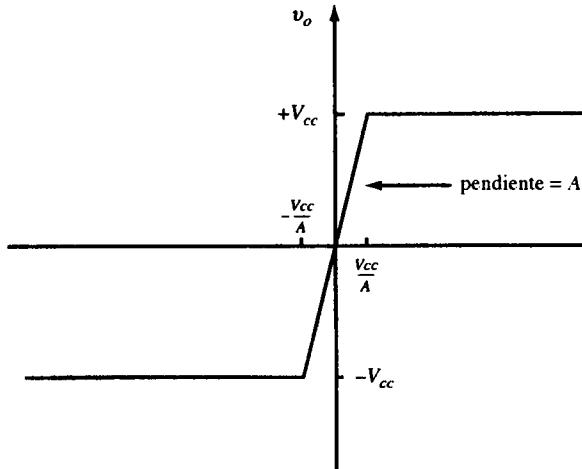


Figura 5.7.

En la Figura 5.8 se representa un modelo de amp. op. en la zona lineal, en donde se han omitido las conexiones de la fuente de alimentación por simplicidad. En la práctica, R_i es grande y R_o es pequeña, y A es del orden de 10^5 a algunos millones. El modelo de la Figura 5.8 es válido cuando la tensión de salida se encuentre dentro del intervalo $+V_{cc}$ y $-V_{cc}$. V_{cc} es generalmente de 5 a 18 V.

EJEMPLO 5.5. En el amp. op. de la Figura 5.8, $V_{cc} = 15$ V, $A = 10^5$ y $v^- = 0$. Calcular el límite superior de v^+ para funcionamiento lineal.

$$|v_o| = |10^5 v^+| < 15 \text{ V} \quad |v^+| < 15 \cdot 10^{-5} \text{ V} = 150 \mu\text{V}$$

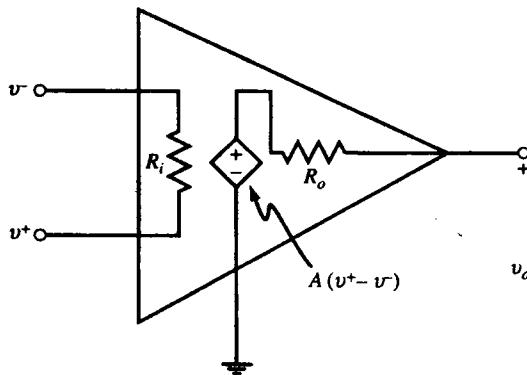


Figura 5.8.

EJEMPLO 5.6. En el amp. op. de la Figura 5.8, $V_{cc} = 5$ V, $A = 10^5$, $v^- = 0$ y $v^+ = 100 \operatorname{sen} 2\pi t$ (μ V). Calcular y dibujar la salida v_o en circuito abierto.

La entrada al amp. op. es $v_d = v^+ - v^- = (100 \operatorname{sen} 2\pi t) \cdot 10^{-6}$ (V). Cuando el amp. op. funciona en la zona lineal, $v_o = 10^5 v_d = 10 \operatorname{sen} 2\pi t$ (V). La salida debe estar entre +5 y -5 V (Figura 5.9). La saturación empieza cuando $v_o = 10 \operatorname{sen} 2\pi t$ alcanza el valor de 5 V. Esto ocurre para $t = 1/12$ s. El amp. op. deja el nivel de 5 V de saturación para $t = 5/12$. Análogamente, el amp. op. está en saturación desde $t = 7/12$ a $11/12$ s. Un ciclo completo de la salida, en voltios, desde $t = 0$ hasta 1 s es

$$v_o = \begin{cases} 5 & 1/12 < t < 5/12 \\ -5 & 7/12 < t < 11/12 \\ 10 \operatorname{sen} 2\pi t & \text{para los otros} \end{cases}$$

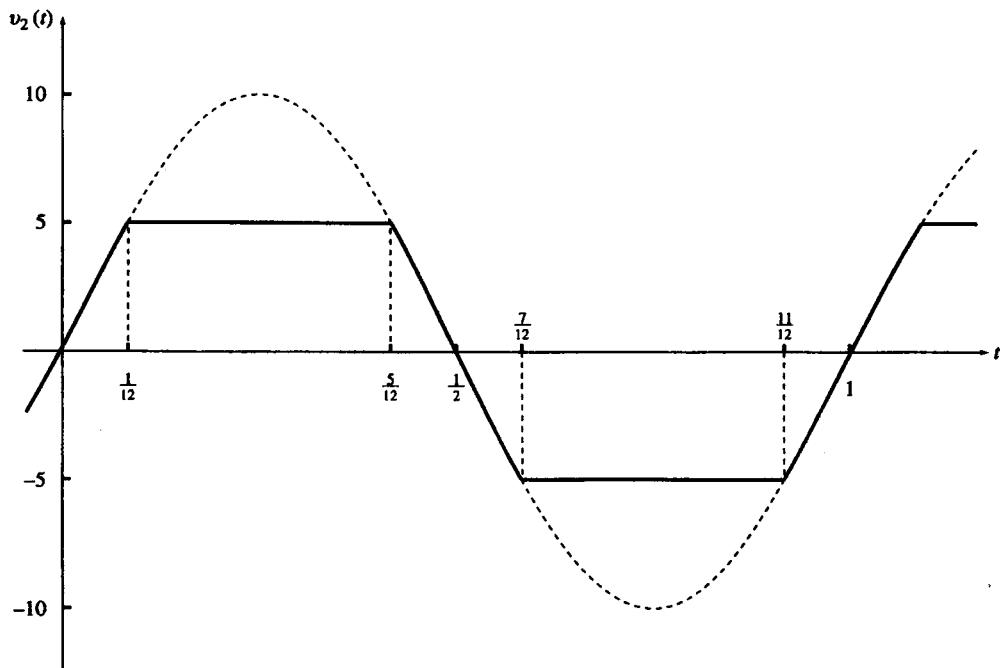


Figura 5.9.

EJEMPLO 5.7. Repetir el Ejemplo 5.6 para $v^- = 25 \mu$ V y $v^+ = 50 \operatorname{sen} 2\pi t$ (μ V).

$$v_d = v^+ - v^- = (50 \operatorname{sen} 2\pi t)10^{-6} - 25 \cdot 10^{-6} = 50 \cdot 10^{-6}(\operatorname{sen} 2\pi t - 1/2)$$
 (V)

Cuando el amp. op. está en la zona lineal su salida es

$$v_o = 10^5 v_d = 5(\operatorname{sen} 2\pi t - 1/2)$$
 (V)

v_o se satura en el nivel -5 V cuando $5(\operatorname{sen} 2\pi t - 1/2) < -5$, en el intervalo $7/12 < t < 11/12$ (véase Figura 5.10). Un ciclo de v_o , en voltios, desde $t = 0$ a 1 s. es

$$v_o = \begin{cases} \dots -5 & 7/12 < t < 11/12 \\ \dots 5(\operatorname{sen} 2\pi t - 1/2) & \text{en los otros} \end{cases}$$

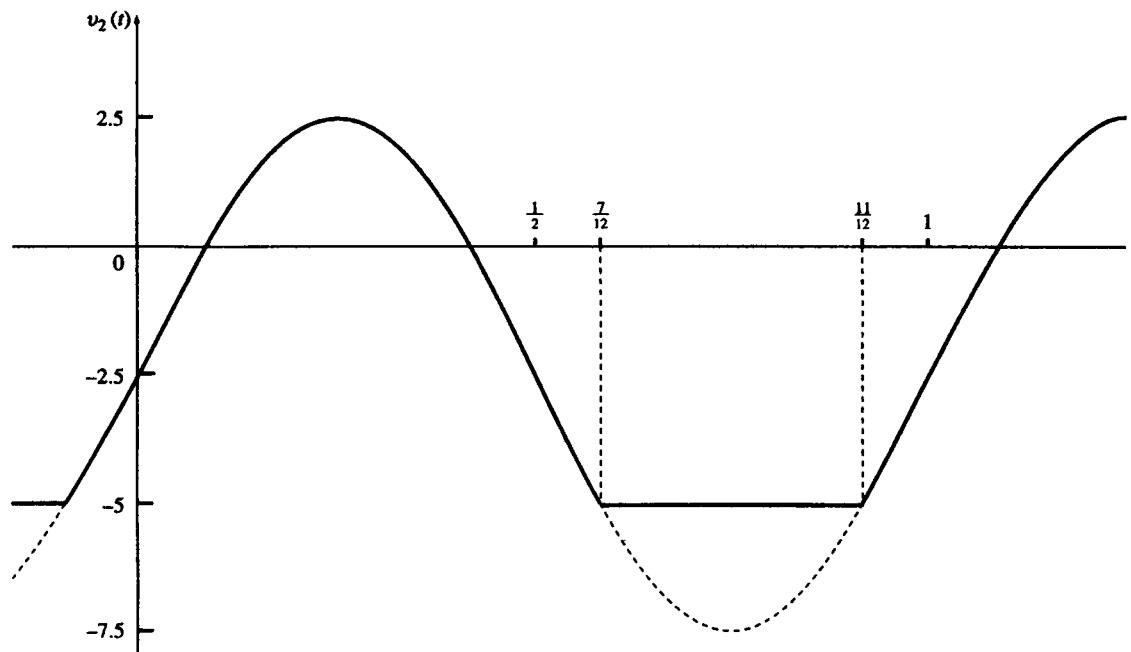


Figura 5.10.

EJEMPLO 5.8. En la Figura 5.11, $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 50 \text{ k}\Omega$, $R_i = 500 \text{ k}\Omega$ y $A = 10^5$. Obtener v_2/v_1 . Suponer que el amplificador no está saturado.

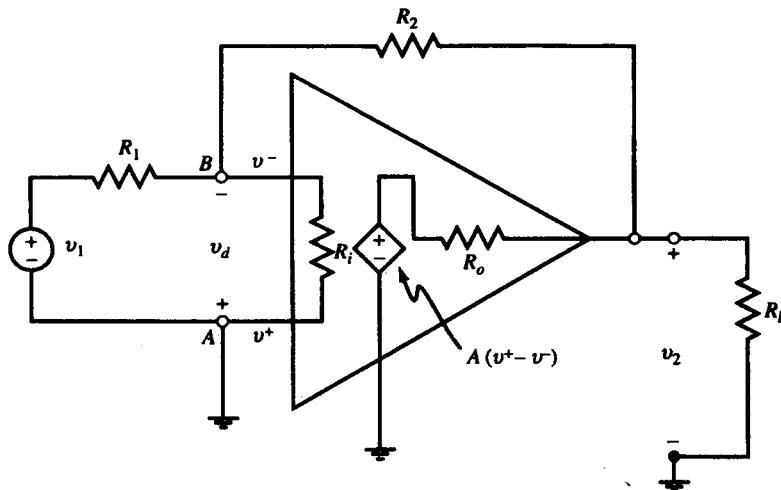


Figura 5.11.

La suma de las intensidades que llegan al nudo B es cero. Observar que $v_A = 0$ y $v_B = -v_d$. Por tanto,

$$\frac{v_1 + v_d}{10} + \frac{v_d}{500} + \frac{v_2 + v_d}{50} = 0 \quad (6)$$

Por ser $R_o = 0$, tendremos:

$$v_2 = Av_d = 10^5 v_d \quad \text{o bien} \quad v_d = 10^{-5} v_2 \quad (7)$$

Sustituyendo v_d de (7) en (6), la relación v_2/v_1 que se obtiene es

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{-5}{1 + 10^{-5} + 5 \cdot 10^{-5} + 0,1 \cdot 10^{-5}} = -5$$

5.4. ANÁLISIS DE CIRCUITOS CON AMP. OP. IDEALES

En un amplificador operacional ideal, R_i y A son infinitos y R_o es cero. Por tanto, la corriente por las entradas inversora y no-inversora es nula en el amp. op., y si éste no está saturado, dichas entradas tienen la misma tensión. A lo largo de este capítulo supondremos que los amp. op. son lineales y funcionan en la zona lineal siempre que no se especifique lo contrario.

EJEMPLO 5.9. El amp. op. de la Figura 5.12 es ideal y no está saturado. Calcular: a) v_2/v_1 ; b) la resistencia de entrada v_1/v_2 , y c) i_1 , i_2 , p_1 (potencia suministrada por v_1) y p_2 (potencia disipada en las resistencias), suponiendo que $v_1 = 0,5$ V.

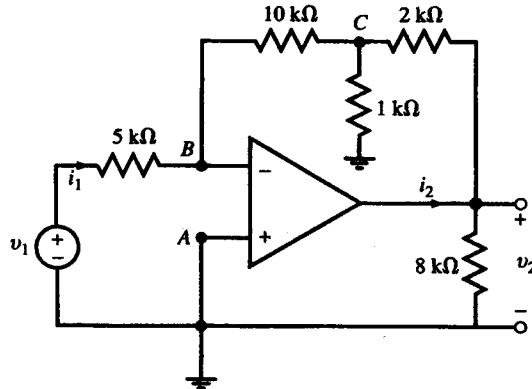


Figura 5.12.

- a) El terminal no-inversor A está conectado a tierra y, por tanto, $v_A = 0$. Puesto que el amp. op. es ideal y no está saturado, $v_B = 0$. Aplicando la LKC a los nudos B y C , y teniendo en cuenta que no pasa corriente por el amp. op., tendremos:

$$\text{Nudo } B: \quad \frac{v_1}{5} + \frac{v_C}{10} = 0 \quad \text{o sea} \quad v_C = -2v_1 \quad (8)$$

$$\text{Nudo } C: \quad \frac{v_C}{10} + \frac{v_C}{1} + \frac{v_C - v_2}{2} = 0 \quad \text{o sea} \quad v_2 = 3,2v_C \quad (9)$$

Sustituyendo v_C de (8) en (9),

$$v_2 = -6,4v_1 \quad \text{o sea} \quad v_2/v_1 = -6,4$$

- b) Con $v_B = 0$, $i_1 = v_1/5000$, y así

$$\text{resistencia de entrada} = v_1/i_1 = 5 \text{ k}\Omega$$

- c) La intensidad de entrada es $i_1 = v_1/5000$. Dado que $v_1 = 0,5 \text{ V}$, $i_1 = 0,5/5000 = 0,1 \text{ mA}$.

Para calcular i_2 aplicamos la LKC a la salida del amp. op.:

$$i_2 = \frac{v_2}{8000} + \frac{v_2 - v_C}{2000}$$

De la parte a), $v_2 = -3,2 \text{ V}$ y $v_C = -1 \text{ V}$. Por tanto, $i_2 = 1,5 \text{ mA}$.

La potencia suministrada por v_1 es

$$p_1 = v_1 i_1 = v_1^2 / 5000 = 50 \cdot 10^{-6} \text{ W} = 50 \mu\text{W}$$

La potencia en las resistencias son

1 k Ω :	$p_{1\text{k}\Omega} = v_C^2 / 1000 = 0,001 \text{ W} = 1000 \mu\text{W}$
2 k Ω :	$p_{2\text{k}\Omega} = (v_2 - v_C)^2 / 2000 = 0,00242 \text{ W} = 2420 \mu\text{W}$
5 k Ω :	$p_{5\text{k}\Omega} = v_1^2 / 5000 = 0,00005 \text{ W} = 50 \mu\text{W}$
8 k Ω :	$p_{8\text{k}\Omega} = v_2^2 / 8000 = 0,00128 \text{ W} = 1280 \mu\text{W}$
10 k Ω :	$p_{10\text{k}\Omega} = v_C^2 / 10000 = 0,0001 \text{ W} = 100 \mu\text{W}$

La potencia total disipada en las resistencias es

$$p_2 = p_{1\text{k}\Omega} + p_{2\text{k}\Omega} + p_{5\text{k}\Omega} + p_{8\text{k}\Omega} + p_{10\text{k}\Omega} = 1000 + 2420 + 50 + 1280 + 100 = 4850 \mu\text{W}$$

5.5. CIRCUITO INVERSOR

En un *circuito inversor* la señal de entrada se conecta a través de una resistencia R_1 al terminal inversor del amp. op. y la tensión en el terminal de salida realimenta al terminal inversor a través de una resistencia R_2 . El terminal no-inversor del amp. op. se conecta a tierra (véase Figura 5.13).

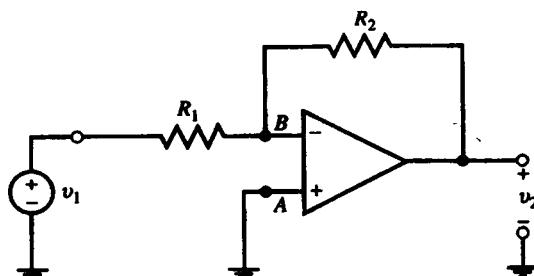


Figura 5.13.

Para calcular la ganancia v_2/v_1 se aplica la LKC a las corrientes que llegan al nudo B:

$$\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{v_2}{v_1} = -\frac{R_2}{R_1} \quad (10)$$

La ganancia es negativa y está exclusivamente determinada por la elección de las resistencias. La resistencia de entrada al circuito es R_1 .

5.6. CIRCUITO SUMADOR

La suma ponderada de varias tensiones en un circuito se puede obtener utilizando el circuito de la Figura 5.14. Este circuito recibe el nombre de *circuito sumador*, y es una extensión del circuito inversor.

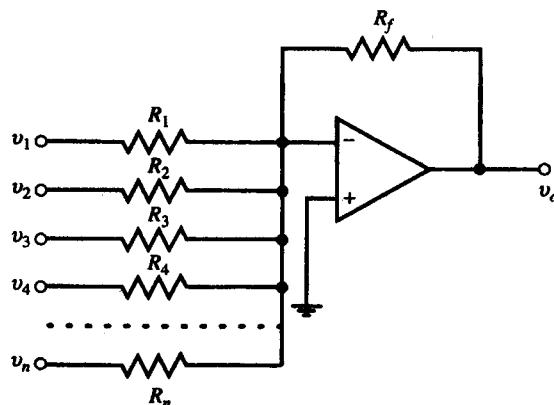


Figura 5.14.

Para calcular la salida se aplica la LKC al nudo inversor:

$$\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \dots + \frac{v_n}{R_n} + \frac{v_o}{R_f} = 0$$

de donde

$$v_o = - \left(\frac{R_f}{R_1} v_1 + \frac{R_f}{R_2} v_2 + \dots + \frac{R_f}{R_n} v_n \right) \quad (11)$$

EJEMPLO 5.10. Tomemos el circuito de la Figura 5.14 con cuatro entradas con $R_1 = 1$, $R_2 = 1/2$, $R_3 = 1/4$, $R_4 = 1/8$ y $R_f = 1$, todos en $\text{k}\Omega$. Las tensiones de entrada son 0 o 1 V. Calcular v_o en función de v_4 , v_3 , v_2 , v_1 con los siguientes bloques de datos de entrada:

- a) $v_4 = 1 \text{ V}$ $v_3 = 0$ $v_2 = 0$ $v_1 = 1 \text{ V}$
- b) $v_4 = 1 \text{ V}$ $v_3 = 1 \text{ V}$ $v_2 = 1 \text{ V}$ $v_1 = 0$

De (11)

$$v_o = -(8v_4 + 4v_3 + 2v_2 + v_1)$$

Sustituyendo de v_1 a v_4 obtenemos:

- a) $v_o = -9 \text{ V}$
- b) $v_o = -14 \text{ V}$

El conjunto $\{v_4, v_3, v_2, v_1\}$ es una secuencia binaria que contiene cuatro bits de valores alto (1 V) y bajo (0 V). Las series de entradas a) y b) corresponden a los números binarios $(1001)_2 = (9)_{10}$ y $(1110)_2 = (14)_{10}$, respectivamente. Con las entradas de 0 V (baja) y 1 V (alta), el circuito transforma un número binario representado por la serie de entrada $\{v_4, v_3, v_2, v_1\}$ en una tensión negativa, la cual, medida en voltios, es igual a la representación en base 10 de la entrada. El circuito es un convertidor digital-a-analógico.

5.7. CIRCUITO NO-INVERSOR

En un *circuito no-inversor* la señal de entrada llega al terminal no-inversor del amp. op. El terminal inversor se conecta a la salida a través de una resistencia R_2 y también se conecta a tierra a través de otra resistencia, R_1 (véase Figura 5.15).

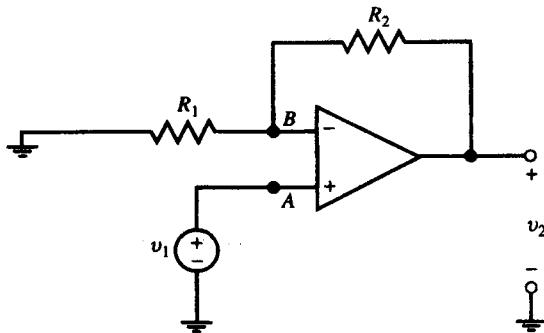


Figura 5.15.

Para calcular la ganancia v_2/v_1 se aplica la LKC al nudo B. Observar que los terminales A y B tienen la misma tensión v_1 y que el amp. op. no consume corriente.

$$\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = 0 \quad \text{de donde} \quad \frac{v_2}{v_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \quad (12)$$

La ganancia v_2/v_1 es positiva y mayor o igual que uno. La resistencia de entrada del circuito es infinita y el amp. op. no consume corriente.

EJEMPLO 5.11. Calcular v_2/v_1 en el circuito de la Figura 5.16.

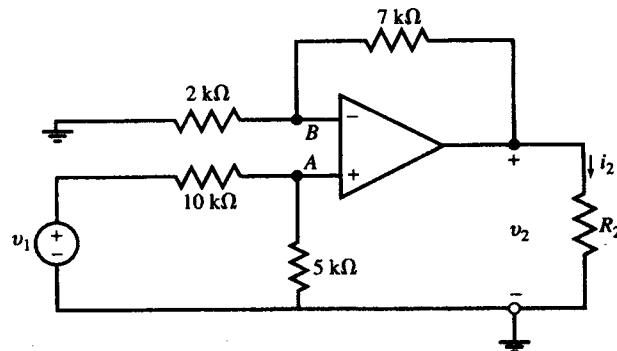


Figura 5.16.

Primero se calcula v_A por división de v_1 entre las resistencias de $10 \text{ k}\Omega$ y $5 \text{ k}\Omega$.

$$v_A = \frac{5}{5 + 10} v_1 = \frac{1}{3} v_1$$

De (12) obtenemos:

$$v_2 = \left(1 + \frac{7}{2}\right) v_A = \frac{9}{2} v_A = \frac{9}{2} \left(\frac{1}{3} v_1\right) = 1,5 v_1 \quad \text{y} \quad \frac{v_2}{v_1} = 1,5$$

Otro método:

Se calcula v_B por división entre las resistencias de $2 \text{ k}\Omega$ y $7 \text{ k}\Omega$, y con $v_B = v_A$.

$$v_B = \frac{2}{2 + 7} v_2 = \frac{2}{9} v_2 = \frac{1}{3} v_1 \quad \text{y} \quad \frac{v_2}{v_1} = 1,5$$

EJEMPLO 5.12. Determinar v_o en la Figura 5.17 en función de v_1 , v_2 , v_3 y de los elementos del circuito.

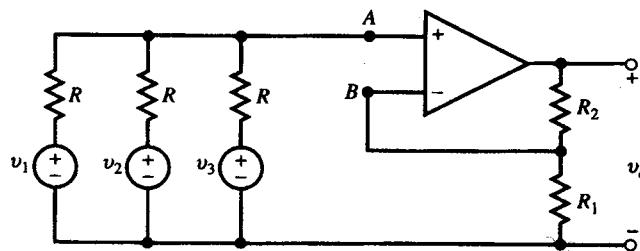


Figura 5.17.

Primero, se calcula v_A aplicando la LKC al nudo A.

$$\frac{v_1 - v_A}{R} + \frac{v_2 - v_A}{R} + \frac{v_3 - v_A}{R} = 0 \quad \text{de donde} \quad v_A = \frac{1}{3} (v_1 + v_2 + v_3) \quad (13)$$

De (12) y (13) tenemos:

$$v_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_A = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) (v_1 + v_2 + v_3) \quad (14)$$

5.8. SEGUIDOR DE TENSIÓN

El amp. op. en el circuito de la Figura 5.18(a) proporciona una ganancia unidad en amplificación, por lo que $v_2 = v_1$, ya que $v_1 = v^+$, $v_2 = v^-$ y $v^+ = v^-$. La salida v_2 sigue a la entrada v_1 . Suministrando i_l a R_b , el amp. op. elimina el efecto de carga de R_l sobre la fuente de tensión. Por tanto, funciona como un «buffer».

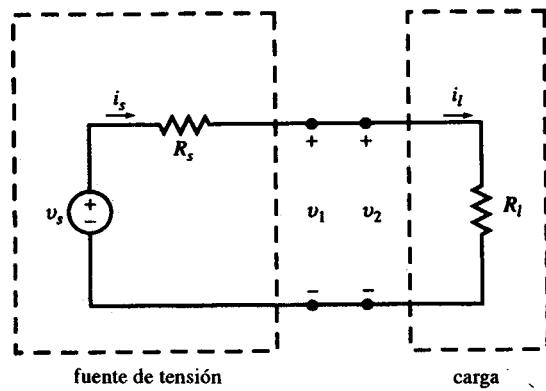
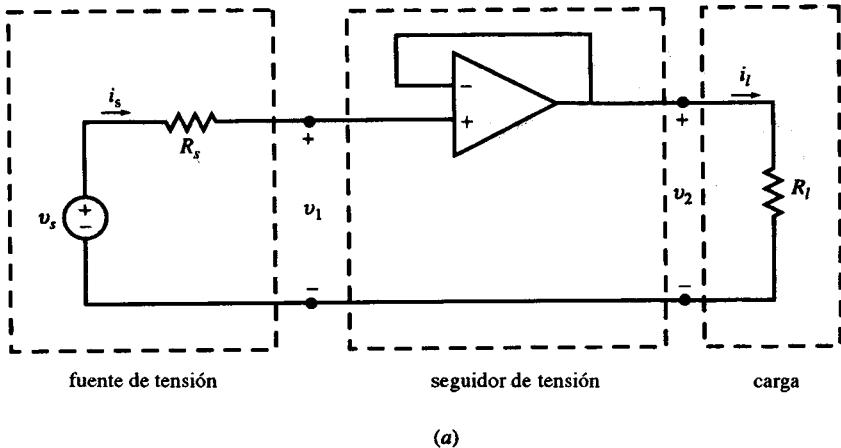


Figura 5.18.

EJEMPLO 5.13. a) Calcular i_s , v_l , v_2 e i_l en la Figura 5.18(a) y (b). Comparar estos resultados con los que se obtienen cuando la fuente y la carga se conectan directamente como en la Figura 5.18(b).

- b) Con el amp. op. del circuito [Figura 5.18(a)] tenemos:

$$i_s = 0 \quad v_1 = v_s \quad v_2 = v_1 = v_s \quad i_l = v_s/R_l$$

El amp. op. seguidor de tensión no demanda corriente de la fuente de señal v_s . Por tanto, v_s llega a la carga sin ninguna reducción debida al paso de la corriente eléctrica por la carga. La corriente por R_l está proporcionada por el amp. op.

- c) Sin el amp. op. [Figura 5.18(b)] tenemos:

$$i_s = i_l = \frac{v_s}{R_l + R_s} \quad \text{y} \quad v_1 = v_2 = \frac{R_l}{R_l + R_s} v_s$$

La corriente por R_l pasa por R_s y produce una caída de tensión. La tensión, v_2 , de la carga depende de R_l .

5.9. AMPLIFICADORES SUSTRATOR Y DIFERENCIADOR

Una fuente de señal v_f sin conexión a tierra se llama *fuente flotante*. Estas señales pueden amplificarse por el circuito de la Figura 5.19.

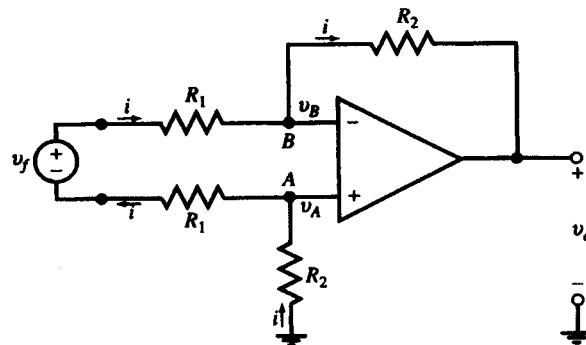


Figura 5.19.

Aquí los dos terminales de entrada A y B del amp. op. tienen la misma tensión. Además, escribiendo la LKT a lo largo del lazo de la entrada, tenemos:

$$v_f = 2R_1 i \quad \text{de donde} \quad i = v_f/2R_1$$

Las entradas del amp. op. no demandan corriente y, por tanto, la corriente i fluye a través de la resistencia R_2 . Aplicando la LKT alrededor del lazo del amp. op. tenemos:

$$v_o + R_2 i + R_2 i = 0 \quad v_o = -2R_2 i = -2R_2 v_f/2R_1 = -(R_2/R_1)v_f \quad (15)$$

En el caso especial de que se conecten dos fuentes de tensión v_1 y v_2 con tierra común a las entradas inversora y no-inversora del circuito, respectivamente (véase Figura 5.20), tendremos $v_f = v_1 - v_2$ y

$$v_o = (R_2/R_1)(v_2 - v_1) \quad (16)$$

EJEMPLO 5.14. Calcular v_o en función de v_1 y v_2 del circuito de la Figura 5.20.

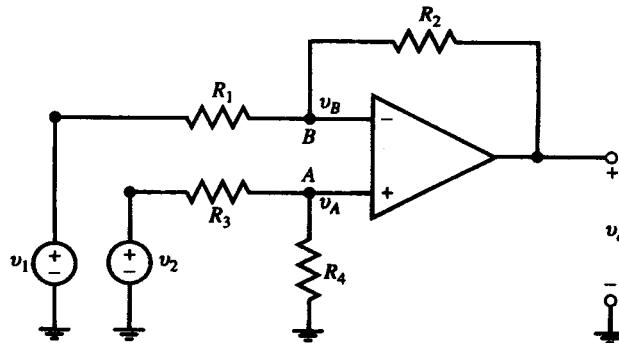


Figura 5.20.

Aplicando la LKC a los nudos A y B ,

$$\text{Nudo } A: \frac{v_A - v_2}{R_3} + \frac{v_A}{R_4} = 0 \quad \text{Nudo } B: \frac{v_B - v_1}{R_1} + \frac{v_B - v_o}{R_2} = 0$$

Tomando $v_A = v_B$ y despejándolas de cada una de las ecuaciones e igualando, tenemos:

$$v_o = \frac{R_4(R_1 + R_2)}{R_1(R_3 + R_4)} v_2 - \frac{R_2}{R_1} v_1 \quad (17)$$

Cuando $R_3 = R_1$ y $R_2 = R_4$, (17) se reduce a (16).

5.10. CIRCUITOS CON VARIOS AMP. OP.

El análisis y los resultados obtenidos para el caso de circuitos con un solo amp. op. pueden aplicarse al caso de tener varios amp. op. ideales conectados en cascada o en lazos interconectados, ya que no hay efectos de carga.

EJEMPLO 5.15. Calcular v_1 y v_2 en la Figura 5.21.

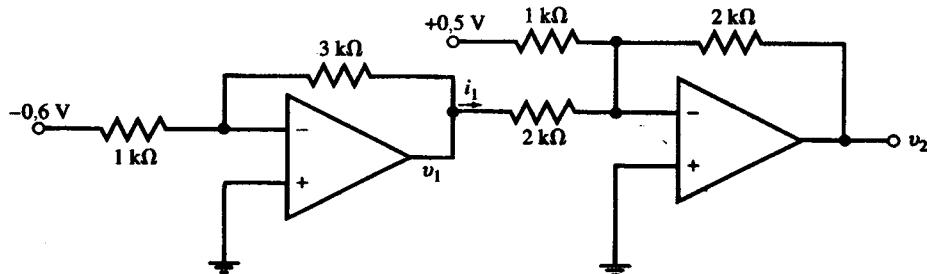


Figura 5.21.

El primer amp. op. es un circuito inversor.

$$v_1 = -(3/1)(-0,6) = 1,8 \text{ V}$$

El segundo amp. op. es un circuito sumador:

$$v_2 = -(2/1)(0,5) - (2/2)(1,8) = -2,8 \text{ V}$$

EJEMPLO 5.16. Suponiendo $R_s = 1 \text{ k}\Omega$ en el circuito de la Figura 5.22, calcular v_1, v_2, v_o, i_s, i_1 e i_f en función de v_s para a) $R_f = \infty$ y b) $R_f = 40 \text{ k}\Omega$.

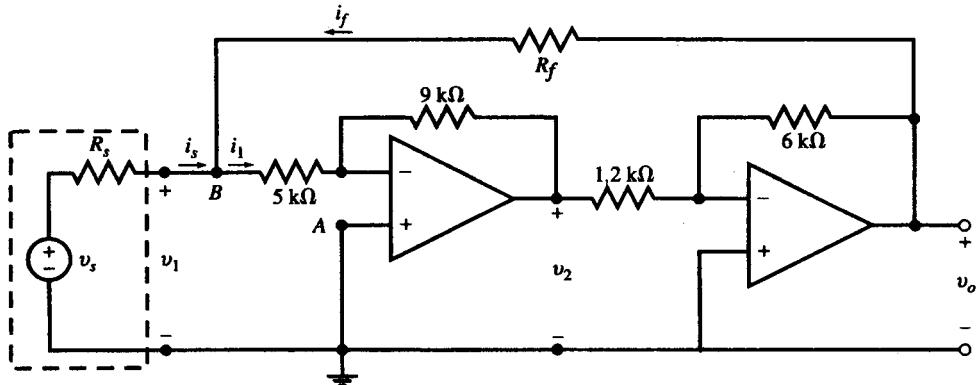


Figura 5.22.

- a) $R_f = \infty$. Los dos amp. op. inversores están en cascada, con $v^+ = 0$. Por división de la tensión en la entrada del lazo, tenemos:

$$v_1 = \frac{5}{5 + 1} v_s = \frac{5}{6} v_s \quad (18)$$

De los amplificadores inversores tenemos:

$$v_2 = -(9/5)v_1 = -(9/5)\left(\frac{5}{6} v_s\right) = -1,5v_s$$

$$v_o = -(6/1,2)v_2 = -5(-1,5v_s) = 7,5v_s$$

$$i_s = i_1 = \frac{v_s}{6000} \text{ (A)} = 0,166v_s \text{ (mA)}$$

$$i_f = 0$$

- b) $R_f = 40 \text{ k}\Omega$. De los amp. op. inversores tenemos $v_o = -5v_2$ y $v_2 = -(9/5)v_1$, así que $v_o = 9v_1$. Aplicando la LKC a las corrientes del nudo B:

$$\frac{v_1 - v_s}{1} + \frac{v_1}{5} + \frac{v_1 - v_o}{40} = 0 \quad (19)$$

Sustituyendo $v_o = 9v_1$ en (19) y despejando v_1 se obtiene:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_s \\ v_2 &= -(9/5)v_1 = -1,8v_s \\ v_o &= -(6/1,2)v_2 = -5(-1,8v_s) = 9v_s \\ i_s &= \frac{v_s - v_1}{1000} = 0 \end{aligned}$$

Aplicando la LKC al nudo *B*:

$$i_f = i_1 = \frac{v_1}{5000} \text{ (A)} = \frac{v_s}{5000} \text{ (A)} = 0,2v_s \text{ (mA)}$$

La corriente i_1 en la resistencia de entrada de $5 \text{ k}\Omega$ del primer amp. op. es proporcionada por la salida del segundo amp. op. a través de la resistencia de realimentación de $40 \text{ k}\Omega$. La corriente i_s procedente de v_s es, por tanto, cero. La resistencia de entrada del circuito es infinita.

5.11. CIRCUITOS INTEGRADOR Y DERIVADOR

Integrador

Sustituyendo la resistencia de realimentación en el amplificador inversor de la Figura 5.13 por un condensador se tiene el circuito integrador básico, representado en la Figura 5.23.

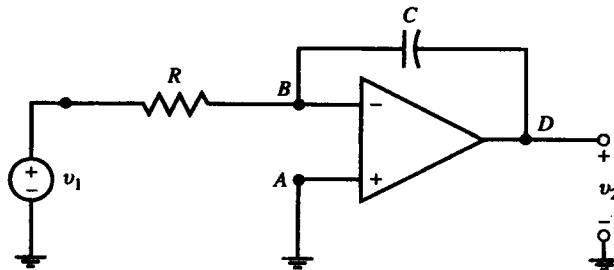


Figura 5.23.

Para obtener la relación entrada-salida se aplica la LKC al nudo inversor:

$$\frac{v_1}{R} + C \frac{dv_2}{dt} = 0 \quad \text{de donde} \quad \frac{dv_2}{dt} = -\frac{1}{RC} v_1$$

$$\text{y} \quad v_2 = -\frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t v_1 dt \quad (20)$$

Esto es, la salida es igual a la integral de la entrada multiplicada por un factor de ganancia de valor $-1/RC$.

EJEMPLO 5.17. En la Figura 5.23 tomamos $R = 1 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \mu\text{F}$ y $v_1 = \text{sen } 2000t$. Suponiendo $v_2(t) = 0$, calcular v_2 para $t > 0$.

$$v_2 = -\frac{1}{10^3 \cdot 10^{-6}} \int_0^t \text{sen } 2000t \, dt = 0,5(\cos 2000t - 1)$$

Integrador con descarga (leaky)

El circuito de la Figura 5.24 se denomina integrador con descarga, ya que la tensión del condensador está continuamente descargándose a través de la resistencia de realimentación R_f . Esto producirá una reducción en la ganancia $|v_2/v_1|$ y un desfase en v_2 . Para una discusión posterior, véase la Sección 5.13.

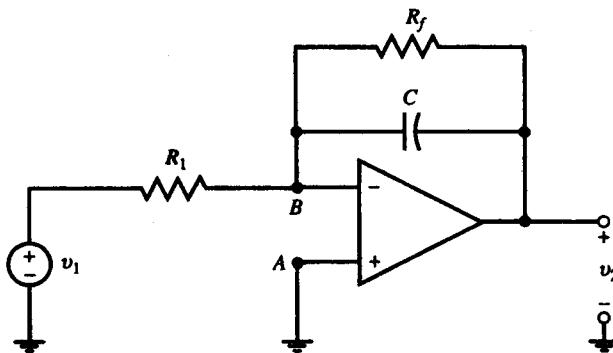


Figura 5.24.

EJEMPLO 5.18. En la Figura 5.24, $R_1 = R_f = 1 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \mu\text{F}$ y $v_1 = \text{sen } 2000t$. Calcular v_2 . El nudo inversor tiene tensión cero, y la suma de las corrientes al mismo es nula. Así:

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{R_1} + C \frac{dv_2}{dt} + \frac{v_2}{R_f} &= 0 \quad \text{o bien} \quad v_1 + 10^{-3} \frac{dv_2}{dt} + v_2 = 0 \\ 10^{-3} \frac{dv_2}{dt} + v_2 &= -\text{sen } 2000t \end{aligned} \tag{21}$$

La solución para v_2 de (21) es sinusoidal con la misma frecuencia que v_1 , pero con diferente amplitud y ángulo de fase; o sea,

$$v_2 = A \cos(2000t + B) \tag{22}$$

Para calcular A y B sustituimos v_2 y dv_2/dt de (22) en (21). Siendo $dv_2/dt = -2000A \text{ sen}(2000t + B)$. Así se obtiene:

$$10^{-3} dv_2/dt + v_2 = -2A \text{ sen}(2000t + B) + A \cos(2000t + B) = -\text{sen } 2000t$$

$$\text{Pero } 2A \text{ sen}(2000t + B) - A \cos(2000t + B) = A\sqrt{5} \text{ sen}(2000t + B - 26,57^\circ) = \text{sen } 2000t$$

Por tanto, $A = \sqrt{5}/5 = 0,447$, $B = 26,57^\circ$ y

$$v_2 = 0,447 \cos (2000t + 26,57^\circ) \quad (23)$$

Amplificador sumador de integrales

Un simple amp. op. en configuración inversora con muchas entradas y un condensador de realimentación, como se indica en la Figura 5.25, puede hacer la suma de las integrales de varias funciones con una ganancia determinada.

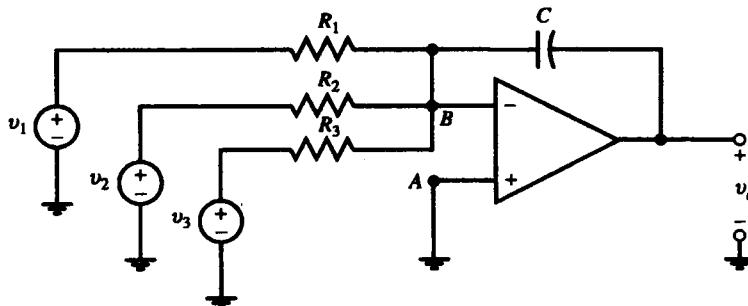


Figura 5.25.

EJEMPLO 5.19. Calcular la salida v_o del amplificador sumador de integrales de la Figura 5.25, que tiene tres entradas.

Aplicando la LKC al nudo de la entrada inversora del amp. op. se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_3}{R_3} + C \frac{dv_o}{dt} &= 0 \\ v_o &= - \int_{-\infty}^t \left(\frac{v_1}{R_1 C} + \frac{v_2}{R_2 C} + \frac{v_3}{R_3 C} \right) dt \end{aligned} \quad (24)$$

Condiciones iniciales de integración

La condición inicial que se desea para v_o puede obtenerse mediante un interruptor de puesta a cero, como el representado en la Figura 5.26. Si se conecta momentáneamente el interruptor y se desconecta para $t = t_o$, se tiene entonces un valor de v_o en el condensador y aparece una salida para v_2 . Para $t > 0$, la integral de la entrada se suma a la salida, resultando:

$$v_2 = - \frac{1}{RC} \int_{t_o}^t v_1 dt + v_o \quad (25)$$

Derivador

Poniendo un inductor en lugar de la resistencia de realimentación de un amplificador inversor se obtiene a la salida la derivada de la señal de entrada. La Figura 5.27 muestra el circuito derivador.

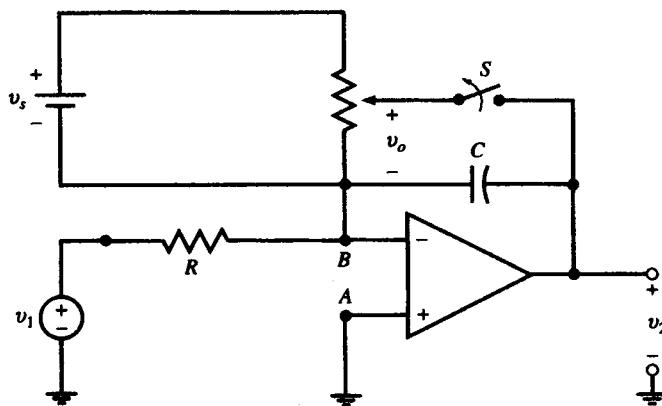


Figura 5.26.

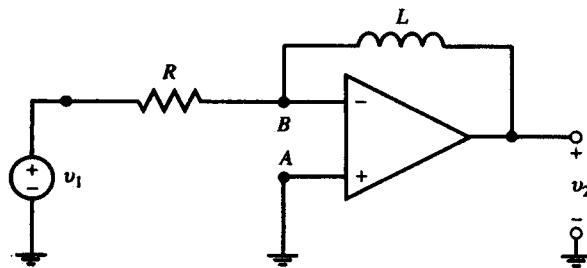


Figura 5.27.

Para obtener la relación de entrada-salida se aplica la LKC a las corrientes en el nudo inversor:

$$\frac{v_1}{R} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_2 dt = 0 \quad \text{o} \quad v_2 = -\frac{L}{R} \frac{dv_1}{dt} \quad (26)$$

5.12. COMPUTADORES ANALÓGICOS

Los amplificadores inversores, los circuitos sumadores y los integradores descritos en las secciones precedentes se usan para construir los bloques que configuran los *computadores analógicos*, utilizados para resolver ecuaciones diferenciales lineales. Se elude el uso de los derivadores a causa del considerable efecto de ruido a pesar de su bajo nivel.

Para diseñar un circuito computador, en primer lugar hay que reordenar la ecuación diferencial correspondiente, de tal forma que el término que tenga la derivada mayor esté en el primer miembro de la ecuación y los otros en el segundo. Entonces se empieza disponiendo de un sumador de integrales para integrar la ecuación. Se añaden integradores y amplificadores en cascada y anidados en lazos, como se muestra en los ejemplos siguientes. En esta sección se utilizará la notación $x' = dx/dt$, $x'' = d^2x/dt^2$, y así sucesivamente.

EJEMPLO 5.20. Diseñar un circuito con entrada $x(t)$ que proporcione una salida $y(t)$ tal que se satisfaga la siguiente ecuación:

$$y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = x(t) \quad (27)$$

Paso 1. Reordenar la ecuación diferencial (27) como sigue:

$$y'' = x - 2y' - 3y \quad (28)$$

Paso 2. Utilizar el amp. op. sumador de integrales #1 de la Figura 5.28 para integrar (28). Aplicar (24) para calcular R_1 , R_2 , R_3 y C_1 para que la salida del amp. op. #1 sea $v_1 = -y'$. Tomaremos $C_1 = 1 \mu\text{F}$ y calcularemos las resistencias de acuerdo con este valor:

$$R_1 C_1 = 1 \quad R_1 = 1 \text{ M}\Omega$$

$$R_2 C_1 = 1/3 \quad R_2 = 333 \text{ k}\Omega$$

$$R_3 C_1 = 1/2 \quad R_3 = 500 \text{ k}\Omega$$

$$v_1 = - \int (x - 3y - 2y') dt = - \int y'' dt = - y' \quad (29)$$

Paso 3. Integrar $v_1 = -y'$ mediante el amp. op. #2 para obtener y . Tomaremos $C_2 = 1 \mu\text{F}$ y $R_4 = 1 \text{ M}\Omega$ para obtener $v_2 = y$ a la salida del amp. op. #2.

$$v_2 = - \frac{1}{R_4 C_2} \int v_1 dt = \int y' dt = y \quad (30)$$

Paso 4. Se alimentan las entradas del amp. op. #1 mediante las siguientes conexiones. Alimentación a la entrada del amp. op. #1 de $v_1 = -y'$ directamente por retorno a través de la resistencia R_3 . Pasar $v_2 = y$ a través del amp. op. inversor de ganancia unidad #3 para generar $-y$ y así alimentar a través de la resistencia R_2 la entrada al amp. op. #1. Conectar la fuente de tensión $x(t)$ a través de R_1 a la entrada del amp. op. #1. El circuito completo es el que se indica en la Figura 5.28.

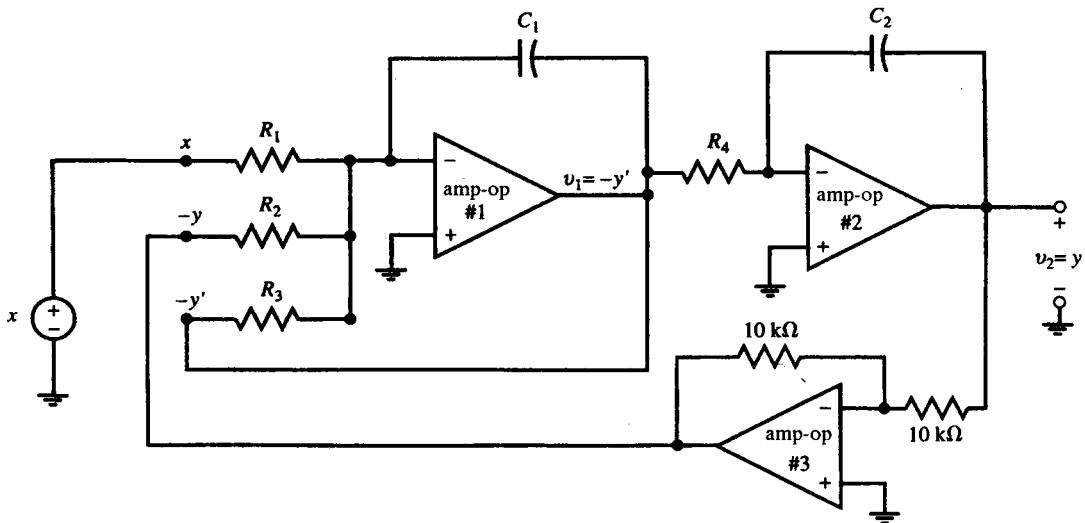


Figura 5.28.

EJEMPLO 5.21. Diseñar un amp. op. con una fuente de tensión ideal $v(t)$ que satisaga para $t > 0$ la ecuación $v' + v = 0$, siendo $v(0) = 1$ V.

Siguiendo los pasos del Ejemplo 5.20 se organiza el circuito de la Figura 5.29 con $RC = 1$ s. La condición inicial se introduce cuando el interruptor se abre en $t = 0$. La solución $v(t) = e^{-t}$, $t > 0$, se tiene a la salida del amp. op.

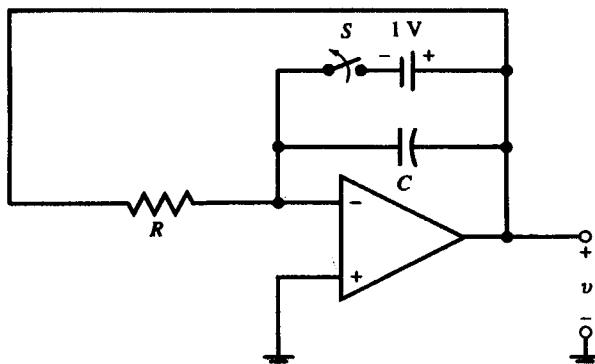


Figura 5.29.

5.13. FILTRO PASA-BAJOS

Se llama *filtro pasa-bajos* a un amplificador de frecuencia selectiva cuya ganancia disminuye desde un valor finito a cero, a medida que la frecuencia de una onda senoidal de entrada aumenta desde cero a infinito. La gráfica de la ganancia frente a la frecuencia se denomina *respuesta en frecuencia*. Una técnica fácil para encontrar la respuesta en frecuencia de filtros se desarrollará en el Capítulo 13. El integrador con descarga de la Figura 5.24 es un filtro pasa-bajos, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5.22. Tomando en el Ejemplo 5.18 $v_1 = \sin \omega t$, calcular $|v_2|$ para $\omega = 0, 10, 100, 10^3, 10^4$ y 10^5 rad/s.

Repitiendo el procedimiento del Ejemplo 5.18, se calcula la respuesta en frecuencia y los valores son los de la Tabla 5.1. La respuesta en amplitud disminuye con la frecuencia. El circuito es un filtro pasa-bajos.

Tabla 5.1. Respuesta en frecuencia de un filtro pasa-bajos.

ω , rad/s	0	10	100	10^3	10^4	10^5
f , Hz	0	1,59	15,9	159	$1,59 \cdot 10^3$	$15,9 \cdot 10^3$
$ v_2/v_1 $	1	1	0,995	0,707	0,1	0,01

5.14. COMPARADOR

El circuito de la Figura 5.30 compara la tensión v_1 con un nivel de referencia v_o . Puesto que la ganancia en lazo abierto es muy grande, la salida v_2 del amp. op. es $+V_{cc}$ (si $v_1 > v_o$) o $-V_{cc}$ (si $v_1 < v_o$). Esto se escribe $v_2 = V_{cc} \operatorname{sgn}[v_1 - v_o]$, donde «sgn» representa «signo de». Para $v_o = 0$, tenemos:

$$v_2 = V_{cc} \operatorname{sgn}[v_1] = \begin{cases} +V_{cc} & v_1 > 0 \\ -V_{cc} & v_1 < 0 \end{cases}$$

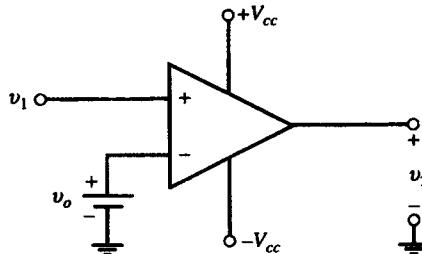


Figura 5.30.

EJEMPLO 5.23. En la Figura 5.30 tomamos $V_{cc} = 5$ V, $v_o = 0$ y $v_1 = \sin \omega t$. Calcular v_2 .

$$\text{Para } 0 < t < \pi/\omega, \quad v_1 = \sin \omega t > 0 \quad v_2 = 5 \text{ V}$$

$$\text{Para } \pi/\omega < t < 2\pi/\omega, \quad v_1 = \sin \omega t < 0 \quad v_2 = -5 \text{ V}$$

La salida v_2 es un pulso cuadrado que commuta entre +5 V y -5 V con un período de $2\pi/\omega$. Un ciclo de v_2 viene dado por

$$v_2 = \begin{cases} 5 \text{ V} & 0 < t < \pi/\omega \\ -5 \text{ V} & \pi/\omega < t < 2\pi/\omega \end{cases}$$

EJEMPLO 5.24. El circuito de la Figura 5.31 es un convertidor analógico-digital paralelo. Se han omitido por simplicidad las conexiones de $+V_{cc}$ y $-V_{cc}$. Calcular las salidas v_3 , v_2 y v_1 . Comentar el resultado.

El amp. op. no tiene realimentación y funciona como comparador. Las salidas con los valores +5 o -5 se tienen en la Tabla 5.2.

Tabla 5.2.

Tiempo, s	Entrada, V	Salidas, V
$0 < t < 1$	$0 < v_i < 1$	$v_3 = -5 \quad v_2 = -5 \quad v_1 = -5$
$1 < t < 2$	$1 < v_i < 2$	$v_3 = -5 \quad v_2 = -5 \quad v_1 = +5$
$2 < t < 3$	$2 < v_i < 3$	$v_3 = -5 \quad v_2 = +5 \quad v_1 = +5$
$3 < t < 4$	$3 < v_i < 4$	$v_3 = +5 \quad v_2 = +5 \quad v_1 = +5$

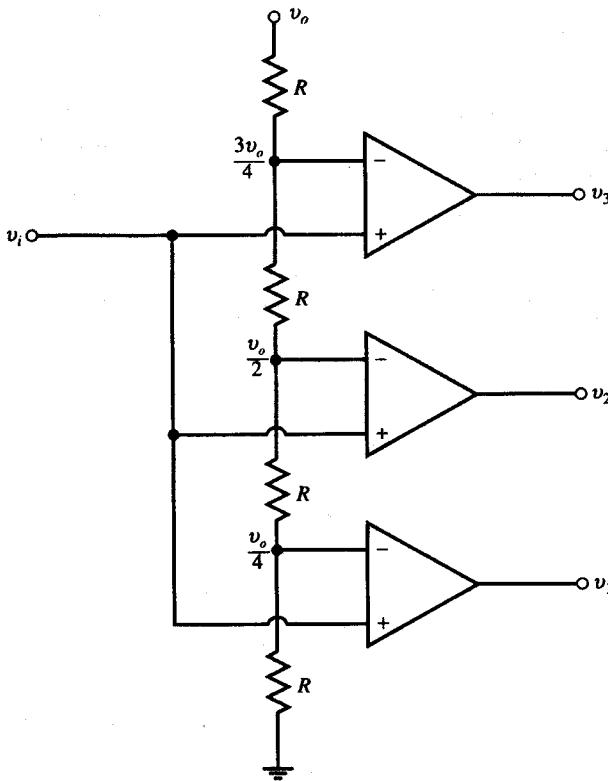


Figura 5.31.

La secuencia binaria $\{v_3, v_2, v_1\}$ de la Tabla 5.2 especifica únicamente la entrada de tensión en dominio discreto. Sin embargo, en su forma actual no son números binarios que representen amplitudes de entrada. Así pues, utilizando un código podemos transformar las secuencias anteriores en números binarios que correspondan a valores analógicos de entrada.

PROBLEMAS RESUELTOS

- 5.1.** En la Figura 5.3 tomamos $v_s = 20 \text{ V}$, $R_s = 10 \Omega$, $R_l = 990 \Omega$, $k = 5$ y $R_o = 3 \Omega$. Calcular: a) el circuito equivalente Thévenin visto desde R_l , y b) v_2 y la potencia disipada en R_l para $R_l = 0,5, 1, 3, 5, 10, 100$ y 1000Ω .
- a) La tensión de circuito-abierto y la intensidad de corto-circuito en los terminales A-B son $v_{ca} = 5v_1$ e $i_{cc} = 5v_1/3$, respectivamente.

Calculamos v_1 por división entre R_s y R_i con v_s . Así:

$$v_1 = \frac{R_i}{R_s + R_i} v_s = \frac{990}{10 + 990} (20) = 19,8 \text{ V}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} v_{ca} &= 5(19,8) = 99 \text{ V} & v_{Th} &= v_{ca} = 99 \text{ V} \\ i_{cc} &= 99/3 = 33 \text{ A} & R_{Th} &= v_{ca}/i_{cc} = 3 \Omega \end{aligned}$$

El circuito equivalente de Thévenin es el indicado en la Figura 5.32.

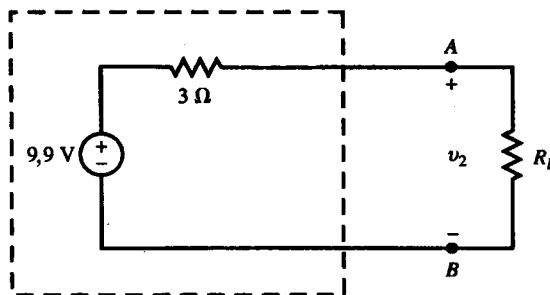


Figura 5.32.

b) Con la carga R_l conectada tenemos:

$$v_2 = \frac{R_l}{R_l + R_{Th}} v_{Th} = \frac{99R_l}{R_l + 3} \quad \text{y} \quad p = \frac{v_2^2}{R_l}$$

En la Tabla 5.3 se muestran los valores de la tensión en la carga y la potencia disipada en la misma, para los siete valores dados de R_l . La tensión en la carga es máxima cuando $R_l = \infty$. Sin embargo, la potencia disipada para $R_l = \infty$ es cero. La potencia disipada es máxima para $R_l = 3 \Omega$, que es igual a la resistencia de salida del amplificador.

Tabla 5.3.

R_l, Ω	v_2, V	p, W
0,5	14,14	400,04
1	24,75	612,56
3	49,50	816,75
5	61,88	765,70
10	76,15	579,94
100	96,12	92,38
1000	98,70	9,74

- 5.2. En los circuitos de las Figuras 5.4 y 5.5 suponemos $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ y $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$. Calcular la ganancia $G^+ = v_2/v_s$ en la Figura 5.4 y $G^- = v_2/v_s$ en la Figura 5.5 para $k = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 100, 1000$ y ∞ . Comparar los resultados.

De (5) en el Ejemplo 5.3, con $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ y $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$ tenemos:

$$G^+ = \frac{v_2}{v_s} = \frac{5k}{6 - k} \quad (31)$$

Del Ejemplo 5.4 obtenemos:

$$G^- = \frac{v_2}{v_s} = -\frac{5k}{6 + k} \quad (32)$$

Las ganancias G^- y G^+ se calculan para nueve valores de k que se dan en la Tabla 5.4. Cuanto mayor es el valor de k , los valores de G^+ y G^- se aproximan al límite de ganancia -5 , que es la relación R_2/R_1 con signo menos e independiente del valor de k . El circuito de la Figura 5.5 (con realimentación negativa) es siempre estable y su ganancia se aproxima a su límite de forma monótona. Sin embargo, el circuito de la Figura 5.4 (con realimentación positiva) es inestable. Su ganancia G^+ toma valores muy grandes para valores k próximos a seis. Para $k = 6$, $G^+ = \infty$.

Tabla 5.4.

k	G^+	G^-
1	1,0	-0,71
2	2,5	-1,25
4	10,0	-2,00
6	∞	-2,50
8	-20,0	-2,86
10	-12,5	-3,13
100	-5,32	-4,72
1000	-5,03	-4,97
∞	-5,00	-5,00

- 5.3. En el circuito de la Figura 5.33 se supone que $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$ y $R_i = 50 \text{ k}\Omega$. Calcular v_2/v_s para $k = 1, 10, 100, 1000, \infty$ y comparar los resultados con los valores de G^- de la Tabla 5.4.

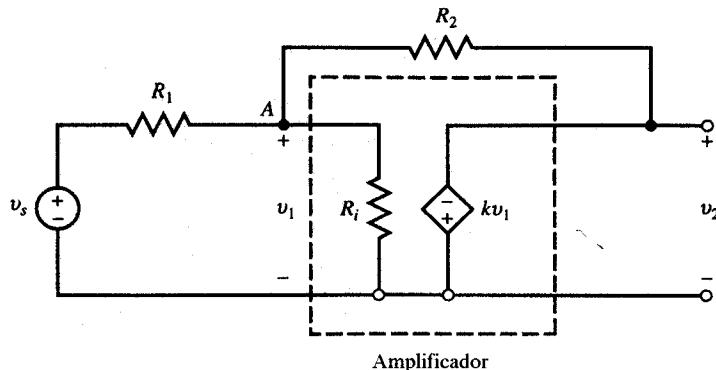


Figura 5.33.

Este problema se soluciona mediante la aplicación de la LKC al nudo A (otra aproximación es usar el Thévenin equivalente, como se sugiere en el Problema 5.30). Así,

$$\frac{v_1 - v_s}{1} + \frac{v_1 - v_2}{5} + \frac{v_1}{50} = 0 \quad (33)$$

Del amplificador obtenemos

$$v_2 = -kv_1 \quad \text{o sea} \quad v_1 = -v_2/k \quad (34)$$

Sustituyendo de (34) en (33) y reorganizando los términos, obtenemos:

$$\frac{v_2}{v_s} = \frac{-50k}{61 + 10k} = \frac{-5k}{6,1 + k} \quad (35)$$

En la Tabla 5.5 se muestran los valores de v_2/v_s de (35) para los diferentes valores de k . Para una resistencia de entrada del amplificador de $50 \text{ k}\Omega$, la ganancia total se reduce muy poco, tal como se deduce comparando las Tablas 5.4 y 5.5. La realimentación ha hecho que la resistencia de entrada del amplificador sea menos efectiva en el cambio de la ganancia total.

Tabla 5.5.

k	v_2/v_s
1	-0,704
10	-3,106
100	-4,713
1000	-4,97
∞	-5,00

- 5.4.** Suponiendo de nuevo que $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ y $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$ en el circuito de la Figura 5.33.
- Calcular v_2/v_s en función de k y de R_i .
 - Suponiendo que $R_i = 1 \text{ k}\Omega$, calcular v_2/v_1 para $k = 1, 10, 100, 1000, \infty$. Repetirlo para $R_i = \infty$.
 - Discutir el efecto de R_i y k sobre la ganancia total. Demostrar que para $k = \infty$ y $R_i \neq 0$, la ganancia del amplificador es independiente de R_i y es igual a $-R_2/R_1$.
 - Aplicando la LKC a las corrientes del nudo A se obtiene:

$$\frac{v_1 - v_s}{1} + \frac{v_1 - v_2}{5} + \frac{v_1}{R_1} = 0.$$

Del amplificador obtenemos $v_2 = -kv_1$ o bien $v_1 = -v_2/k$. Sustituyendo v_1 en la ecuación de la LKC y reordenando términos obtenemos:

$$\frac{v_2}{v_s} = -5 \frac{ck}{1 + ck} \quad \text{donde} \quad c = \frac{R_i}{5 + 6R_i} \quad (36)$$

b) Para $R_i = 1 \text{ k}\Omega$, $c = 1/11$, que sustituidos en (36), da

$$\frac{v_2}{v_s} = \frac{-5k}{11 + k} \quad (37)$$

Para $R_i = \infty$ tenemos que $c = 1/16$ y así

$$\frac{v_2}{v_s} = \frac{-5k}{6 + k} \quad (38)$$

En la Tabla 5.6 se tienen los valores de v_2/v_1 para diferentes valores de k dados por (37) y (38). Observar que las ecuaciones (38) y (32) son idénticas.

Tabla 5.6.

k	$R_i = 1 \text{ k}\Omega$	$R_i = \infty$
1	-0,31	-0,71
10	-2,38	-3,12
100	-4,51	-4,72
1000	-4,95	-4,97
∞	-5,00	-5,00

- c) Comparando las dos columnas de la Tabla 5.6 vemos que para el valor más pequeño de R_i la ganancia total G^- es menor. Sin embargo, cuanto mayor es el valor de la ganancia k en circuito abierto, tanto menor es el efecto de R_i . Cuando k toma valores muy grandes, la relación v_2/v_1 se aproxima a -5 a menos que $R_i = 0$.
- 5.5. Suponiendo de nuevo que $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ y $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$ en el circuito de la Figura 5.33, sustituir el circuito de la izquierda del nudo A por el Thévenin equivalente incluyendo v_s , R_1 y R_i . Entonces, utilizando (5), obtener (36).

El Thévenin equivalente está dado por

$$v_{\text{Th}} = \frac{R_i v_s}{R_1 + R_i} = \frac{R_i v_s}{1 + R_i}$$

$$R_{\text{Th}} = \frac{R_1 R_i}{R_1 + R_i} = \frac{R_i}{1 + R_i}$$

donde las resistencias se expresan en $\text{k}\Omega$.

De (5),

$$v_2 = (1 - b) \frac{-k}{1 + bk} v_{\text{Th}}$$

donde

$$b = \frac{R_{\text{Th}}}{R_{\text{Th}} + R_2} = \frac{R_i}{6R_i + 5} \quad \text{y} \quad 1 - b = \frac{5(1 + R_i)}{6R_i + 5}$$

Por tanto,

$$v_2 = \frac{5(1 + R_i)}{6R_i + 5} \cdot \frac{-k}{1 + R_i k / (6R_i + 5)} \cdot \frac{R_i}{1 + R_i} v_s = \frac{-5R_i k}{6R_i + 5 + R_i k} v_s$$

la cual es idéntica que (36).

- 5.6.** Calcular la tensión de salida de un amp. op. siendo $A = 10^5$ y $V_{cc} = 10$ V para $v^- = 0$ V; $v^+ = \sin t$ (V). Tomar como referencia las Figuras 5.7 y 5.8.

A causa de la alta ganancia la saturación se presenta rápidamente para

$$|v_2| = 10^5 |v_d| = 10 \text{ V} \quad \text{o sea} \quad |v_d| = 10^{-4} \text{ V}$$

Podemos entonces ignorar la zona lineal y escribir

$$v_2 = \begin{cases} +10 \text{ V} & v_d > 0 \\ -10 \text{ V} & v_d < 0 \end{cases}$$

donde $v_d = v^+ - v^- = \sin t$ (V). Un ciclo de la salida vendrá dado por

$$v_2 = \begin{cases} +10 \text{ V} & 0 < t < \pi \\ -10 \text{ V} & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

Para tener más exactitud en v_2 utilizamos las características de transferencia del amp. op. de la Figura 5.7.

$$v_2 = \begin{cases} -10 & v_d < -10^{-4} \text{ V} \\ 10^5 v_d & -10^{-4} < v_d < 10^{-4} \text{ V} \\ +10 & v_d > 10^{-4} \text{ V} \end{cases}$$

La saturación empieza para $|v_d| = |\sin t| = 10^{-4}$ V. Al ser muy pequeño este valor, se puede sustituir $\sin t$ por t . La salida v_2 está dada por

$$\begin{aligned} v_2 &= 10^5 t & -10^{-4} < t < 10^{-4} \text{ s} \\ v_2 &= 10 & 10^{-4} < t < \pi - 10^{-4} \text{ s} \\ v_2 &= -10^5(t - \pi) & \pi - 10^{-4} < t < \pi + 10^{-4} \text{ s} \\ v_2 &= -10 & \pi + 10^{-4} < t < 2\pi - 10^{-4} \text{ s} \end{aligned}$$

Para poner de manifiesto el pequeñísimo error que se comete al ignorar la zona lineal, observar que durante un período de 2π s el intervalo lineal de funcionamiento es solamente de $4 \cdot 10^{-4}$ s, lo que da una relación de $64 \cdot 10^{-6}$.

- 5.7.** Repetir el Problema 5.6 para $v^+ = \sin 2\pi t$ (V) y $v^- = 0,5$ V.

La tensión de salida es

$$\begin{aligned} v_2 &= 10 \text{ V} & \text{cuando } v^+ > v^- \\ v_2 &= -10 \text{ V} & \text{cuando } v^+ < v^- \end{aligned}$$

La comutación ocurre cuando $\operatorname{sen} 2\pi t = 1/2$. Esto ocurre para $t = 1/12, 5/12, 13/12$, etc. Por tanto, un ciclo de v_2 está dado por

$$\begin{aligned} v_2 &= 10 \text{ V} & 1/12 < t < 5/12 \text{ s} \\ v_2 &= -10 \text{ V} & 5/12 < t < 13/12 \text{ s} \end{aligned}$$

En la Figura 5.34 se representan los gráficos de v^+ , v^- y v_2 .

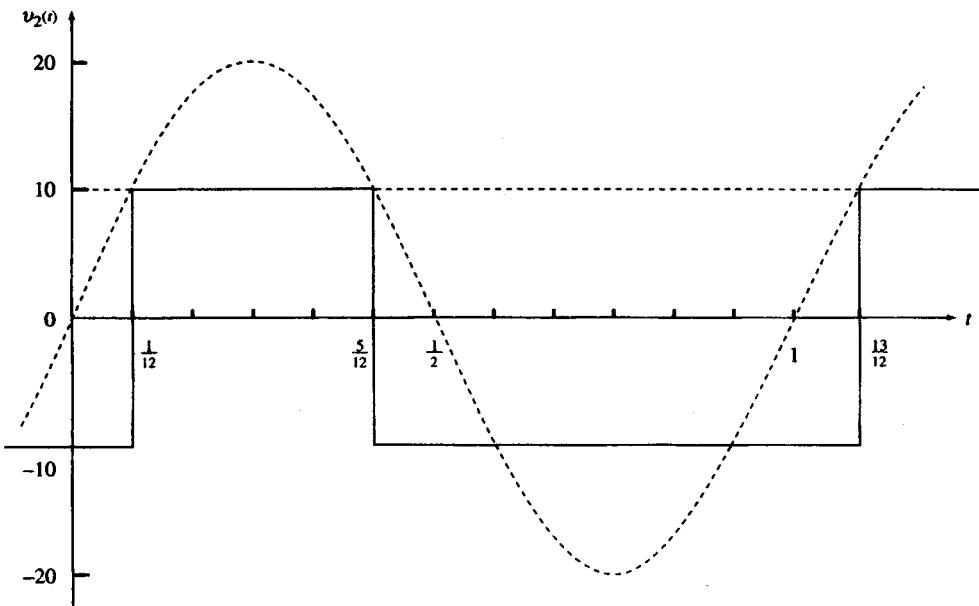


Figura 5.34.

- 5.8. En el circuito de la Figura 5.35 $v_s = \operatorname{sen} 100t$. Calcular v_1 y v_2 .

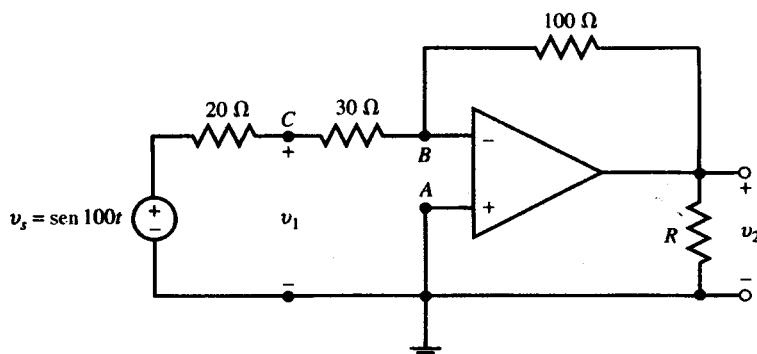


Figura 5.35.

En los nudos B y A , $v_B = v_A = 0$. Entonces

$$v_1 = \frac{30}{20 + 30} v_s = 0,6 \operatorname{sen} 100t \text{ (V)}$$

$$v_2 = -\frac{100}{30} v_1 = -\frac{100}{30} (0,6 \operatorname{sen} 100t) = -2 \operatorname{sen} 100t \text{ (V)}$$

Alternativamente,

$$v_2 = -\frac{100}{20 + 30} v_s = -2 \operatorname{sen} 100t \text{ (V)}$$

- 5.9.** Los niveles de saturación del amp. op. de la Figura 5.31 son $+V_{cc} = 5$ V y $-V_{cc} = -5$ V. La tensión de referencia es $v_o = 1$ V. Calcular la secuencia de salidas correspondientes a los valores de v_i desde 0 a 1 V en escalones de 0,25 V.

Véase la Tabla 5.7, donde $L = -5$ V y $H = +5$ V.

Tabla 5.7.

v_i , V	v_3	v_2	v_1
0 a 0,25 ⁻	L	L	L
0,25 ⁺ a 0,5 ⁻	L	L	H
0,5 ⁺ a 0,75 ⁻	L	H	H
0,75 ⁺ a 1	H	H	H

- 5.10.** Calcular v en el circuito de la Figura 5.36.

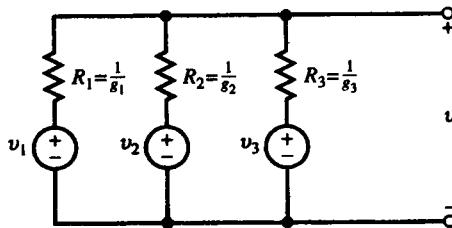


Figura 5.36.

Aplicando la LKC en el nudo A ,

$$(v - v_1)g_1 + (v - v_2)g_2 + (v - v_3)g_3 = 0$$

Entonces

$$v = \frac{v_1 g_1 + v_2 g_2 + v_3 g_3}{g_1 + g_2 + g_3} = \frac{v_1 R_2 R_3 + v_2 R_1 R_3 + v_3 R_2 R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

- 5.11.** En el circuito de la Figura 5.37 calcular v_C (tensión en el nudo C), i_1 , R_{in} (resistencia de entrada vista desde la fuente de 9 V), v_2 e i_2 .

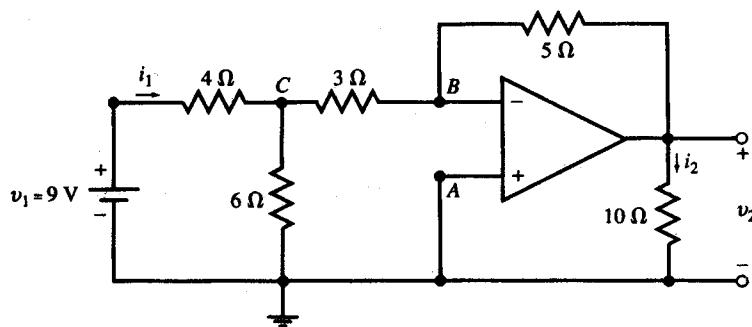


Figura 5.37.

En los nudos B y A , $v_B = v_A = 0$. Aplicando la LKC al nudo C tenemos:

$$(v_C - 9)/4 + v_C/6 + v_C/3 = 0 \quad \text{de donde} \quad v_C = 3 \text{ V}$$

$$\text{Entonces} \quad i_1 = (9 - v_C)/4 = 1,5 \text{ A} \quad \text{y} \quad R_{in} = v_1/i_1 = 9/1,5 = 6 \Omega$$

Del circuito del amplificador inversor tenemos:

$$v_2 = -(5/3)v_C = -5 \text{ V} \quad \text{y} \quad i_2 = -5/10 = -0,5 \text{ A}$$

- 5.12.** Calcular v_2 del Problema 5.11, sustituyendo el circuito a la izquierda de los nudos $A-B$ por su Thévenin equivalente según la Figura 5.37.

$$R_{Th} = 3 + \frac{(6)(4)}{6+4} = 5,4 \Omega \quad \text{y} \quad v_{Th} = \frac{6}{4+6}(9) = 5,4 \text{ V}$$

De donde $v_2 = -(5/5,4)(5,4) = -5 \text{ V}$.

- 5.13.** Obtener v_C , i_1 , v_2 y R_{in} , resistencia de entrada vista desde la fuente de 21 V en la Figura 5.38.

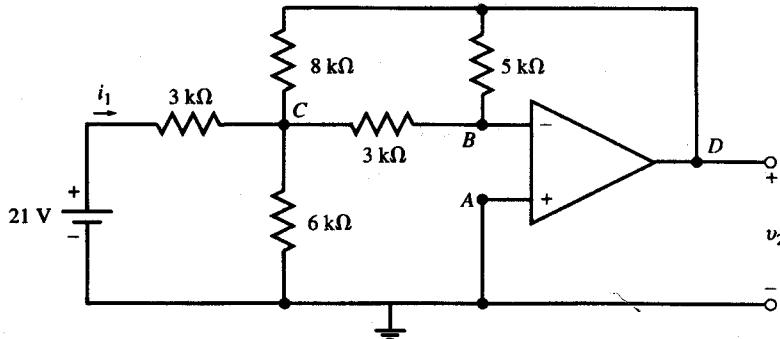


Figura 5.38.

Del amplificador inversor tenemos:

$$v_2 = -(5/3)v_C \tag{39}$$

Teniendo en cuenta que $v_B = v_A = 0$, así de la LKC en el nudo C resulta:

$$\frac{v_C - 21}{3} + \frac{v_C}{6} + \frac{v_C}{3} + \frac{v_C - v_2}{8} = 0 \quad (40)$$

Sustituyendo $v_C = -(3/5)v_2$ obtenido de (39), en la (40) tendremos que $v_2 = -10$ V. Entonces

$$\begin{aligned} v_C &= 6 \text{ V} \\ i_1 &= (21 - v_C)/3000 = 0,005 \text{ A} = 5 \text{ mA} \\ R_{in} &= 21/i_1 = 21/0,005 = 4200 \Omega = 4,2 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

- 5.14.** En el circuito de la Figura 5.38 cambiar la fuente de 21 V por otra de $21k$ V, siendo k un determinado factor. Demostrar que v_C , i_1 , v_2 , en el Problema 5.13, resultan multiplicadas por el factor k y R_{in} no cambia.

Tomemos $v_s = 21k$ (V) como la nueva tensión de la fuente. Del amplificador inversor tenemos [véase (39)]:

$$v_2 = -(5/3)v_C$$

Aplicando la LKC en el nudo C se obtiene [véase (40)]

$$\frac{v_C - v_s}{3} + \frac{v_C}{6} + \frac{v_C}{3} + \frac{v_C - v_2}{8} = 0$$

Resolviendo para v_C y v_2 tenemos:

$$\begin{aligned} v_C &= (6/21)v_s = 6k \text{ (V)} & y & v_2 = -(10/21)v_s = -10k \text{ (V)} \\ i_1 &= (v_s - v_C)/3000 = (21 - 6k)/3000 = 0,005k \text{ A} \\ R_{in} &= v_s/i_1 = 21k/0,005k = 4200 \Omega \end{aligned}$$

Estos resultados se obtienen por ser el circuito lineal.

- 5.15.** Calcular v_2 y v_C del Problema 5.13 mediante la sustitución del circuito a la izquierda del nudo C de la Figura 5.38 (incluyendo la batería de 21 V y las resistencias de $3 \text{ k}\Omega$ y de $6 \text{ k}\Omega$) por su Thévenin equivalente.

Primero calculamos el Thévenin equivalente:

$$R_{Th} = \frac{(6)(3)}{6 + 3} = 2 \text{ k}\Omega \quad y \quad v_{Th} = \frac{6}{3 + 6} (21) = 14 \text{ V}$$

Sustituimos el circuito a la izquierda del nudo C por v_{Th} y R_{Th} y entonces aplicamos la LKC en C:

$$\frac{v_C - 14}{2} + \frac{v_C}{3} + \frac{v_C - v_2}{8} = 0 \quad (41)$$

Del amplificador inversor se tiene que $v_2 = -(5/3)v_C$, o sea, $v_C = -0,6 v_2$, que después de sustituir en (41) se obtiene $v_2 = -10$ V y $v_C = 6$ V.

- 5.16.** a) Calcular el Thévenin equivalente del circuito a la izquierda de los nudos A-B de la Figura 5.39(a) y entonces calcular v_2 para $R_l = 1 \text{ k}\Omega$, $10 \text{ k}\Omega$ e ∞ . b) Repetir para la Figura 5.39(a) y comparar con el apartado a).

- a) El circuito equivalente Thévenin del de la Figura 5.39(a) es el que se indica en la Figura 5.39(b).

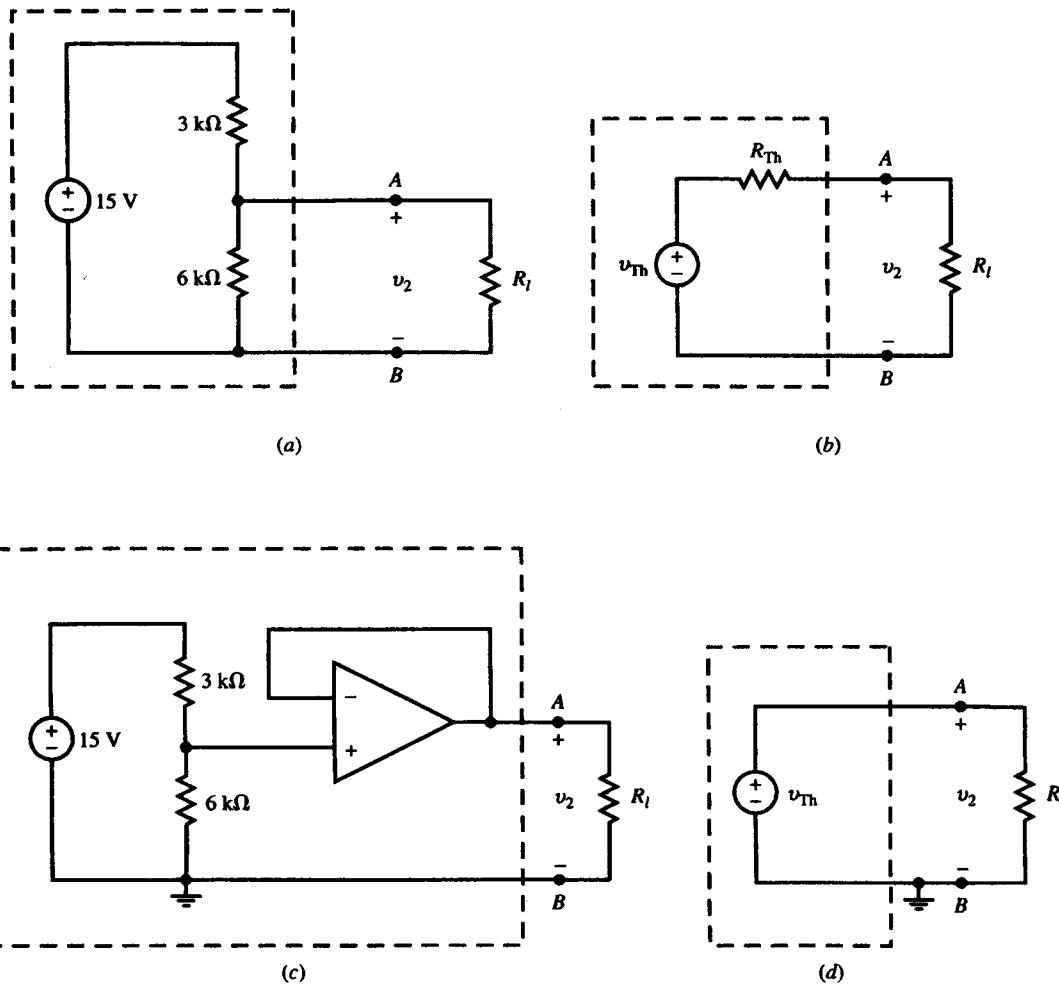


Figura 5.39.

$$v_{Th} = \frac{6}{6+3} (15) = 10 \text{ V} \quad \text{y} \quad R_{Th} = \frac{(3)(6)}{3+6} = 2 \text{ k}\Omega$$

Por división de v_{Th} entre R_{Th} y R_l tenemos:

$$v_2 = \frac{R_l}{R_l + 2} (10) \quad (10)$$

Para $R_l = 1 \text{ k}\Omega$, $v_2 = 3,33 \text{ V}$

Para $R_l = 10 \text{ k}\Omega$, $v_2 = 8,33 \text{ V}$

Para $R_l = \infty$, $v_2 = 10 \text{ V}$

La salida v_2 depende de R_l . La operación del divisor de tensión está afectada por R_l .

- b) El circuito equivalente de Thévenin del representado en la Figura 5.39(c) se representa en la Figura 5.12(d). De aquí tenemos:

$$v_{Th} = 10 \text{ V} \quad \text{y} \quad R_{Th} = 0$$

y $v_2 = v_{Th} = 10 \text{ V}$ para todos los valores de R_l , o sea, la salida v_2 depende de R_1 , R_2 y v_s solamente y es independiente de R_l .

- 5.17. Calcular v_2 en función de i_1 en el circuito de la Figura 5.40(a).

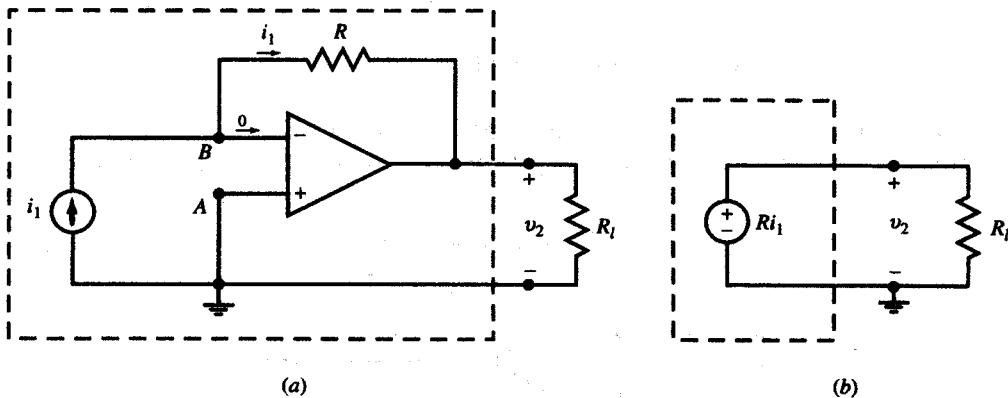


Figura 5.40.

La intensidad i_1 atraviesa la resistencia R produciéndose una diferencia de potencial de $-Ri_1$ de derecha a izquierda. Puesto que el terminal inversor B tiene potencial cero, la tensión anterior aparece en la salida como $v_2 = -Ri_1$ [ver Figura 5.40(b)]. Por tanto, el amp. op. convierte la intensidad i_1 en una tensión v_2 con una ganancia de $|v_2/i_1| = R$. La fuente de intensidad no suministra potencia, puesto que la tensión v_{AB} entre sus extremos es nula.

- 5.18. Un transductor genera una pequeña corriente i_1 , la cual alimenta una carga R_l produciendo una tensión v_1 entre sus extremos. Se desea que v_1 siga la señal con una ganancia constante de 10^8 independiente del valor de R_l . Diseñar un convertidor corriente-tensión que realice esta función.

El transductor deberá alimentar indirectamente a R_l a través de un amp. op. Los siguientes diseños producen $v_1 = 10^8 i_1$ independiente de R_l .

Diseño 1: En la Figura 5.40 escogiendo $R = 100 \text{ M}\Omega$. Sin embargo, una resistencia tan grande es cara y difícil de encontrar.

Diseño 2: Con el circuito de la Figura 5.41 se obtiene también la ganancia de conversión de 10^8 V/A . El primer amp. op. con $R = 10^6$ convierte i_1 en $v_1 = -10^6 i_1$. El segundo amplificador con una ganancia de -100 (por ejemplo, con $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ y $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$) amplifica de v_1 a $v_2 = -100v_1 = 10^8 i_1$. El circuito tiene dos amp. op. y tres resistencias ($1 \text{ M}\Omega$, $100 \text{ k}\Omega$ y $1 \text{ k}\Omega$), las cuales son menos caras y de más fácil disponibilidad.

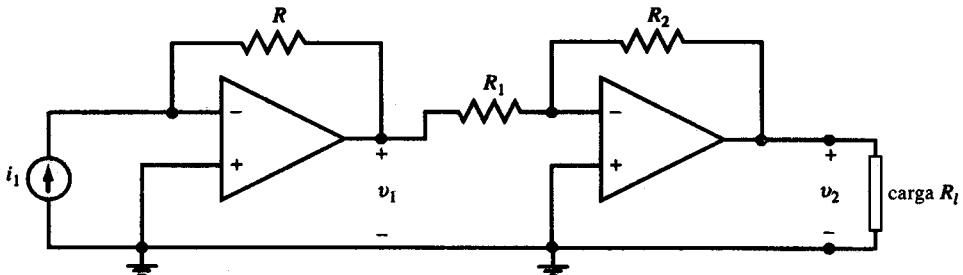


Figura 5.41.

Diseño 3: Ver Figura 5.42 y Problema 5.19.

- 5.19. Determinar los valores de las resistencias para conseguir una conversión corriente-tensión con una ganancia de $v_2/i_1 = 10^8 \text{ V/A}$ en el circuito de la Figura 5.42.

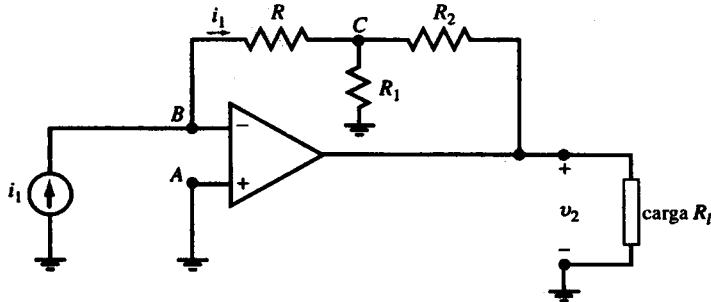


Figura 5.42.

Aplicando la LKC al nudo C. Teniendo en cuenta que $v_B = v_A = 0$. Así:

$$\frac{v_C}{R} + \frac{v_C}{R_1} + \frac{v_C - v_2}{R_2} = 0$$

Sustituyendo $v_C = -Ri_1$ y despejando v_2 obtenemos:

$$v_2 = -R_{\text{eq}}i_1 \quad \text{donde} \quad R_{\text{eq}} = R \left(1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R} \right)$$

Para obtener la ganancia de conversión de $v_2/i_1 = R_{\text{eq}} = 10^8 \text{ V/A} = 100 \text{ M}\Omega$ necesitamos encontrar unas resistencias que cumplan la siguiente ecuación:

$$R \left(1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R} \right) = 10^8 \Omega$$

Una solución es tomar $R = 1 \text{ M}\Omega$, $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ y $R_2 = 99 \text{ k}\Omega$. El diseño de la Figura 5.42 utiliza un solo amp. op. y tres resistencias que no son muy caras y son fácilmente adquiribles.

- 5.20. Calcular i_2 en función de v_1 en el circuito de la Figura 5.43.

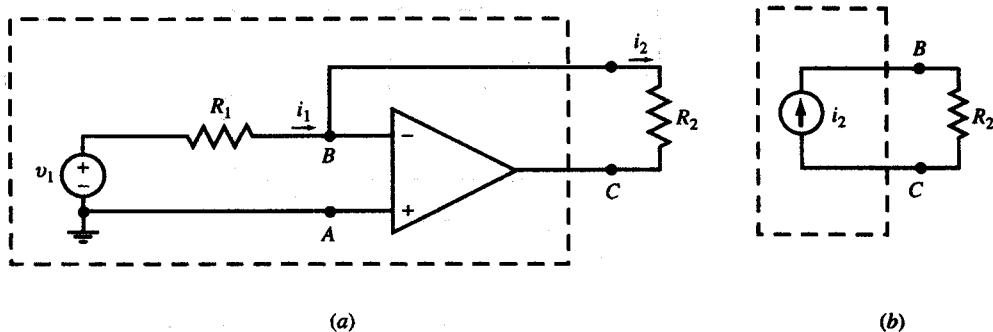


Figura 5.43.

Tenemos:

$$v_B = v_A = 0 \quad i_1 = v_1/R_1 \quad i_2 = i_1 = v_1/R_1$$

El amp. op. convierte la tensión de la fuente en una fuente de intensidad flotante. La relación de conversión de tensión-corriente es R_1 y es independiente de R_2 .

- 5.21. Una fuente de intensidad real (i_s) está en paralelo con una resistencia interna R_s alimenta directamente una carga R_l , como se indica en la Figura 5.44(a). a) Calcular la intensidad i_l . b) Situar un amp. op. entre la fuente y la carga, como se indica en la Figura 5.44(b). Calcular i_l y comparar con el apartado a).

- a) En el caso de conexión directa, Figura 5.44(a), $i_l = i_s R_s / (R_s + R_l)$, que varía con R_l . b) En la Figura 5.44(b) el amp. op. hace que v_B sea cero provocando que la corriente R_s sea cero. Por tanto, $i_l = i_s$, que ahora es independiente de R_l . El circuito del amp. op. convierte la fuente real de intensidad en una fuente ideal de intensidad. Ver Figura 5.44(c).

- 5.22. Calcular v_o en el circuito de la Figura 5.45.

El primer amp. op. es tipo inversor de ganancia unidad con $v_3 = -v_2$. El segundo amp. op. es un circuito sumador con ganancia de $-R_2/R_1$ para ambas entradas v_1 y v_3 . La salida es

$$v_o = -\frac{R_2}{R_1} (v_1 + v_3) = \frac{R_2}{R_1} (v_2 - v_1)$$

El circuito es un amplificador diferencial.

- 5.23. Calcular v_o en el circuito de la Figura 5.46.

Aplicando la LKC al nudo B. Tener en cuenta que $v_B = v_A = v_2$. Así:

$$\frac{v_2 - v_1}{R_1} + \frac{v_2 - v_o}{R_2} = 0$$

Despejando v_o obtenemos $v_o = v_2 + (R_2/R_1)(v_2 - v_1)$.

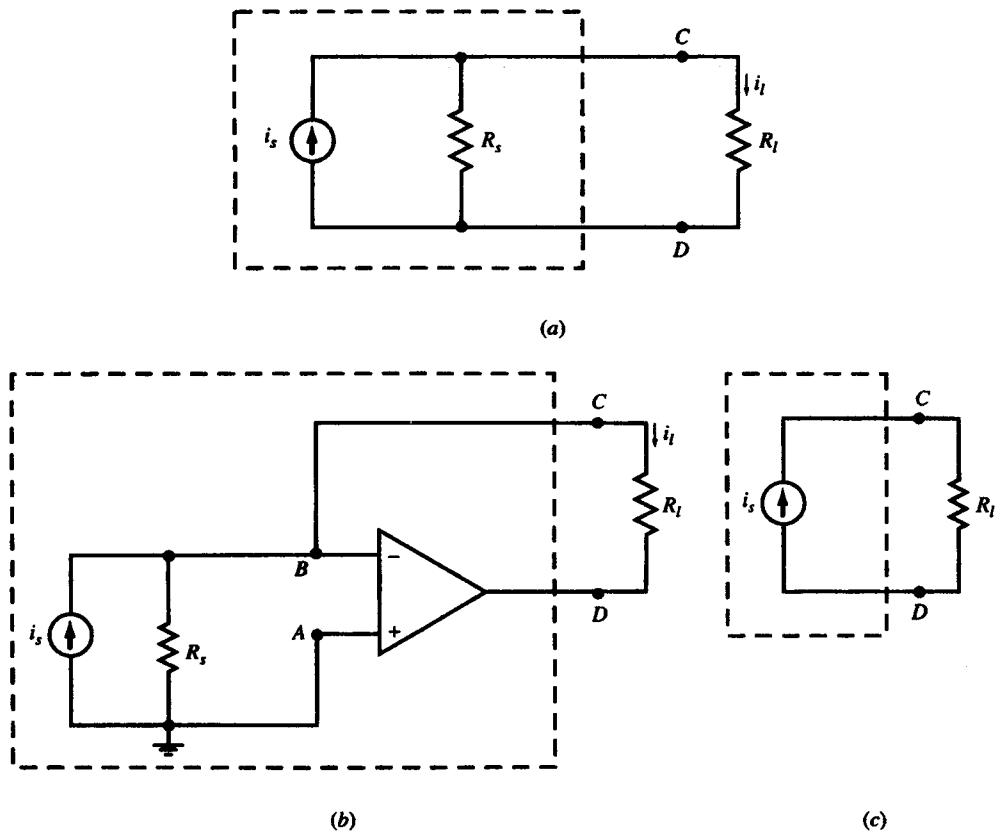


Figura 5.44.

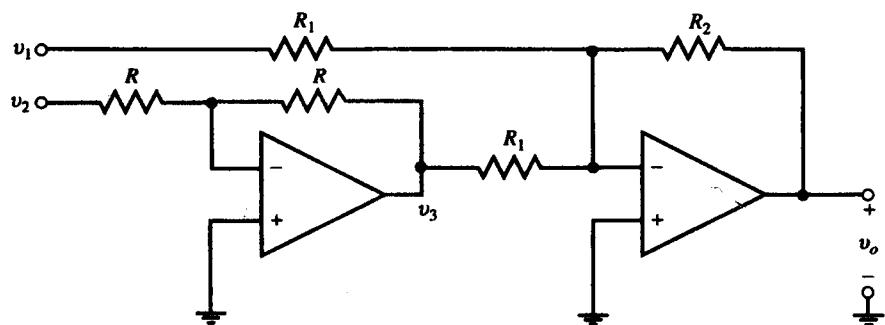


Figura 5.45.

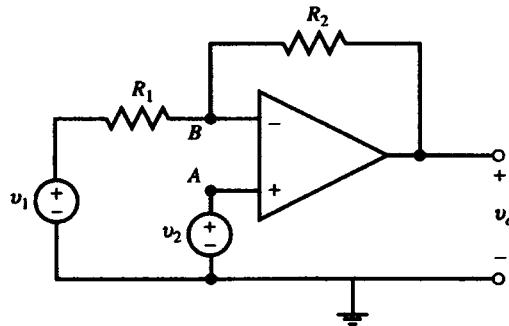


Figura 5.46.

- 5.24. En el circuito de la Figura 5.47 calcular v_o .

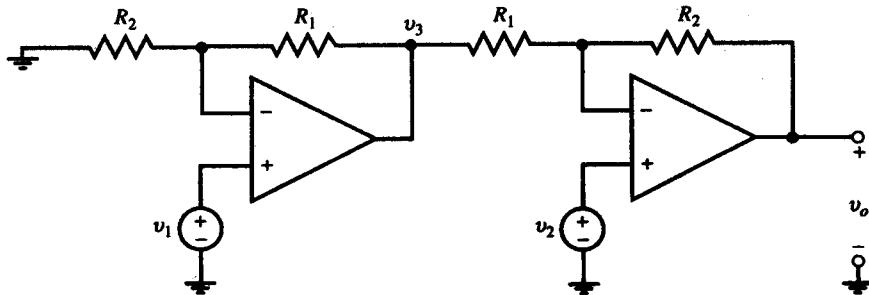


Figura 5.47.

La parte de la izquierda del circuito tiene una ganancia de $(1 + R_1/R_2)$. Por tanto, $v_3 = (1 + R_1/R_2)v_1$. Utilizando los resultados del Problema 5.23 y sustituyendo v_3 , resulta:

$$v_o = v_2 + \frac{R_2}{R_1} (v_2 - v_3) = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)v_2 - \frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)v_1 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)(v_2 - v_1)$$

- 5.25. Determinar los valores de las resistencias del circuito de la Figura 5.48 para conseguir una ganancia diferencial de 10^6 de tal forma que $v_o = 10^6(v_2 - v_1)$.

Los dos amp. op. primeros son seguidores de tensión.

$$v_A = v_1 \quad \text{y} \quad v_B = v_2$$

De (16), Sección 5.9, tenemos:

$$v_o = \frac{R_2}{R_1} (v_B - v_A) = \frac{R_2}{R_1} (v_2 - v_1)$$

Para conseguir la ganancia diferencial requerida con $R_2/R_1 = 10^6$ tomamos $R_1 = 100 \Omega$ y $R_2 = 100 \text{ M}\Omega$.

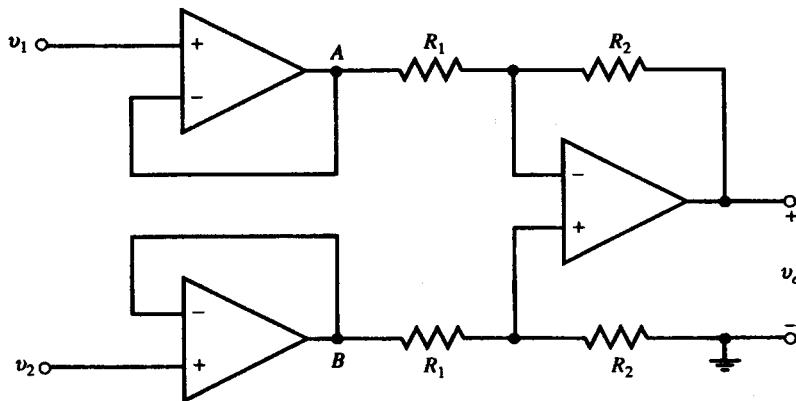


Figura 5.48.

El circuito de la Figura 5.48 puede tener la misma ganancia que el de la Figura 5.45, pero su resistencia de entrada es infinita. Sin embargo, se emplean dos resistencias pequeñas y dos grandes que no son muy corrientes.

- 5.26. Las resistencias de valor elevado y de precisión son muy caras. Demostrar que en el circuito de la Figura 5.49 se pueden seleccionar resistencias de valores corrientes de tal forma que $v_o = 10^6(v_2 - v_1)$.

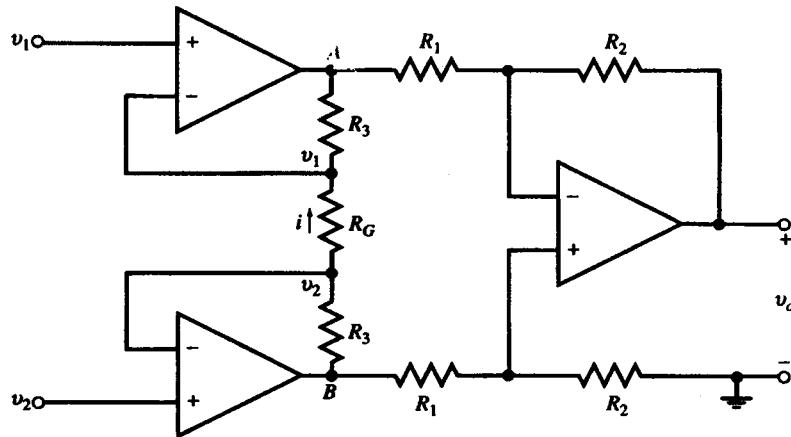


Figura 5.49.

Los dos primeros amp. op. transmiten las tensiones de entrada v_1 y v_2 a los terminales de R_G , provocando una corriente hacia arriba en la misma de $i = (v_2 - v_1)/R_G$. Esta corriente también pasa a través de las dos resistencias R_3 , provocando una caída de tensión de iR_3 en las mismas. Por tanto,

$$v_A = v_1 - R_3 i = v_1 - \frac{R_3}{R_G} (v_2 - v_1) \quad v_B = v_2 + R_3 i = v_2 + \frac{R_3}{R_G} (v_2 - v_1)$$

$$v_B - v_A = \left(1 + \frac{2R_3}{R_G}\right)(v_2 - v_1)$$

y

$$v_o = \frac{R_2}{R_1} (v_B - v_A) = \frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{2R_3}{R_G}\right)(v_2 - v_1)$$

Para una ganancia diferencial de 10^6 debemos tener que

$$\frac{v_o}{v_2 - v_1} = \frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{2R_3}{R_G}\right) = 10^6$$

Tomamos $R_1 = R_G = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$ y $R_3 = 5 \text{ M}\Omega$.

El circuito de la Figura 5.49 tiene una resistencia de entrada infinita, empleando resistencias corrientes y con tres amp. op.

- 5.27. Demostrar que en el circuito de la Figura 5.50 $i_1 = i_2$, prescindiendo de los circuitos N_1 y N_2 .

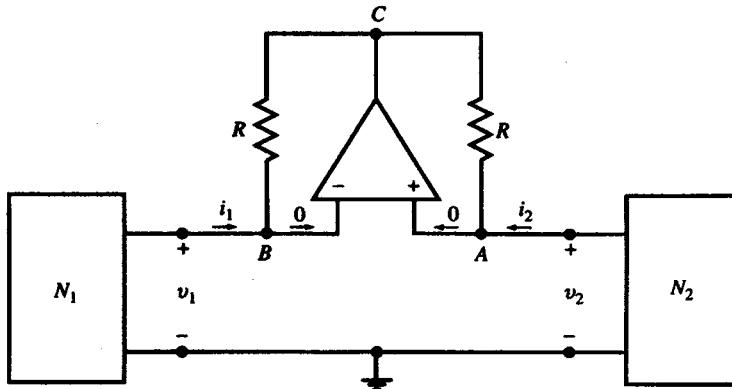


Figura 5.50.

Los nudos A y B tienen la misma tensión $v_A = v_B$. Puesto que el amp. op. no consume corriente, i_1 e i_2 van a través de las dos resistencias y la LKT aplicada al lazo ABC del amp. op. da $Ri_1 - Ri_2 = 0$. Por tanto, $i_1 = i_2$.

- 5.28. En el circuito de la Figura 5.50 supongamos que N_1 sea una fuente de tensión v_1 y N_2 una resistencia R_2 . Calcular la resistencia de entrada $R_{in} = v_1/i_1$.

Del amp. op. obtenemos $v_A = v_B$ e $i_1 = i_2$. Del conexionado de N_1 y N_2 obtenemos $v_1 = v_B = v_2 = v_A$ y $v_2 = -i_2 R_2$, respectivamente. La resistencia de entrada es $v_1/i_1 = -i_2 R_2/i_2 = -R_2$, que es la resistencia de carga cambiada de signo. El amp. op. es un convertidor de impedancia negativa.

- 5.29. Un seguidor de tensión está constituido por un amp. op. con ganancia finita A en circuito abierto y $R_{in} = \infty$ (ver Figura 5.51). Calcular la ganancia $G = v_2/v_1$. Calcular la sensibilidad s definida como la relación del porcentaje de cambio de G y la relación de porcentaje de cambio de A .

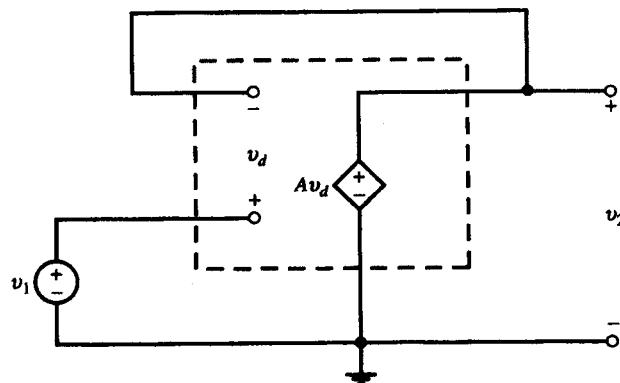


Figura 5.51.

De la Figura 5.51 tenemos $v_2 = Av_d$. Aplicando la LKT a lo largo del amplificador se obtiene:

$$v_1 = v_d + v_2 = v_d + Av_d = v_d(1 + A) = v_2(1 + A)/A$$

$$G = \frac{v_2}{v_1} = \frac{A}{1 + A}$$

La derivada de G respecto de A es

$$\frac{dG}{dA} = \frac{1}{(1 + A)^2} \quad \text{de donde} \quad dG = \frac{dA}{(1 + A)^2}$$

El porcentaje de cambio producido en G es $100(dG/G)$.

$$\frac{dG}{G} = \frac{dA}{(1 + A)^2} \cdot \frac{1 + A}{A} = \frac{1}{1 + A} \cdot \frac{dA}{A}$$

y la sensibilidad es

$$s = \frac{dG/G}{dA/A} = \frac{1}{1 + A}$$

El porcentaje de cambio de G depende de A . Valores de dG/dA frente a s se tienen en la Tabla 5.8.

Tabla 5.8.

A	dG/dA	G	s
10	0,909	0,008	0,091
11	0,917	0,007	0,083
100	0,990	0,0001	0,01
1000	0,999	0	0

Para valores muy grandes de A la ganancia G no es sensible a los cambios de A .

- 5.30. Repetir el Problema 5.3 sustituyendo el circuito a la izquierda del nudo (incluyendo v_s , R_1 y R_i) por su Thévenin equivalente (ver Figura 5.33). Resolver el problema aplicando los resultados del Ejemplo 5.4.

- 5.31. Obtener el circuito equivalente de Thévenin a la izquierda de los nudos A-B de la Figura 5.52, con $k = 10$ para a) $R_2 = \infty$ y b) $R_2 = 50 \text{ k}\Omega$.

Solución: a) $v_{Th} = -100 \text{ V}$, $R_{Th} = 100 \Omega$; b) $v_{Th} = -31,22 \text{ V}$, $R_{Th} = 37,48 \Omega$.

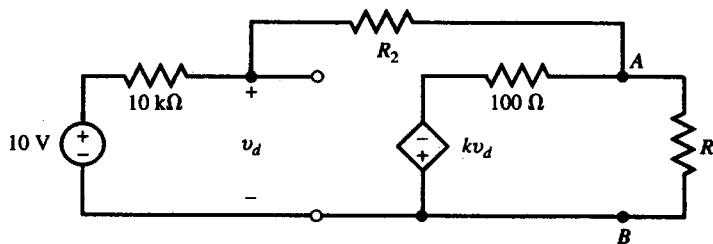


Figura 5.52.

- 5.32. Repetir el Problema 5.31 para $R_2 = 50 \text{ k}\Omega$ y $k = 100$.

Solución: $v_{Th} = -47,16 \text{ V}$, $R_{Th} = 5,66 \Omega$.

- 5.33. Determinar la relación que debe existir entre R , R_1 y R_2 en la Figura 5.41 para que el circuito tenga una ganancia de $v_2/v_1 = 10^6 \text{ V/A}$.

Solución: $RR_2/R_1 = 10^6$.

- 5.34. En el circuito de la Figura 5.13, $V_{cc} = 10 \text{ V}$, $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$ y $v_1 = 1 \text{ V}$. Calcular el valor máximo de R_2 sin que el amp. op. alcance la saturación.

Solución: $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$.

- 5.35. Supongamos el circuito sumador de la Figura 5.14 con dos entradas dadas por $v_1 = 1$ y $v_2 = \text{sent}(\text{V})$. Supongamos que $R_1 = 3 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$ y $R_f = 8 \text{ k}\Omega$. Calcular v_o utilizando superposición.

Solución: $v_o = -\left(\frac{8}{3} = \frac{8}{3} \text{ sen } t\right)$.

- 5.36. En la Figura 5.17 supongamos que $R_1 = 4 \text{ k}\Omega$ y $R_2 = 8 \text{ k}\Omega$. Aplicando superposición, calcular v_o en función de las tensiones de entrada.

Solución: $v_o = v_1 + v_2 = v_3$.

- 5.37. Calcular la resistencia de entrada vista desde v_f en la Figura 5.19.

Solución: $R_{in} = 2R_1$.

- 5.38. En la Figura 5.20, utilizando superposición, calcular v_o siendo $R_1 = 2$, $R_2 = 7$, $R_3 = 10$, $R_4 = 5$, todos expresados en $\text{k}\Omega$.

Solución: $v_o = 1,5v_2 - 3,5v_1$.

- 5.39. En el circuito de la Figura 5.20 calcular: a) v_o para $R_1 = 1$, $R_2 = 3$, $R_3 = 2$ y $R_4 = 2$, todos en $\text{k}\Omega$; b) la resistencia de entrada $R_{2\text{in}}$ vista por v_2 ; c) i_1 en función de v_1 y v_2 y demostrar que v_1 ve una carga variable que depende de v_2 .

Solución: a) $v_o = 2v_2 - 3v_1$, b) $R_{2\text{in}} = 4 \text{ k}\Omega$, c) $i_1 = v_1 - v_2/2$.

- 5.40. Utilizando un solo amp. op., diseñar un amplificador con una ganancia de $v_2/v_1 = 3/4$, con una resistencia de entrada de $8 \text{ k}\Omega$ y una resistencia de salida cero.

Solución: Ver Figura 5.53.

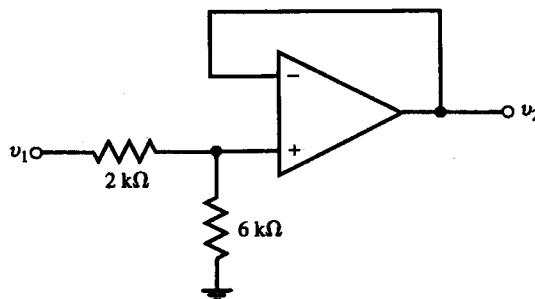


Figura 5.53.

- 5.41. Demostrar que, dados $R_1 = \infty$ y $R_2 = 0$, el circuito del amp. op. no-inversor de la Figura 5.15 y (12) se reduce a un seguidor de tensión.

- 5.42. En el circuito de la Figura 5.22 se supone $R_s = 10 \text{ k}\Omega$. a) Calcular R_f para que $i_s = 0$. b) ¿Es independiente R_f de R_s ? Discutirlo.

Solución: a) $40 \text{ k}\Omega$, b) sí.

- 5.43. La entrada al circuito de la Figura 5.23 con $RC = 1$ es $v_1 = \sin \omega t$. Escribir la LKC para el nudo B y despejar de la misma v_2 .

Solución: $v_2 = -(1/\omega) \cos \omega t + C$.

- 5.44. Demostrar que la salida v_2 en el circuito de la Figura 5.54 es la misma que la salida del integrador de la Figura 5.23.

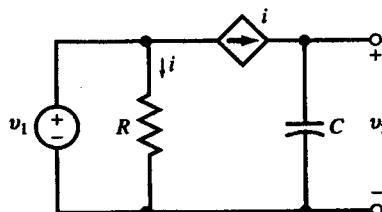


Figura 5.54.

- 5.45. Calcular v_2 en el integrador con descarga de la Figura 5.24, siendo $R_1 = R_f = 1 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \mu\text{F}$ y

$$v_1 = \begin{cases} 1 \text{ V} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\text{Solución: } v_2(t) = \begin{cases} -1 + e^{-1000t} (\text{V}) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

- 5.46. Repetir el Problema 5.45 para $v_1 = \begin{cases} 1 \text{ V} & t < 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$.

$$\text{Solución: } v_2(t) = \begin{cases} -e^{-1000t} (\text{V}) & t > 0 \\ -1 \text{ V} & t < 0 \end{cases}$$

- 5.47. En la ecuación diferencial $10^{-2} dv_2/dt + v_2 = v_s$, v_s es la función de excitación (forzada) y v_2 es la respuesta. Diseñar un amp. op. para obtener v_2 a partir de v_s .

Solución: Ver Figura 5.24 con $R_1 = R_f = R$, $RC = 10^{-2}$ y $v_1 = -v_s$.

- 5.48. Diseñar un circuito con amp. op. para resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$y' + x = v_{s1}$$

$$2y + x' + 3x = -v_{s2}$$

Solución: Ver Figura 5.55, con $R_1C = R_4C = 1 \text{ s}$, $R_2C = \frac{1}{3} \text{ s}$, $R_3C = \frac{1}{2} \text{ s}$.

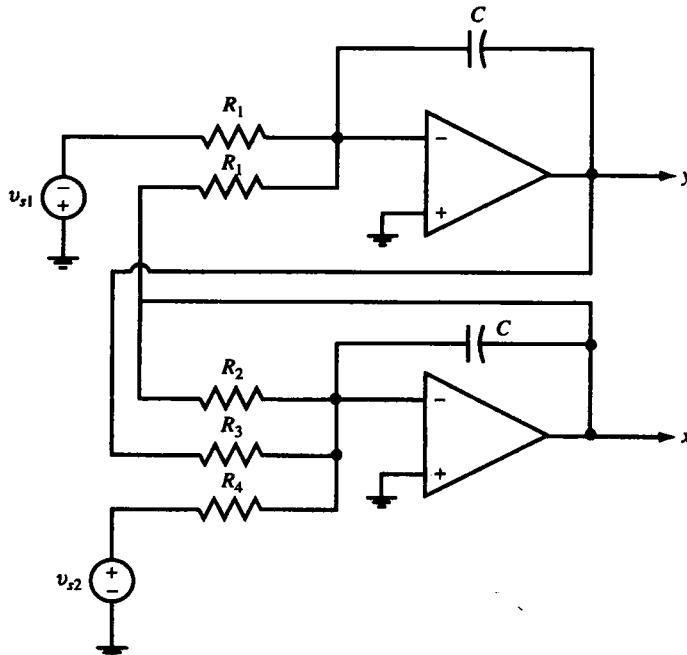


Figura 5.55.

CAPÍTULO 6

Señales y formas de onda

6.1. INTRODUCCIÓN

Las tensiones e intensidades, como funciones temporales, que pueden presentarse en los circuitos eléctricos son de los tres tipos siguientes:

- i) Funciones periódicas.
- ii) Funciones no periódicas.
- iii) Funciones aleatorias.

En este capítulo el dominio del tiempo, para todas las funciones, es $-\infty < t < \infty$ y los términos forma de onda y señal se usarán indistintamente.

6.2. FUNCIONES PERIÓDICAS

Una señal $v(t)$ es periódica con período T si

$$v(t) = v(t + T) \quad \text{para todo } t$$

Se dan a continuación cuatro tipos de funciones periódicas, para un período completo T , con sus gráficas correspondientes.

- a) Onda senoidal:

$$v_1(t) = V_0 \operatorname{sen} 2\pi t/T \quad (1)$$

Ver Figura 6.1(a).

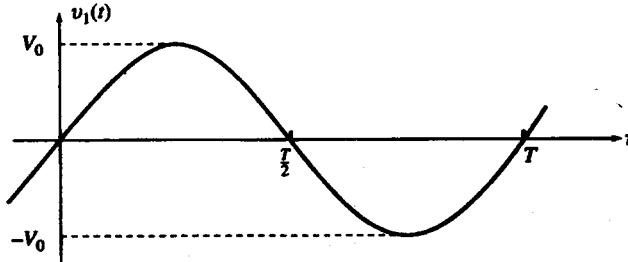


Figura 6.1(a).

b) Impulso periódico:

$$v_2(t) = \begin{cases} V_1 & \text{para } 0 < t < T_1 \\ -V_2 & \text{para } T_1 < t < T \end{cases} \quad (2)$$

Ver Figura 6.1(b).

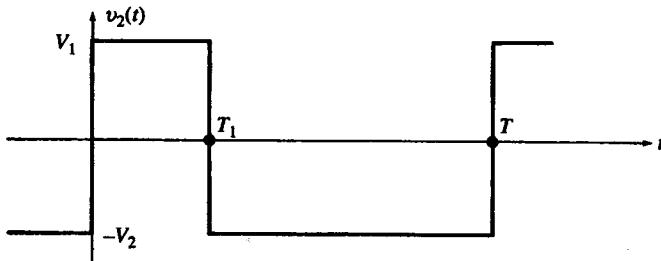


Figura 6.1(b).

c) Tren de ondas periódico:

$$v_3(t) = \begin{cases} V_0 \operatorname{sen} 2\pi t/\Lambda & \text{para } 0 < t < T_1 \\ 0 & \text{para } T_1 < t < T \end{cases} \quad (3)$$

donde $T = k\Lambda$ es un número entero. Ver Figura 6.1(c).

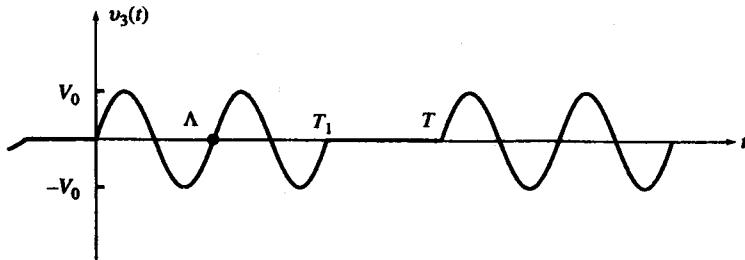


Figura 6.1(c).

d) Repetición de un suceso cada T segundos:

$$v_4(t) \quad (4)$$

Ver Figura 6.1(d).

Las señales periódicas pueden ser muy complejas. Sin embargo, veremos, en el Capítulo 17, cómo pueden representarse como suma de sinusoides. Este tipo de funciones son las que se estudiarán en las siguientes secciones.

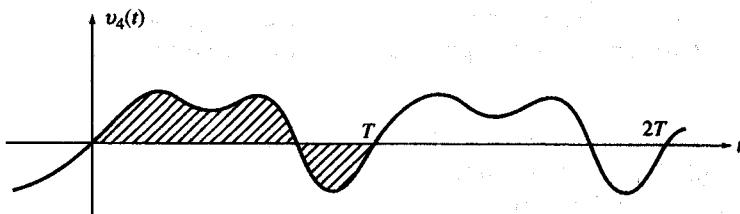


Figura 6.1(d).

6.3. FUNCIONES SINUSOIDALES

Una tensión sinusoidal $v(t)$ está dada por

$$v(t) = V_0 \cos(\omega t + \theta)$$

donde V_0 es la amplitud, ω es la pulsación o frecuencia angular y θ es el ángulo de fase.

La pulsación ω puede expresarse en función del período T o de la *frecuencia f*, donde $f \equiv 1/T$. La frecuencia se mide en hercios, Hz, o ciclos/s. Puesto que $\cos \omega = \cos(\omega t + 2\pi)$, ω y T están relacionados por $\omega T = 2\pi$. Si se toma T en segundos, la $v(t)$ pasará por su valor original, $1/T$ ciclos en un segundo.

En resumen, para las funciones sinusoidales tenemos:

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi f \quad f = 1/T = \omega/2\pi \quad T = 1/f = 2\pi/\omega$$

EJEMPLO 6.1. Dibujar cada una de las siguientes funciones y especificar el período y la frecuencia.

a) $v_1(t) = \cos t \quad b) \quad v_2(t) = \sin t \quad c) \quad v_3(t) = 2 \cos 2\pi t$

d) $v_4(t) = 2 \cos(\pi t/4 - 45^\circ) = 2 \cos(\pi t/4 - \pi/4) = 2 \cos[\pi(t - 1)/4]$

e) $v_5(t) = 5 \cos(10t + 60^\circ) = 5 \cos(10t + \pi/3) = 5 \cos 10(t + \pi/30)$

- a) Ver Figura 6.2(a). $T = 2\pi = 6,2832$ s y $f = 0,159$ Hz.
- b) Ver Figura 6.2(b). $T = 2\pi = 6,2832$ s y $f = 0,159$ Hz.
- c) Ver Figura 6.2(c). $T = 1$ s y $f = 1$ Hz.
- d) Ver Figura 6.2(d). $T = 8$ s y $f = 0,125$ Hz.
- e) Ver Figura 6.2(e). $T = 0,2\pi = 0,62832$ s y $f = 1,59$ Hz.

EJEMPLO 6.2. Dibujar $v(t) = 5 \cos \omega t$ en función de ωt .

Ver Figura 6.3.

6.4. DESFASES TEMPORAL Y ANGULAR

Una función retrasada τ segundos respecto de $v(t) = \cos \omega t$ se obtiene haciendo $v(t - \tau) = \cos \omega(t - \tau) = \cos(\omega t - \theta)$, donde $\theta = \omega\tau$. Gráficamente este retardo significa que la curva $v(t)$ se desplaza hacia la derecha un valor de τ segundos, lo que corresponde a un retraso de fase de $\theta = \omega\tau = 2\pi f\tau$. La función $v(t + \tau)$ está desplazada hacia la izquierda τ segundos teniendo entonces un *desfase temporal* de τ segundos, lo que representa un ángulo de fase en adelanto.

Consecuentemente, un desfase angular de valor θ corresponde a un desfase temporal de valor τ . Por tanto, para un desfase angular dado, cuanto mayor es la frecuencia menor es el retraso en tiempo.

EJEMPLO 6.3. Dibujar $v(t) = 5 \cos(\pi t/6 + 30^\circ)$.

La ecuación se puede escribir como

$$v(t) = 5 \cos(\pi t/6 + \pi/6) = 5 \cos[\pi(t + 1)/6]$$

Ésta es una función coseno con período de 12 s, la cual está adelantada en el tiempo 1 s; o sea, la gráfica está desplazada hacia la izquierda 1 s o 30° , tal como se ve en la Figura 6.4.

EJEMPLO 6.4. Suponer un circuito lineal con la siguientes entrada y salida, aplicables para cualquier valor de ω y A :

$$\text{Entrada: } v_i(t) = A \cos \omega t \quad \text{Salida: } v_o(t) = A \cos(\omega t - \theta)$$

Dada $v_i(t) = \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t$, calcular $v_o(t)$ cuando

- a) $\theta = 10^6 \omega$ [con desfase angular proporcional a la frecuencia, Figura 6.5(a)].
- b) $\theta = 10^{-6}$ [con desfase angular constante, Figura 6.5(b)].

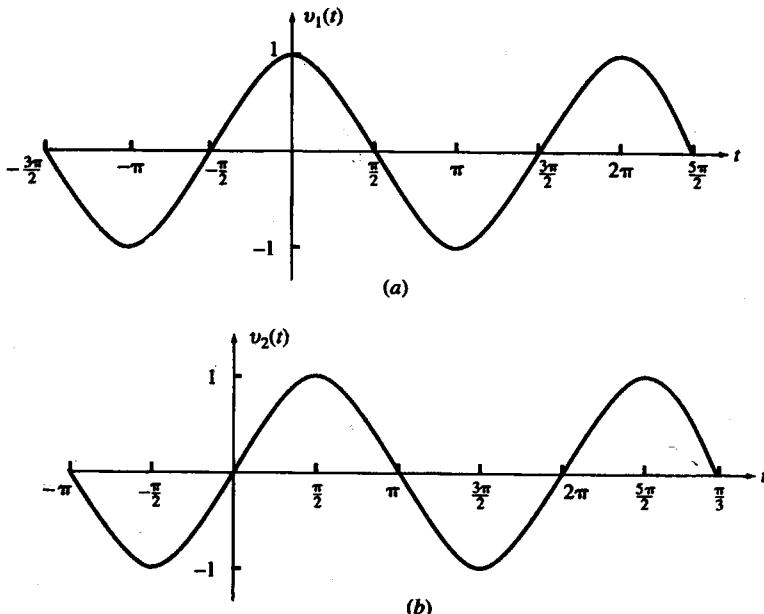


Figura 6.2 (continúa).

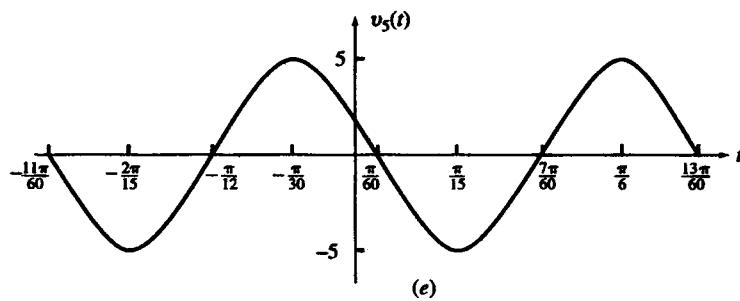
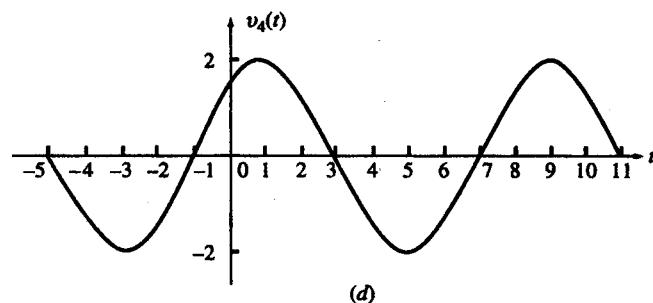
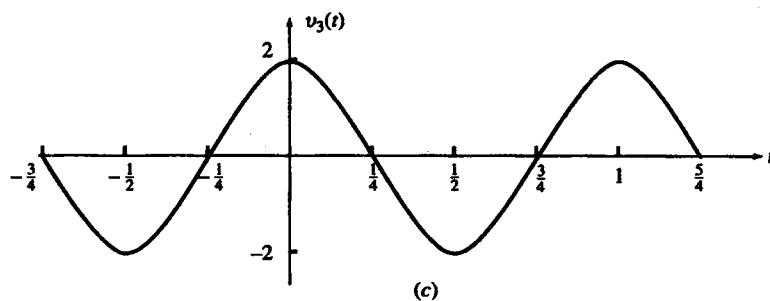


Figura 6.2 (continuación).

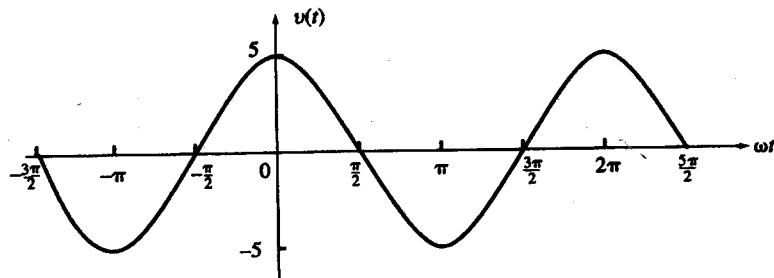


Figura 6.3.

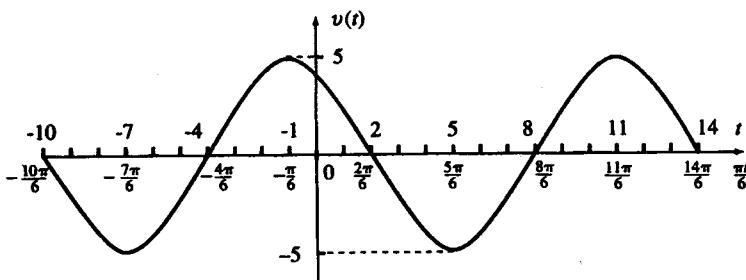


Figura 6.4.

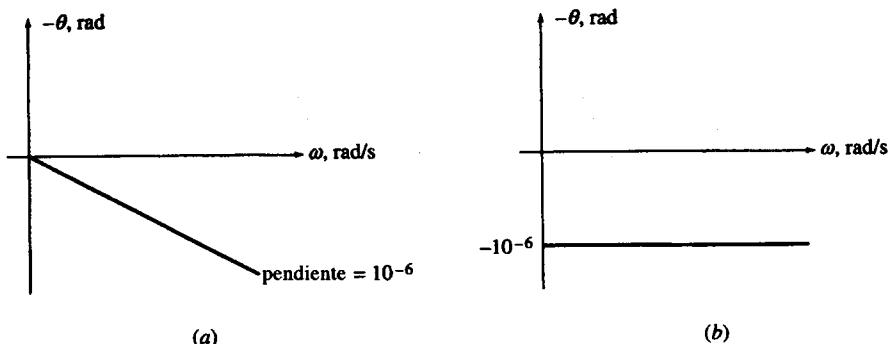


Figura 6.5.

La salida es $v_0(t) = \cos(\omega_1 t - \theta_1) + \cos(\omega_2 t - \theta_2)$.

- a) $\theta_1 = 10^{-6}\omega_1$, $\theta_2 = 10^{-6}\omega_2$. Entonces

$$\begin{aligned} v_0(t) &= \cos(\omega_1 t - 10^{-6}\omega_1) + \cos(\omega_2 t - 10^{-6}\omega_2) \\ &= \cos \omega_1(t - 10^{-6}) + \cos \omega_2(t - 10^{-6}) = v_i(t - 10^{-6}) = v_i(t - \tau) \end{aligned}$$

donde $\tau = 10^{-6}$ s = 1 μ s. Así un desfase angular proporcional a ω [Figura 6.5(a)] retrasa a todas las componentes de frecuencia de la señal de entrada en 1 μ s. La salida sigue a la entrada sin distorsión.

- b) $\theta_1 = \theta_2 = 10^{-6}$. Entonces

$$\begin{aligned} v_0(t) &= \cos(\omega_1 t - 10^{-6}) + \cos(\omega_2 t - 10^{-6}) \\ &= \cos \omega_1(t - 10^{-6}/\omega_1) + \cos \omega_2(t - 10^{-6}/\omega_2) \end{aligned}$$

Un desfase angular constante [Figura 6.5(b)] retrasa las componentes de frecuencia de la señal de entrada de forma distinta. La salida está distorsionada respecto de la entrada.

6.5. COMBINACIÓN DE FUNCIONES PERIÓDICAS

La suma de dos funciones periódicas de períodos T_1 y T_2 es una función periódica de período T , si se cumple que $T = n_1 T_1 = n_2 T_2$, siendo n_1 y n_2 enteros. Esto significa que $T_1/T_2 = n_2/n_1$ debe ser un número racional. En caso contrario, la suma no es periódica.

EJEMPLO 6.5. Calcular el período de $v(t) = \cos 5t + 3 \operatorname{sen} (3t + 45^\circ)$.

El período de $\cos 5t$ es $T_1 = 2\pi/5$ y el período de $3 \operatorname{sen} (3t + 45^\circ)$ es $T_2 = 2\pi/3$. Tomando $T = 2\pi = 5T_1 = 3T_2$, que es el mínimo común múltiplo entero de T_1 y T_2 . Observar que $v(t + T) = v(t)$, ya que:

$$v(t + T) = \cos 5(t + 2\pi) + 3 \operatorname{sen} [3(t + 2\pi) + 45^\circ] = \cos 5t + 3 \operatorname{sen} (3t + 45^\circ) = v(t)$$

Por tanto, el período de $v(t)$ es 2π .

EJEMPLO 6.6. ¿Es periódica $v(t) = \cos t + \cos 2\pi t$? Comentar la contestación.

El período de $\cos t$ es $T_1 = 2\pi$. El período de $\cos 2\pi t$ es $T_2 = 1$. No es posible encontrar un período que cumpla $T = n_1 T_1 = n_2 T_2$ porque $T_1/T_2 = 2\pi$ no es un número racional. Por tanto, $v(t)$ no es periódica.

EJEMPLO 6.7. Dado $p = 3,14$, calcular el período de $v(t) = \cos t + \cos 2pt$.

El período de $\cos t$ es $T_1 = 2\pi$ y el período de $\cos 2pt$ es $T_2 = \pi/3,14$. La relación $T_1/T_2 = 6,28$ es un número racional. La pareja de números enteros $n_1 = 25$ y $n_2 = 157$ satisface la relación $n_2/n_1 = T_1/T_2 = 628/100 = 157/25$. Por tanto, $v(t)$ es periódica del período $T = n_1 T_1 = n_2 T_2 = 50\pi$ s.

Identidades trigonométricas

Las identidades trigonométricas de la Tabla 6.1 son útiles en el estudio de circuitos.

Tabla 6.1.

$\operatorname{sen} a = -\operatorname{sen} (-a)$	(5a)
$\cos a = \cos (-a)$	(5b)
$\operatorname{sen} a = \cos (a - 90^\circ)$	(5c)
$\cos a = \operatorname{sen} (a + 90^\circ)$	(5d)
$\operatorname{sen} 2a = 2\operatorname{sen} a \cos a$	(6a)
$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 a$	(6b)
$\operatorname{sen}^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$	(7a)
$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$	(7b)
$\operatorname{sen} (a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$	(8a)
$\cos (a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$	(8b)
$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \frac{1}{2} \operatorname{sen} (a - b) - \frac{1}{2} \operatorname{sen} (a + b)$	(9a)
$\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2} \operatorname{sen} (a + b) + \frac{1}{2} \operatorname{sen} (a - b)$	(9b)
$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \cos (a + b) + \frac{1}{2} \cos (a - b)$	(9c)
$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2}(a - b)$	(10a)
$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2}(a - b)$	(10b)

EJEMPLO 6.8. Expresar $v(t) = \cos 5t \operatorname{sen} (3t + 45^\circ)$ como suma de dos funciones cosenoidales y calcular el período.

$$\begin{aligned} v(t) &= \cos 5t \operatorname{sen} (3t + 45^\circ) = [\operatorname{sen} (8t + 45^\circ) - \operatorname{sen} (2t - 45^\circ)]/2 & [\text{Ec. (9b)}] \\ &= [\cos (8t - 45^\circ) + \cos (2t + 45^\circ)]/2 & [\text{Ec. (5c)}] \end{aligned}$$

El período de $v(t)$ es π .

6.6. VALORES MEDIO Y EFICAZ

Una función periódica $f(t)$, de período T , tiene un valor medio F_{med} dado por

$$F_{\text{med}} = \langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \quad (11)$$

El valor medio cuadrático (vmc, en inglés rms) o valor eficaz de $f(t)$ durante el mismo período está definido por

$$F_{\text{ef}} = F_{\text{vmc}} = \left[\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t) dt \right]^{1/2} \quad (12)$$

O sea, que $F_{\text{ef}}^2 = \langle f^2(t) \rangle$.

Los valores medios y eficaz se calculan normalmente a lo largo de un período.

EJEMPLO 6.9. Calcular el valor medio y eficaz de la onda cosenoidal $v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$. Utilizando (11),

$$V_{\text{med}} = \frac{1}{T} \int_0^T V_m \cos(\omega t + \theta) dt = \frac{V_m}{\omega T} [\sin(\omega t + \theta)]_0^T = 0 \quad (13)$$

y utilizando (12),

$$V_{\text{ef}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T V_m^2 \cos^2(\omega t + \theta) dt = \frac{1}{2T} \int_0^T V_m^2 [1 + \cos 2(\omega t + \theta)] dt = V_m^2/2$$

de donde

$$V_{\text{ef}} = V_m / \sqrt{2} = 0,707 V_m \quad (14)$$

Las ecuaciones (13) y (14) ponen de manifiesto que los resultados son independientes de la frecuencia y del ángulo de fase θ ; o sea, que el valor medio de un coseno y el valor eficaz son siempre 0 y $0,707 V_m$, respectivamente.

EJEMPLO 6.10. Calcular el valor medio y eficaz de una media-onda rectificada senoidal

$$v(t) = \begin{cases} V_m \sin \omega t & \text{cuando } \sin \omega t > 0 \\ 0 & \text{cuando } \sin \omega t < 0 \end{cases} \quad (15)$$

De (11),

$$V_{\text{med}} = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} V_m \sin \omega t dt = \frac{V_m}{\omega T} [-\cos \omega t]_0^{T/2} = V_m/\pi \quad (16)$$

y de (12),

$$V_{\text{ef}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} V_m^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2T} \int_0^{T/2} V_m^2 (1 - \cos 2\omega t) dt = V_m^2/4$$

por tanto,

$$V_{\text{ef}} = V_m/2 \quad (17)$$

EJEMPLO 6.11. Calcular V_{med} y V_{ef} de la función periódica tal que, para un período T , vale:

$$v(t) = \begin{cases} V_0 & \text{para } 0 < t < T_1 \\ -V_0 & \text{para } T_1 < t < 3T_1 \end{cases} \quad \text{Período } T = 3T_1 \quad (18)$$

Tenemos

$$V_{\text{med}} = \frac{V_0}{3T} (T_1 - 2T_1) = \frac{-V_0}{3} \quad (19)$$

y

$$V_{\text{ef}}^2 = \frac{V_0^2}{3T} (T_1 + 2T_1) = V_0^2$$

de lo cual

$$V_{\text{ef}} = V_0 \quad (20)$$

El resultado anterior puede generalizarse como sigue. Si $|v(t)| = V_0$ entonces $V_{\text{ef}} = V_0$.

EJEMPLO 6.12. Calcular la potencia media disipada de 0 a T en una resistencia conectada a una tensión $v(t)$. Sustituir $v(t)$ por una tensión constante V_{dc} . Obtener el valor de V_{dc} tal que la potencia media sea la misma en ese período.

$$p = vi = v^2/R$$

$$P_{\text{med}} = \frac{1}{RT} \int_0^T v^2(t) dt = \frac{1}{R} V_{\text{ef}}^2 = \frac{V_{\text{dc}}^2}{R} \quad \text{o} \quad V_{\text{dc}} = V_{\text{ef}}$$

EJEMPLO 6.13. La corriente $i(t)$ que se indica en la Figura 6.6 pasa a través de un condensador de $1 \mu\text{F}$. Calcular: a) la tensión v_{ac} en el condensador para $t = 5k \text{ ms}$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$), y b) el valor de la fuente de intensidad constante I_{dc} que puede producir la misma tensión sobre el condensador en $t = 5k \text{ ms}$ cuando se aplica para $t > 0$. Comparar I_{dc} con $\langle i(t) \rangle$, valor medio de $i(t)$ en la Figura 6.6 para un período de 5 ms después de $t > 0$.

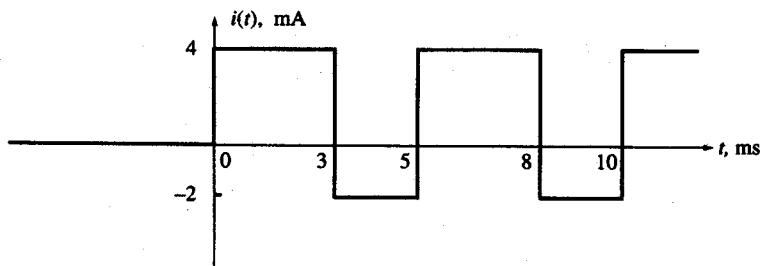


Figura 6.6.

a) Para $t = 5 \text{ ms}$

$$v_{\text{ac}} = \frac{1}{C} \int_0^{5 \cdot 10^{-3}} i(t) dt = 10^6 (10^{-3}) \left[\int_0^{3 \cdot 10^{-3}} 4 dt - \int_{3 \cdot 10^{-3}}^{5 \cdot 10^{-3}} 2 dt \right] = 12 - 4 = 8 \text{ V}$$

Éste es el valor para el primer intervalo de 5 ms. Cada 5 ms un valor igual debe añadirse a la tensión del condensador. Por tanto, para $t = 5k \text{ ms}$, $v = 8k \text{ (V)}$.

- b) Con una intensidad constante I_{dc} la tensión del condensador v_{dc} en 5 ms es

$$v_{dc} = \frac{1}{C} \int_0^{5k \cdot 10^{-3}} I_{dc} dt = 10^6(I_{dc})(5k \cdot 10^{-3}) = 10^3(5k)(I_{dc}) \quad (\text{V})$$

Puesto que debe ser $v_{dc} = v_{ac}$ en 5k ms, tendremos:

$$10^3(5k)(I_{dc}) = 8k \quad \text{o} \quad I_{dc} = 8k/(5k \cdot 10^3) = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 1,6 \text{ mA}$$

Observar que $I_{dc} = \langle i(t) \rangle$ de la Figura 6.6 para cualquier período de 5 ms con $t > 0$.

6.7. FUNCIONES NO PERIÓDICAS

Una función no periódica no queda definida para cualquier instante mediante el conocimiento de un segmento finito de la misma. Ejemplos de funciones no periódicas son:

$$a) \quad v_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ 1 & \text{para } t > 0 \end{cases} \quad (21)$$

$$b) \quad v_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ 1/T & \text{para } 0 < t < T \\ 0 & \text{para } t > T \end{cases} \quad (22)$$

$$c) \quad v_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ e^{-t/\tau} & \text{para } t > 0 \end{cases} \quad (23)$$

$$d) \quad v_4(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ \sin \omega t & \text{para } t > 0 \end{cases} \quad (24)$$

$$e) \quad v_5(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ e^{-t/\tau} \cos \omega t & \text{para } t > 0 \end{cases} \quad (25)$$

$$f) \quad v_6(t) = e^{-t/\tau} \quad \text{para todo } t \quad (26)$$

$$g) \quad v_7(t) = e^{-|t|} \quad \text{para todo } t \quad (27)$$

$$h) \quad v_8(t) = e^{-|t|} \cos \omega t \quad \text{para todo } t \quad (28)$$

Algunas de estas funciones se utilizan como modelo matemático para el diseño y análisis de circuitos con señales reales. En los siguientes apartados se discutirán algunos ejemplos.

6.8. LA FUNCIÓN ESCALÓN UNIDAD

La función *escalón unidad*, que no tiene dimensiones, se define por:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ 1 & \text{para } t > 0 \end{cases} \quad (29)$$

La función está dibujada en la Figura 6.7, y como puede verse no está definida para $t = 0$.

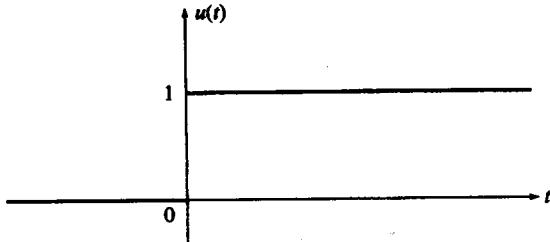


Figura 6.7.

Para ilustrar la utilidad de la función $u(t)$ supongamos el interruptor S del circuito de la Figura 6.8(a), que se encuentra en la posición 1 para $t < 0$ y se pasa a la posición 2 en $t = 0$. La tensión entre $A-B$ se puede expresar por $v_{AB} = V_0 u(t)$. El circuito equivalente para el escalón de tensión se representa en la Figura 6.8(b).

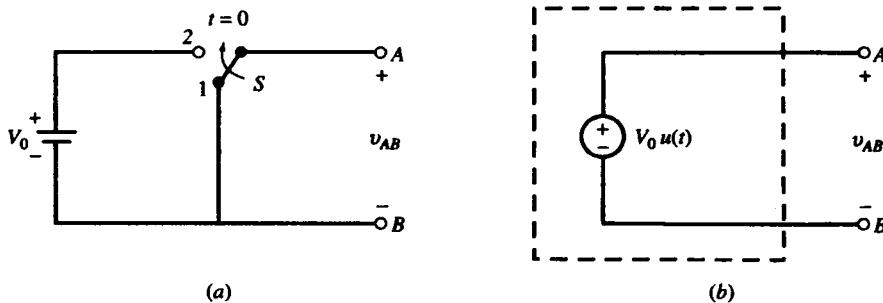


Figura 6.8.

EJEMPLO 6.14. El interruptor del circuito de la Figura 6.8(a) se cambia a la posición 2 en $t = t_0$. Expresar v_{AB} utilizando la función escalón unidad.

La aparición de la tensión V_0 entre $A-B$ está retrasada hasta $t = t_0$. Sustituyendo la variable t por $t - t_0$ en la función escalón, tendremos $v_{AB} = V_0 u(t - t_0)$.

EJEMPLO 6.15. Si el interruptor de la Figura 6.8(a) se cambia a la posición 2 en $t = 0$, y vuelve a la posición 1 en $t = 5$ s, expresar v_{AB} utilizando la función escalón.

$$v_{AB} = V_0 [u(t) - u(t - 5)]$$

EJEMPLO 6.16. Expresar la función $v(t)$ dibujada en la figura utilizando la función escalón.

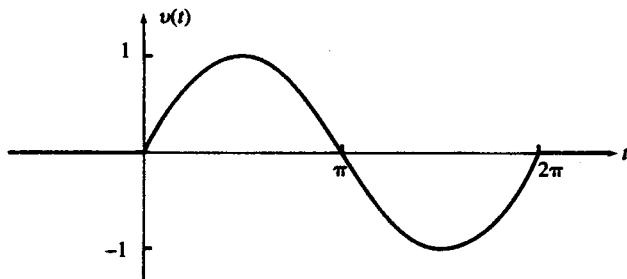


Figura 6.9.

$$v(t) = [u(t) - u(t - 2\pi)] \operatorname{sen} t$$

6.9. LA FUNCIÓN IMPULSO UNIDAD

Consideremos la función $s_T(t)$ de la Figura 6.10(a), que es cero para $t < 0$ y crece uniformemente desde 0 a 1 en T segundos. Su derivada $d_T(t)$ es un pulso de duración T y altura $1/T$, como se ve en la Figura 6.10(b).

$$d_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ 1/T & \text{para } 0 < t < T \\ 0 & \text{para } t > T \end{cases} \quad (30)$$

Si el tiempo T se reduce, el pulso de la Figura 6.10(b) es más estrecho y más alto, pero el área encerrada bajo el mismo sigue siendo igual a uno. Si permitimos que T se aproxime a cero, en el límite la función $s_T(t)$ llega a ser la función escalón unidad $u(t)$ y su derivada $d_T(t)$ llegará a ser un impulso unidad $\delta(t)$ con un ancho cero y una altura infinita. El impulso unidad $\delta(t)$ se representa en la Figura 6.10(c). El *impulso unidad o la función delta unidad* está definida por

$$\delta(t) = 0 \quad \text{para } t \neq 0 \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (31)$$

Un impulso que sea igual al límite de un pulso estrecho de área A se expresa por $A\delta(t)$. A la magnitud A se la denomina a veces *fuerza del impulso*. Un impulso unidad que ocurre para $t = t_0$ se expresa por $\delta(t - t_0)$.

EJEMPLO 6.17. La tensión entre los terminales de un condensador de 100 nF crece linealmente desde 0 a 10 V, con la forma de la función de la Figura 6.10(a). Calcular: a) la carga del condensador para $t = T$, y b) la corriente $i_C(t)$ por el condensador para $T = 1$ s, $T = 1$ ms y $T = 1$ μ s.

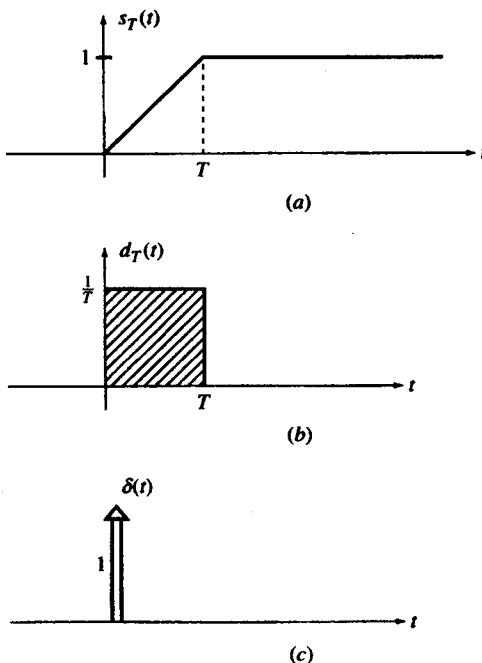


Figura 6.10.

a) Para $t = T$, $v_C = 10$ V. La carga del condensador es $Q = Cv_C = 10^{-7} \cdot 10 = 10^{-6}$.

$$b) i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt}$$

De la Figura 6.10,

$$i_C(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ I_0 = 10^{-6}/T & \text{(A)} \\ 0 & \text{para } t > T \end{cases} \quad (32)$$

Para $T = 1$ s, $I_0 = 10^{-6}$ A; para $T = 1$ ms, $I_0 = 10^{-3}$ A, y para $T = 1 \mu\text{s}$, $I_0 = 1$ A.

En todos los casos anteriores, la carga acumulada en el condensador al final del período de transición es

$$Q = \int_0^T i_C(t) dt = I_0 T = 10^{-6} \text{ C}$$

La cantidad de carga en $t = T$ es independiente de T . Esto proporciona una tensión de $v_C = 10$ V en el condensador.

EJEMPLO 6.18. Supongamos un pulso $d_T(t - t_0)$ de anchura T y altura $1/T$, que empieza en $t = t_0$. Consideremos una función que es continua entre t_0 y $t_0 + T$, como se indica en la Figura 6.11(a). Calcular el límite de la integral dada en (33) cuando T tiende a cero.

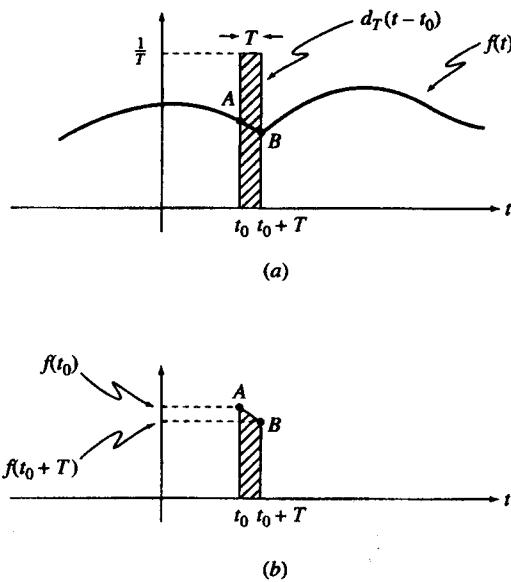


Figura 6.11.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d_T(t - t_0) f(t) dt \quad (33)$$

$$d_T(t - t_0) = \begin{cases} 1/T & t_0 < t < t_0 + T \\ 0 & \text{en las otras partes} \end{cases}$$

Sustituyendo d_T en (33) tenemos:

$$I = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0 + T} f(t) dt = \frac{S}{T} \quad (34a)$$

donde S es el área rayada bajo $f(t)$ entre t_0 y $t_0 + T$ en la Figura 6.11(b). Suponiendo que T sea muy pequeño, la función $f(t)$ puede aproximarse a una línea entre A y B . El trapecio resultante tiene de área S .

$$S = \frac{1}{2} [f(t_0) + f(t_0 + T)] T \quad (34b)$$

$$I = \frac{1}{2} [f(t_0) + f(t_0 + T)] \quad (34c)$$

Cuando $T \rightarrow 0$, $d_T(t - t_0) \rightarrow \delta(t - t_0)$ y $f(t_0 + T) \rightarrow f(t_0)$ y de (34c) tenemos:

$$\lim_{T \rightarrow 0} I = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{2} [f(t_0) + f(t_0 + T)] \quad (34d)$$

Suponiendo que $f(t)$ es continua entre t_0 y $t_0 + T$ resulta:

$$\lim_{T \rightarrow 0} I = f(t_0) \quad (34e)$$

Pero como

$$\lim_{T \rightarrow 0} I = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)f(t) dt \quad (34f)$$

y así se tendrá

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)f(t) dt = f(t_0) \quad (34g)$$

La identidad (34g) se llama «propiedad *sifting*» (en inglés) de la función impulso. Se usa también como otra definición de $\delta(t)$.

6.10. LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

La función $f(t) = e^{st}$, siendo s un número complejo constante, se llama *exponencial*. Si la parte real de s es negativa, la función es decreciente, y si es positiva, es creciente. Discutiremos la exponencial e^{at} siendo a una constante dada por un número real.

La inversa de la constante a tiene dimensiones de tiempo y se llama *constante de tiempo* $\tau = 1/a$. Una función decreciente $e^{-t/\tau}$ está representada en la Figura 6.12. La función decrece desde uno en $t = 0$ a cero para $t = \infty$. Después de τ segundos, la función $e^{-t/\tau}$ se reduce a $e^{-1} = 0,368$. Para $\tau = 1$ la función e^{-t} se denomina *exponencial normalizada* y tiene la misma representación que $e^{-t/\tau}$ si se toma frente a t/τ .

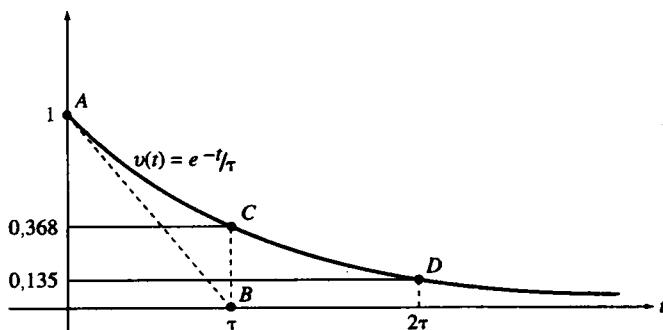


Figura 6.12.

EJEMPLO 6.19. Demostrar que la tangente a la curva $e^{-t/\tau}$ en $t = 0$ corta al eje t para $t = \tau$, tal como se ve en la Figura 6.12.

La tangente comienza en el punto A ($v = 1$, $t = 0$) con una pendiente de $d(e^{-t/\tau})/dt|_{t=0} = -1/\tau$. La ecuación de la recta tangente es $v_{tan}(t) = -t/\tau + 1$. La línea corta al eje t en el punto B donde $t = \tau$. Este resultado puede ser útil para dibujar de forma aproximada la exponencial, como se describirá en el Ejemplo 6.20.

EJEMPLO 6.20. Dibujar aproximadamente $v(t) = e^{-t/\tau}$ para $t > 0$.

Se identifica el punto inicial A ($t = 0$, $v = 1$) de la curva y el punto de intersección de su tangente con el eje t . Se dibuja la recta AB . Dos puntos adicionales C y D son para $t = \tau$ y para $t = 2\tau$,

respectivamente, y con alturas $0,368$ y $0,368^2 = 0,135$, que pertenecen a la curva. Utilizando estos valores, la curva puede dibujarse con bastante buena aproximación (ver Figura 6.12).

EJEMPLO 6.21. a) Demostrar que la velocidad de cambio con respecto al tiempo de una función exponencial $v = Ae^{st}$ es en cualquier momento proporcional al valor de la función en ese momento.
b) Demostrar que cualquier combinación lineal de una exponencial y sus n derivadas es proporcional a dicha exponencial. Calcular el coeficiente de proporcionalidad.

- a) La velocidad de cambio de una función es su derivada, la cual para una función exponencial es

$$\frac{dv}{dt} = sAe^{st} = sv$$

- b) Utilizando el resultado de a) tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d^n v}{dt^n} &= s^n A e^{st} = s^n v \\ a_0 v + a_1 \frac{dv}{dt} + \cdots + a_n \frac{d^n v}{dt^n} &= (a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n) v = Hv \end{aligned} \quad (35)$$

donde

$$H = a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n \quad (36)$$

Definición y gráfica de $f(t) = Ae^{-at} + B$

Encontramos con frecuencia la función

$$f(t) = Ae^{-at} + B \quad (37)$$

Esta función está completamente definida por los tres números A , B y a , que significan
 A = valor inicial – valor final; B = valor final; a = inversa de la constante de tiempo.

O, de otra manera,

Valor inicial $f(0) = A + B$; Valor final $f(\infty) = B$; Constante de tiempo = $1/a$

EJEMPLO 6.22. Encontrar una función $v(t)$ que disminuya exponencialmente desde 5 V en $t = 0$ a 1 V para $t = \infty$ con una constante de tiempo de 3 s. Dibujar $v(t)$ mediante la técnica del Ejemplo 6.20.

De (37) tenemos $v(t) = Ae^{-t/\tau} + B$. Ahora $f(0) = A + B = 5$, $v(\infty) = B = 1$, $A = 4$ y $\tau = 3$. Así:

$$v(t) = 4e^{-t/3} + 1$$

El resultado anterior puede generalizarse de la siguiente forma:

$$v(t) = (\text{valor inicial} - \text{valor final})e^{-t/\tau} + (\text{valor final})$$

La curva se muestra en la Figura 6.13.

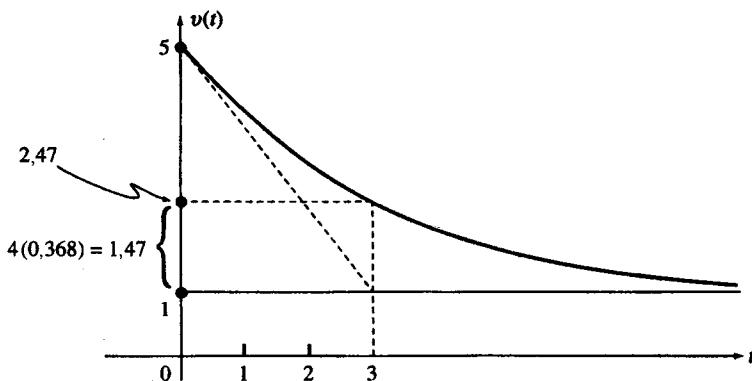


Figura 6.13.

EJEMPLO 6.23. La tensión $v = V_0 e^{-|t|/\tau}$, $\tau > 0$, se conecta a un condensador. Calcular la intensidad i por el condensador. Dibujar v e i para $V_0 = 10$ V, $C = 1 \mu\text{F}$ y $\tau = 1$ ms.

Utilizando $i = C \frac{dv}{dt}$,

$$\begin{array}{lll} \text{para } t < 0 & v = V_0 e^{t/\tau} & y \\ \text{para } t > 0 & v = V_0 e^{-t/\tau} & y \end{array}$$

donde $I_0 = CV_0/\tau$.

Para $V_0 = 10$ V, $C = 1 \mu\text{F}$ y $\tau = 10^{-3}$ s tenemos que $I_0 = 10$ mA. Las curvas de v e i son las indicadas en las Figuras 6.14(a) y (b), respectivamente.

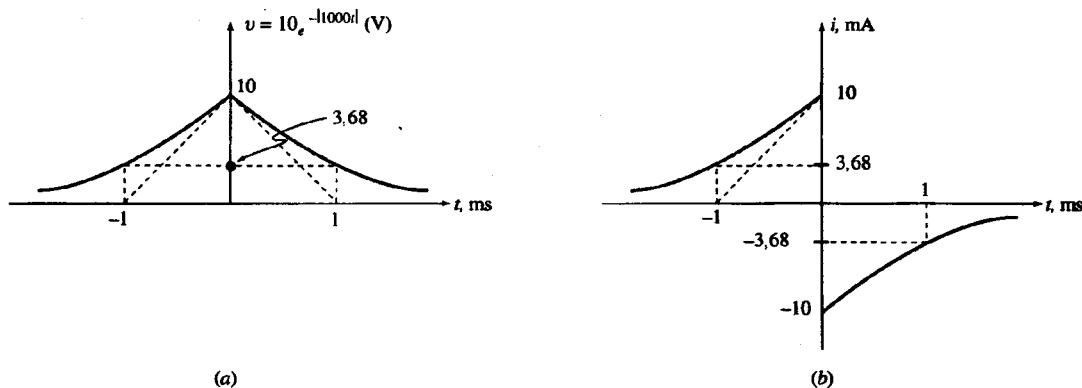


Figura 6.14.

6.11. SINUSOIDALES AMORTIGUADAS

Una sinusode amortiguada, con su amplitud disminuyendo exponencialmente, tiene la forma

$$v(t) = A e^{-at} \cos(\omega t + \theta) \quad (38)$$

Esta función se discutirá con más detalle en el Capítulo 8.

EJEMPLO 6.24. A través de un circuito serie RL pasa una intensidad $i = I_0 e^{-at} \cos \omega t$. a) Obtener la tensión entre ambos elementos, v_{RL} . b) Calcular v_{RL} para $I_0 = 3$ A, $a = 2$, $\omega = 40$ rad/s, $R = 5 \Omega$ y $L = 0,1$ H. Dibujar i en función del tiempo.

a) Tenemos

$$v_R = Ri = RI_0 e^{-at} \cos \omega t$$

$$v_L = L \frac{di}{dt} = -LI_0 e^{-at} (a \cos \omega t + \omega \operatorname{sen} \omega t)$$

$$v_{RL} = v_R + v_L = I_0 e^{-at} [(R - La) \cos \omega t - L\omega \operatorname{sen} \omega t] = V_0 e^{-at} \cos (\omega t + \theta)$$

donde $V_0 = I_0 \sqrt{(R - La)^2 + L^2 \omega^2}$ y $\theta = \tan^{-1}[L\omega/(R - La)]$ (39)

b) Sustituyendo los datos en (39), $V_0 = 18,75$ y $\theta = 39,8^\circ$. La intensidad i y la tensión v_{RL} están dadas por

$$i = 3e^{-2t} \cos 40t \quad y \quad v_{RL} = 18,75e^{-2t} \cos (40t + 39,8^\circ)$$

La intensidad i está dibujada en la Figura 6.15.

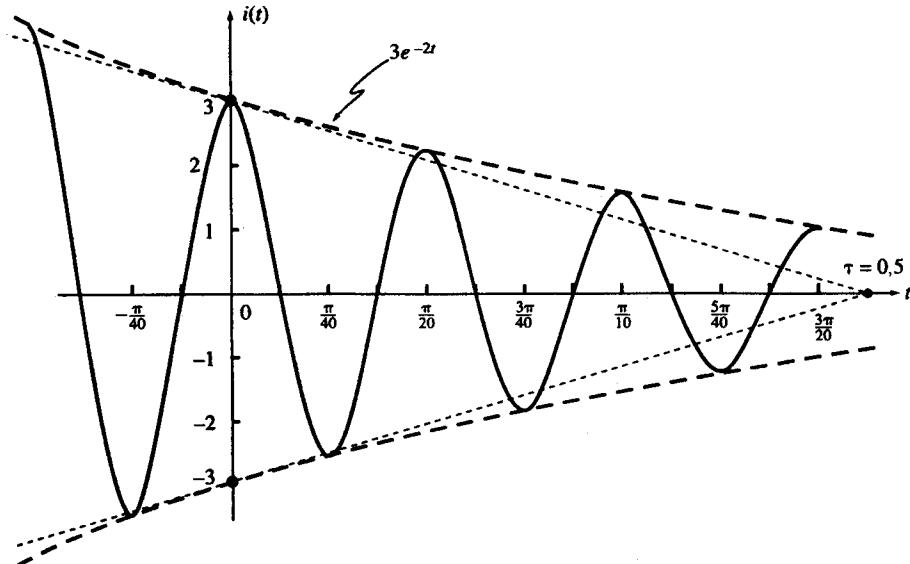


Figura 6.15.

6.12. SEÑALES ALEATORIAS

Hasta ahora hemos tratado con señales que están perfectamente definidas. Por ejemplo, los valores de una forma de onda senoidal, tal como la tensión, puede determinarse en cualquier instante si se conocen la amplitud, la frecuencia y la fase. Estas señales se llaman *deterministas*.

Hay otros tipos de señales que pueden determinarse de forma parcial mediante sus valores estadísticos temporales, como la media, la media cuadrática y el rango de frecuencia.

Estas señales se denominan *señales aleatorias*. La señales aleatorias pueden contener información y no deben confundirse con el ruido, que normalmente perturba la información contenida en la señal.

La tensión existente entre los extremos de un micrófono sometido al efecto de la voz de una conversación y la señal recogida por una antena sintonizada con una radio o un canal de televisión son ejemplos de señales aleatorias. La evolución futura de los valores de dichas señales solamente puede predecirse por métodos estadísticos y no con absoluta precisión. Otros ejemplos de señales aleatorias son las señales digitales de los ordenadores (computadores), las intensidades luminosas de un cuadro, la modulación de la amplitud de la onda portadora de un sistema de AM, efectuada por la voz o la música.

Puede parecer poco útil discutir sobre señales que sólo se conocen en valores medios. Sin embargo, a través del análisis armónico podemos conocer el efecto medio de tales señales en los circuitos eléctricos.

EJEMPLO 6.25. Se registra el muestreo de una señal aleatoria $x(t)$ 1 ms designando su valor por $x(n)$. Los valores medios y medios cuadráticos (rms) aproximados obtenidos del muestreo se dan en la Tabla 6.2.

Tabla 6.2.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$x(n)$	2	4	11	5	7	6	9	10	3	6	8	4	1	3	5	12

Los valores medios temporales de $x(t)$ y $x^2(t)$ pueden obtenerse aproximadamente de $x(n)$.

$$X_{\text{med}} = (2 + 4 + 11 + 5 + 7 + 6 + 9 + 10 + 3 + 6 + 8 + 4 + 1 + 3 + 5 + 12)/16 = 6$$

$$X_{\text{ef}}^2 = (2^2 + 4^2 + 11^2 + 5^2 + 7^2 + 6^2 + 9^2 + 10^2 + 3^2 + 6^2 + 8^2 + 4^2 + 1^2 + 3^2 + 5^2 + 12^2)/16 = 46$$

$$X_{\text{ef}} = 6,78$$

EJEMPLO 6.26. Una señal binaria $v(t)$ toma los valores +0,5 o -0,5 V. El cambio de signo se produce en intervalos de 1 ms. No se sabe qué signo se presentará en el cambio, pero habrá tantos signos positivos como negativos. Además, si se mide durante un tiempo muy largo, se obtiene el mismo tiempo con +0,5 y con -0,5 V. Calcular el valor medio y eficaz en un tiempo de 10 s.

En 10 s hay 10000 intervalos, cada uno de 10 ms, que se distribuirán por igual entre los niveles de +0,5 y de -0,5 V. Además, el valor medio de $v(t)$ puede aproximarse por

$$v_{\text{med}} = (0,5 \cdot 5000 - 0,5 \cdot 5000)/10000 = 0$$

El valor efectivo de $v(t)$ es

$$V_{\text{ef}}^2 = [(0,5)^2 \cdot 5000 + (-0,5)^2 \cdot 5000]/10000 = (0,5)^2 \quad \text{o} \quad V_{\text{ef}} = 0,5 \text{ V}$$

El valor de V_{ef} es exacto e independiente del número de intervalos.

PROBLEMAS RESUELTOS

- 6.1.** Calcular el máximo y el mínimo de $v(t) = 1 + 2 \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$, siendo $\omega = 1000$ s y $\theta = 3$ rad. Determinar si la función v es periódica y calcular la frecuencia f y el período T . Expresar el ángulo de fase en grados.

$$V_{\max} = 1 + 2 = 3 \quad V_{\min} = 1 - 2 = -1$$

La función v es periódica. Para calcular la frecuencia y el período tenemos que $\omega = 2\pi f = 1000$ rad/s. Y así:

$$f = 1000/2\pi = 159,15 \text{ Hz} \quad \text{y} \quad T = 1/f = 2\pi/1000 = 0,00628 \text{ s} = 67,28 \text{ ms}$$

Ángulo de fase = 3 rad = $180^\circ \cdot 3/\pi = 171,9^\circ$

- 6.2.** Una señal de microondas dada por $v_1 = A \operatorname{sen} 2\pi ft$, con $f = 100$ MHz, incide sobre un blanco, registrando su eco $v_2(t)$. El retardo entre la señal y su eco se denomina τ .
 a) Escribir una expresión para $v_2(t)$ y calcular su ángulo de fase para un retardo de $\tau_1 = 515$ ns y $\tau_2 = 555$ ns. b) ¿Puede calcularse sin ambigüedad a partir del ángulo de fase de $v_2(t)$ una distancia? Si es que no, indicar qué información adicional se necesita.

- a) Tomamos $v_2(t) = B \operatorname{sen} 2\pi f(t - \tau) = B \operatorname{sen}(2\pi ft - \theta)$.

Para $f = 100 \text{ MHz} = 10^8 \text{ Hz}$, $\theta = 2\pi f\tau = 2 \cdot 10^8 \pi \tau = 2\pi k + \phi$, donde $0 < \phi < 2\pi$.

Para $\tau_1 = 515 \cdot 10^{-9}$, $\theta_1 = 2\pi 10^8 \cdot 515 \cdot 10^{-9} = 103\pi = 51 \cdot 2\pi + \phi_1$ o $k_1 = 51$ y $\phi_1 = \pi$.

Para $\tau_2 = 555 \cdot 10^{-9}$, $\theta_2 = 2\pi 10^8 \cdot 555 \cdot 10^{-9} = 111\pi = 55 \cdot 2\pi + \phi_2$ o $k_2 = 55$ y $\phi_2 = \pi$.

- b) Puesto que los ángulos ϕ_1 y ϕ_2 son iguales, los tiempos de retardo τ_1 y τ_2 no pueden distinguirse uno de otro basándose en los ángulos de fase ϕ_1 y ϕ_2 . Para resolver la ambigüedad de la determinación de la distancia es necesario conocer k y ϕ .

- 6.3.** Demostrar que si los períodos T_1 y T_2 de dos funciones periódicas $v_1(t)$ y $v_2(t)$ tienen un múltiplo común, la suma de las dos funciones $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$ es periódica con un período igual al mínimo común múltiplo de T_1 y T_2 . En tal caso, demostrar que $V_{\text{med}} = V_{1,\text{med}} + V_{2,\text{med}}$.

Si se pueden encontrar dos números enteros n_1 y n_2 tal que $T = n_1 T_1 = n_2 T_2$, entonces $v_1(t) = v_1(t + n_1 T_1)$ y $v_2(t) = v_2(t + n_2 T_2)$. En consecuencia:

$$v(t + T) = v_1(t + T) + v_2(t + T) = v_1(t) + v_2(t) = v(t)$$

y $v(t)$ es periódica del período T .

El valor medio es

$$V_{\text{med}} = \frac{1}{T} \int_0^T [v_1(t) + v_2(t)] dt = \frac{1}{T} \int_0^T v_1(t) dt + \frac{1}{T} \int_0^T v_2(t) dt = V_{1,\text{med}} + V_{2,\text{med}}$$

6.4. Demostrar que el valor medio de $\cos^2(\omega t + \theta)$ es $1/2$.

Utilizando la igualdad $\cos^2(\omega t + \theta) = \frac{1}{2}[1 + \cos 2(\omega t + \theta)]$, la notación $\langle f \rangle = F_{\text{med}}$ y el resultado del Problema 6.3, tenemos:

$$\langle 1 + \cos 2(\omega t + \theta) \rangle = \langle 1 \rangle + \langle \cos 2(\omega t + \theta) \rangle$$

Pero $\langle \cos 2(\omega t + \theta) \rangle = 0$. Por tanto, $\langle \cos^2(\omega t + \theta) \rangle = 1/2$.

6.5. Siendo $v(t) = V_{\text{dc}} + V_{\text{ac}} \cos(\omega t + \theta)$. Demostrar que $V_{\text{ef}}^2 = V_{\text{dc}}^2 + \frac{1}{2}V_{\text{ac}}^2$

$$\begin{aligned} V_{\text{ef}}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T [V_{\text{dc}} + V_{\text{ac}} \cos(\omega t + \theta)]^2 dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T [V_{\text{dc}}^2 + V_{\text{ac}}^2 \cos^2(\omega t + \theta) + 2V_{\text{dc}} V_{\text{ac}} \cos(\omega t + \theta)] dt \\ &= V_{\text{dc}}^2 + \frac{1}{2}V_{\text{ac}}^2 \end{aligned}$$

Por otro lado, podemos escribir

$$\begin{aligned} V_{\text{ef}}^2 &= \langle v^2(t) \rangle = \langle [V_{\text{dc}} + V_{\text{ac}} \cos(\omega t + \theta)]^2 \rangle \\ &= \langle V_{\text{dc}}^2 + V_{\text{ac}}^2 \cos^2(\omega t + \theta) + 2V_{\text{dc}} V_{\text{ac}} \cos(\omega t + \theta) \rangle \\ &= V_{\text{dc}}^2 + V_{\text{ac}}^2 \langle \cos^2(\omega t + \theta) \rangle + 2V_{\text{dc}} V_{\text{ac}} \langle \cos(\omega t + \theta) \rangle \\ &= V_{\text{dc}}^2 + \frac{1}{2}V_{\text{ac}}^2 \end{aligned}$$

6.6. Siendo f_1 y f_2 dos armónicos diferentes de f_0 . Demostrar que el valor eficaz de $v(t) = V_1 \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) + V_2 \cos(2\pi f_2 t + \theta_2)$ es $\sqrt{\frac{1}{2}(V_1^2 + V_2^2)}$.

$$\begin{aligned} v^2(t) &= V_1^2 \cos^2(2\pi f_1 t + \theta_1) + V_2^2 \cos^2(2\pi f_2 t + \theta_2) \\ &\quad + 2V_1 V_2 \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) \cos(2\pi f_2 t + \theta_2) \\ V_{\text{ef}}^2 &= \langle v^2(t) \rangle = V_1^2 \langle \cos^2(2\pi f_1 t + \theta_1) \rangle + V_2^2 \langle \cos^2(2\pi f_2 t + \theta_2) \rangle \\ &\quad + 2V_1 V_2 \langle \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) \cos(2\pi f_2 t + \theta_2) \rangle \end{aligned}$$

Pero $\langle \cos^2(2\pi f_1 t + \theta_1) \rangle = \langle \cos^2(2\pi f_2 t + \theta_2) \rangle = 1/2$ (ver Problema 6.4) y

$$\begin{aligned} \langle \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) \cos(2\pi f_2 t + \theta_2) \rangle &= \langle \cos[2\pi(f_1 + f_2)t + (\theta_1 + \theta_2)] \rangle \\ &\quad + \langle \cos[2\pi(f_1 - f_2)t + (\theta_1 - \theta_2)] \rangle = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, $V_{\text{ef}}^2 = \frac{1}{2}(V_1^2 + V_2^2)$ y $V_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{1}{2}(V_1^2 + V_2^2)}$.

6.7. La señal $v(t)$ de la Figura 6.16 es sinusoidal. Calcular su período y su frecuencia. Expresarlo en forma de $v(t) = A + B \cos(\omega t + \theta)$ y calcular sus valores medio y eficaz.

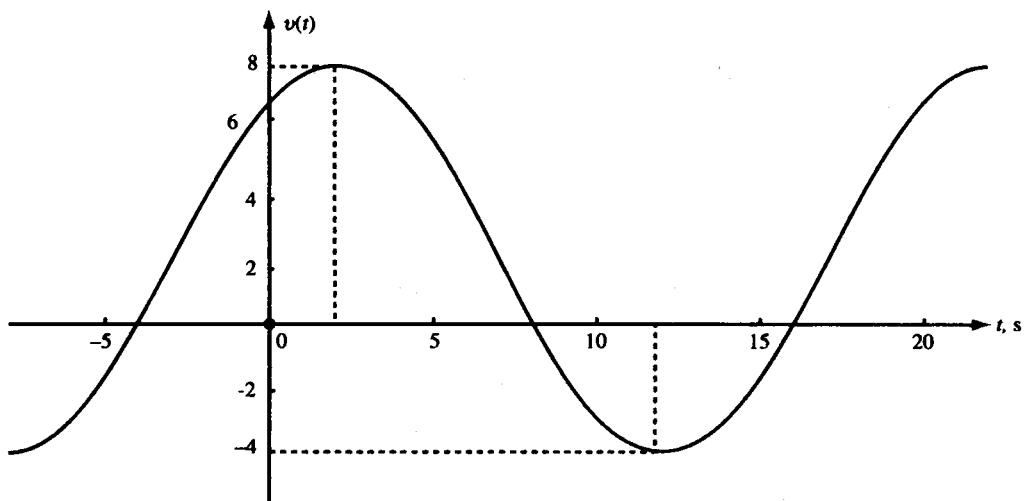


Figura 6.16.

El tiempo entre dos picos positivos, $T = 20$ s, es un período que significa una frecuencia de $f = 0,05$ Hz. La señal es una función coseno de amplitud B más una función constante de valor A .

$$B = \frac{1}{2}(V_{\max} - V_{\min}) = \frac{1}{2}(8 + 4) = 6 \quad A = V_{\max} - B = V_{\min} + B = 2$$

La gráfica del coseno está desplazada hacia la derecha 2 s, lo que corresponde a un ángulo en retardo de $(2/20)360^\circ = 36^\circ$. Por tanto, la señal se puede expresar por

$$v(t) = 2 + 6 \cos\left(\frac{\pi}{10}t - 36^\circ\right)$$

Los valores medio y eficaz se calculan a partir de A y B :

$$V_{\text{med}} = A = 2, \quad V_{\text{ef}}^2 = A^2 + B^2/2 = 2^2 + 6^2/2 = 22 \quad \text{o} \quad V_{\text{ef}} = \sqrt{22} = 4,69$$

- 6.8.** Siendo $v_1 = \cos 200\pi t$ y $v_2 = \cos 202\pi t$. Demostrar que $v = v_1 + v_2$ es periódica. Calcular su período, V_{\max} , y los tiempos para los que v toma su valor máximo.

Los períodos de v_1 y v_2 son, respectivamente, $T_1 = 1/100$ s y $T_2 = 1/101$ s. El período de $v = v_1 + v_2$ es el mínimo común múltiplo de T_1 y T_2 , que es $T = 100T_1 = 101T_2 = 1$ s. El valor máximo de v se presenta para $t = k$, siendo k un número entero cuando v_1 y v_2 están en su máximo y $V_{\max} = 2$.

- 6.9.** Transformar $v(t) = 3 \cos 100t + 4 \operatorname{sen} 100t$ a la forma $A \operatorname{sen}(100t + \theta)$.

Observar que $3/\sqrt{3^2 + 4^2} = 3/5 = \operatorname{sen} 36,87^\circ$ y $4/\sqrt{3^2 + 4^2} = 4/5 = \cos 36,87^\circ$. Entonces:

$$\begin{aligned} v(t) &= 3 \cos 100t + 4 \operatorname{sen} 100t = 5(0,6 \cos 100t + 0,8 \operatorname{sen} 100t) \\ &= 5(\operatorname{sen} 36,87^\circ \cos 100t + \cos 36,87^\circ \operatorname{sen} 100t) = 5 \operatorname{sen}(100t + 36,87^\circ) \end{aligned}$$

- 6.10. Obtener el valor medio y el eficaz de $v_2(t)$ de la Figura 6.1(b) para $V_1 = 2$, $V_2 = 1$, $T = 4T_1$.

$$V_{2,\text{med}} = \frac{V_1 T_1 - V_2 (T - T_1)}{T} = \frac{V_1 - 3V_2}{4} = -0,25$$

$$V_{2,\text{ef}}^2 = \frac{V_1^2 T_1 + V_2^2 (T - T_1)}{T} = \frac{7}{4} \quad \text{o} \quad V_{2,\text{ef}} = \sqrt{7}/2 = 1,32$$

- 6.11. Calcular $V_{3,\text{med}}$ y $V_{3,\text{ef}}$ de la Figura 6.1(c) para $T = 100 T_1$.

De la Figura 6.1(c), $V_{3,\text{med}} = 0$. Para calcular $V_{3,\text{ef}}$ observamos que la integral de v_3^2 en un período es $V_0^2 T_1/2$. El valor medio de v_3^2 en $T = 100 T_1$ es, por tanto,

$$\langle v_3^2(t) \rangle = V_{3,\text{ef}}^2 = V_0^2 T_1 / 200 T_1 = V_0^2 / 200 \quad \text{o} \quad V_{3,\text{ef}} = V_0 \sqrt{2}/20 = 0,0707 V_0$$

El valor eficaz de señales tipo tren de ondas periódico se reduce por el factor $\sqrt{T/T_1} = 10$.

- 6.12. Refiriéndonos a la Figura 6.1(d), supongamos que $T = 6$ y que las áreas bajo la parte positiva y negativa de $v_4(t)$ es $+5$ y -3 , respectivamente. Calcular los valores medio y eficaz de $v_4(t)$.

$$V_{4,\text{med}} = (5 - 3)/6 = 1/3$$

El valor eficaz no se puede obtener con los datos dados.

- 6.13. Calcular los valores medio y eficaz de la media onda rectificada cosenoidal $v_1(t)$ de la Figura 6.17(a).

$$V_{1,\text{med}} = \frac{V_m}{T} \int_{-T/4}^{T/4} \cos \frac{2\pi t}{T} dt = \frac{V_m T}{2\pi T} \left[\sin \frac{2\pi t}{T} \right]_{-T/4}^{T/4} = \frac{V_m}{\pi}$$

$$V_{1,\text{ef}}^2 = \frac{V_m^2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} \cos^2 \frac{2\pi t}{T} dt = \frac{V_m^2}{2T} \int_{-T/4}^{T/4} \left(1 + \cos \frac{4\pi t}{T} \right) dt$$

$$= \frac{V_m^2}{2T} \left[t + \frac{T}{4\pi} \sin \frac{4\pi t}{T} \right]_{-T/4}^{T/4} = \frac{V_m^2}{2T} \left(\frac{T}{4} + \frac{T}{4} \right) = \frac{V_m^2}{4}$$

de donde $V_{1,\text{ef}} = V_m/2$.

- 6.14. Calcular los valores medio y eficaz de la onda completa rectificada cosenoidal $v_2(t) = V_m |\cos 2\pi t/T|$ de la Figura 6.17(b).

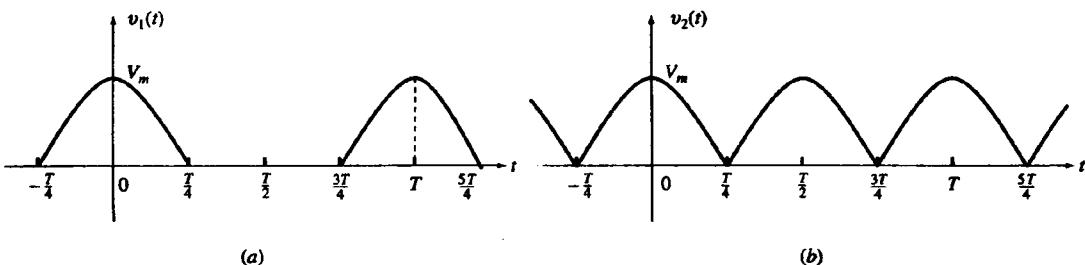


Figura 6.17.

Se usan los resultados de los Problemas 6.3 y 6.13 para calcular $V_{2,\text{med}}$. Así,

$$v_2(t) = v_1(t) + v_1(t - T/2) \quad \text{y} \quad V_{2,\text{med}} = V_{1,\text{med}} + V_{1,\text{med}} = 2V_{1,\text{med}} = 2V_m/\pi$$

Se usan los resultados de los Problemas 6.5 y 6.13 para calcular $V_{2,\text{ef}}$. Y así,

$$V_{2,\text{ef}}^2 = V_{1,\text{ef}}^2 + V_{1,\text{ef}}^2 = 2V_{1,\text{ef}}^2 = V_m^2/2 \quad \text{o} \quad V_{2,\text{ef}} = V_m/\sqrt{2}$$

El valor eficaz de $v_2(t)$ puede obtenerse directamente. Puesto que el cuadrado de la onda rectificada completa es la misma que la del coseno y, por tanto, tendrán el mismo valor eficaz, que es $V_m/\sqrt{2}$.

- 6.15.** Un inductor de 100 mH y una resistencia de 20 Ω están en serie [Figura 6.18(a)] y están atravesados por una corriente de intensidad i , como se indica en la Figura 6.18(b). Calcular y dibujar la tensión entre los extremos de R , L y RL .

$$i = \begin{cases} 10 \\ 10(1 - 10^3t) \\ 0 \end{cases} \text{ (A)} \quad \text{y} \quad \frac{di}{dt} = \begin{cases} 0 \\ -10^4 \text{ A/s} \\ 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{para } t < 0 \\ \text{para } 0 < t < 10^{-3} \text{ s} \\ \text{para } t > 10^{-3} \text{ s} \end{array}$$

$$v_R = Ri = \begin{cases} 200 \text{ V} \\ 200(1 - 10^3t) \text{ (V)} \\ 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad v_L = L \frac{di}{dt} = \begin{cases} 0 \\ 1000 \text{ V} \\ 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{para } t < 0 \\ \text{para } 0 < t < 10^{-3} \text{ s} \\ \text{para } t > 10^{-3} \text{ s} \end{array}$$

Puesto que los elementos pasivos se encuentran en serie, $v_{RL} = v_R + v_L$ y así

$$v_{RL} = \begin{cases} 200 \text{ V} \\ -2(10^3t) - 800 \text{ (A)} \\ 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{para } t < 0 \\ \text{para } 0 < t < 10^{-3} \text{ s} \\ \text{para } t > 10^{-3} \text{ s} \end{array}$$

La representación gráfica de v_L y de v_{RL} son las de la Figura 6.18(c) y (d), respectivamente. El gráfico de la tensión v_R en la resistencia tiene la misma forma que el de la intensidad, salvo un cambio de escala de $+20 \times$.

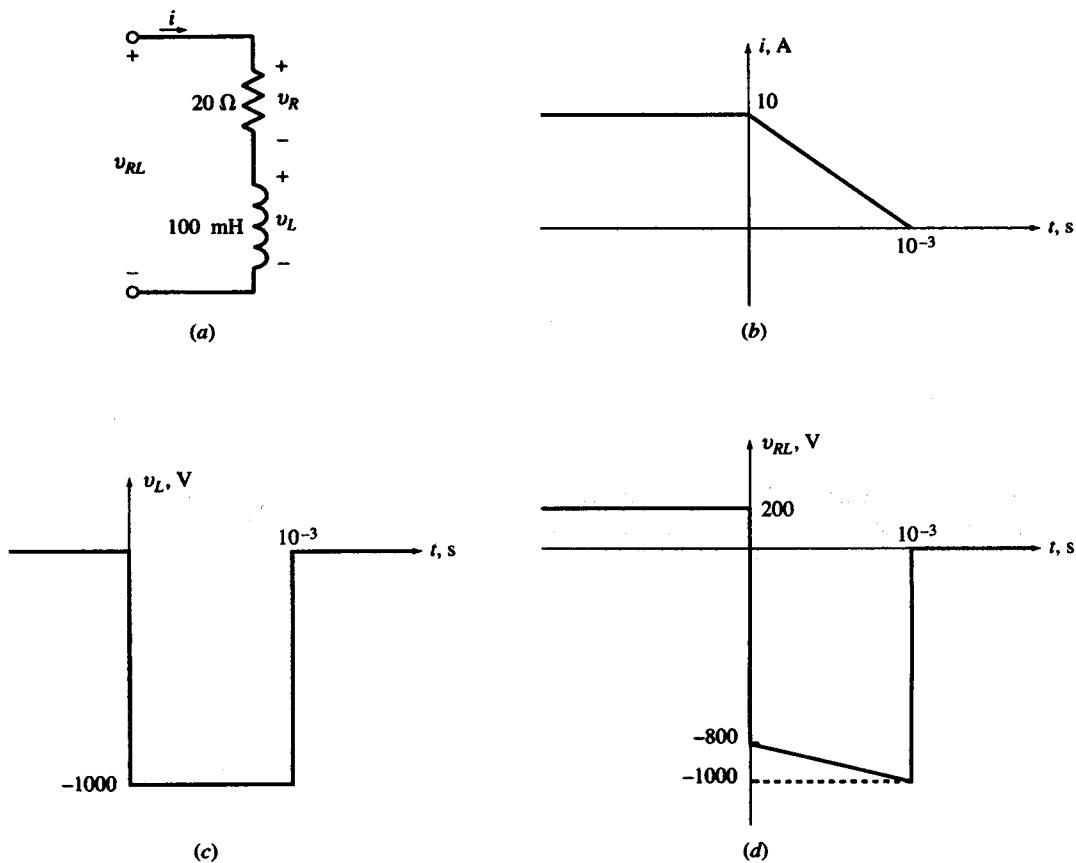


Figura 6.18.

- 6.16. Una señal de radar $s(t)$, de amplitud $V_m = 100$ V, consiste en una repetición de trenes de ondas. Cada uno con una duración de $T_b = 50 \mu\text{s}$. Los trenes se repiten cada $T_s = 10$ ms. Calcular S_{ef} y la potencia media en un período de $s(t)$.

Se tiene que $V_{\text{ef}} = V_m/\sqrt{2}$, que es el valor eficaz de la sinusoides dentro del tren. La energía contenida en un tren es $W_b = T_b V_{\text{ef}}^2$. La energía contenida en un período de $s(t)$ es $W_s = T_s S_{\text{ef}}^2$. Puesto que $W_b = W_s = W$, obtenemos:

$$T_b V_{\text{ef}}^2 = T_s S_{\text{ef}}^2 \quad S_{\text{ef}}^2 = (T_b/T_s) V_{\text{ef}}^2 \quad S_{\text{ef}} = \sqrt{T_b/T_s} V_{\text{ef}} \quad (40)$$

Sustituyendo los valores de T_b , T_s y V_{ef} en (40) obtenemos:

$$S_{\text{ef}} = \sqrt{(50 \cdot 10^{-6})/(10 \cdot 10^{-3})} (100/\sqrt{2}) = 5 \text{ V}$$

Entonces $W = 10^{-2}(25) = 0,25 \text{ J}$. La potencia media en un período de $s(t)$ es

$$P = W/T_s = T_s S_{\text{ef}}^2/T_s = S_{\text{ef}}^2 = 25 \text{ W}$$

Esta potencia media está representada por S_{ef}^2 y la potencia de pico por V_{ef}^2 . La relación entre la potencia de pico y la media es $\sqrt{T_s/T_b}$. En este ejemplo la potencia media es 25 W y la de pico 5000 W.

- 6.17.** Un equipo se conecta a una $V_{\text{ef}} = 120$ V de 60 Hz y absorbe una $I_{\text{ef}} = 10$ A con un ángulo de fase en retraso de 60° . Expresar v , i y $p = vi$ en función del tiempo, demostrando que la potencia es periódica con un valor de cc. Calcular la frecuencia y los valores medio, máximo y mínimo de p .

$$\begin{aligned} v &= 120\sqrt{2} \cos \omega t & i &= 10\sqrt{2} \cos(\omega t - 60^\circ) \\ p = vi &= 2400 \cos \omega t \cos(\omega t - 60^\circ) = 1200 \cos 60^\circ + 1200 \cos(2\omega t - 60^\circ) \\ &= 600 + 1200 \cos(2\omega t - 60^\circ) \end{aligned}$$

La función que da la potencia es periódica. La frecuencia $f = 2 \cdot 60 = 120$ Hz y la $P_{\text{med}} = 600$ W, $p_{\text{max}} = 600 + 1200 = 1800$ W, $p_{\text{min}} = 600 - 1200 = -600$ W.

- 6.18.** Un pulso estrecho i_s de 1 A de amplitud y 1 μs de duración se aplica a un condensador de $1 \mu\text{F}$ en el instante $t = 0$, tal como se indica en la Figura 6.19. El condensador está inicialmente descargado. Calcular la tensión en el condensador.

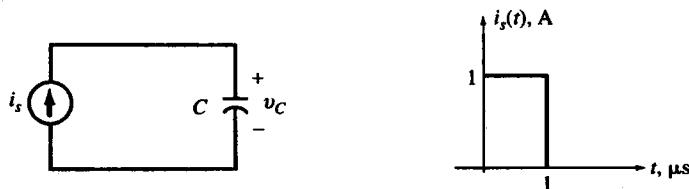


Figura 6.19.

La tensión en el condensador es

$$V_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i \, dt = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ 10^6 t \text{ (V)} & \text{para } 0 < t < 1 \mu\text{s} \text{ (periódico de carga)} \\ 1 \text{ V} & \text{para } t > \mu\text{s} \end{cases}$$

Si la misma cantidad de carga fuera depositada en el condensador en un tiempo cero, tendríamos que $v = u(t)$ (V) y que $i(t) = 10^{-6}\delta(t)$ (A).

- 6.19.** El pulso estrecho i_s del Problema 6.18 se aplica a un condensador de $1 \mu\text{F}$ y una resistencia de $1 \text{ M}\Omega$, conectados en paralelo (Figura 6.20). Suponer que el pulso termina en $t = 0$ y que el condensador está descargado inicialmente. Calcular la tensión entre los extremos de la combinación RC en paralelo.

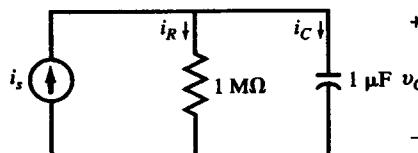


Figura 6.20

Denominamos con v la tensión entre los extremos de la combinación RC en paralelo. La intensidad por R es $i_R = v/R = 10^{-6}v$. Mientras dura el pulso, i_R es muy pequeña porque, al no poder ser v mayor de 1 V, i_R será menor que 1 μA . Por tanto, es razonable suponer que durante el pulso $i_C = 1 \text{ A}$ y, en consecuencia, $v(0^+) = 1 \text{ V}$. Para $t > 0$, de la aplicación de la LKT en el bucle RC se obtiene:

$$v + \frac{dv}{dt} = 0, \quad v(0^+) = 1 \text{ V} \quad (41)$$

La única solución de (41) es $v = e^{-t}$ para $t > 0$ o $v(t) = e^{-t}u(t)$ para todo t . A efectos prácticos, i_S puede considerarse un impulso de anchura 10^{-6} A y entonces $v = e^{-t}u(t)$ (V) se denomina *respuesta* de la combinación RC a un impulso de corriente.

- 6.20.** Dibujar la función $v(t)$, que varía exponencialmente desde 5 V en $t = 0$ a 12 V para $t = \infty$, con una constante de tiempo de 2 s. Escribir la ecuación para $v(t)$.

En primer lugar, se sitúa el punto A ($t = 0$ y $v = 5$) y la asymptota $v = 12$ en la Figura 6.21. La tangente en A corta a la asymptota en $t = 2$, determinando así el punto B . Dibujar la recta tangente AB . Identificar el punto C perteneciente a la curva para $t = 2$. Para una mayor precisión, obtener el punto D para $t = 4$. Dibujar la curva. La ecuación es $v(t) = Ae^{-t/2} + B$. De las condiciones inicial y final obtenemos $v(0) = A + B = 5$ y $v(\infty) = B = 12$ y $A = -7$, y resulta $v(t) = -7e^{-t/2} + 12$.

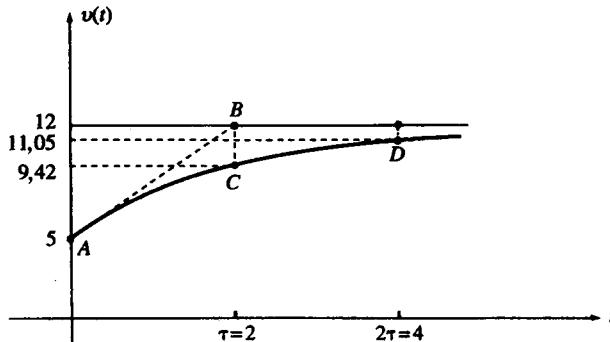


Figura 6.21.

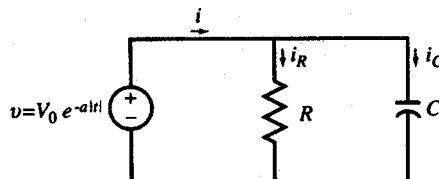
- 6.21.** La tensión $v = V_0e^{-a|t|}$ con $a > 0$ se conecta a una combinación en paralelo de una resistencia y un condensador como el indicado en la Figura 6.22(a). a) Calcular las intensidades i_C , i_R e $i = i_C + i_R$. b) Calcular y dibujar v , i_C , i_R e i para $V_0 = 10 \text{ V}$, $C = 1 \mu\text{F}$, $R = 1 \text{ M}\Omega$ y $a = 1$.

- a) Ver la fila (a) de la Tabla 6.3 para las intensidades correspondientes.

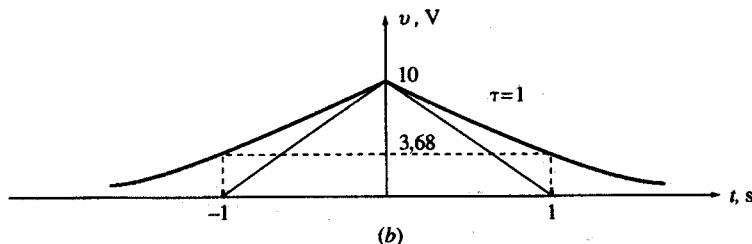
Tabla 6.3.

Tiempo	v	$i_C = C \frac{dv}{dt}$	$i_R = v/R$	$i = i_C + i_R$
(a)	$t < 0$	$v = V_0 e^{at}$	$i_C = CV_0 ae^{at}$	$i_R = (V_0/R)e^{at}$
	$t > 0$	$v = V_0 e^{-at}$	$i_C = -CV_0 ae^{-at}$	$i = V_0(-Ca + 1/R)^{-at}$
(b)	$t < 0$	$v = 10e^t$	$i_C = 10^{-5}e^t$	$i_R = 10^{-5}e^t$
	$t > 0$	$v = 10e^{-t}$	$i_C = -10^{-5}e^{-t}$	$i = 0$

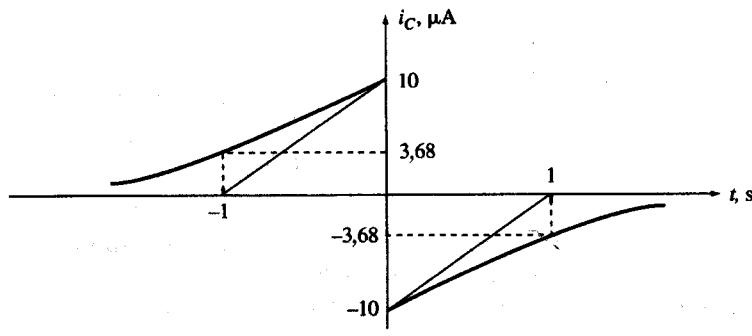
- b) Ver la fila (b) de la Tabla 6.3. En las Figuras 6.22(b) y (e) se representan v , i_C , i_R e i , respectivamente, para los valores especificados. Para $t > 0$, $i = 0$ y la fuente de tensión no alimenta con corriente alguna la combinación RC . La corriente por la resistencia para mantener la tensión exponencial entre sus extremos es suministrada por el condensador.



(a)



(b)



(c)

Figura 6.22 (continúa).

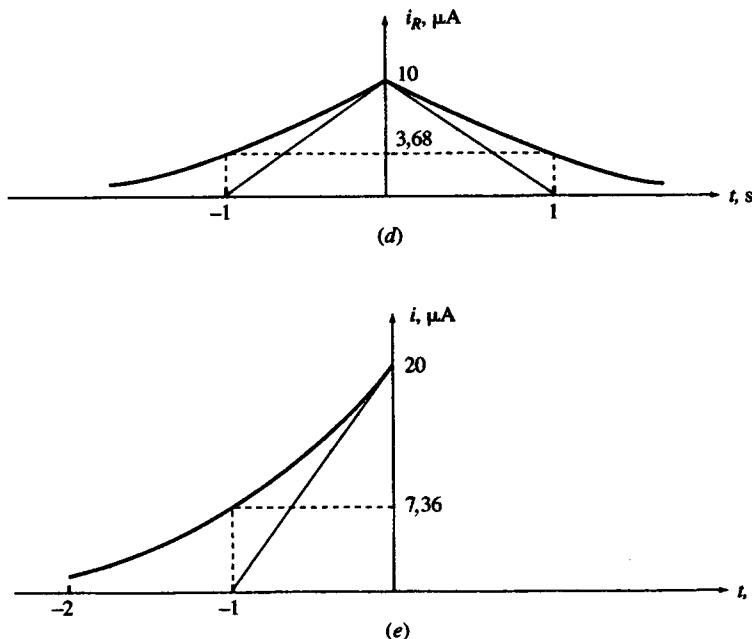


Figura 6.22 (continuación).

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

- 6.22. Para $v_1 = 8 \operatorname{sen} 100\pi t$ y $v_2 = 6 \operatorname{sen} 99\pi t$. Demostrar que $v = v_1 + v_2$ es periódica. Obtener el período y los valores máximo, medio y eficaz de v .

Solución: $T = 2$, $V_{\max} = 14$, $V_{\text{med}} = 0$, $V_{\text{ef}} = 5\sqrt{2}$.

- 6.23. Calcular el período, la frecuencia, el ángulo de fase en grados y los valores máximo, mínimo, medio y eficaz de $v(t) = 2 + 6 \cos(10\pi t + \pi/6)$.

Solución: $T = 0,2$ s, $f = 5$ Hz, fase = 30° , $V_{\max} = 8$, $V_{\min} = -4$, $V_{\text{med}} = 2$, $V_{\text{ef}} = \sqrt{22}$.

- 6.24. Reducir $v(t) = 2 \cos(\omega t + 30^\circ) + 3 \cos \omega t$ para $v(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$.

Solución: $A = 4,84$, $\theta = 102^\circ$.

- 6.25. Calcular $V_{2,\text{med}}$ y $V_{2,\text{ef}}$ de la Figura 6.1(b) para $V_1 = V_2 = 3$ y $T = 4T_1/3$.

Solución: $V_{2,\text{med}} = 1,5$, $V_{2,\text{ef}} = 3$.

- 6.26. Repetir el Problema 6.25 para $V_1 = 0$, $V_2 = 4$ y $T = 2T_1$.

Solución: $V_{2,\text{med}} = -2$, $V_{2,\text{ef}} = 2\sqrt{2}$.

- 6.27. Calcular $V_{3,\text{med}}$ y $V_{3,\text{ef}}$ de la Figura 6.1(c) para $V_0 = 2$ y $T = 200T_1$.

Solución: $V_{3,\text{med}} = 0$, $V_{3,\text{ef}} = 0,1$.

- 6.28. La forma de onda de la Figura 6.23 es sinusoidal. Expresarla en la forma $v = A + B \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$ y calcular sus valores medio y eficaz.

Solución: $v(t) = 1 + 6 \operatorname{sen}(\pi t/12 + 120^\circ)$, $V_{\text{med}} = 1$, $V_{\text{ef}} = \sqrt{19}$.

- 6.29. Calcular los valores medio y eficaz de $v_1(t)$ de la Figura 6.24(a) y $v_2(t)$ de la Figura 6.24(b).

Solución: $V_{1,\text{med}} = -\frac{1}{3}$, $V_{1,\text{ef}} = \sqrt{\frac{17}{3}}$; $V_{2,\text{med}} = -\frac{1}{2}$, $V_{2,\text{ef}} = \sqrt{\frac{13}{2}}$.

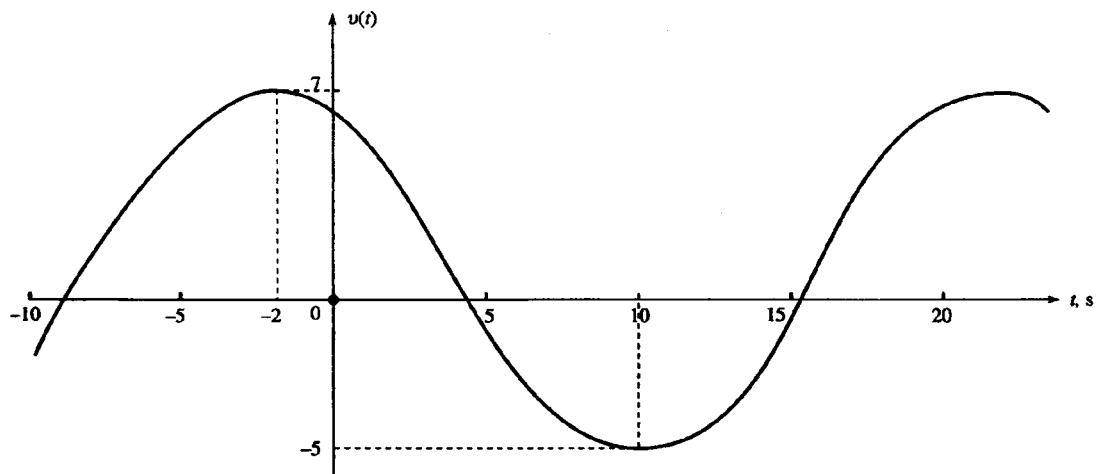


Figura 6.23.

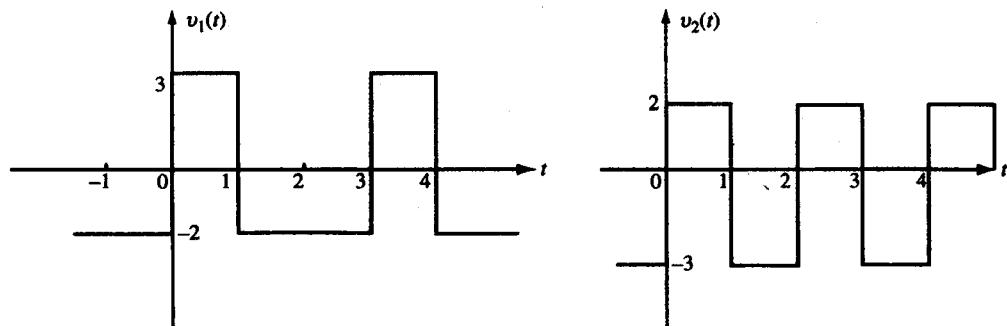


Figura 6.24.

- 6.30. Un circuito serie RL con $R = 5 \Omega$ y $L = 10 \text{ H}$ está atravesado por una corriente como se indica en la Figura 6.10(a), donde $T = 1 \text{ s}$. Calcular la tensión entre los extremos del conjunto RL .

Solución: $v = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 1 \\ 10 + 5t & \text{para } 0 < t < 1 \\ 5 & \text{para } t > 1 \end{cases}$

- 6.31. Calcular la intensidad por el condensador del Problema 6.19 (Figura 6.20) para cualquier t .

Solución: $i_C = 10^{-6}[\delta(t) - e^{-t}u(t)]$.

- 6.32. La tensión v entre los extremos de un inductor de 1 H es un ciclo de una onda senoidal, como se indica en la Figura 6.25(a). a) Escribir la ecuación para $v(t)$. b) Calcular y dibujar la intensidad de corriente por el inductor. c) Calcular la energía máxima en el inductor y el tiempo en que se alcanza.

Solución: a) $v = [u(t) - u(t - T)] \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T} (\text{V})$

b) $i = (T/2\pi)[u(t) - u(t - T)] \left(1 - \cos \frac{2\pi t}{T}\right) (\text{A}). \text{ Ver Figura 6.25(b).}$

c) $W_{\max} = \frac{1}{2\pi^2} T^2 (\text{J}) \text{ para } t = T/2$.

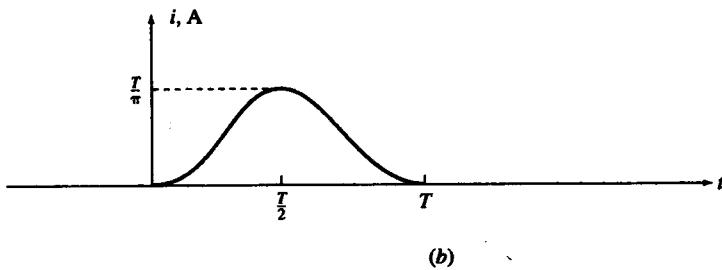
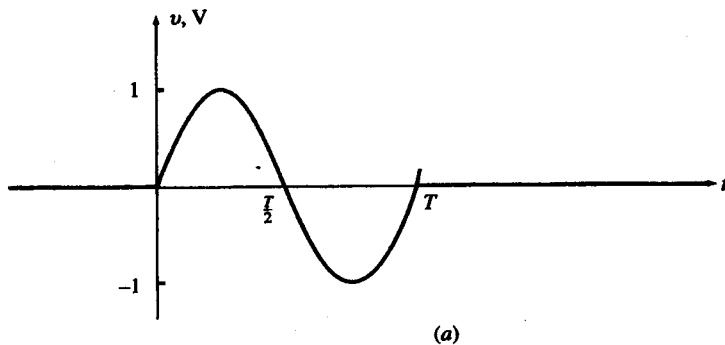


Figura 6.25.

- 6.33. Escribir la expresión para $v(t)$ que disminuye exponencialmente desde 7 en $t = 0$ a 3 en $t = \infty$, con una constante de tiempo de 200 ms.

Solución: $v(t) = 3 + 4e^{-5t}$ para $t > 0$.

- 6.34. Escribir la expresión para $v(t)$ que aumenta exponencialmente con una constante de tiempo de 0,8 s, desde cero para $t = -\infty$ a 9 para $t = 0$.

Solución: $v(t) = 9e^{5t/4}$ para $t < 0$.

- 6.35. Expresar la corriente de la Figura 6.6 en términos de la función escalón unidad.

Solución: $i(t) = 4u(t) + 6 \sum_{k=1}^{\infty} [u(t - 5k) - u(t - 5k + 2)]$.

- 6.36. En la Figura 6.10(a) suponer $T = 1$ y denominar la forma de onda por $s_1(t)$. Expresar $s_1(t)$ y su primera derivada, ds_1/dt , y su segunda derivada, d^2s_1/dt^2 , utilizando las funciones impulso y escalón.

Solución: $s_1(t) = [u(t) - u(t - 1)]t + u(t - 1)$, $ds_1/dt = u(t) - u(t - 1)$, $d^2s_1/dt^2 = \delta(t) - \delta(t - 1)$.

- 6.37. Obtener un impulso de tensión que provoque un salto de intensidad de 1 A en $t = 0$ cuando se aplica a un inductor de 10 mH.

Solución: $v(t) = 10^{-2}\delta(t)$ (V).

- 6.38. a) Dadas $v_1 = \cos t$, $v_2 = \cos(t + 30^\circ)$ y $v = v_1 + v_2$, escribir v en forma de coseno exclusivamente $v = A \cos(t + \theta)$. b) Calcular los valores eficaces de v_1 , v_2 y v . Discutir por qué es $V_{ef}^2 > (V_{1,ef}^2 + V_{2,ef}^2)$.

Solución: a) $v = 1,93 \cos(t + 15^\circ)$; b) $V_{1,ef} = V_{2,ef} = 0,707$, $V_{ef} = 1,366 V_{ef}$ se obtiene de lo siguiente:

$$V_{ef}^2 = \langle v^2 \rangle = \langle (v_1 + v_2)^2 \rangle = \langle v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \rangle = \langle v_1^2 \rangle + \langle v_2^2 \rangle + 2\langle v_1 v_2 \rangle$$

Puesto que v_1 y v_2 tienen la misma frecuencia y están desfasados 30° , tendremos $\langle V_1 V_2 \rangle = \frac{1}{2} \cos 30^\circ = \sqrt{3}/4$, que es positivo. Por tanto, $V_{ef}^2 > (V_{1,ef}^2 + V_{2,ef}^2)$.

- 6.39. a) Demostrar que $v_1 = \cos t + \cos \sqrt{2}t$ no es periódica. b) Sustituir $\sqrt{2}$ por 1,4 y demostrar entonces que $v_2 = \cos t + \cos 4t$ es periódica y calcular su período T_2 . c) Sustituir $\sqrt{2}$ por 1,41 y calcular el período T_3 de $v_3 = \cos t + \cos 1,41t$. d) Sustituir $\sqrt{2}$ por 1,4142 y calcular el período T_4 de $v_4 = \cos t + \cos 1,4142t$.

Solución: a) $\sqrt{2}$ no es un número racional. Por tanto, v_1 no es periódica. b) $T_2 = 10\pi$ s. c) $T_3 = 200\pi$ s. d) $T_4 = 10000\pi$ s.

- 6.40. Una señal aleatoria $s(t)$ con un valor eficaz de 5 V tiene un valor de continua de 2 V. Calcular el valor eficaz de $s_0(t) = s(t) - 2$; esto es, cuando se elimina la componente de continua.

Solución: $S_{0,ef} = \sqrt{5^2 - 4} = \sqrt{21} = 4,58$ V.

CAPÍTULO 7

Circuitos de primer orden

7.1. INTRODUCCIÓN

Siempre que un circuito cambia de una condición a otra, ya sea por una modificación en la fuente de alimentación o en los elementos del circuito, hay un período de tiempo durante el cual las corrientes y las tensiones en los elementos cambian de un valor a otro. Este período se denomina *transitorio*. Despues que el transitorio ha pasado el circuito se dice que alcanza el *estado estacionario*. La ecuación diferencial que describe el comportamiento del circuito tiene en su solución dos partes, la *solución complementaria* (o *solución de la ecuación homogénea*) y la *solución particular*. La solución complementaria corresponde al transitorio y la solución particular al estado estacionario.

En este capítulo calcularemos la respuesta de los circuitos de primer orden, con diversas condiciones iniciales y fuentes. Utilizaremos un método intuitivo para resolver las ecuaciones, que conducirá al mismo resultado que utilizar un método más formal de resolución de las ecuaciones diferenciales. Se presentarán y solucionarán una serie de temas relativos a la respuesta natural, forzada, de escalón y de impulso, con un estado estacionario de corriente continua y el comportamiento del conexiónado de inductores y condensadores.

7.2. DESCARGA DE UN CONDENSADOR EN UNA RESISTENCIA

Supongamos un condensador que tiene una diferencia de potencial V_0 entre sus placas. Cuando se tiene una línea conductora R la carga acumulada viaja a través del condensador desde una placa hasta la otra, estableciéndose una corriente de intensidad i . Así, la tensión v en el condensador va disminuyendo gradualmente hasta cero, llegando a ser cero también la corriente en el mismo tiempo. En el circuito RC de la Figura 7.1(a), $Ri = v$ e $i = -C \frac{dv}{dt}$. Eliminando i entre ambas ecuaciones se tiene

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC} v = 0 \quad (1)$$

La única función que cumple, que la combinación lineal con su derivada sea nula, es la función exponencial de la forma Ae^{st} . Sustituyendo v por Ae^{st} y dv/dt por sAe^{st} en (1), tendremos:

$$sAe^{st} + \frac{1}{RC} Ae^{st} = A \left(s + \frac{1}{RC} \right) e^{st} = 0$$

de donde $s + \frac{1}{RC} = 0$ o $s = -\frac{1}{RC}$ (2)

Dado que $v(0) = A = V_0$, $v(t)$ e $i(t)$ serán

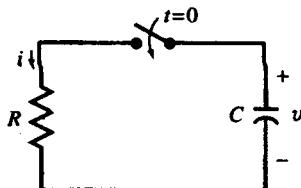
$$v(t) = V_0 e^{-t/RC}, \quad t > 0 \quad (3)$$

$$i(t) = -C \frac{dv}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}, \quad t > 0 \quad (4)$$

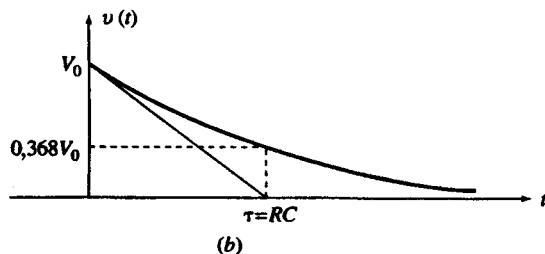
La tensión y la intensidad de corriente del condensador son exponenciales, con valores iniciales de V_0 y V_0/R , respectivamente. Cuando el tiempo aumenta, la tensión y la corriente disminuyen a cero, con una constante de tiempo $\tau = RC$. Ver Figura 7.1(b) y (c).

EJEMPLO 7.1. La tensión sobre un condensador de $1 \mu F$ es $10 V$ para $t < 0$. En $t = 0$ se conecta entre los extremos del condensador una resistencia de $1 M\Omega$. Calcular la constante de tiempo τ , la tensión $v(t)$ y su valor para $t = 5 s$.

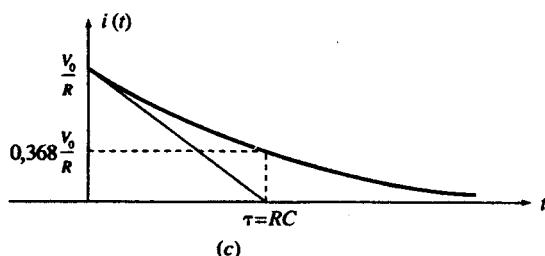
$$\tau = RC = 10^6(10^{-6}) s = 1 s \quad v(t) = 10e^{-t}(V), \quad t > 0 \quad v(5) = 10e^{-5} = 0,067 V$$



(a)



(b)



(c)

Figura 7.1.

EJEMPLO 7.2. Un condensador de $5 \mu\text{F}$ con una tensión inicial de 4 V se conecta a dos resistencias en paralelo de $3 \text{k}\Omega$ y $6 \text{k}\Omega$ (Figura 7.2). Calcular la intensidad por la resistencia de $6 \text{k}\Omega$.

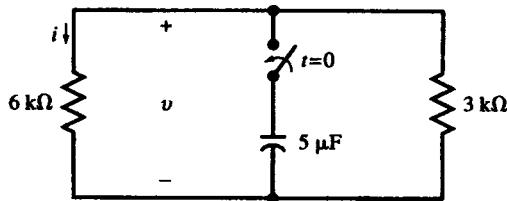


Figura 7.2.

La resistencia equivalente de las dos en paralelo es $2 \text{k}\Omega$. La constante de tiempo del circuito es $RC = 10^{-2} \text{s}$. La tensión y la intensidad en la resistencia de $6 \text{k}\Omega$ son, respectivamente,

$$v = 4e^{-100t} \text{ (V)} \quad \text{y} \quad i = v/6000 = 0,67e^{-100t} \text{ (mA)}$$

7.3. APLICACIÓN DE UNA TENSIÓN DE CC A UN CONDENSADOR

Se conecta en el instante $t = 0$ un condensador descargado inicialmente a una batería de tensión V_0 a través de una resistencia. El circuito es el que se muestra en la Figura 7.3(a).

Para $t > 0$ la LKT a lo largo del bucle da $Ri + v = V_0$, la cual, después de sustituir $i = C(dv/dt)$, se convierte en

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC} v = \frac{1}{RC} V_0 \quad t > 0 \quad (5a)$$

con la condición inicial de

$$v(0^+) = v(0^-) = 0 \quad (5b)$$

La solución debe satisfacer a ambas ecuaciones (5a) y (5b). La solución particular (o respuesta forzada) $v_p(t) = V_0$ satisface a (5a), pero no a (5b). La solución homogénea (o respuesta natural) $v_h(t) = Ae^{-t/RC}$ puede sumarse a la anterior y ajustar el valor de A para que la solución total (6a) satisfaga a (5a) y a (5b).

$$v(t) = v_p(t) + v_h(t) = V_0 + Ae^{-t/RC} \quad (6a)$$

De la condición inicial, $v(0^+) = V_0 + A = 0$ o $A = -V_0$. Así, la solución total es

$$v(t) = V_0(1 - e^{-t/RC})u(t) \quad [\text{ver Figura 7-3(b)}] \quad (6b)$$

$$i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}u(t) \quad [\text{ver Figura 7-3(c)}] \quad (6c)$$

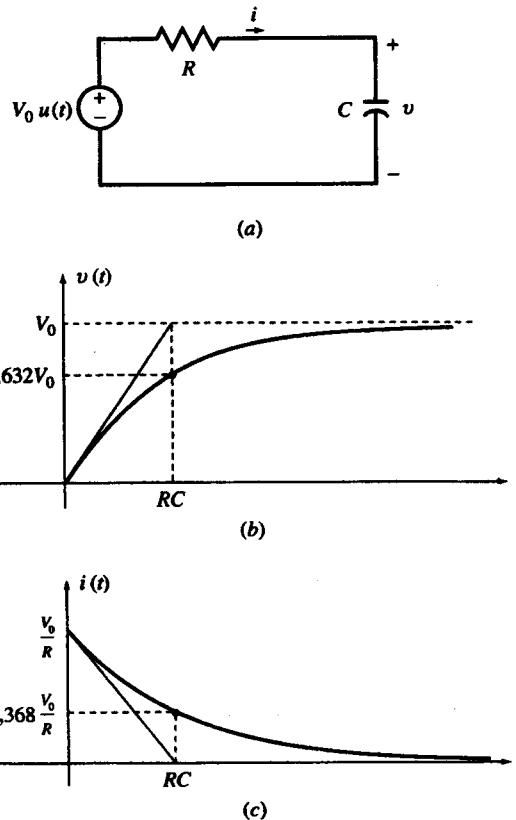


Figura 7.3.

EJEMPLO 7.3. Un condensador de $4 \mu\text{F}$ con una tensión inicial de $v(0^-) = 2 \text{ V}$ se conecta a una batería de 12 V a través de una resistencia de $5 \text{ k}\Omega$ en el instante $t = 0$. Calcular la tensión y la intensidad en el condensador para $t > 0$.

La constante de tiempo del circuito es $\tau = RC = 0,02 \text{ s}$. Siguiendo el mismo proceso que en el Ejemplo 7.2 obtenemos:

$$v(t) = 12 + Ae^{-50t}$$

De la condición inicial $v(0^-) = v(0^+) = 12 + A = 2$ o $A = -10$. Así, para $t > 0$,

$$\begin{aligned} v(t) &= 12 - 10e^{-50t} (\text{V}) \\ i(t) &= (12 - v)/5000 = 2 \cdot 10^{-3} e^{-50t} A = 2e^{-50t} (\text{mA}) \end{aligned}$$

La intensidad podía haberse calculado a partir de $i = C(dv/dt)$. La tensión aumenta exponencialmente desde un valor inicial de 2 V a uno final de 12 V , con una constante de tiempo de 20 ms , como se indica en la Figura 7.4(a). Por otro lado, la intensidad disminuye de 2 mA a cero, como se muestra en la Figura 7.4(b).

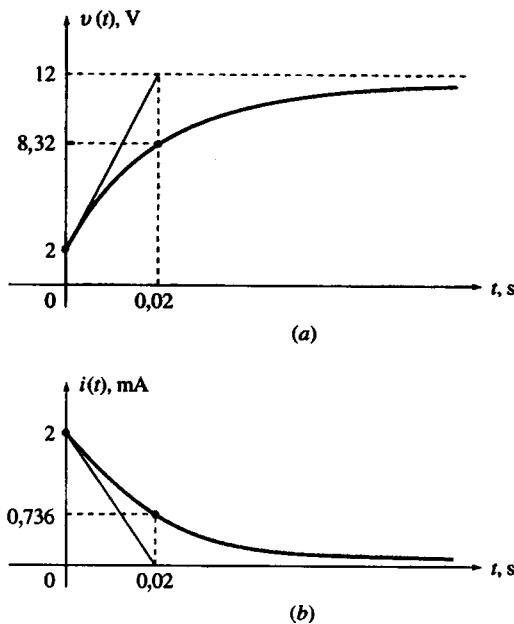


Figura 7.4.

7.4. CIRCUITO RL SIN FUENTE

En el circuito RL de la Figura 7.5 supongamos que en $t = 0$ la intensidad es I_0 . Para $t > 0$, i debe satisfacerse la ecuación $Ri + L(di/dt) = 0$, cuya solución es $i = Ae^{st}$. Sustituyendo en la ecuación podemos encontrar A y s :

$$A(R + Ls)e^{st} = 0, \quad R + Ls = 0, \quad s = -R/L$$

La condición inicial es $i(0) = A = I_0$. Entonces

$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L} \quad \text{para } t > 0 \quad (7)$$

La constante de tiempo del circuito es L/R .

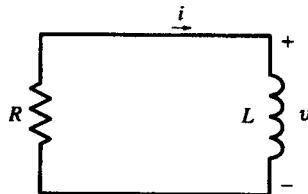
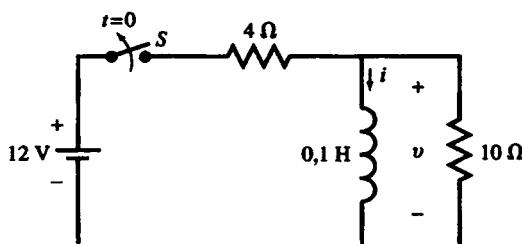
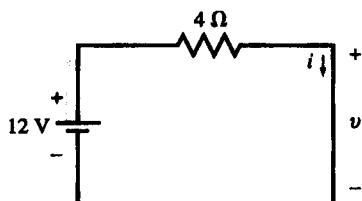


Figura 7.5.

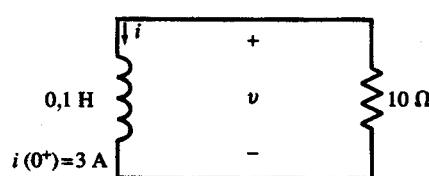
EJEMPLO 7.4. La batería de 12 V de la Figura 7.6(a) se desconecta en $t = 0$. Calcular la intensidad de corriente y la diferencia de potencial en la bobina en función del tiempo.



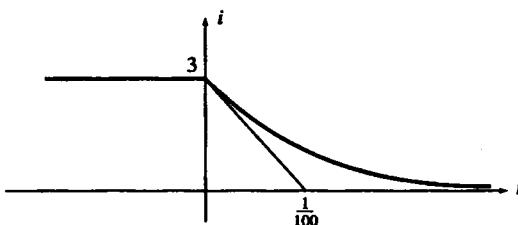
(a)



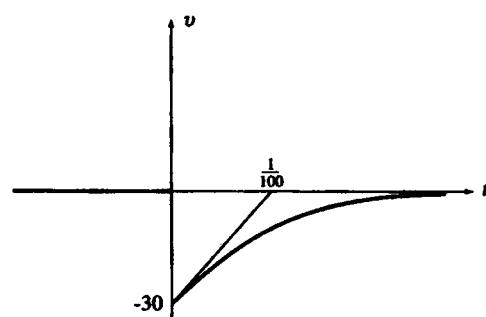
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 7.6.

Se supone que el interruptor se cerró hace mucho tiempo. Entonces la intensidad por la bobina es constante y la tensión entre sus extremos es cero. El circuito en $t = 0^-$ es el de la Figura 7.6(b) con $i(0^-) = 12/4 = 3$ A. Despues de desconectada la batería, para $t > 0$, el circuito es el de la Figura 7.6(c). Para $t > 0$ la intensidad decrece exponencialmente desde 3 A hasta cero. La constante de tiempo del circuito es $L/R = (1/100)$ s. Utilizando los resultados del Ejemplo 7.3, para $t > 0$, la intensidad y la tensión en la bobina serán, respectivamente,

$$i(t) = 3e^{-100t} \text{ (A)}$$

$$v(t) = L(di/dt) = -30e^{-100t} \text{ (V)}$$

$i(t)$ y $v(t)$ están representados, respectivamente, en las Figuras 7.6(d) y (e).

7.5. APLICACIÓN DE UNA TENSIÓN DE CC A UNA BOBINA

Si una fuente de corriente continua (cc) se aplica repentinamente a un circuito RL en reposo, como se indica en la Figura 7.7(a), la intensidad crece exponencialmente desde cero a un valor constante con una constante de tiempo de L/R . Este resultado es la solución de una ecuación diferencial de primer orden (8), que se obtiene al aplicar la LKT a lo largo del circuito.

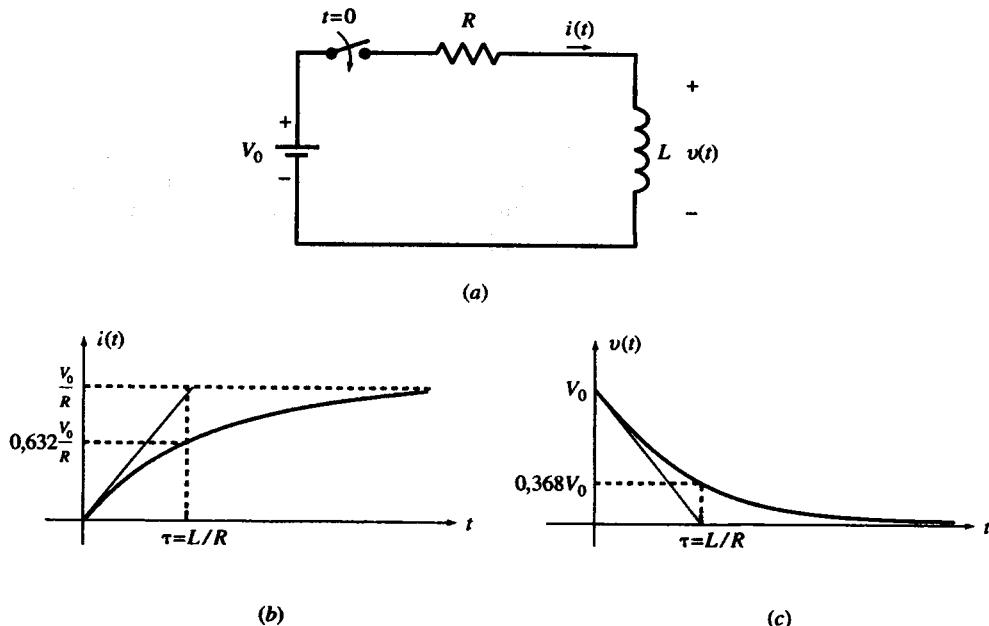


Figura 7.7.

$$Ri + L \frac{di}{dt} = V_0 \quad \text{para } t > 0, \quad i(0^+) = 0 \quad (8)$$

Puesto que $i = i_h(t) + i_p(t)$, donde $i_h(t) = Ae^{-Rt/L}$ e $i_p(t) = V_0/R$, tendremos:

$$i = Ae^{-Rt/L} + V_0/R$$

El coeficiente A se obtiene a partir de $i(0^+) = A + V_0/R = 0$; o sea, $A = -V_0/R$. La intensidad y la tensión en la bobina están dadas por (9) y (10) y están dibujadas en las Figuras 7.7(b) y (c), respectivamente.

$$i(t) = V_0/R(1 - e^{-Rt/L}) \quad \text{para } t > 0 \quad (9)$$

$$v(t) = L \frac{di}{dt} = V_0 e^{-Rt/L} \quad \text{para } t < 0 \quad (10)$$

7.6. REPASO DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

La función exponencial decreciente se puede escribir en la forma $e^{-t/\tau}$, donde τ es la *constante de tiempo* (en s). Para el circuito *RC* de la Sección 7.2, $\tau = RC$, mientras que para el circuito *RL* de la Sección 7.4, $\tau = L/R$. La función decreciente en general es

$$f(t) = Ae^{-t/\tau} \quad (t > 0)$$

que se representa gráficamente en la Figura 7.8, con el eje de tiempos en múltiplos de τ . Se ve que

$$f(\tau) = Ae^{-1} = 0,368 A$$

esto es, que para $t = \tau$ la función es el 36,8 por 100 del valor inicial. Esto también puede interpretarse diciendo que la función se ha reducido en el 63,2 por 100 del total desde $f(0^+)$ hasta $f(\infty)$. Para $t = 5\tau$ la función toma el valor de $0,0067 A$, lo cual representa menos que el 1 por 100 del valor inicial. Desde un punto de vista práctico, por encima de $t = 5\tau$ no se considera efecto apreciable de la función.

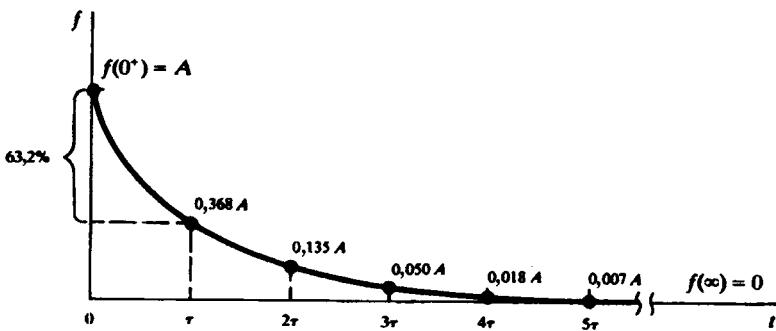


Figura 7.8.

La tangente de la curva exponencial para $t = 0^+$ se puede utilizar para calcular aproximadamente la constante de tiempo. En efecto, ya que

$$\text{pendiente} = f'(0^+) = -\frac{A}{\tau}$$

la recta tangente corta al eje horizontal en $t = \tau$ (ver Figura 7.9). De forma general, la tangente para $t = t_0$ corta al eje horizontal en $t_0 + \tau$. Así, si se conocen $f(t_0)$ y $f'(t_0)$ se puede construir la curva.

Si se tiene una parte de la curva (en papel o en pantalla de osciloscopio) y no se dispone de los valores de la función y de la pendiente, no es posible utilizar el método descrito anteriormente. En este caso, con un par de puntos, leídos por ejemplo de un instrumento, pueden servir para deducir la ecuación correspondiente. Así, refiriéndonos a la Figura 7.10,

$$f_1 = Ae^{-t_1/\tau} \quad f_2 = Ae^{-t_2/\tau}$$

de donde se obtiene

$$\tau = \frac{t_2 - t_1}{\ln f_1 - \ln f_2}$$

y A se obtiene sustituyendo τ en cualquiera de f_1 o f_2 .

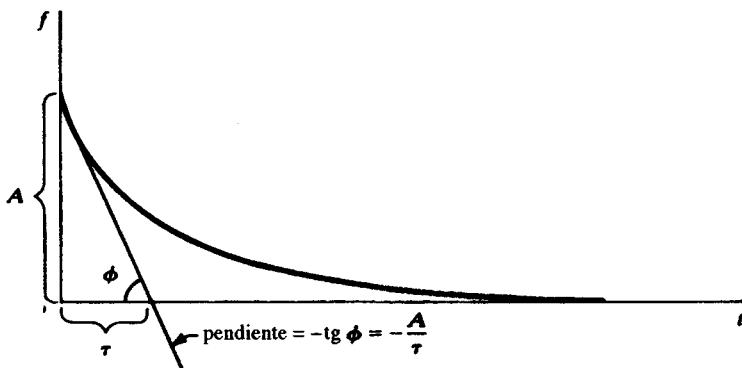


Figura 7.9.

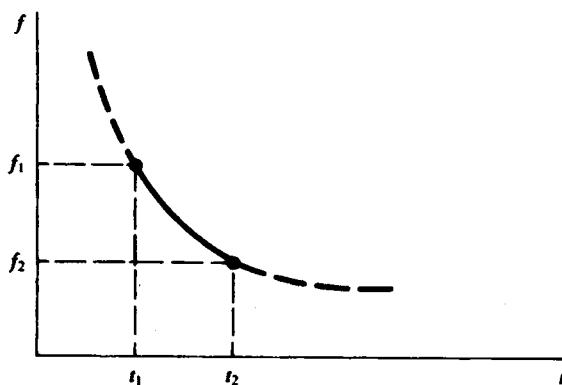


Figura 7.10.

7.7. CIRCUITOS COMPLEJOS DE PRIMER ORDEN CON RL Y RC

Un circuito complejo que contenga resistencias, fuentes y un elemento simple de acumulación de energía puede transformarse en un circuito equivalente Thévenin o Norton, visto desde los extremos de una bobina o de un condensador. Esto reduce el circuito complejo a uno sencillo del tipo RC o RL , que puede resolverse de acuerdo con los métodos descritos en las secciones anteriores.

Si se conecta de repente una fuente de cc a un circuito, la tensión y la intensidad son exponenciales con la misma constante de tiempo pero con valores iniciales y finales diferentes. La constante de tiempo de los circuitos es o RC o L/R , siendo R la resistencia del circuito equivalente de Thévenin visto con un condensador o un bobina.

EJEMPLO 7.5. Calcular i , v e i_1 de la Figura 7.11(a).

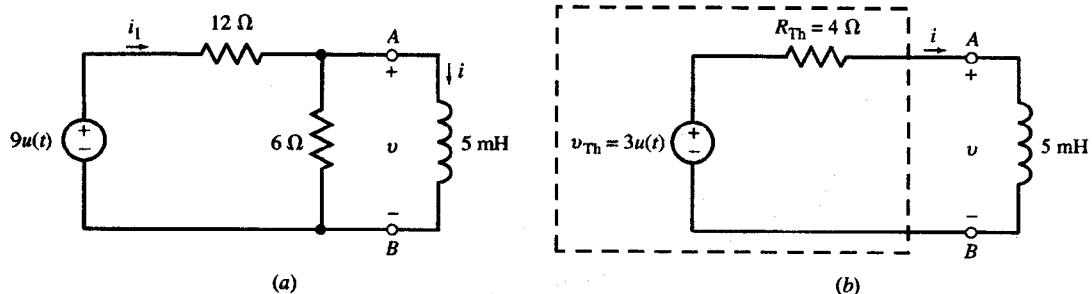


Figura 7.11.

El circuito equivalente de Thévenin desde la izquierda de la bobina es el indicado en la Figura 7.11(b) con $R_{Th} = 4 \Omega$ y $v_{Th} = 3u(t)$ (V). La constante de tiempo del circuito es $\tau = L/R_{Th} = 5(10^{-3})/4 = 1,25$ ms. El valor inicial de la intensidad por la bobina es cero. Su valor final es

$$i(\infty) = \frac{v_{Th}}{R_{Th}} = \frac{3 \text{ V}}{4 \Omega} = 0,75 \text{ A}$$

Por tanto,

$$i = 0,75(1 - e^{-800t})u(t) \text{ (A)} \quad v = L \frac{di}{dt} = 3e^{-800t}u(t) \text{ (V)} \quad i_1 = \frac{9 - v}{12} = \frac{1}{4}(3 - e^{-800t})u(t) \text{ (A)}$$

v puede también obtenerse de su valor inicial $v(0^+) = (9 \cdot 6)/(12 + 6) = 3$ V, su valor final $v(\infty) = 0$ y la constante de tiempo del circuito.

EJEMPLO 7.6. En la Figura 7.12 el condensador de $9 \mu\text{F}$ se conecta al circuito para $t = 0$. En ese instante la tensión del condensador es $V_0 = 17$ V. Calcular v_A , v_B , v_C , i_{AB} , i_{AC} e i_{BC} para $t > 0$.

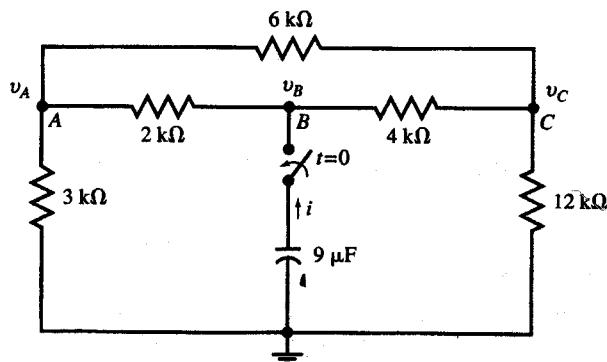


Figura 7.12.

Se aplica la LKC a los nudos A, B y C para $t > 0$ para calcular las tensiones en función de i :

$$\text{Nudo A: } \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)v_A - \frac{1}{2}v_B - \frac{1}{6}v_C = 0 \quad \text{o bien} \quad 6v_A - 3v_B - v_C = 0 \quad (11)$$

$$\text{Nudo B: } -\frac{1}{2}v_A + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)v_B - 10^3i - \frac{1}{4}v_C = 0 \quad \text{o bien} \quad -2v_A + 3v_B - v_C = (4 \cdot 10^3)i \quad (12)$$

$$\text{Nudo C: } -\frac{1}{6}v_A - \frac{1}{4}v_B + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right)v_C = 0 \quad \text{o bien} \quad -2v_A - 3v_B + 6v_C = 0 \quad (13)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (10), (11) y (12),

$$v_A = \frac{7}{3}(10^3)i \quad v_B = \frac{34}{9}(10^3)i \quad v_C = \frac{8}{3}(10^3)i$$

El circuito visto por el condensador es una resistencia de $R = v_B/i = 34/9 \text{ k}\Omega$. El condensador descarga su tensión inicial V_0 de forma exponencial con una constante de tiempo de $\tau = RC = \frac{34}{9}(10^3)(9 \cdot 10^{-6}) = 0,034 \text{ s}$. Para $t > 0$ la tensión y la intensidad son:

$$v_B = V_0 e^{-t/\tau} = 17 e^{-1000t/34} \text{ (V)}$$

$$i = -C \frac{dv_B}{dt} = (9 \cdot 17 \cdot 10^{-3}/34)e^{-1000t/34} = (4,5 \cdot 10^{-3})e^{-1000t/34} \text{ (A)}$$

$$v_A = \frac{7}{3}(10^3)i = 10,5e^{-1000t/34} \text{ (V)} \quad v_C = \frac{8}{3}(10^3)i = 12e^{-1000t/34} \text{ (V)}$$

$$v_{AB} = v_A - v_B = -6,5e^{-1000t/34} \text{ (V)} \quad i_{AB} = v_{AB}/2000 = (-3,25 \cdot 10^{-3})e^{-1000t/34} \text{ (A)}$$

$$v_{AC} = v_A - v_C = -1,5e^{-1000t/34} \text{ (V)} \quad i_{AC} = v_{AC}/6000 = (-0,25 \cdot 10^{-3})e^{-1000t/34} \text{ (A)}$$

$$v_{BC} = v_B - v_C = 5e^{-1000t/34} \text{ (V)} \quad i_{BC} = v_{BC}/4000 = (1,25 \cdot 10^{-3})e^{-1000t/34} \text{ (A)}$$

Todas las tensiones e intensidades son funciones exponenciales y tienen la misma constante de tiempo. Por simplicidad es habitual utilizar como unidades V, mA, kΩ y ms para tensiones, intensidades, resistencias y tiempos, respectivamente; eso hace que puedan omitirse los 1000 y 10^{-3} de las ecuaciones anteriores, resultando:

$$v_A = 10,5e^{-t/34} \text{ (V)} \quad v_{AB} = -6,5e^{-t/34} \text{ (V)} \quad i_{AB} = -3,25e^{-t/34} \text{ (mA)}$$

$$v_B = 17e^{-t/34} \text{ (V)} \quad v_{AC} = -1,5e^{-t/34} \text{ (V)} \quad i_{AC} = -0,25e^{-t/34} \text{ (mA)}$$

$$v_C = 12e^{-t/34} \text{ (V)} \quad v_{BC} = 5e^{-t/34} \text{ (V)} \quad i_{BC} = 1,25e^{-t/34} \text{ (mA)}$$

$$i = 4,5e^{-t/34} \text{ (mV)}$$

7.8. ESTADO ESTACIONARIO CON CC DE BOBINAS Y CONDENSADORES

Como se indicó en la Sección 7.1, la componente natural de tipo exponencial de respuesta de los circuitos RL y RC a una entrada escalón disminuye con el tiempo. Para $t = \infty$, el circuito

alcanza su estado estacionario y la respuesta es debida exclusivamente a la componente forzada de cc.

Teóricamente este estado estacionario de los circuitos RL y RC se alcanzaría al cabo de un tiempo infinito. Sin embargo, para un tiempo igual a 5τ la componente transitoria está reducida a un 0,67 por 100 de su valor inicial. Después de un tiempo de diez veces la constante, la componente del transitorio es igual a 0,0045 por 100 de su valor inicial, lo cual significa menos que el 5 por 100000 y, por tanto, desde un punto de vista práctico, podemos considerar que se ha alcanzado el estado estacionario.

Para un circuito RLC , en el estado estacionario con cc, suponiendo que no existan oscilaciones, todas las tensiones y corrientes son constantes. Cuando la tensión entre los extremos de un condensador es constante, la corriente a través del mismo es cero. Por tanto, todos los condensadores serán como circuito abierto en el estado estacionario con cc. Análogamente, cuando la corriente por una bobina sea constante, la tensión entre sus extremos será cero. Todas las bobinas, por tanto, serán como cortocircuitos en el estado estacionario con cc. El circuito se reducirá a uno de corriente continua (o directa) con resistencias en donde las tensiones en los condensadores y las corrientes por las bobinas pueden calcularse fácilmente, al ser todas ellas constantes y el análisis del circuito no involucra ecuaciones diferenciales.

El comportamiento del estado estacionario con cc expuesto en el párrafo anterior es válido para circuitos que contengan cualquier número de bobinas, condensadores y fuentes de cc.

EJEMPLO 7.7. Calcular los valores en condiciones estacionarias de i_L , v_{C1} y v_{C2} en el circuito de la Figura 7.13(a).

Cuando se alcanza el estado estacionario, el circuito será como el de la Figura 7.13(b). La intensidad por la bobina y la tensión en el condensador se obtienen aplicando la LKC a los nudos A y B de la Figura 7.13(b). Así:

$$\text{Nudo } A: \frac{v_A}{3} + \frac{v_A - v_B}{6} + \frac{v_A + 18 - v_B}{6} = 3 \quad \text{o bien} \quad 2v_A - v_B = 0$$

$$\text{Nudo } B: \frac{v_B}{12} + \frac{v_B - v_A}{6} + \frac{v_B - 18 - v_A}{6} = 0 \quad \text{o bien} \quad -4v_A + 5v_B = 36$$

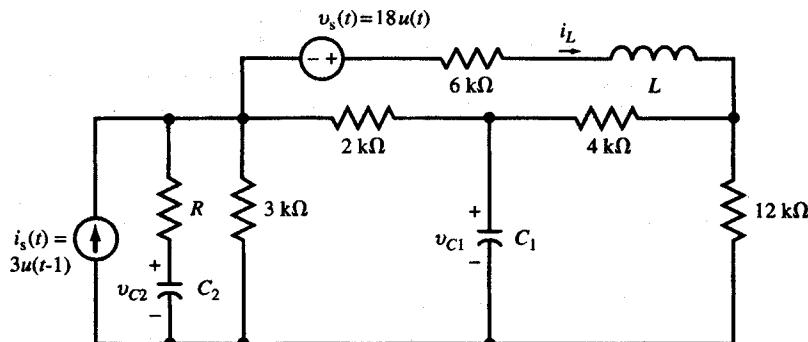
Resolviendo para v_A y para v_B obtenemos $v_A = 6$ V y $v_B = 12$ V. Directamente de la Figura 7.13(b) tenemos $i_L = 2$ mA, $v_{C1} = 8$ V y $v_{C2} = 6$ V.

EJEMPLO 7.8. Calcular i y v en el circuito de la Figura 7.14.

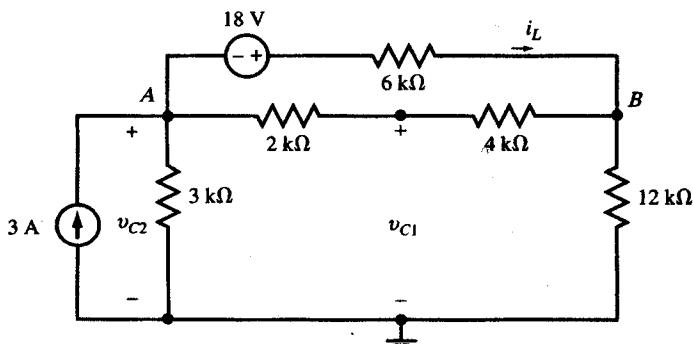
Para $t = 0$ la tensión del condensador es cero. Su valor final se obtiene de un análisis de cc y es -2 V. La constante de tiempo del circuito de la Figura 7.14, deducido del Ejemplo 7.6, es $0,034$ s. Por tanto,

$$v = -2(1 - e^{-1000t/34})u(t) \text{ (V)}$$

$$i = C \frac{dv}{dt} = -\frac{(9 \cdot 10^{-6})(2 \cdot 10^3)}{34} e^{-1000t/34} u(t) \text{ (A)} = -0,53 e^{-1000t/34} u(t) \text{ (mA)}$$



(a)



(b)

Figura 7.13.

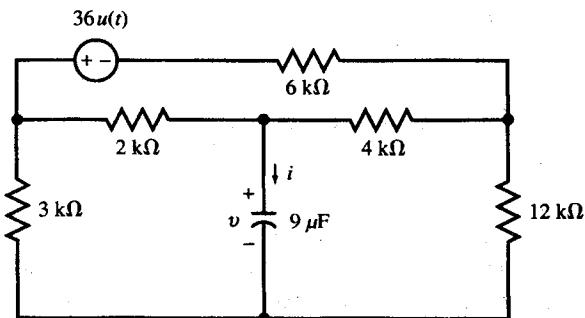


Figura 7.14.

7.9. TRANSITORIOS DESPUÉS DE LA CONEXIÓN

Una repentina conexión de una fuente o un cambio en sus características puede provocar una modificación repentina en las tensiones y corrientes de un circuito. Un salto en la tensión

de un condensador requiere de un impulso de corriente. Análogamente, un salto en la corriente de una bobina precisa de un impulso de tensión. Si no se presentan estos impulsos, las tensiones sobre los condensadores y las corrientes por las bobinas no se modifican. Por tanto, las condiciones de post-conexión de L y C se pueden deducir de las condiciones de pre-conexión de cada elemento.

EJEMPLO 7.9. En la Figura 7.15(a) el interruptor S se cierra para $t = 0$. Calcular i y v en cualquier instante.

Para $t = 0^-$ el circuito está en condiciones estacionarias y la bobina funciona como un cortocircuito con $v(0^-) = 0$ [ver Figura 7.15(b)]. La intensidad por la bobina se calcula fácilmente y es $i(0^-) = 2$ A. Después que se ha cerrado S en $t = 0$, el circuito es como el de la Figura 7.15(c). Para $t > 0$ la intensidad es exponencial con una constante de tiempo de $\tau = L/R = 1/30$ s, con un valor inicial de $i(0^+) = i(0^-) = 2$ A y un valor final de $12/3 = 4$ A. La tensión y la intensidad son:

$$\text{Para } t < 0, \quad i = 2 \text{ A y } v = 0$$

$$\text{Para } t > 0, \quad i = 4 - 2e^{-30t} \text{ (A)} \text{ y } v = L \frac{di}{dt} = 6e^{-30t} \text{ (V)}$$

y su representación gráfica es la de la Figura 7.15(d) y (e).

EJEMPLO 7.10. Calcular i y v para $t = 0^-$ y $t = 0^+$ en el circuito de la Figura 7.16, siendo $R = 5 \Omega$, $L = 10 \text{ mH}$ y

$$v_s = \begin{cases} 5 \text{ V para } t < 0 \\ 5 \text{ sen } \omega t \text{ (V) para } t > 0 \end{cases}$$

Para $t = 0^-$, $i(0^-) = 5/5 = 1$ A y $v(0^-) = 0$. Durante la transición de $t = 0^-$ a $t = 0^+$ la corriente por la bobina es continua, ya que no existe impulso de tensión para producir discontinuidad. Por tanto, $i(0^+) = i(0^-) = 1$ A. Para calcular $v(0^+)$ se escribe la LKT para $t = 0^+$: $v_s = RI + v$ y observar que $v_s(0^+) = 0$. Por tanto, $v(0^+) = v_s(0^+) - Ri(0^+) = -5$ V.

7.10. RESPUESTA DE CIRCUITOS DE PRIMER ORDEN A UN PULSO

En esta sección obtendremos la respuesta de un circuito de primer orden a un pulso rectangular. Se aplicará a un circuito RC o RL donde la entrada puede ser de intensidad o de tensión. Como ejemplo utilizaremos el circuito RC de la Figura 7.17(a) con una fuente de tensión que proporciona un pulso de duración T y altura V_0 . Para $t < 0$, v e i son cero. Para el tiempo de duración del pulso utilizaremos las expresiones (6b) y (6c) de la Sección 7.3:

$$v = V_0(1 - e^{-t/RC}) \quad (0 < t < T) \quad (14a)$$

$$i = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} \quad (0 < t < T) \quad (14b)$$

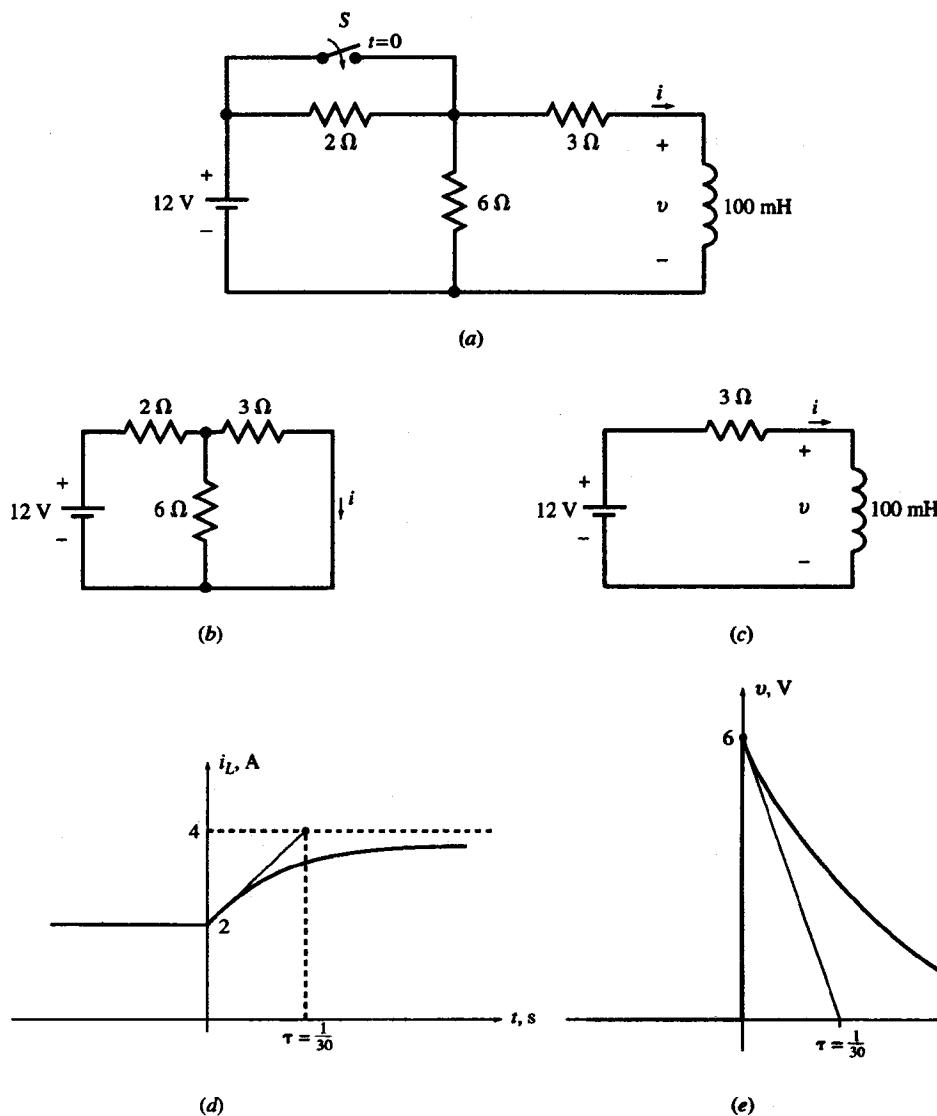


Figura 7.15.

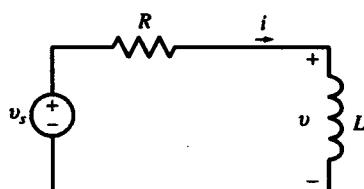


Figura 7.16.

Cuando el pulso ha terminado, el circuito es un condensador con tensión inicial V_T y sin fuente.

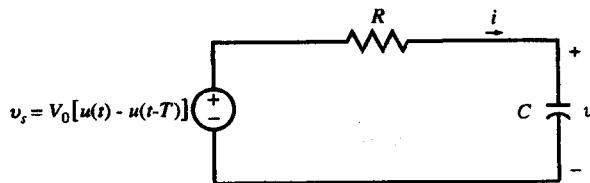
$$V_T = V_0(1 - e^{-T/RC}) \quad (14c)$$

Utilizando las expresiones (3) y (4) de la Sección 7.2, y teniendo en cuenta el cambio de tiempo T ,

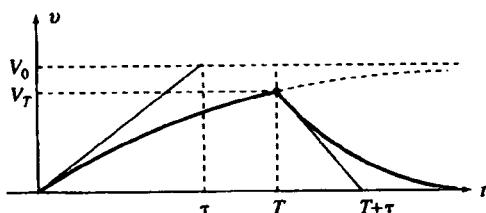
$$v = V_T e^{-(t-T)/RC} \quad (t > T) \quad (15a)$$

$$i = -(V_T/R)e^{-(t-T)/RC} \quad (t > T) \quad (15b)$$

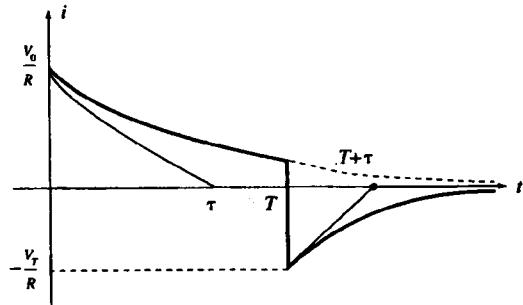
La tensión y la intensidad del condensador se representan en la Figura 7.17(b) y (c).



(a)



(b)



(c)

Figura 7.17.

EJEMPLO 7.11. En el circuito de la Figura 7.17(a) suponemos que $R = 1 \text{ k}\Omega$ y $C = 1 \mu\text{F}$ y suponemos que la fuente de tensión da un pulso de altura V_0 y duración T . Calcular i y v para a) $V_0 = 1 \text{ V}$ y $T = 1 \text{ ms}$, b) $V_0 = 10 \text{ V}$ y $T = 0,1 \text{ ms}$ y c) $V_0 = 100 \text{ V}$ y $T = 0,001 \text{ ms}$.

Utilizamos (14) y (15) con la constante de tiempo $\tau = RC = 1 \text{ ms}$. Por conveniencia utilizaremos como unidad de tiempo ms, como unidad de tensión V y como unidad de intensidad mA. Tomaremos también como aproximación $e^{-t} = 1 - t$ cuando $t \ll 1$.

- a) $V_0 = 1 \text{ V}$, $T = 1 \text{ ms}$.
Para $0 < t < 1 \text{ ms}$,

$$v = (1 - e^{-t}), i = e^{-t} \text{ y } V_T = (1 - e^{-1}) = 0,632 \text{ V}$$

Para $t > 1 \text{ ms}$,

$$v = 0,632e^{-(t-1)} = 1,72e^{-t} \text{ e } i = -1,72e^{-t}$$

- b) $V_0 = 10 \text{ V}$, $T = 0,1 \text{ ms}$.
 Para $0 < t < 0,1 \text{ ms}$,

$$v = 10(1 - e^{-t}), i = 10e^{-t} \text{ y } V_T = 10(1 - e^{-0,1}) = 0,95 \text{ V}$$

Para $t > 0,1 \text{ ms}$,

$$v = 0,95e^{-(t-0,1)} = 1,05e^{-t} \text{ e } i = -1,05e^{-t}$$

- c) $V_0 = 100 \text{ V}$, $T = 0,01 \text{ ms}$.
 Para $0 < t < 0,01 \text{ ms}$,

$$v = 100(1 - e^{-t}) \approx 100t, i = 100e^{-t} \approx 100(1 - t) \text{ y } V_T = 100(1 - e^{-0,01}) = 0,995 \text{ V}$$

Para $t > 0,01 \text{ ms}$,

$$v = 0,995e^{-(t-0,01)} = 1,01e^{-t} \text{ e } i = -1,01e^{-t}$$

Como el pulso de la tensión de entrada se aproxima a un impulso, la tensión y la intensidad en el condensador se aproximan a $v = e^{-t}u(t)$ (V) e $i = \delta(t) - e^{-t}u(t)$.

7.11. RESPUESTAS DE CIRCUITOS RL Y RC A UN IMPULSO

Un pulso estrecho se puede modelizar por un impulso tal que el área bajo el pulso indique la fuerza del mismo. La respuesta a un impulso es una herramienta muy útil para el análisis y síntesis de circuitos. Ésta puede obtenerse por varios caminos: tomando el límite de la respuesta a un pulso estrecho, que se llama *aproximación límite*, como se ve en los Ejemplos 7.11 y 7.12; tomando la derivada de la respuesta al escalón; resolviendo la ecuación diferencial directamente. La respuesta al impulso se designa frecuentemente por $h(t)$.

EJEMPLO 7.12. Calcular el límite de i y v del circuito de la Figura 7.17(a) para un pulso de tensión de área unidad cuando la duración del pulso tiende a cero.

Utilizaremos la respuesta al pulso dada por (14) y (15), con $V_0 = 1/T$, y calcularemos el límite cuando T se aproxime a cero. De (14c) tenemos:

$$\lim_{T \rightarrow 0} V_T = \lim_{T \rightarrow 0} (1 - e^{-T/RC})/T = 1/RC$$

De (15) tenemos:

$$\text{Para } t < 0, \quad h_v = 0 \quad \text{y} \quad h_i = 0$$

$$\text{Para } 0^- < t < 0^+, \quad 0 \leq h_v \leq \frac{1}{RC} \quad \text{y} \quad h_i = \frac{1}{R} \delta(t)$$

$$\text{Para } t > 0, \quad h_v(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \quad \text{y} \quad h_i(t) = -\frac{1}{R^2 C} e^{-t/RC}$$

Por tanto,

$$h_v(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t) \quad \text{y} \quad h_i(t) = \frac{1}{R} \delta(t) - \frac{1}{R^2 C} e^{-t/RC} u(t)$$

EJEMPLO 7.13. Calcular la respuesta al impulso del circuito RC de la Figura 7.17(a) mediante la derivada de la respuesta al escalón unidad.

Un impulso unidad puede considerarse como la derivada de un escalón unidad. Basándonos en las propiedades de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes podemos tomar la derivada con respecto al tiempo de la respuesta al escalón para calcular la respuesta al impulso. La respuesta al escalón de un circuito RC se obtuvo en (6) y es

$$v(t) = (1 - e^{-t/RC})u(t) \quad \text{e} \quad i(t) = (1/R)e^{-t/RC}u(t)$$

Calculamos la respuesta al impulso unidad derivando la respuesta al escalón. Así:

$$h_v(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC}u(t) \quad \text{y} \quad h_i(t) = \frac{1}{R} \delta(t) - \frac{1}{R^2C} e^{-t/RC}u(t)$$

EJEMPLO 7.14. Calcular las respuestas impulso $h_i(t)$, $h_v(t)$ e $h_{i1}(t)$ del circuito RL de la Figura 7.11(a) haciendo las derivadas de su respuesta al escalón unidad.

La respuesta del circuito a un escalón de amplitud 9 se calculó en el Ejemplo 7.5. Derivando y multiplicando por el factor 1/9, obtenemos la respuesta al impulso unidad:

$$h_i(t) = \frac{1}{9} \frac{d}{dt} [0,75(1 - e^{-800t})u(t)] = \frac{200}{3} e^{-800t}u(t)$$

$$h_v(t) = \frac{1}{9} \frac{d}{dt} [3e^{-800t}u(t)] = -\frac{800}{3} e^{-800t}u(t) + \frac{1}{3} \delta(t)$$

$$h_{i1}(t) = \frac{1}{9} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{4} (3 - e^{-800t})u(t) \right] = \frac{200}{9} e^{-800t}u(t) + \frac{1}{18} \delta(t)$$

7.12. RESUMEN DE LAS RESPUESTAS A ESCALÓN Y A IMPULSO DE CIRCUITOS RL Y RC

En la Tabla 7.1 se resumen las respuestas de los circuitos RL y RC a entradas escalón e impulso. Algunos de los resultados de la tabla se han obtenido en las secciones precedentes. El resto de los resultados se deducirán en los Problemas resueltos.

7.13. RESPUESTA DE CIRCUITOS RL Y RC A EXCITACIONES EXPONENCIALES SÚBITAS

Supongamos la ecuación diferencial de primer orden correspondiente a un circuito RL en serie sometido a una súbita tensión exponencial $v_s = V_0 e^{st}u(t)$, como se ve en el circuito de la Figura 7.18. El circuito está en reposo para $t < 0$. Aplicando la LKT, obtenemos:

$$Ri + L \frac{di}{dt} = V_0 e^{st}u(t) \tag{16}$$

Tabla 7.1(a). Respuestas de circuitos *RC* a escalón e impulso

Círcuito <i>RC</i>	Respuesta a escalón unidad	Respuesta a impulso unidad
	$v_s = u(t)$ $\begin{cases} v = (1 - e^{-t/RC})u(t) \\ i = (1/R)e^{-t/RC}u(t) \end{cases}$	$v_s = \delta(t)$ $\begin{cases} h_v = (1/RC)e^{-t/RC}u(t) \\ h_i = -(1/R^2C)e^{-t/RC}u(t) + (1/R)\delta(t) \end{cases}$
	$i_s = u(t)$ $\begin{cases} v = R(1 - e^{-t/RC})u(t) \\ i = e^{-t/RC}u(t) \end{cases}$	$i_s = \delta(t)$ $\begin{cases} h_v = (1/C)e^{-t/RC}u(t) \\ h_i = -(1/RC)e^{-t/RC}u(t) + \delta(t) \end{cases}$

Tabla 7.1(b). Respuestas de circuitos *RL* a escalón e impulso

Círcuito <i>RL</i>	Respuesta a escalón unidad	Respuesta a impulso unidad
	$v_s = u(t)$ $\begin{cases} v = e^{-Rt/L}u(t) \\ i = (1/R)(1 - e^{-Rt/L})u(t) \end{cases}$	$v_s = \delta(t)$ $\begin{cases} h_v = (R/L)e^{-Rt/L}u(t) + \delta(t) \\ h_i = (1/L)e^{-Rt/L}u(t) \end{cases}$
	$i_s = u(t)$ $\begin{cases} v = Re^{-Rt/L}u(t) \\ i = (1 - e^{-Rt/L})u(t) \end{cases}$	$i_s = \delta(t)$ $\begin{cases} h_v = (R^2/L)e^{-Rt/L}u(t) + R\delta(t) \\ h_i = (R/L)e^{-Rt/L}u(t) \end{cases}$

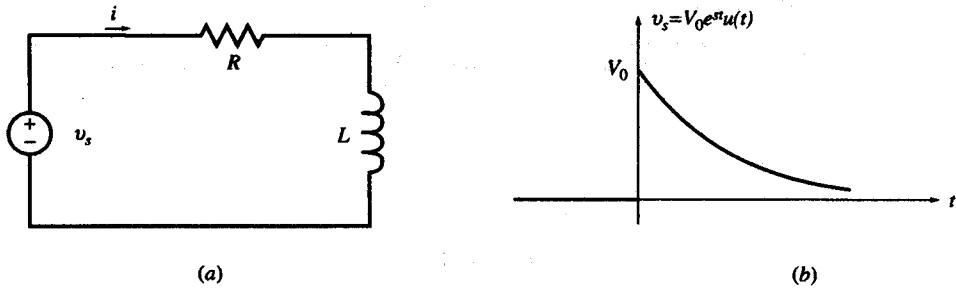


Figura 7.18.

Para $t > 0$, la solución es

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t) \quad \text{y} \quad i(0^+) = 0 \quad (17a)$$

La respuesta natural $i_h(t)$ es la solución de $Ri + L(di/dt) = 0$; o sea, cuando la función de excitación es cero. Siguiendo un razonamiento similar al de la Sección 7.4 obtenemos:

$$i_h(t) = Ae^{-Rt/L} \quad (17b)$$

La respuesta forzada $i_p(t)$ es una función que satisface (16) para $t > 0$. La única función que hay es

$$i_p(t) = I_0 e^{st} \quad (17c)$$

Después de sustituir $i = i_h + i_p$ en (16), se obtiene $I_0 = V_0/(R + Ls)$. Tomando $A = -V_0/(R + Ls)$, la condición $i(0^+) = 0$ también se cumple. Por tanto,

$$i(t) = \frac{V_0}{R + Ls} (e^{st} - e^{-Rt/L})u(t) \quad (17d)$$

Caso especial. Si la función de excitación tiene el mismo exponente que la respuesta natural ($s = -R/L$), la respuesta forzada debe ser $i_p(t) = I_0 t e^{-Rt/L}$. Esto puede comprobarse sustituyendo en (16), lo que también da $I_0 = V_0/L$. La respuesta natural es la misma dada en (17b). La respuesta total es entonces

$$i(t) = i_p(t) + i_h(t) = (I_0 t + A) e^{-Rt/L}$$

De $i(0^-) = i(0^+) = 0$ obtenemos que $A = 0$, y así $i(t) = I_0 t e^{-Rt/L} u(t)$, donde $I_0 = V_0/L$.

7.14. RESPUESTA DE CIRCUITOS RL Y RC A EXCITACIÓN SINUSOIDAL SÚBITA

Cuando un circuito serie RL se conecta súbitamente a una tensión alterna $v_s = V_0 \cos \omega t$ (Figura 7.19), la ecuación que interviene es

$$Ri + L \frac{di}{dt} = V_0(\cos \omega t)u(t) \quad (18)$$

La solución es

$$i(t) = i_h + i_p \quad \text{donde} \quad i_h(t) = Ae^{-Rt/L} \quad \text{e} \quad i_p(t) = I_0 \cos(\omega t - \theta)$$

Sustituyendo i_p en (18) se obtiene I_0 :

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \quad \text{y} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{L\omega}{R}$$

Entonces

$$i(t) = Ae^{-Rt/L} + I_0 \cos(\omega t - \theta) \quad t > 0$$

De $i(0^+) = 0$ se obtiene $A = -I_0 \cos \theta$. Por tanto,

$$i(t) = I_0 [\cos(\omega t - \theta) - \cos \theta (e^{-Rt/L})]$$

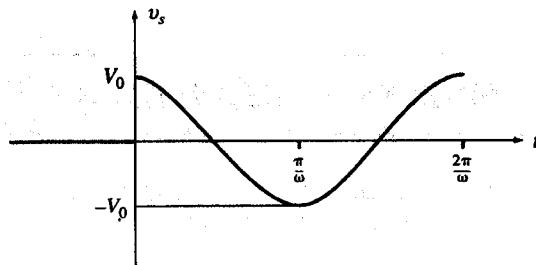


Figura 7.19.

7.15. RESUMEN DE LA RESPUESTA FORZADA DE LOS CIRCUITOS DE PRIMER ORDEN

Supongamos la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{dv}{dt}(t) + av(t) = f(t) \quad (19)$$

La respuesta forzada $v_p(t)$ depende de la función $f(t)$ del segundo miembro. Se han dado algunos ejemplos en las secciones anteriores. En la Tabla 7.2 se dan algunos ejemplos de $f(t)$ que deben utilizarse para averiguar $v_p(t)$. La respuesta se obtiene por sustitución en la ecuación diferencial. Mediante una combinación lineal de las funciones dadas en la Tabla 7.2, y teniendo en cuenta los retardos correspondientes, se puede deducir la respuesta forzada.

Tabla 7.2.

1	$\frac{1}{a}$
n	t $\frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}$
n	$e^{st}, (s \neq -a)$ $\frac{e^{st}}{s + a}$
n	e^{-at} te^{-at}
n	$\cos \omega t$ donde $A = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$ y $\operatorname{tg} \theta = \frac{\omega}{a}$
n	$e^{-bt} \cos \omega t$ donde $A = \frac{1}{\sqrt{(a-b)^2 + \omega^2}}$ y $\operatorname{tg} \theta = \frac{\omega}{a-b}$

- 7.1. Para $t = 0^-$, esto es antes de que se cierre el interruptor de la Figura 7.20, $v_C = 100$ V. Obtener la intensidad y la carga del transitorio.

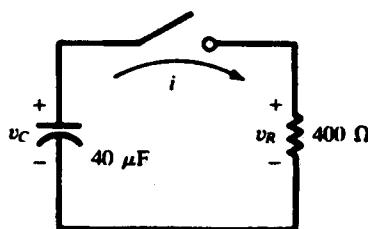


Figura 7.20.

Con las polaridades indicadas en el esquema, $v_R = v_C$ para $t > 0$ y $1/RC = 62,5 \text{ s}^{-1}$. También $v_C(0^+) = v_C(0^-) = 100$ V. Así:

$$v_R = v_C = 100e^{-62.5t} \text{ (V)} \quad i = \frac{v_R}{R} = 0,25e^{-62.5t} \text{ (A)} \quad q = Cv_C = 4000e^{-62.5t} \text{ (}\mu\text{C)}$$

- 7.2. En el Problema 7.1 calcular la potencia y la energía en la resistencia y comparar esta última con la energía inicial acumulada en el condensador.

$$p_R = v_R i = 25e^{-125t} \text{ (W)}$$

$$w_R = \int_0^t p_R dt = \int_0^t 25e^{-125t} dt = 0,20(1 - e^{-125t}) \text{ (J)}$$

La energía inicial acumulada es

$$W_0 = \frac{1}{2} CV_0^2 = \frac{1}{2}(40 \cdot 10^{-6})(100)^2 \text{ J} = 0,20 = w_R(\infty)$$

o sea, toda la energía acumulada en el condensador se entrega a la resistencia y en ella se convierte en calor.

- 7.3. Un circuito RC como el de los Problemas 7.1 y 7.2 tiene una potencia instantánea dada por

$$p_R = 360e^{-t/0,00001} \text{ (W)}$$

Calcular la carga inicial Q_0 si $R = 10 \Omega$.

$$p_R = P_0 e^{-2t/RC} \quad \text{o} \quad \frac{2}{RC} = 10^5 \quad \text{o} \quad C = 2 \mu\text{F}$$

$$w_R = \int_0^t p_R dt = 3,6(1 - e^{-t/0,00001}) \text{ (mJ)}$$

Entonces $w_R(\infty) = 3,6 \text{ mJ} = Q_0^2/2C$, de donde $Q_0 = 120 \mu\text{C}$.

- 7.4. El interruptor del circuito RL de la Figura 7.21 pasa de la posición 1 a la 2 en $t = 0$. Calcular v_R y v_L con las polaridades indicadas.

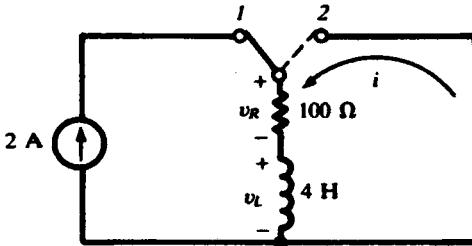


Figura 7.21.

La fuente de intensidad constante proporciona una corriente en la misma dirección que la corriente transitoria i . Entonces para $t > 0$,

$$i = I_0 e^{-Rt/L} = 2e^{-25t} \text{ (A)}$$

$$v_R = Ri = 200e^{-25t} \text{ (V)}$$

$$v_L = -v_R = -200e^{-25t} \text{ (V)}$$

- 7.5. Para el transitorio del Problema 7.4 obtener p_R y p_L .

$$p_R = v_R i = 400e^{-50t} \text{ (W)}$$

$$p_L = v_L i = -400e^{-50t} \text{ (W)}$$

El signo negativo de la potencia de la inductancia está en consonancia con el hecho de que la energía está saliendo del elemento. Y que esta energía está siendo transferida a la resistencia, siendo p_R positiva.

- 7.6. Un circuito serie RL con $R = 5 \text{ k}\Omega$ y $C = 20 \mu\text{F}$ tiene una fuente de tensión de 100 V aplicada en el instante $t = 0$; no hay carga inicial en el condensador. Calcular i , v_R , v_C y q , para $t > 0$.

La carga del condensador y, en consecuencia, v_C deben ser continuas en $t = 0$:

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0$$

cuando $t \rightarrow \infty$, $v_C \rightarrow 100 \text{ V}$, que es la tensión aplicada. La constante de tiempo del circuito es $\tau = RC = 10^{-1} \text{ s}$. De la Sección 6.10:

$$v_C = [v_C(0^+) - v_C(\infty)]e^{-t/\tau} + v_C(\infty) = -100e^{-10t} + 100 \text{ (V)}$$

Las otras funciones se obtienen a partir de éstas. Si las tensiones en ambos elementos son positivas, donde la corriente entra, $v_R + v_C = 100 \text{ V}$, y así:

$$v_R = 100e^{-10t} \text{ (V)}$$

$$i = \frac{v_R}{R} = 20e^{-10t} \text{ (mA)}$$

$$q = Cv_C = 2000(1 - e^{-10t}) \text{ } (\mu\text{C})$$

- 7.7. El interruptor del circuito de la Figura 7.22(a) se cierra en $t = 0$, teniendo entonces el condensador una carga de $Q_0 = 500 \mu\text{C}$, con la polaridad indicada. Obtener i y q para $t > 0$, y representar gráficamente la variación de q .

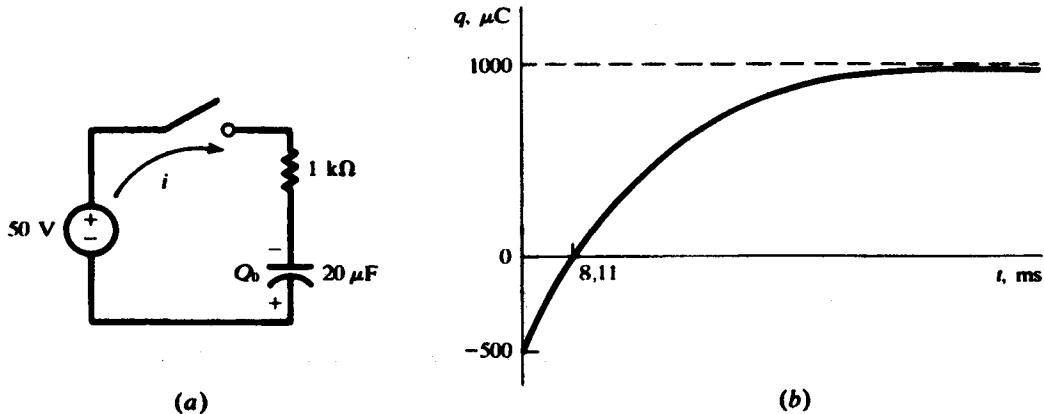


Figura 7.22.

La carga inicial corresponde a una tensión del condensador de $V_0 = Q_0/C = 25 \text{ V}$, de donde $v_C(0^+) = -25 \text{ V}$. El signo es negativo porque la tensión del condensador, de acuerdo con la dirección positiva de la corriente, debe ser + en la placa superior. También $v_C(\infty) = +50 \text{ V}$ y $\tau = 0,02 \text{ s}$. De esta forma, como en el Problema 7.6,

$$v_C = -75e^{-50t} + 50 \text{ (V)}$$

de donde

$$q = Cv_C = -1500e^{-50t} + 100 \text{ } (\mu\text{C}) \quad i = \frac{dq}{dt} = 75e^{-50t} \text{ (mA)}$$

En la gráfica de la Figura 7.22(b) se ve que la carga cambia desde $500 \mu\text{C}$ con una polaridad a $1000 \mu\text{C}$ con polaridad contraria.

- 7.8. Calcular la intensidad i en función del tiempo en el circuito de la Figura 7.23.

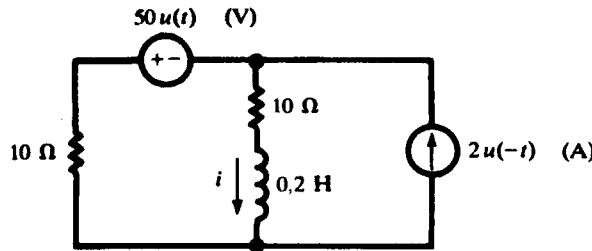


Figura 7.23.

Para $t < 0$ la fuente de tensión está cortocircuitada y la fuente de intensidad proporciona 2 A, que se reparten por igual las dos resistencias de 10Ω .

$$i(t) = i(0^-) = i(0^+) = 1 \text{ A}$$

Para $t > 0$ la fuente de intensidad se sustituye por un circuito abierto y la fuente de 50 V actúa sobre el circuito RL en serie ($R = 20 \Omega$). En consecuencia, cuando $t \rightarrow \infty$, $i \rightarrow -50/20 = -2,5 \text{ A}$. Entonces, por las Secciones 6.10 y 7.3,

$$i(t) = [i(0^+) - i(\infty)]e^{-Rt/L} + i(\infty) = 3,5e^{-100t} - 2,5 \text{ (A)}$$

Utilizando la función escalón unidad, las dos fórmulas anteriores pueden expresarse por una sola válida para cualquier instante t :

$$i(t) = 1u(-t) + (3,5e^{-100t} - 2,5)u(t) \text{ (A)}$$

- 7.9. En la Figura 7.24(a) el interruptor se cierra para $t = 0$. El condensador no tiene carga para $t < 0$. Calcular i_R , i_C , v_C y v_s para cualquier instante, suponiendo que $i_s = 2 \text{ mA}$.

Para $t < 0$, $i_R = 2 \text{ mA}$, $i_C = v_C = 0$ y $v_s = (2 \text{ mA})(5000 \Omega) = 10 \text{ V}$.

Para $t > 0$, la constante de tiempo es $\tau = RC = 10 \text{ ms}$ y

$$i_R(0^+) = 0, i_R(\infty) = 2 \text{ mA} \text{ e } i_R = 2(1 - e^{-100t}) \text{ (mA)} \quad [\text{Ver Figura 7.24(a)}]$$

$$v_C(0^+) = 0, v_C(\infty) = (2 \text{ mA})(5 \text{ k}\Omega) = 10 \text{ V} \text{ y } v_C = 10(1 - e^{-100t}) \text{ (V)} \quad [\text{Ver Figura 7.24(c)}]$$

$$i_C(0^+) = 2 \text{ mA}, I_C(\infty) = 0 \text{ e } i_C = 2e^{-100t} \text{ (mA)} \quad [\text{Ver Figura 7.24(d)}]$$

$$v_s(0^+) = 0, v_s(\infty) = (2 \text{ mA})(5 \text{ k}\Omega) = 10 \text{ V} \text{ y } v_s = 10(1 - e^{-100t}) \text{ (V)} \quad [\text{Ver Figura 7.24(e)}]$$

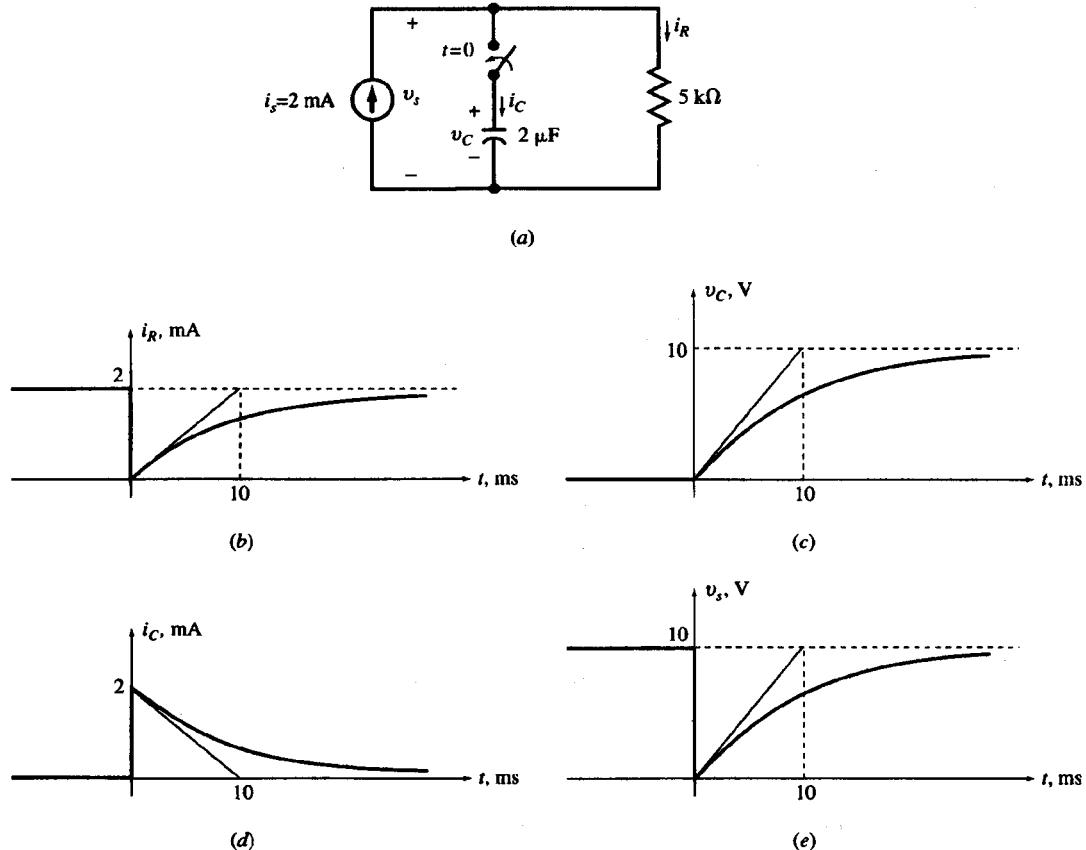


Figura 7.24.

7.10. En la Figura 7.25 el interruptor se abre en $t = 0$. Calcular i_R , i_C , v_C y v_s .

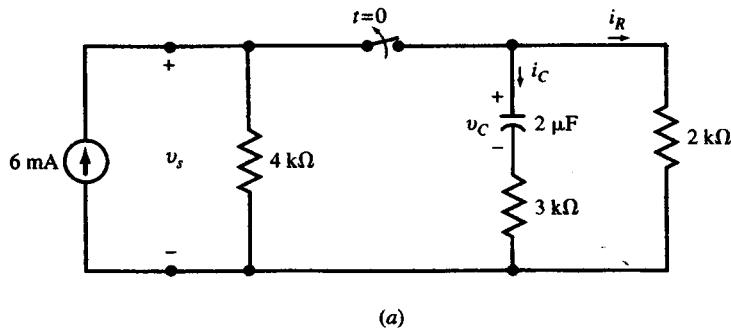


Figura 7.25.

Para $t < 0$ el circuito es estacionario con $i_R = 6(4)/(4 + 2) = 4 \text{ mA}$, $i_C = 0$ y $v_C = v_s = 4(2) = 8 \text{ V}$. La tensión del condensador es la misma en el instante de la desconexión

en $t = 0$. Después de la desconexión para $t = 0^+$ el condensador sigue teniendo la misma tensión $v_C(0^+) = v_C(0^-) = 8 \text{ V}$.

Para $t > 0$ el condensador se descarga en la resistencia de $5 \text{ k}\Omega$, que es la equivalente de las resistencias de $3 \text{ k}\Omega$ y de $2 \text{ k}\Omega$ en serie. La constante de tiempo del circuito es $\tau = (2 + 3)(10^3)(2 \cdot 10^{-6}) = 0,01 \text{ s}$. La intensidad y la tensión son

$$v_C = 8e^{-100t} \text{ (V)}$$

$$i_R = -i_C = v_C/5000 = (8/5000)e^{-100t} = 1,6e^{-100t} \text{ (mA)}$$

$$v_s = (6 \text{ mA})(4 \text{ k}\Omega) = 24 \text{ V}$$

Por lo que para $t < 0$ toda la corriente de 6 mA atraviesa la resistencia de $4 \text{ k}\Omega$.

- 7.11. El interruptor del circuito de la Figura 7.26 se cierra en la posición 1 en $t = 0$ y permanece en dicha posición durante un tiempo $t = \tau = 250 \mu\text{s}$, para luego pasar a la posición 2. Obtener la corriente para $t > 0$.

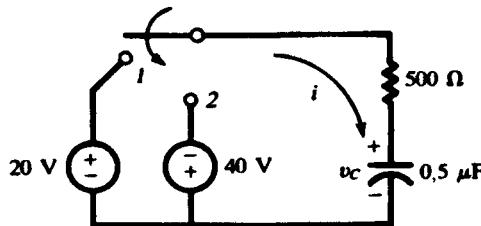


Figura 7.26.

Lo más sencillo, en principio, es calcular la carga del condensador, pues se sabe que es una función continua (en $t = 0$ y en $t = \tau$), luego mediante derivación se obtendrá la intensidad.

Para $0 \leq t \leq \tau$, q debe ser

$$q = Ae^{-t/\tau} + B$$

Suponiendo que $q(0) = 0$ y la condición

$$i(0^+) = \frac{dq}{dt} \Big|_{0^+} = \frac{20 \text{ V}}{500 \Omega} = 40 \text{ mA}$$

obtenemos que $A = -B = -10 \mu\text{C}$; o sea:

$$q = 10(1 - e^{-4000t}) \text{ } (\mu\text{C}) \quad (0 \leq t \leq \tau) \quad (20)$$

De (20), $q(\tau) = 10(1 - e^{-1}) \mu\text{C}$, y sabemos que $q(\infty) = (0,5 \mu\text{F})(-40 \text{ V}) = -20 \mu\text{C}$.

De esto se determina q para $t \geq \tau$ por

$$q = [q(\tau) - q(\infty)]e^{-(t-\tau)/\tau} + q(\infty) = 71,55e^{-4000t} - 20 \text{ } (\mu\text{C}) \quad (21)$$

Derivando respecto de (20) y (21),

$$i = \frac{dq}{dt} = \begin{cases} 40e^{-4000t} \text{ (mA)} & (0 < t < \tau) \\ -286,2e^{-4000t} \text{ (mA)} & (t > \tau) \end{cases}$$

Ver Figura 7.27.

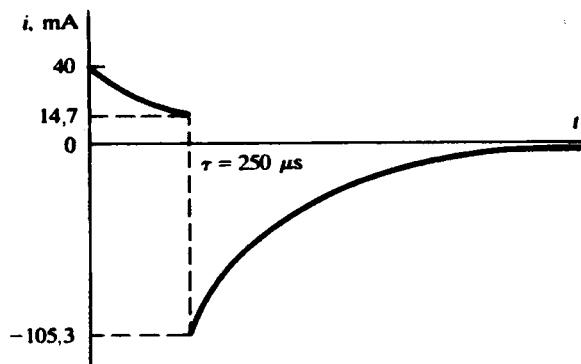


Figura 7.27.

- 7.12. Un circuito serie RL tiene una tensión constante aplicada V en $t = 0$. ¿Para qué instante se cumple que $v_R = v_L$?

La intensidad por un circuito serie RL es una función continua, partiendo de cero en este caso y alcanzando el valor final V/R . Así, para $t > 0$,

$$i = \frac{V}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{y} \quad v_R = Ri = V(1 - e^{-t/\tau})$$

donde $\tau = L/R$ es la constante de tiempo del circuito. Puesto que $v_R + v_L = V$, las dos tensiones serán iguales cuando

$$\begin{aligned} v_R &= \frac{1}{2}V \\ V(1 - e^{-t/\tau}) &= \frac{1}{2}V \\ e^{-t/\tau} &= \frac{1}{2} \\ \frac{t}{\tau} &= \ln 2 \end{aligned}$$

que es cuando $t = 0,693 \tau$. Observar que este tiempo es independiente de V .

- 7.13. Se aplica una tensión constante a un circuito serie RL en $t = 0$. La tensión en la inductancia es 20 V a los 3,46 ms y 5 V a los 25 ms. Calcular R si $L = 2 H$.

Utilizando el método de los dos puntos de la Sección 7.6:

$$\tau = \frac{t_2 - t_1}{\ln v_1 - \ln v_2} = \frac{25 - 3,46}{\ln 20 - \ln 5} = 15,54 \text{ ms}$$

y así

$$R = \frac{L}{\tau} = \frac{2}{15,54 \cdot 10^{-3}} = 128,7 \Omega$$

- 7.14. El interruptor S_1 de la Figura 7.28 se cierra en $t = 0$. El interruptor S_2 se abre para $t = 4 \text{ ms}$. Calcular i para $t > 0$.

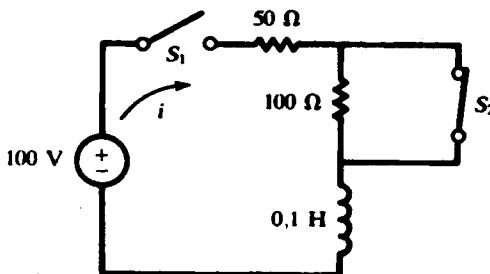


Figura 7.28.

Como hay siempre una inductancia en el circuito, la corriente es una función continua para cualquier instante. En el intervalo $0 \leq t \leq 4$ ms, la resistencia de 100Ω está cortocircuitada y con una constante de tiempo de $t = (0,1 \text{ H})/(50 \Omega) = 2$ ms, la i arranca de cero y tiende hacia el valor de

$$\frac{100 \text{ V}}{50 \Omega} = 2 \text{ A}$$

si bien no llega nunca a tomar este valor. Por tanto, como en el Problema 7.12,

$$i = 2(1 - e^{-t/2}) \text{ (A)} \quad (0 \leq t \leq 4) \quad (22)$$

donde t se mide en ms. En particular,

$$i(4) = 2(1 - e^{-2}) = 1,729 \text{ A}$$

Para el intervalo $t \geq 4$ ms, i arranca de 1,729 A y desciende hacia $100/150 = 0,667$ A con una constante de tiempo de $0,1/150 = \frac{2}{3}$ ms. Por tanto, con t en ms, se tiene:

$$i = (1,729 - 0,667)e^{-(t-4)/(2/3)} + 0,667 = 428,4e^{-3t/2} + 0,667 \text{ (A)} \quad (t \geq 4) \quad (23)$$

- 7.15.** En el circuito de la Figura 7.29 el interruptor se cierra para $t = 0$, cuando el condensador de $6 \mu\text{F}$ tiene una carga de $Q_0 = 300 \mu\text{C}$. Calcular la expresión para el transitorio de la tensión v_R .

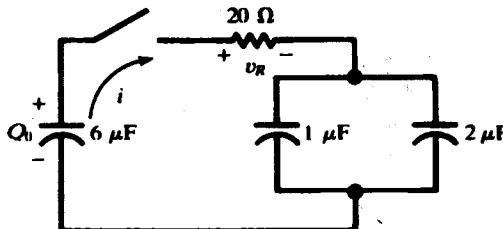


Figura 7.29.

Los dos condensadores en paralelo tienen una capacidad de $3 \mu\text{F}$. Este condensador equivalente está en serie con el de $6 \mu\text{F}$ y, por tanto, la capacidad equivalente total será de $2 \mu\text{F}$. Así, $\tau = RC_{eq} = 40 \mu\text{s}$.

Para $t = 0^+$, la LKT da $v_R = 300/6 = 50$ V; y como cuando $t \rightarrow \infty$, $v_R \rightarrow 0$ (puesto que $i \rightarrow 0$). Por tanto,

$$v_R = 50e^{-t/\tau} = 50e^{-t/40} \text{ (V)}$$

en donde t se mide en μs .

- 7.16. En el circuito de la Figura 7.30 el interruptor pasa a la posición 2 en $t = 0$. Calcular la intensidad i_2 para $t = 34,7$ ms.

Después de la conexión, las tres inductancias son equivalentes a

$$L_{\text{eq}} = \frac{10}{6} + \frac{5(10)}{15} = 5 \text{ H}$$

Entonces $\tau = 5/200 = 25$ ms, y de este modo, expresando t en ms,

$$i = 6e^{-t/25} \text{ (A)} \quad i_2 = \left(\frac{5}{15}\right) i = 2e^{-t/25} \text{ (A)}$$

$$i_2(34,7) = 2e^{-34,7/25} \text{ A} = 0,50 \text{ A}$$

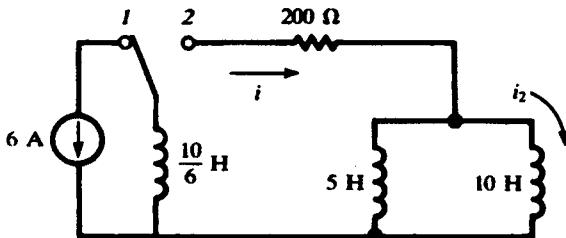


Figura 7.30.

- 7.17. El interruptor de la Figura 7.31 se cierra en $t = 0$. Obtener la corriente i y la tensión en el condensador v_c para $t > 0$.

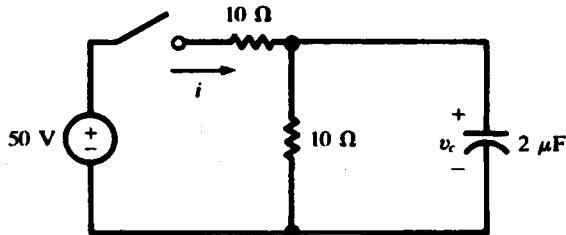


Figura 7.31.

Hasta la respuesta natural del circuito está involucrada y las dos resistencias están en paralelo, por lo que

$$\tau = R_{\text{eq}} C = (5 \Omega)(2 \mu\text{F}) = 10 \mu\text{s}$$

Por continuidad, $v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0$. Además, cuando $t \rightarrow \infty$, el condensador es como un circuito abierto, quedando una resistencia de $20\ \Omega$ en serie con los 50 V . Y así:

$$i(\infty) = \frac{50}{20} = 2,5\text{ A} \quad v_C(\infty) = (2,5\text{ A})(10\ \Omega) = 25\text{ V}$$

Sabiendo la condición final de v_C podemos escribir:

$$v_C = [v_C(0^+) - v_C(\infty)]e^{-t/\tau} + v_C(\infty) = 25(1 - e^{-t/10})\text{ (V)}$$

donde t se mide en μs .

La intensidad por el condensador viene dada por

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} = 5e^{-t/10}\text{ (A)}$$

y la intensidad por la resistencia en paralelo de $10\ \Omega$ es

$$i_{10\Omega} = \frac{v_C}{10\ \Omega} = 2,5(1 - e^{-t/10})\text{ (A)}$$

Por tanto,

$$i = i_C + i_{10\Omega} = 2,5(1 + e^{-t/10})\text{ (A)}$$

El problema podía también haberse resuelto asignando unas corrientes de malla y resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales correspondiente.

- 7.18.** El interruptor en el circuito de dos mallas de la Figura 7.32 se cierra para $t = 0$. Obtener las intensidades i_1 e i_2 , para $t > 0$.

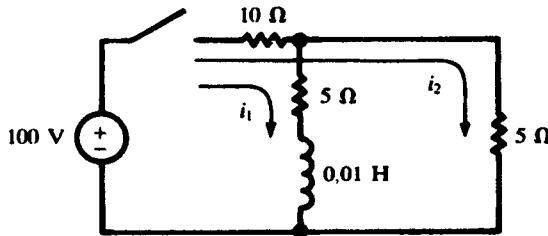


Figura 7.32.

$$10(i_1 + i_2) + 5i_1 + 0,01 \frac{di_1}{dt} = 100 \quad (24)$$

$$10(i_1 + i_2) + 5i_2 = 100 \quad (25)$$

De (25), $i_2 = (100 - 10i_1)/15$. Sustituyendo en (24),

$$\frac{di_1}{dt} + 833i_1 = 3333 \quad (26)$$

La solución para el estado estacionario (solución particular) de (26) es $i_1(\infty) = 3333/833 = 4,0\text{ A}$; por tanto,

$$i_1 = Ae^{-833t} + 4,0\text{ (A)}$$

La condición inicial $i_1(0^-) = i_1(0^+) = 0$ ahora da $A = -4,0$ A, así que:

$$i_1 = 4,0(1 - e^{-833t}) \text{ (A)} \quad \text{e} \quad i_2 = 4,0 + 2,67e^{-833t} \text{ (A)}$$

Método alternativo

Cuando el circuito está en reposo, y visto desde los extremos de la inductancia, es equivalente a una resistencia de valor

$$R_{\text{eq}} = 5 + \frac{5(10)}{15} = 8,33 \Omega$$

Entonces $1/\tau = R_{\text{eq}}/L = 833 \text{ s}^{-1}$. Para $t = \infty$ la resistencia del circuito es

$$R_T = 10 + \frac{5(5)}{10} = 12,5 \Omega$$

así que la corriente total es $i_T = 100/12,5 = 8$ A. Y para $t = \infty$ se divide por igual entre las dos resistencias de 5Ω , pasando una corriente de 4 A por la bobina. En consecuencia,

$$i_L = i_1 = 4(1 - e^{-833t}) \text{ (A)}$$

- 7.19.** Un circuito serie RL , con $R = 50 \Omega$ y $L = 0,2 \text{ H}$, tiene aplicada en $t = 0$ una tensión sinusoidal

$$v = 150 \operatorname{sen}(500t + 0,785) \text{ (V)}$$

Calcular la intensidad de corriente para $t > 0$.

La ecuación del circuito para $t > 0$ es

$$\frac{di}{dt} + 250i = 750 \operatorname{sen}(500t + 0,785) \quad (27)$$

La solución tiene dos partes, la complementaria (i_c) y la particular (i_p), tal que $i = i_c + i_p$. La complementaria es la solución de (27) cuando el segundo miembro es cero: $i_c = ke^{-250t}$. El *método de los coeficientes indeterminados* para obtener i_p consiste en suponer que

$$i_p = A \cos 500t + B \operatorname{sen} 500t$$

puesto que el segundo miembro de (27) puede expresarse como una combinación lineal de estas dos funciones. Entonces:

$$\frac{di_p}{dt} = -500A \operatorname{sen} 500t + 500B \cos 500t$$

Sustituyendo estas expresiones de i_p y di_p/dt en (27) y desarrollando el segundo miembro,

$$\begin{aligned} -500A \operatorname{sen} 500t + 500B \cos 500t + 250A \cos 500t + 250B \operatorname{sen} 500t = \\ = 530,3 \cos 500t + 530,3 \operatorname{sen} 500t \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de sen y \cos ,

$$-500A + 250B = 530,3 \quad \text{y} \quad 500B + 250A = 530,3$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, $A = -0,4243$ A, $B = 1,273$ A.

$$i_p = -0,4243 \cos 500t + 1,273 \sin 500t = 1,342 \sin (500t - 0,322) \text{ (A)}$$

$$\mathbf{e} \quad i = i_c + i_p = ke^{-250t} + 1,342 \sin (500t - 0,322) \text{ (A)}$$

Para $t = 0$, $i = 0$. Aplicando esta condición, $k = 0,425$ A, y, finalmente,

$$i = 0,425e^{-250t} + 1,342 \sin (500t - 0,322) \text{ (A)}$$

- 7.20.** En el circuito de la Figura 7.33, calcular la intensidad i_L , para todo valor de t .

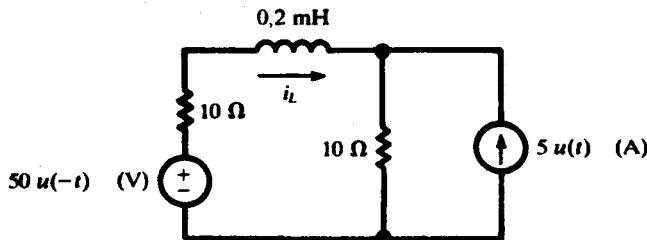


Figura 7.33.

Para $t < 0$ la fuente de 50 V produce en la bobina una corriente de $50/20 = 2,5$ A. La fuente de intensidad de 5 A se aplica para $t > 0$. Cuando $t \rightarrow \infty$ esta corriente se divide por igual entre las dos resistencias de 10Ω , de donde $i_L(\infty) = -2,5$ A. La constante de tiempo del circuito es

$$\tau = \frac{0,2 \cdot 10^{-3} \text{ H}}{20 \Omega} = \frac{1}{100} \text{ ms}$$

y así, con t en ms y utilizando $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 2,5$ A,

$$i_L = [i_L(0^+) - i_L(\infty)]e^{-t/\tau} + i_L(\infty) = 5,0e^{-100t} - 2,5 \text{ (A)}$$

Finalmente, utilizando la función escalón unidad la expresión para $t < 0$ y $t > 0$,

$$i_L = 2,5 u(-t) + (5,0e^{-100t} - 2,5)u(t) \text{ (A)}$$

- 7.21.** El interruptor de la Figura 7.34 ha permanecido en la posición 1 durante mucho tiempo; se cambia a la posición 2 en $t = 0$. Obtener la expresión de i para $t > 0$.

Con el interruptor en 1, $i(0^-) = 50/40 = 1,25$ A. Con una inductancia en el circuito $i(0^-) = i(0^+)$. Al cabo de mucho tiempo de haber cambiado a la posición 2 el interruptor, $i(\infty) = 10/40 = 0,25$ A. Con la notación de antes,

$$B = i(\infty) = 0,25 \text{ A} \quad A = i(0^+) - B = 1,00 \text{ A}$$

y la constante de tiempo es $\tau = L/R = (1/2000)$ s. Entonces para $t > 0$,

$$i = 1,00e^{-2000t} + 0,25 \text{ (A)}$$

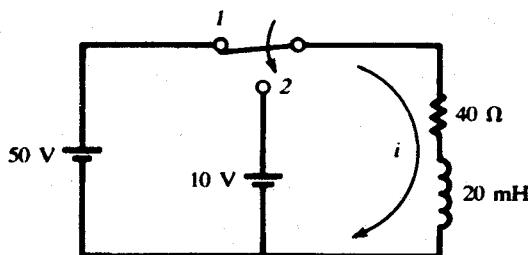


Figura 7.34.

- 7.22. El interruptor del circuito de la Figura 7.35 pasa de la posición 1 a la 2 en el instante $t = 0$. Calcular v_C y v_R para $t > 0$.

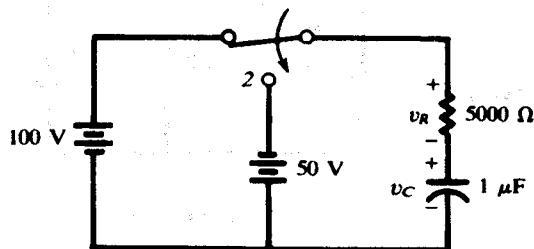


Figura 7.35.

Con el interruptor en 1, la fuente de 100 V hace que $v_C(0^-) = 100$ V, y, por continuidad de la carga, $v_C(0^+) = v_C(0^-)$. En la posición 2, con la fuente de 50 V de polaridad contraria, $v_C(\infty) = -50$ V. Así:

$$B = v_C(\infty) = -50 \text{ V} \quad A = v_C(0^+) - B = 150 \text{ V}$$

$$\tau = RC = \frac{1}{200} \text{ s}$$

y

$$v_C = 150e^{-200t} - 50 \text{ (V)}$$

Finalmente, la LKT da $v_R + v_C + 50 = 0$, o bien

$$v_R = -150e^{-200t} \text{ (V)}$$

- 7.23. Obtener la función de la energía para el circuito del Problema 7.22.

$$w_C = \frac{1}{2} Cv_C^2 = 1,25(3e^{-200t} - 1)^2 \text{ (mJ)}$$

$$w_R = \int_0^t \frac{v_R^2}{R} dt = 11,25(1 - e^{-400t}) \text{ (mJ)}$$

- 7.24. Un circuito serie RC , con $R = 5 \text{ k}\Omega$ y $C = 20 \mu\text{F}$, tiene dos fuentes de tensión en serie,

$$v_1 = 25u(-t) \text{ (V)} \quad v_2 = 25u(t - t') \text{ (V)}$$

Obtener la expresión completa de la tensión en el condensador y hacer una gráfica, si t' es positiva.

La tensión del condensador es una función continua. Para $t \leq 0$, v_1 produce una tensión en el condensador de 25 V.

Para $0 \leq t \leq t'$ ambas fuentes son nulas, así que v_C disminuye exponencialmente desde 25 V hacia cero:

$$v_C = 25e^{-t/RC} = 25e^{-10t} \quad (\text{V}) \quad (0 \leq t \leq t')$$

En particular, $v_C(t') = 25e^{-10t'} \quad (\text{V})$.

Para $t \geq t'$, v_C crece desde $v_C(t')$ hacia el valor final de 25 V dado por v_2 :

$$\begin{aligned} v_C &= [v_C(t') - v_C(\infty)]e^{-(t-t')/RC} + v_C(\infty) \\ &= 25[1 - (e^{10t'} - 1)e^{-10t}] \quad (\text{V}) \quad (t \geq t') \end{aligned}$$

Así, para todo t ,

$$v_C = 25u(-t) + 25e^{-10t}[u(t) - u(t-t')] + 25[1 - (e^{10t'} - 1)e^{-10t}]u(t-t') \quad (\text{V})$$

Ver Figura 7.36.

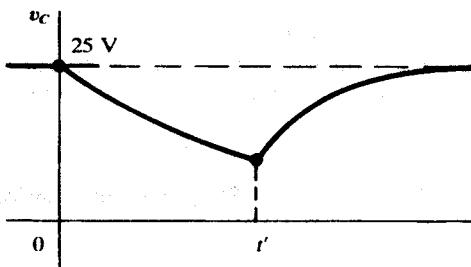


Figura 7.36.

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

- 7.25. El condensador del circuito de la Figura 7.37 tiene una carga inicial de $Q_0 = 800 \mu\text{C}$, con la polaridad indicada. Si el interruptor se cierra en $t = 0$, obtener la intensidad y la carga, para $t > 0$.

Solución: $i = -10e^{-25000t}$ (A), $q = 4 \cdot 10^{-4} (1 + e^{-25000t})$ (C).

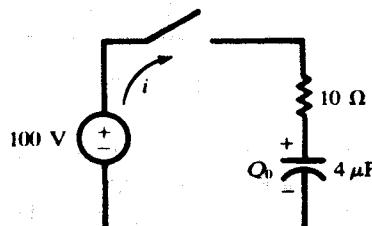


Figura 7.37.

- 7.26. Un condensador de $2 \mu\text{F}$, y con carga inicial de $Q_0 = 100 \mu\text{C}$, se conecta a una resistencia de 100Ω en $t = 0$. Calcular el tiempo en el que la tensión en la resistencia pasa de 40 V a 10 V .

Solución: $0,277 \text{ ms}$.

- 7.27. En el circuito RC de la Figura 7.38 el interruptor pasa a la posición 1 en $t = 0$ y al cabo de un tiempo pasa a la posición 2. Obtener la intensidad para a) $0 < t < \tau$, b) $t > \tau$.

Solución: a) $0,5e^{-200t} (\text{A})$; b) $-0,516e^{-200(t-\tau)} (\text{A})$.

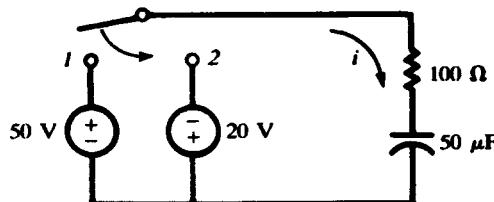


Figura 7.38.

- 7.28. Un condensador de $10 \mu\text{F}$, con una carga inicial Q_0 , se conecta a una resistencia en el instante $t = 0$. Sabiendo que la potencia instantánea en el condensador viene dada por $800e^{-4000t} (\text{W})$, calcular R , Q_0 y la energía inicial acumulada en el condensador.

Solución: 50Ω , $2000 \mu\text{C}$, $0,2 \text{ J}$.

- 7.29. Un circuito serie RL , con $R = 10 \Omega$ y $L = 1 \text{ H}$, tiene una tensión aplicada de 100 V en $t = 0$. Calcular la intensidad para $t > 0$.

Solución: $10(1 - e^{-10t}) (\text{A})$.

- 7.30. En la Figura 7.39 el interruptor está en la posición 1 en $t = 0$; para $t = 1 \text{ ms}$ se cambia a la posición 2. Calcular el tiempo que tardaría en hacerse cero la tensión en la resistencia.

Solución: $1,261 \text{ ms}$.

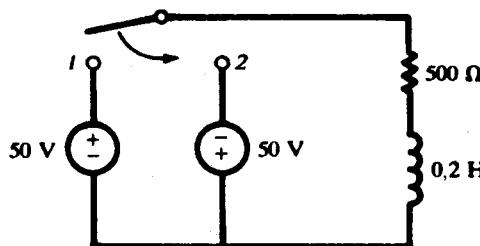


Figura 7.39.

- 7.31. A un circuito serie RL , con $R = 100 \Omega$ y $L = 0,2 \text{ H}$, se le conecta una fuente de tensión de 100 V en el instante $t = 0$; entonces al cabo de un tiempo t' se cambia a una segunda fuente de 50 V con la misma polaridad. Encontrar el tiempo t' para que la corriente permanezca constante y de valor $0,5 \text{ A}$.

Solución: $1,39 \text{ ms}$.

- 7.32. Al circuito del Problema 7.31 se le conecta una fuente de tensión de 50 V de polaridad contraria en el instante $t = 0,5$ ms, sustituyendo a la primera fuente de 100 V. Obtener la intensidad para a) $0 < t < 0,5$ ms, b) $t > 0,5$ ms.

Solución: a) $1 - e^{-500t}$ (A); b) $0,721e^{-500(t-0,0005)} - 0,50$ (A).

- 7.33. La tensión de un transitorio es $35e^{-500t}$ (V) y vale 25 V para $t_1 = 6,73 \cdot 10^{-4}$ s. Demostrar que para $t = t_1 + \tau$ la función vale el 36,8 por 100 de lo que vale para t_1 .

- 7.34. Un transitorio aumenta desde cero hacia un estado estacionario positivo tomando el valor 49,5 para $t_1 = 5$ ms y 120 para $t_2 = 20$ ms. Obtener la constante de tiempo τ .

Solución: 12,4 ms.

- 7.35. El circuito de la Figura 7.40 se conecta en la posición 1 en $t = 0$, después pasa a la posición 2 en $t = 3\tau$. Calcular la intensidad transitoria i para a) $0 < t < 3\tau$, b) $t > 3\tau$.

Solución: a) $2,5e^{-50000t}$ (A); b) $-1,58e^{-66700(t-0,00006)}$ (A).

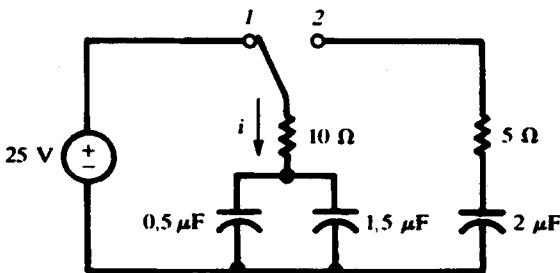


Figura 7.40.

- 7.36. Un circuito serie RL , con $R = 300 \Omega$ y $L = 1$ H, tiene una tensión aplicada dada por $v = 100 \cos(100t + 45^\circ)$ (V) en el instante $t = 0$. [Se ha utilizado una notación para la fase de la tensión más conveniente, si bien estrictamente debería haberse escrito $100t + (\pi/4)$ (rad).] Obtener la intensidad resultante para $t > 0$.

Solución: $-0,282e^{-300t} + 0,316 \cos(100t + 26,6^\circ)$ (A).

- 7.37. La carga inicial del condensador del circuito RC de la Figura 7.41 es $Q_0 = 25 \mu\text{C}$, con la polaridad indicada. El interruptor se cierra para $t = 0$, aplicándose una tensión $v = 100 \sin(1000t + 30^\circ)$ (V). Obtener la intensidad para $t > 0$.

Solución: $153,5e^{-4000t} + 48,4 \sin(1000t + 106^\circ)$ (mA).

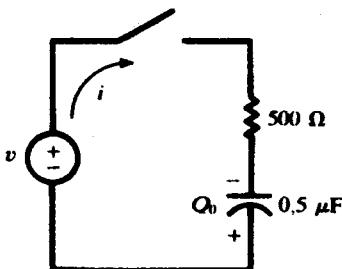


Figura 7.41.

- 7.38. ¿Cuál debería de ser la carga inicial del condensador del Problema 7.37 para que la corriente pase directamente a estacionaria sin que se presenten transitorios?

Solución: $13,37 \mu\text{C}$ (+ en la placa superior).

- 7.39. Escribir el sistema de ecuaciones diferenciales del circuito de la Figura 7.42 y resolverlo para i_1 e i_2 . El interruptor se cierra para $t = 0$ después de haber estado abierto durante mucho tiempo. (Este problema puede resolverse también aplicando las condiciones iniciales y finales del caso general, como en el Problema 7.17.)

Solución: $i_1 = 1,67e^{6,67t} + 5$ (A); $i_2 = -0,555e^{-6,67t} + 5$ (A).

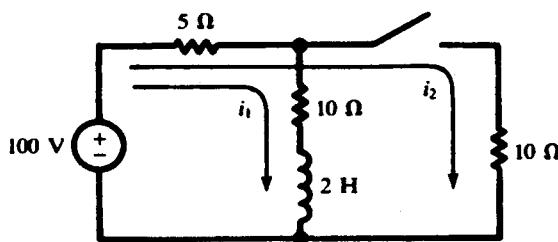


Figura 7.42.

- 7.40. Para el circuito RL de la Figura 7.43, calcular la intensidad i_L en los siguientes instantes: a) -1 ms , b) 0^+ , c) $0,3 \text{ ms}$, d) ∞ .

Solución: a) 2 A ; b) 2 A ; c) $2,78 \text{ A}$; d) 3 A .

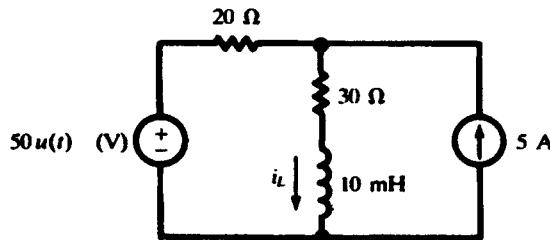


Figura 7.43.

- 7.41. Un circuito serie RC , con $R = 2 \text{ k}\Omega$ y $C = 40 \mu\text{F}$, tiene dos fuentes de tensión en serie con los elementos R y C , dadas por $v_1 = 50 \text{ V}$ y $v_2 = -100u(t) \text{ (V)}$. Calcular: a) la tensión del condensador para $t = \tau$, b) el tiempo para el que la tensión del condensador es nula y cambia de polaridad.

Solución: a) $-13,2 \text{ V}$; b) $55,5 \text{ ms}$.

CAPÍTULO 8

Circuitos de orden superior y frecuencia compleja

8.1. INTRODUCCIÓN

En el Capítulo 7 se estudiaron los circuitos *RL* y *RC* con condiciones iniciales de corriente o carga en el condensador, y se resolvieron las ecuaciones diferenciales de primer orden para obtener las tensiones y las corrientes transitorias. Cuando se presentan dos o más elementos que almacenan energía, las ecuaciones del circuito son diferenciales de segundo orden. En este capítulo se describen varios ejemplos de circuitos de segundo orden. Además, se explican métodos más directos de análisis, incluyendo el de la frecuencia compleja y los diagramas de polos y ceros.

8.2. CIRCUITO SERIE *RLC*

La ecuación diferencial de segundo orden que se examinará a continuación presenta una solución que puede tener tres formas diferentes, dependiendo de los elementos del circuito. Para visualizar las tres posibilidades, en la Figura 8.1 se muestra un sistema mecánico de segundo orden. La masa M está suspendida por un muelle de constante k . Un sistema de amortiguamiento D está unido a la masa M . Si la masa se desplaza desde su posición de equilibrio y posteriormente se libera en el instante $t = 0$, su movimiento resultante será *sobreamortiguado*, *críticamente amortiguado* o *subamortiguado (oscilatorio)*. En la Figura 8.2 se ha representado el gráfico de los movimientos de la masa que resultan tras ser liberada desde la posición desplazada z_1 (en $t = 0$).

El circuito serie *RLC* representado en la Figura 8.3 no tiene fuente de tensión. La ley de Kirchhoff de las tensiones aplicada a la malla después de cerrar el interruptor es

$$v_R + v_L + v_C = 0$$
$$\text{o} \quad Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = 0$$

Derivando y dividiendo por L se obtiene:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

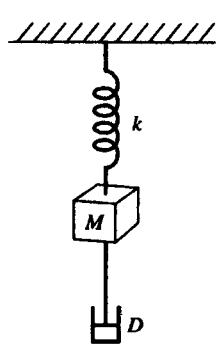


Figura 8.1.

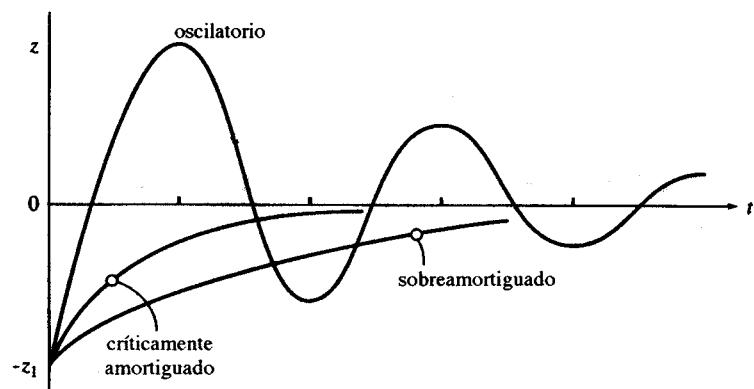


Figura 8.2.

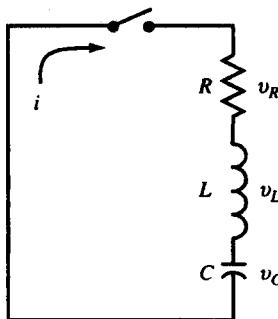


Figura 8.3.

Una solución de esta ecuación diferencial de segundo orden es la forma $i = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial se obtiene:

$$A_1 e^{s_1 t} \left(s_1^2 + \frac{R}{L} s_1 + \frac{1}{LC} \right) + A_2 e^{s_2 t} \left(s_2^2 + \frac{R}{L} s_2 + \frac{1}{LC} \right) = 0$$

es decir, para que sea solución, s_1 y s_2 deben ser las raíces de $s^2 + (R/L)s + (1/LC) = 0$,

$$s_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \equiv -\alpha + \beta \quad s_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \equiv -\alpha - \beta$$

donde $\alpha \equiv R/2L$, $\beta \equiv \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ y $\omega_0 \equiv 1/\sqrt{LC}$.

Caso sobreamortiguado ($\alpha > \omega_0$)

En este caso, α y β son números reales positivos.

$$i = A_1 e^{(-\alpha + \beta)t} + A_2 e^{(-\alpha - \beta)t} = e^{-\alpha t} (A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t})$$

EJEMPLO 8.1. Un circuito serie RLC , con $R = 200 \Omega$, $L = 0,1 \text{ H}$ y $C = 13,33 \mu\text{F}$, tiene una carga inicial en el condensador $Q_0 = 2,67 \cdot 10^{-3} \text{ C}$. En el instante $t = 0$ se cierra un interruptor permitiendo la descarga del condensador. Obtener el transitorio de la corriente. (Véase Figura 8.4.)

En este circuito,

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 10^3 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 7,5 \cdot 10^5 \text{ s}^{-2} \quad \text{y} \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = 500 \text{ s}^{-1}$$

Por tanto,

$$i = e^{-1000t}(A_1 e^{500t} + A_2 e^{-500t})$$

Los valores de las constantes A_1 y A_2 se obtienen de las condiciones iniciales. La inductancia requiere que $i(0^+) = i(0^-)$. Además, la carga y la tensión en el condensador en el instante $t = 0^+$ deben ser las mismas que en el instante $t = 0^-$ y $v_c(0^-) = Q_0/C = 200 \text{ V}$. Aplicando estas dos condiciones,

$$0 = A_1 + A_2 \quad \text{y} \quad \pm 2000 = -500A_1 - 1500A_2$$

de donde $A_1 = \pm 2$, $A_2 = \mp 2$ y, tomando A_1 positivo,

$$i = 2e^{-500t} - 2e^{-1500t} \text{ (A)}$$

Si se toma el valor negativo para A_1 , la función mantiene la misma forma pero queda situada simétricamente por debajo del eje de tiempos. Los signos de A_1 y A_2 están fijados por la polaridad de la tensión inicial en el condensador y por su relación con la dirección positiva tomada para la corriente.

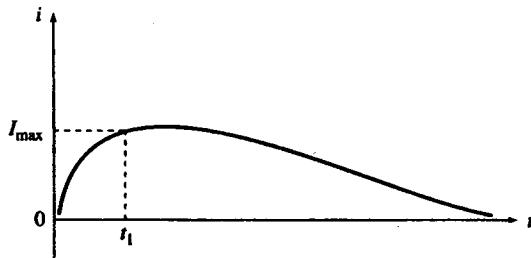


Figura 8.4.

Caso críticamente amortiguado ($\alpha = \omega_0$)

Con $\alpha = \omega_0$, la ecuación diferencial adopta una forma diferente y los dos términos exponentiales propuestos anteriormente no son en este caso una solución. La ecuación se convierte en

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \alpha^2 i = 0$$

y la solución toma la forma $i = e^{-\alpha t}(A_1 + A_2 t)$.

EJEMPLO 8.2. Repetir el Ejemplo 8.1 para $C = 10 \mu\text{F}$, con el que $\alpha = \omega_0$.

Como en el Ejemplo 8.1, las condiciones iniciales se usan para determinar las constantes. Puesto que $i(0^-) = i(0^+)$, $[A_1 + A_2(0)] = 0$ y $A_1 = 0$, entonces,

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}(A_2 te^{-\alpha t}) = A_2(-\alpha te^{-\alpha t} + e^{-\alpha t})$$

de donde $A_2 = (di/dt)|_{0^+} = \pm 2000$. Por tanto, $i = \pm 2000te^{-10^3t}$ (A). (Véase Figura 8.5.)

Nuevamente el signo depende de la elección de la dirección de la corriente con respecto a la polaridad de la tensión inicial en el condensador.

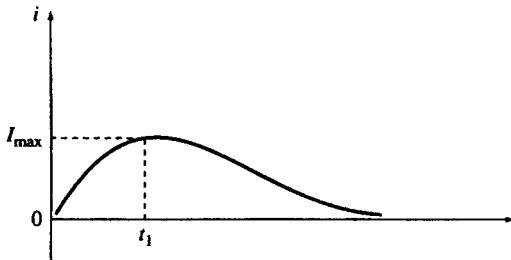


Figura 8.5.

Las respuestas de los casos sobreamortiguado y críticamente amortiguado representados en las Figuras 8.4 y 8.5, respectivamente, son bastante similares. Se anima al lector a examinar los resultados, seleccionando varios valores de t , y comparando las intensidades de corriente. Por ejemplo, encontrar el instante en el que la intensidad alcanza los valores de 1 mA y 1 μA , en cada uno de los casos. Asimismo, encontrar en cada caso el instante t_1 en el que la corriente es máxima.

Caso subamortiguado u oscilatorio ($\alpha < \omega_0$)

Cuando $\alpha < \omega_0$, s_1 y s_2 en la solución de la ecuación diferencial propuesta anteriormente son números complejos conjugados, $s_1 = \alpha + j\beta$ y $s_2 = \alpha - j\beta$, donde β es ahora $\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$. La solución puede expresarse en forma exponencial

$$i = e^{-\alpha t}(A_1 e^{j\beta t} + A_2 e^{-j\beta t})$$

o, como se deduce fácilmente, en forma sinusoidal,

$$i = e^{-\alpha t}(A_3 \cos \beta t + A_4 \operatorname{sen} \beta t)$$

EJEMPLO 8.3. Repetir el Ejemplo 8.1 para $C = 1 \mu\text{F}$.

Al igual que antes,

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 1000 \text{ s}^{-1} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 10^7 \text{ s}^{-2} \quad \beta = \sqrt{10^7 - 10^6} = 3000 \text{ rad/s}$$

Entonces,

$$i = e^{-1000t}(A_3 \cos 3000t + A_4 \operatorname{sen} 3000t)$$

Las constantes A_3 y A_4 se obtienen de las condiciones iniciales como en los casos anteriores, $i(0^+) = 0$ y $V_c(0^+) = 200 \text{ V}$, de donde $A_3 = 0$ y $A_4 = \pm 0,667$. Por tanto,

$$i = \pm 0,667e^{-1000t}(\operatorname{sen} 3000t) \quad (\text{A})$$

Véase la Figura 8.6. La función $\pm 0,667e^{-1000t}$, representada a trazos, proporciona una envolvente dentro de la que está confinada la función seno. La corriente oscilatoria tiene una frecuencia angular o pulsación igual a β (rad/s), pero está *amortiguada* por el término exponencial $e^{-\alpha t}$.

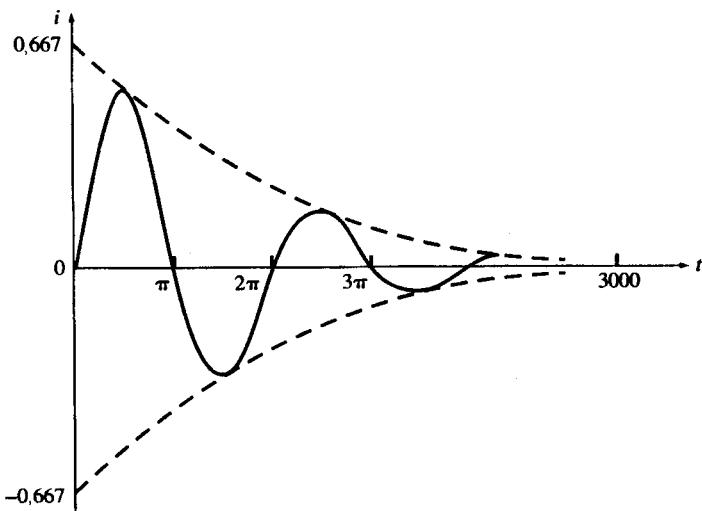


Figura 8.6.

8.3. CIRCUITO PARALELO RLC

La respuesta del circuito paralelo *RLC* representado en la Figura 8.7 será similar a la del circuito serie *RLC*, ya que también responde a una ecuación diferencial de segundo orden. Según el método de las tensiones en los nudos se obtiene:

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t v \, dt + C \frac{dv}{dt} = 0 \quad (1)$$

Derivando y dividiendo por C se obtiene

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0$$

Una solución es de la forma

$$v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (2)$$

en la que

$$s_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$s_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

donde $\alpha = 1/2RC$ y $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Obsérvese que α , el factor de amortiguamiento del transitorio, es diferente al α del circuito serie RLC.

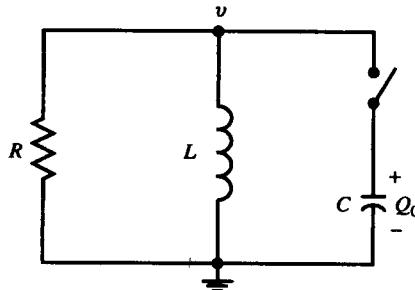


Figura 8.7.

La respuesta transitoria es más sencilla de imaginar suponiendo una carga inicial Q_0 en el condensador y un interruptor que cierra en el instante $t = 0$. Sin embargo, una función de tensión de tipo escalón aplicada al circuito iniciará la misma respuesta transitoria.

Caso sobreamortiguado ($\alpha^2 > \omega_0^2$)

En este caso es aplicable la solución (2).

EJEMPLO 8.4. Un circuito paralelo RLC, con $R = 1000 \Omega$, $C = 0,167 \mu\text{F}$ y $L = 1 \text{ H}$, tiene una tensión inicial en el condensador $V_0 = 50 \text{ V}$. Obtener la tensión $v(t)$ después de cerrar el interruptor en el instante $t = 0$.

$$\text{Se tiene } \alpha = \frac{1}{2RC} = 2994 \quad \alpha^2 = 8,96 \cdot 10^6 \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 5,99 \cdot 10^6$$

Como $\alpha^2 > \omega_0^2$, el circuito es sobreamortiguado y a partir de (2) se obtiene:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -1271 \quad \text{y} \quad s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -4717$$

En el instante $t = 0$,

$$V_0 = A_1 + A_2 \quad \text{y} \quad \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = s_1 A_1 + s_2 A_2$$

De la ecuación (1), para $t = 0$ y con corriente inicial nula en la inductancia L ,

$$\frac{V_0}{R} + C \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad \text{o} \quad \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{V_0}{RC}$$

Resolviendo para A_1 ,

$$A_1 = \frac{V_0(s_2 + 1/RC)}{s_2 - s_1} = 155,3 \quad \text{y} \quad A_2 = V_0 - A_1 = 50 - 155,3 = -105,3$$

Sustituyendo en (2),

$$v = 155,3e^{-1271t} - 105,3e^{-4717t} \text{ (V)}$$

Véase la Figura 8.8.

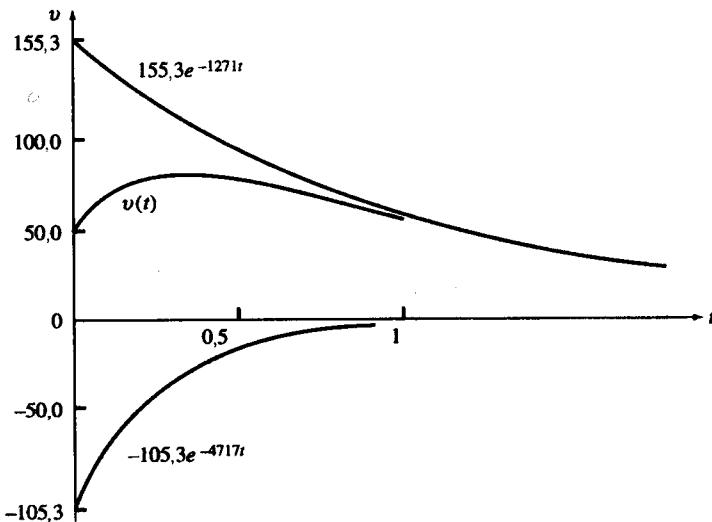


Figura 8.8.

Caso subamortiguado (oscilatorio) ($\omega_0^2 > \alpha^2$)

El caso oscilatorio para el circuito paralelo RLC tiene una ecuación de la misma forma que la del circuito serie RLC subamortiguado. Esto es,

$$v = e^{-\alpha t}(A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) \quad (3)$$

donde $\alpha = 1/2RC$ y $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$. ω_d es una frecuencia angular o pulsación similar a la que se obtiene en el análisis de circuitos sinusoidales. En este caso corresponde a la pulsación de la oscilación amortiguada. Es conocida como *pulsación amortiguada*.

EJEMPLO 8.5. Un circuito paralelo RLC , con $R = 200 \Omega$, $L = 0,28 \text{ H}$ y $C = 3,57 \mu\text{F}$, tiene una tensión inicial en el condensador $V_0 = 50 \text{ V}$. Obtener la función de tensión después de cerrar el interruptor en el instante $t = 0$.

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2(200)(3,57 \cdot 10^{-6})} = 700 \quad \alpha^2 = 4,9 \cdot 10^5 \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{(0,28)(3,57 \cdot 10^{-6})} = 10^6$$

Como $\omega_0^2 > \alpha^2$, los parámetros del circuito producen una respuesta oscilatoria.

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{10^6 - (4,9 \cdot 10^5)} = 714$$

En el instante $t = 0$, $V_0 = 50 \text{ V}$; según (3), $A_1 = V_0 = 50 \text{ V}$. De la ecuación del nudo

$$\frac{V_0}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t v \, dt + C \frac{dv}{dt} = 0$$

para $t = 0$,

$$\frac{dv}{dt} \Big|_{t=0} = -\frac{V_0}{RC}$$

Derivando la expresión de v y particularizando para $t = 0$ se obtiene:

$$\frac{dv}{dt} \Big|_{t=0} = \omega_d A_2 - \alpha A_1 \quad \text{o} \quad \omega_d A_2 - \alpha A_1 = -\frac{V_0}{RC}$$

Como $A_1 = 50$,

$$A_2 = \frac{-(V_0/RC) + V_0\alpha}{\omega_d} = -49$$

y por tanto,

$$v = e^{-700t}(50 \cos 714t - 49 \operatorname{sen} 714t) \text{ (V)}$$

El caso críticamente amortiguado no se analiza para el circuito paralelo RLC , ya que tiene muy poco interés real en el diseño de un circuito. De hecho es una mera curiosidad, pues constituye un conjunto de constantes del circuito cuya respuesta, durante el amortiguamiento, está próxima a la oscilación.

8.4. CIRCUITO CON DOS MALLAS

El análisis de la respuesta de un circuito de dos mallas que contiene dos elementos de almacenamiento de energía proporciona un sistema de ecuaciones diferenciales como el indicado a continuación.

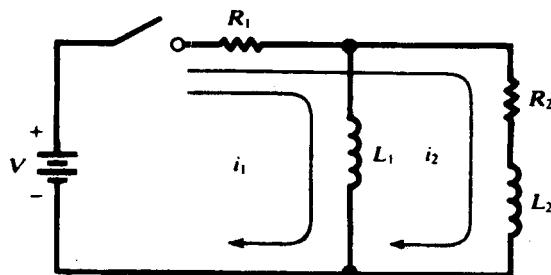


Figura 8.9.

Para el circuito de la Figura 8.9 se escogen las corrientes de malla representadas, i_1 e i_2 . Aplicando la ley de Kirchhoff para las tensiones se obtienen las dos ecuaciones diferenciales de primer orden

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_2 = V \quad (4)$$

$$R_1 i_1 + (R_1 + R_2) i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} = V \quad (5)$$

que deben ser resueltas como sistema de ecuaciones. Para realizarlo se deriva respecto al tiempo la ecuación (4),

$$R_1 \frac{di_1}{dt} + L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + R_1 \frac{di_2}{dt} = 0 \quad (6)$$

y se elimina i_2 y di_2/dt entre (4), (5) y (6). Se obtiene una ecuación de segundo orden para i_1 , del tipo tratado en las secciones 8.2 y 8.3, con la diferencia de que tiene término constante en el segundo miembro de la igualdad:

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{R_1 L_1 + R_2 L_1 + R_1 L_2}{L_1 L_2} \frac{di_1}{dt} + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} i_1 = \frac{R_2 V}{L_1 L_2} \quad (7)$$

La solución estacionaria de (7) es, evidentemente, $i_1(\infty) = V/R_1$; la solución transitoria se determinará mediante las raíces s_1 y s_2 de

$$s^2 + \frac{R_1 L_1 + R_2 L_1 + R_1 L_2}{L_1 L_2} s + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} = 0$$

junto con las condiciones iniciales

$$i_1(0^+) = 0 \quad \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{0^+} = \frac{V}{L_1}$$

(tanto i_1 como i_2 deben ser continuas en el instante $t = 0$). Una vez se conoce la expresión de i_1 , la de i_2 se obtiene a partir de (4).

Habrá un factor de amortiguamiento que asegure que el transitorio se anulará finalmente. Además, dependiendo de los valores de las cuatro constantes del circuito, el transitorio podrá ser sobreamortiguado o subamortiguado; esto es, oscilatorio. En general, la expresión de la intensidad de corriente será de la forma

$$i_1 = (\text{transitoria}) + \frac{V}{R_1}$$

La parte transitoria para $t = 0$ valdrá $-V/R_1$ y cero cuando $t \rightarrow \infty$.

8.5. FRECUENCIA COMPLEJA

Se han examinado circuitos en los que la función de excitación era constante. Por ejemplo, $V = 50$ V; sinusoidal, $v = 100 \operatorname{sen}(500t + 30)$ (V), o exponencial, $v = 10e^{-5t}$ (V). En esta sección se define el concepto de *frecuencia compleja*, s , que unifica las tres funciones y simplificará el análisis, tanto si se requiere la respuesta estacionaria como la transitoria.

Comenzaremos expresando la función exponencial en la forma equivalente en seno y coseno:

$$e^{j(\omega t + \phi)} = \cos(\omega t + \phi) + j \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

Nos fijaremos exclusivamente en el término en coseno, $\cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re} e^{j(\omega t + \phi)}$, tomando por convenio el prefijo Re. Introduciendo la constante A y el factor $e^{\sigma t}$,

$$Ae^{\sigma t} e^{j(\omega t + \phi)} = Ae^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi) \quad Ae^{j\phi} e^{(\sigma + j\omega)t} = Ae^{j\phi} e^{st} \quad \text{donde } s = \sigma + j\omega$$

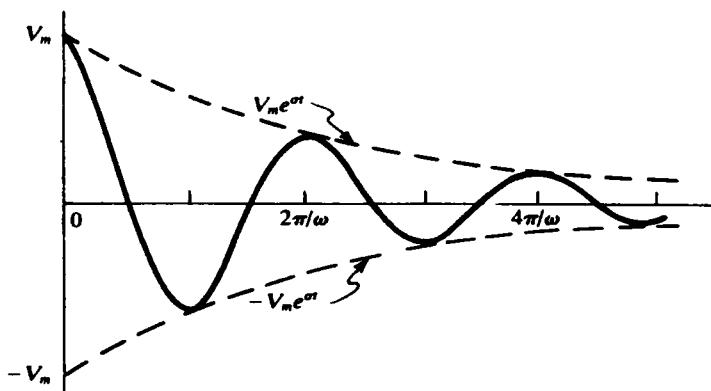


Figura 8.10.

La frecuencia compleja $s = \sigma + j\omega$ tiene unidades de s^{-1} , y como se sabe, ω tiene unidades de rad/s. Por consiguiente, las unidades de σ deben ser también s^{-1} . Esta es la frecuencia *neper*, cuyas unidades son Np/s (el Np es una unidad adimensional). Si σ y ω son distintas de cero, la función es un coseno amortiguado. Solamente se consideran válidos para σ valores negativos. Si σ y ω son cero, el resultado es una constante. Y, finalmente, con $\omega = 0$ y σ distinta de cero, el resultado es una función exponencial decreciente. En la Tabla 8.1 se dan varias funciones con sus correspondientes valores de s para la expresión Ae^{st} .

Tabla 8.1.

$f(t)$	s	A
$10e^{-5t}$	$-5 + j0$	10
$5 \cos(500t + 30^\circ)$	$0 + j500$	5
$2e^{-3t} \cos(100t - 45^\circ)$	$-3 + j100$	2
100	$0 + j0$	100

Cuando se examina la Figura 8.10 para diversos valores de s , los tres casos son evidentes. Si $\sigma = 0$, no hay amortiguamiento y el resultado es una función coseno con valores máximos $\pm V_m$ (no representada). Si $\omega = 0$, la función es una exponencial decreciente con un valor inicial V_m . Y, finalmente, con ω y σ distintos de cero, el resultado es una función coseno amortiguada.

8.6. IMPEDANCIA GENERALIZADA (R , L , C) EN EL DOMINIO s

Una tensión de alimentación de la forma $v = V_m e^{st}$ aplicada a un circuito pasivo producirá unas corrientes por las ramas y unas caídas de tensión en los elementos, todas con la misma

variación en el tiempo e^{st} ; esto es, $I_a e^{j\psi} e^{st}$ y $V_b e^{j\phi} e^{st}$. Por consiguiente, solamente se deberán determinar los módulos de las intensidades de corriente y de las tensiones y los ángulos de fase (éste será también el caso en el análisis de circuitos sinusoidales del Capítulo 9). Se trata, por tanto, de analizar el circuito en el dominio s (véase Figura 8.11).

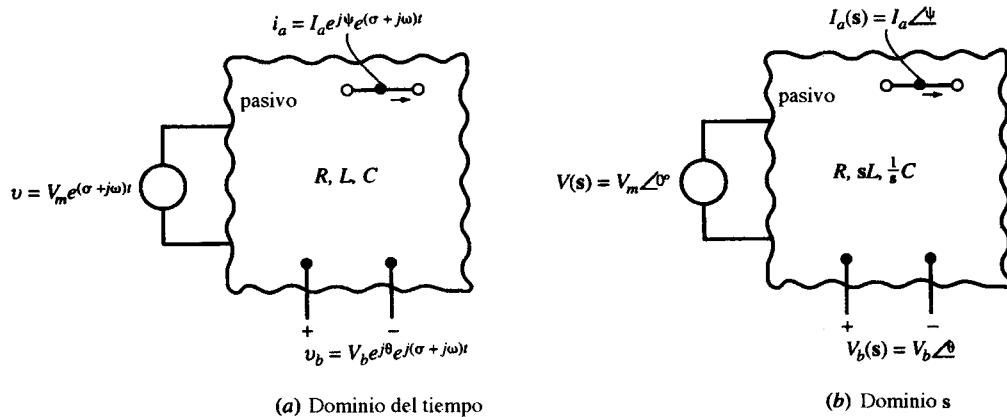


Figura 8.11.

Por un circuito serie RL con una tensión aplicada $v = V_m e^{j\phi} e^{st}$ circulará una intensidad de corriente $i = I_m e^{j\psi} e^{st} = I_m e^{st}$, que, al sustituir en la ecuación de la malla,

$$RI_m e^{st} + sLI_m e^{st} = V_m e^{j\phi} e^{st}$$

da como resultado

$$RI_m e^{st} + sLI_m e^{st} = V_m e^{j\phi} e^{st} \quad \text{de donde} \quad I_m = \frac{V_m e^{j\phi}}{R + sL}$$

Se observa que en el dominio s la impedancia del circuito serie RL es $R + sL$. Es decir, la inductancia tiene una impedancia sL en el dominio s.

EJEMPLO 8.6. Un circuito serie RL , con $R = 4 \Omega$ y $L = 2 \text{ H}$, tiene una tensión de alimentación $v = 10e^{-2t} \cos(10t + 30^\circ)$.

Obtener la intensidad de corriente i mediante el análisis en el dominio s.

$$v = 10/30^\circ e^{st} = Ri + L \frac{di}{dt} = 4i + 2 \frac{di}{dt}$$

Como $i = I e^{st}$,

$$10/30^\circ e^{st} = 10I e^{st} + 2sI e^{st} \quad \text{o} \quad I = \frac{10/30^\circ}{10 + 2s}$$

Sustituyendo $s = -2 + j10$,

$$I = \frac{10/30^\circ}{10 + 2(-2 + j10)} = \frac{10/30^\circ}{6 + j10} = 0,86/-29^\circ$$

En definitiva, $i = Ie^{st} = 0,86e^{-2t} \cos(10t - 29^\circ)$ (A).

EJEMPLO 8.7. Un circuito serie RC , con $R = 10 \Omega$ y $C = 0,2 \text{ F}$, tiene la misma tensión de alimentación que el Ejemplo 8.6. Determinar la intensidad de corriente mediante el análisis en el dominio s.

Al igual que en el Ejemplo 8.6,

$$v = 10/30^\circ e^{st} = Ri + \frac{1}{C} \int i dt = 10i + 5 \int i dt$$

Como $i = Ie^{st}$,

$$\frac{10/30^\circ}{10/30^\circ} e^{st} = 10Ie^{st} + \frac{5}{s} Ie^{st} \quad \text{de donde} \quad I = \frac{10/30^\circ}{10 + 5/s} = 1,01/32,8^\circ$$

Entonces, $i = 1,01e^{-2t} \cos(10t + 32,8^\circ)$ (A).

Obsérvese que la impedancia en el dominio s para el condensador es $1/sC$. Por tanto, la impedancia en el dominio s de un circuito serie RLC será $Z(s) = R + sL + 1/sC$.

8.7. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA Y DIAGRAMAS DE POLOS Y CEROS

Al aplicar una tensión de alimentación de la forma $v = Ve^{st}$ a un circuito pasivo se producirán unas corrientes y unas tensiones a lo largo del circuito, todas ellas con igual variación en el tiempo e^{st} ; por ejemplo, $Ie^{j\psi}e^{st}$. Por tanto, solamente se tiene que determinar el módulo I y el ángulo de fase ψ . Se va a considerar entonces un dominio s en el que las tensiones e intensidades se expresan en forma polar, esto es, V/θ , I/ψ , etc. La Figura 8.12 muestra la correspondencia entre el circuito en el dominio del tiempo, donde $s = \sigma + j\omega$, y en el dominio s en el que solamente se indican los módulos y los ángulos de fase. En el dominio s las inductancias se expresan como sL y las capacitancias como $1/sC$. La impedancia en el dominio s es $Z(s) = V(s)/I(s)$.

Se define la *función de transferencia* de un circuito como la relación entre la función exponencial compleja de una salida $Y(s)$ y la función exponencial compleja de una entrada $X(s)$. Si, por ejemplo, $X(s)$ es una tensión de alimentación e $Y(s)$ es la tensión de salida entre un par de terminales, la relación $Y(s)/X(s)$ es adimensional.

La función de transferencia $H(s)$ puede obtenerse de la ecuación diferencial que relaciona la entrada y la salida

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

Cuando $x(t) = Xe^{st}$ e $y(t) = Ye^{st}$,

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) e^{st} = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0) e^{st}$$

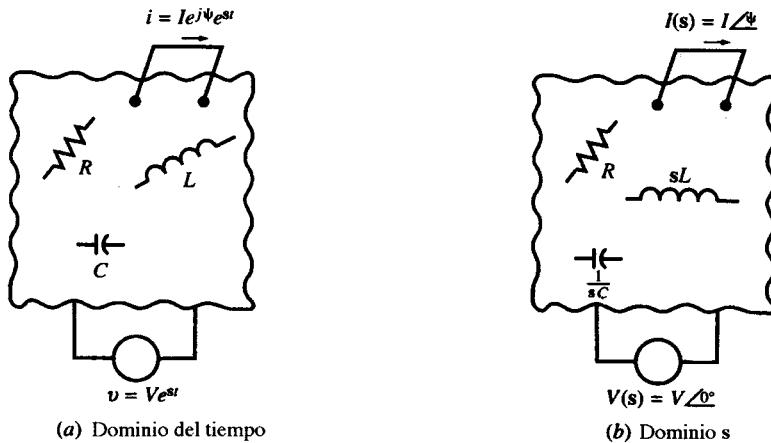


Figura 8.12.

Entonces,

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}$$

En los circuitos lineales compuestos por agrupación de elementos la función de transferencia $H(s)$ es una función racional de s y se puede escribir de la siguiente forma general:

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = k \frac{(\mathbf{s} - \mathbf{z}_1)(\mathbf{s} - \mathbf{z}_2) \cdots (\mathbf{s} - \mathbf{z}_\mu)}{(\mathbf{s} - \mathbf{p}_1)(\mathbf{s} - \mathbf{p}_2) \cdots (\mathbf{s} - \mathbf{p}_v)}$$

donde k es un número real. Las constantes complejas z_m ($m = 1, 2, \dots, \mu$), que son los *ceros* de $H(s)$, y p_n ($n = 1, 2, \dots, v$), que son los polos de $H(s)$, tienen una importancia particular cuando $H(s)$ se interpreta como la relación de la *respuesta* (en una parte del circuito en el dominio s) y la *excitación* (en otra parte del circuito). Entonces, cuando $s = z_m$, la respuesta será nula sin importar lo grande que sea la excitación; mientras que cuando $s = p_n$, la respuesta será infinita sin importar lo pequeña que sea la excitación.

EJEMPLO 8.8. En la Figura 8.13 se ha representado un circuito pasivo en el dominio s. Obtener la función de transferencia de la intensidad de corriente $I(s)$ debido a la tensión de alimentación $V(s)$.

$$H(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{Z(s)}$$

Como

$$Z(s) = 2,5 + \frac{\left(\frac{5s}{3}\right)\left(\frac{20}{s}\right)}{\frac{5s}{3} + \frac{20}{s}} = (2,5) \frac{s^2 + 8s + 12}{s^2 + 12}$$

se tiene

$$H(s) = (0,4) \frac{s^2 + 12}{(s + 2)(s + 6)}$$

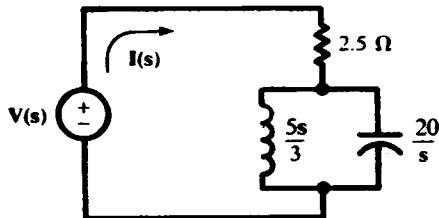


Figura 8.13.

El numerador de $H(s)$ en el Ejemplo 8.8 es cero cuando $s = \pm j\sqrt{12}$. Por consiguiente, una función de tensión a esta frecuencia produce una corriente nula. En el Capítulo 12, donde se explica la resonancia de circuitos serie y paralelo, se comprobará que el circuito paralelo LC es resonante cuando $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Con $L = \frac{5}{3} \text{ H}$ y $C = \frac{1}{20} \text{ F}$, $\omega = \sqrt{12} \text{ rad/s}$.

Los polos y ceros de una función de transferencia $H(s)$ se pueden representar en un plano complejo s . La Figura 8.14 muestra los polos y ceros del Ejemplo 8.8, con los ceros indicados de la forma \odot y los polos como \times . Los ceros se producen en el par conjugado $s = \pm j\sqrt{12}$, y los polos son $s = -2$ y $s = -6$.

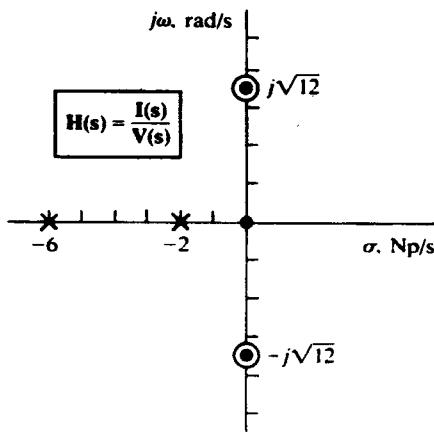


Figura 8.14.

8.8. LA RESPUESTA FORZADA

La función de transferencia se puede expresar en forma polar y la respuesta se puede obtener gráficamente. Antes de comenzar el desarrollo, es útil recordar que $H(s)$ consiste sencilla-

mente en una relación de la forma $V_0(s)/V_i(s)$, $I_2(s)/V_1(s)$ o $I_2(s)/I_1(s)$. Expresada en forma polinómica,

$$H(s) = k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_\mu)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_v)}$$

Sustituyendo $(s - z_m) = N_m/\alpha_m$ ($m = 1, 2, \dots, \mu$) y $(s - p_n) = D_n/\beta_n$ ($n = 1, 2, \dots, v$), se obtiene

$$H(s) = k \frac{(N_1/\alpha_1)(N_2/\alpha_2) \cdots (N_\mu/\alpha_\mu)}{(D_1/\beta_1)(D_2/\beta_2) \cdots (D_v/\beta_v)} = k \frac{N_1 N_2 \cdots N_\mu}{D_1 D_2 \cdots D_v} \frac{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_\mu) - (\beta_1 + \cdots + \beta_v)}{(s - \sigma)^{\mu-v}}$$

Se deduce que la respuesta del circuito a una excitación definida por $s = \sigma + j\omega$ se determina midiendo las longitudes de los vectores que van desde los ceros y los polos a s , así como los ángulos que forman esos vectores con el eje positivo σ en el gráfico de polos y ceros.

EJEMPLO 8.9. Comprobad la respuesta del circuito del Ejemplo 8.8 a una tensión de excitación exponencial $v = 1e^{st}$, para $s = 1$ Np/s.

Se localiza el punto $1 + j0$ en el gráfico de polos y ceros. Se dibujan los vectores desde los polos y ceros a ese punto y se determinan las longitudes y los ángulos (véase Figura 8.15). Entonces,

$$N_1 = N_2 = \sqrt{13}, D_1 = 3, D_2 = 7, \beta_1 = \beta_2 = 0 \text{ y } \alpha_1 = -\alpha_2 = \tan^{-1} \sqrt{12} = 73,9^\circ$$

Por tanto,

$$H(1) = (0,4) \frac{(\sqrt{13})(\sqrt{13})}{(3)(7)} \angle 0^\circ - 0^\circ = 0,248$$

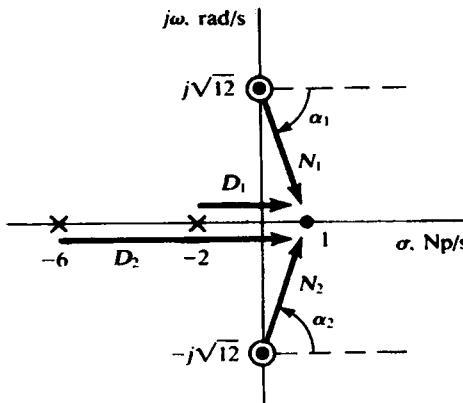


Figura 8.15.

El resultado implica que en el dominio del tiempo $i(t) = 0,248 v(t)$, es decir, tanto la tensión como la corriente tienden a infinito de acuerdo con la función e^{1t} . Para casos más prácticos, σ debe ser o negativo o cero.

Este método geométrico no requiere conocer la expresión analítica de $H(s)$ como una función racional. Es evidente, por tanto, que la expresión puede llegar a escribirse, a falta del

factor constante k , a partir de los polos y ceros de $H(s)$ conocidos en el diagrama de polos y ceros. Ver Problema 8.37.

8.9. LA RESPUESTA NATURAL

Este capítulo se ha centrado en la respuesta forzada del estado estacionario, en cuya determinación el método de la frecuencia compleja es más útil. Sin embargo, las frecuencias naturales, que caracterizan la respuesta transitoria, se pueden obtener fácilmente. Éstas son los polos de la función de transferencia del circuito.

EJEMPLO 8.10. Sea el mismo circuito del Ejemplo 8.8, representado en la Figura 8.16. Obtener la respuesta natural cuando una fuente $V(s)$ se instala entre xx' .

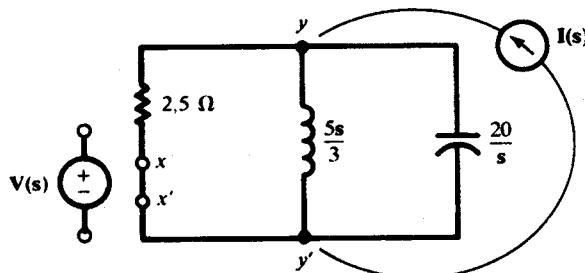


Figura 8.16.

La función de transferencia es la misma que en el Ejemplo 8.8:

$$H(s) = (0,4) \frac{s^2 + 12}{(s + 2)(s + 6)}$$

Las frecuencias naturales son entonces -2 Np/s y -6 Np/s . Por tanto, en el dominio del tiempo, la intensidad de corriente natural o transitoria es de la forma

$$i_n = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-6t}$$

donde las constantes A_1 y A_2 se determinan aplicando las condiciones iniciales a la respuesta completa $i = i_n + i_f$, donde i_f indica la respuesta forzada.

EJEMPLO 8.11. El circuito de la Figura 8.16 se alimenta con una intensidad de corriente $I(s)$ a través de los terminales yy' . La función de transferencia es $H(s) = V(s)/I(s) = Z(s)$. Las tres ramas están en paralelo, por tanto,

$$H(s) = Z(s) = \frac{1}{\frac{1}{2,5} + \frac{3}{5s} + \frac{s}{20}} = \frac{20s}{(s + 2)(s + 6)}$$

De nuevo los polos están en -2 Np/s y -6 Np/s , que es el mismo resultado obtenido en el Ejemplo 8.10.

8.10. MULTIPLICACIÓN DE IMPEDANCIAS Y DE FRECUENCIA

Multiplicación de impedancias

Sea un circuito con una función de impedancia de entrada $Z_{en}(s)$, y sea K_m un número real positivo. Si cada resistencia R del circuito se sustituye por otra $K_m R$, cada bobina L por otra $K_m L$ y cada condensador C por otro C/K_m , la nueva función de impedancia de entrada será $K_m Z_{en}(s)$. Se dice que la impedancia del circuito ha sido *multiplicada por el factor K_m* .

Multiplicación de frecuencia

Si en vez de los cambios anteriores se mantiene el valor de cada resistencia R , se sustituye cada bobina L por otra L/K_f ($K_f > 0$), y se reemplaza cada condensador C por otro C/K_f , entonces la nueva impedancia de entrada será $Z_{en}(s/K_f)$. Es decir, el nuevo circuito tiene la misma impedancia a la frecuencia compleja $K_f s$ que el antiguo a frecuencia s . Se dice que la frecuencia del circuito ha sido *multiplicada por un factor K_f* .

EJEMPLO 8.12. Obtener $Z(s)$ del circuito de la Figura 8.17 y observar el resultado de multiplicar sus impedancias.

$$Z(s) = K_m L s + \frac{(K_m R) \frac{K_m}{Cs}}{K_m R + \frac{K_m}{Cs}} = K_m \left[L s + \frac{R(1/Cs)}{R + (1/Cs)} \right]$$

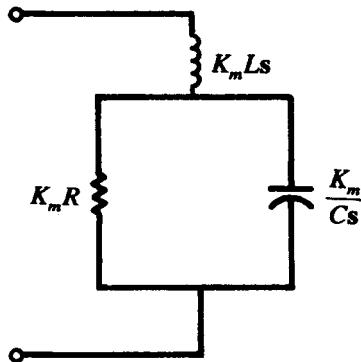


Figura 8.17.

Existen diversas aplicaciones prácticas que se desprenden de esta breve exposición sobre la multiplicación de impedancias. Por ejemplo, si la intensidad de corriente de entrada a un circuito fuera mayor de lo deseado, aplicar un factor de $K_m = 10$ reduciría dicha corriente a 1/10 de la inicial.

PROBLEMAS RESUELTOS

- 8.1.** Un circuito serie RLC , con $R = 3 \text{ k}\Omega$, $L = 10 \text{ H}$ y $C = 200 \mu\text{F}$, tiene una fuente de tensión constante, $V = 50 \text{ V}$, que se aplica en el instante $t = 0$. a) Obtener el transitorio de la intensidad de corriente, si el condensador no tiene carga inicial. b) Representar la intensidad de corriente y determinar el instante en el que es máxima.

$$a) \quad \alpha = \frac{R}{2L} = 150 \text{ s}^{-1} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 500 \text{ s}^{-2} \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = 148,3 \text{ s}^{-1}$$

El circuito es sobreamortiguado ($\alpha > \omega_0$).

$$s_1 = -\alpha + \beta = -1,7 \text{ s}^{-1} \quad s_2 = -\alpha - \beta = -298,3 \text{ s}^{-1}$$

$$e \quad i = A_1 e^{-1,7t} + A_2 e^{-298,3t}$$

Como el circuito contiene una bobina, $i(0^+) = i(0^-) = 0$; además, $Q(0^+) = Q(0^-) = 0$. Entonces, en el instante $t = 0^+$, según la ley de Kirchhoff para las tensiones

$$0 + 0 + L \left. \frac{di}{dt} \right|_{0+} = V \quad \text{o} \quad \left. \frac{di}{dt} \right|_{0+} = \frac{V}{L} = 5 \text{ A/s}$$

Aplicando estas condiciones iniciales a la expresión de i ,

$$\begin{aligned} 0 &= A_1(1) + A_2(1) \\ 5 &= -1,7A_1(1) - 298,3A_2(1) \end{aligned}$$

de donde $A_1 = -A_2 = 16,9 \text{ mA}$.

$$i = 16,9(e^{-1,7t} - e^{-298,3t}) \text{ (mA)}$$

- b) En el instante en el que la intensidad de corriente es máxima,

$$\frac{di}{dt} = 0 = -28,73 e^{-1,7t} + 5041,3 e^{-298,3t}$$

Resolviendo por logaritmos, $t = 17,4 \text{ ms}$. Véase la Figura 8.18.

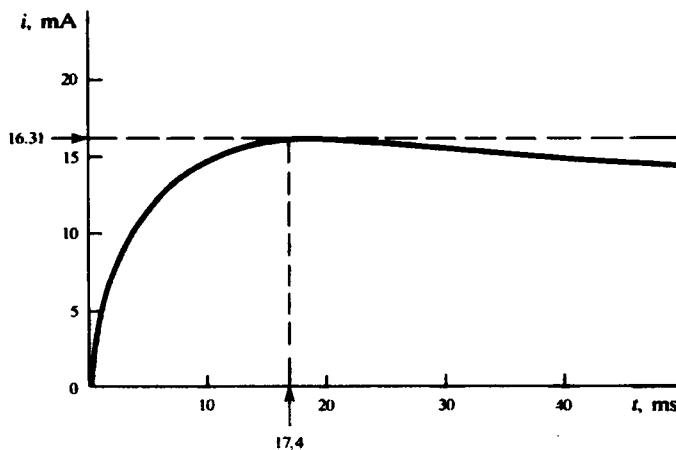


Figura 8.18.

- 8.2. Un circuito serie RLC , con $R = 50 \Omega$, $L = 0,1 \text{ H}$ y $C = 50 \mu\text{F}$, tiene una tensión constante $V = 100 \text{ V}$ que se aplica en el instante $t = 0$. Obtener el transitorio de la intensidad de corriente, suponiendo carga inicial nula en el condensador.

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 250 \text{ s}^{-1} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 2 \cdot 10^5 \text{ s}^{-2} \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = j370,8 \text{ rad/s}$$

Este es un caso oscilatorio ($\alpha < \omega_0$), y la expresión general de la intensidad de corriente es

$$i = e^{-250t}(A_1 \cos 370,8t + A_2 \operatorname{sen} 370,8t)$$

Las condiciones iniciales, obtenidas como en el Problema 8.1, son

$$i(0^+) = 0 \quad \left. \frac{di}{dt} \right|_{0^+} = 1000 \text{ A/s}$$

las cuales determinan los valores: $A_1 = 0$ y $A_2 = 2,7 \text{ A}$. Entonces,

$$i = e^{-250t}(2,7 \operatorname{sen} 370,8t) \quad (\text{A})$$

- 8.3. Resolver el Problema 8.2, si el condensador tuviera una carga inicial $Q_0 = 2500 \mu\text{C}$.

Todo es igual que en el Problema 8.2 excepto la segunda condición inicial, que en este caso es

$$0 + L \left. \frac{di}{dt} \right|_{0^+} + \frac{Q_0}{C} = V \quad \text{o} \quad \left. \frac{di}{dt} \right|_{0^+} = \frac{100 - (2500/50)}{0,1} = 500 \text{ A/s}$$

Los valores iniciales son la mitad de los del Problema 8.2 y, por tanto, por linealidad,

$$i = e^{-250t}(1,35 \operatorname{sen} 370,8t) \quad (\text{A})$$

- 8.4.** Un circuito paralelo RLC , con $R = 50 \Omega$, $C = 200 \mu\text{F}$ y $L = 55,6 \text{ mH}$, tiene una carga inicial acumulada en el condensador $Q_0 = 5 \text{ mC}$. Obtener la expresión de la tensión en el circuito.

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 50 \text{ s}^{-1} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 8,99 \cdot 10^4 \text{ s}^{-2}$$

Como $\omega_0^2 > \alpha^2$, la función de tensión es oscilatoria, con $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 296 \text{ rad/s}$. La expresión general de la tensión es

$$v = e^{-50t}(A_1 \cos 296t + A_2 \operatorname{sen} 296t)$$

Con $Q_0 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ C}$, $V_0 = 25 \text{ V}$. En el instante $t = 0$, $v = 25 \text{ V}$. Entonces, $A_1 = 25$.

$$\frac{dv}{dt} = -50e^{-50t}(296)(-A_1 \operatorname{sen} 296t + A_2 \cos 296t)$$

Para $t = 0$, $dv/dt = -V_0/RC = \omega_d A_2 - \alpha A_1$, de donde $A_2 = -4,22$. Por tanto,

$$v = e^{-50t}(25 \cos 296t - 4,22 \operatorname{sen} 296t) \quad (\text{V})$$

- 8.5.** En la Figura 8.19, el interruptor se cierra en el instante $t = 0$. Obtener la intensidad de corriente i y la tensión en el condensador v_C , para $t > 0$.

Respecto a la respuesta natural del circuito, las dos resistencias están en paralelo; por tanto,

$$\tau = R_{\text{eq}} C = (5 \Omega)(2 \mu\text{F}) = 10 \mu\text{s}$$

Por continuidad, $v_C(0^+) = v_C(0^-)$. Por tanto, cuando $t \rightarrow \infty$, el condensador se convierte en un circuito abierto, quedando 20Ω en serie con la fuente de 50 V . Esto es,

$$i(\infty) = \frac{50}{20} = 2,5 \text{ A} \quad v_C(\infty) = (2,5 \text{ A})(10 \Omega) = 25 \text{ V}$$

Conociendo las condiciones finales para v_C , se puede escribir:

$$v_C = [v_C(0^+) - v_C(\infty)]e^{-t/\tau} + v_C(\infty) = 25(1 - e^{-t/10}) \quad (\text{V})$$

donde t está medido en μs .

La intensidad de corriente en el condensador está dada por

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} = 5e^{-t/10} \quad (\text{A})$$

y la intensidad de corriente en la resistencia de 10Ω en paralelo es

$$i_{10\Omega} = \frac{v_C}{10 \Omega} = 2,5(1 - e^{-t/10}) \quad (\text{A})$$

Por tanto,

$$i = i_C + i_{10\Omega} = 2,5(1 + e^{-t/10}) \quad (\text{A})$$

El problema se podría haber resuelto también asignando corrientes de malla y resolviendo un sistema de ecuaciones diferenciales.

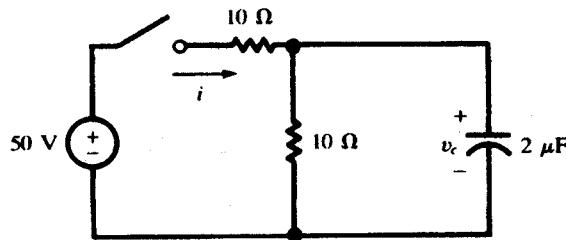


Figura 8.19.

- 8.6. Escribir el módulo y el ángulo de fase (según la función coseno) correspondientes a las funciones del tiempo indicadas en la primera columna de la Tabla 8.2, así como la frecuencia compleja s .

Véanse las columnas 2 y 3 de la tabla.

Tabla 8.2.

<i>Función del tiempo</i>	<i>A/φ°</i>	<i>s</i>
$i(t) = 86,6 \text{ A}$	$86,6/0^\circ \text{ A}$	0
$i(t) = 15e^{-2 \cdot 10^3 t} \text{ (A)}$	$15/0^\circ \text{ A}$	$-2 \cdot 10^3 \text{ Np/s}$
$v(t) = 25 \cos(250t - 45^\circ) \text{ (V)}$	$25/-45^\circ \text{ V}$	$\pm j250 \text{ rad/s}$
$v(t) = 0,50 \operatorname{sen}(250t + 30^\circ) \text{ (V)}$	$0,50/-60^\circ \text{ V}$	$\pm j250 \text{ rad/s}$
$i(t) = 5e^{-100t} \operatorname{sen}(50t + 90^\circ) \text{ (A)}$	$5/0^\circ \text{ A}$	$-100 \pm j50 \text{ s}^{-1}$
$i(t) = 3 \cos 50t + 4 \operatorname{sen} 50t \text{ (A)}$	$5/-53,13^\circ \text{ A}$	$\pm j50 \text{ rad/s}$

- 8.7. Escribir la función del tiempo correspondiente a cada módulo y ángulo de fase de la primera columna de la Tabla 8.3, con la frecuencia compleja s indicada en la segunda columna.

Véase la columna 3 de la tabla.

Tabla 8.3.

<i>A/φ°</i>	<i>s</i>	<i>Función del tiempo</i>
$10/0^\circ$	$+j120\pi$	$10 \cos 120\pi t$
$2/45^\circ$	$-j120\pi$	$2 \cos(120\pi t + 45^\circ)$
$5/-90^\circ$	$-2 \pm j50$	$5e^{-2t} \cos(50t - 90^\circ)$
$15/0^\circ$	$\approx 5000 \pm j1000$	$15e^{-5000t} \cos 1000t$
$100/30^\circ$	0	86,6

- 8.8. Una tensión de módulo y ángulo de fase de $10\angle 45^\circ$ V tiene una frecuencia compleja asociada $s = -50 + j100 \text{ s}^{-1}$. Determinar el valor de la tensión en el instante $t = 10 \text{ ms}$.

$$v(t) = 10\sqrt{2}e^{-50t} \cos(100t + 45^\circ) \text{ (V)}$$

Para $t = 10^{-2} \text{ s}$, $100t = 1 \text{ rad} = 57,3^\circ$, y por tanto,

$$v = 10\sqrt{2}e^{-0,5} \cos 102,3^\circ = -1,83 \text{ V}$$

- 8.9. Un circuito pasivo contiene diversas resistencias, una bobina de 70 mH y un condensador de $25 \mu\text{F}$. Obtener las respectivas impedancias en el dominio s para una tensión de alimentación: a) $v = 100 \sin(300t + 45^\circ)$ (V), b) $v = 100e^{-100t} \cos 300t$ (V).

- a) La resistencia es independiente de la frecuencia. Para $s = j300 \text{ rad/s}$, la impedancia de la bobina es

$$sL = (j300)(70 \cdot 10^{-3}) = j21$$

y la del condensador es

$$\frac{1}{sC} = -j133,3$$

- b) Para $s = -100 + j300 \text{ s}^{-1}$,

$$sL = (-100 + j300)(70 \cdot 10^{-3}) = -7 + j21$$

$$\frac{1}{sC} = \frac{1}{(-100 + j300)(15 \cdot 10^{-6})} = 40 - j120$$

- 8.10. Obtener v en el instante $t = 0,1 \text{ s}$, en el circuito de la Figura 8.20, con una fuente de intensidad: a) $i = 10 \cos 2t$ (A), b) $i = 10e^{-t} \cos 2t$ (A).

$$Z_{en}(s) = 2 + \frac{2(s+2)}{s+4} = (4) \frac{s+3}{s+4}$$

- a) Para $s = j2 \text{ rad/s}$, $Z_{en}(j2) = 3,22\angle 7,13^\circ \Omega$. Entonces,

$$V = IZ_{en} = (10\angle 0^\circ)(3,22\angle 7,13^\circ) = 32,2\angle 7,13^\circ \text{ V} \quad \text{o} \quad v = 32,2 \cos(2t + 7,13^\circ) \text{ (V)}$$

y $v(0,1) = 32,2 \cos(18,59^\circ) = 30,5 \text{ V}$.

- b) Para $s = -1 + j2 \text{ s}^{-1}$, $Z_{en}(-1 + j2) = 3,14\angle 11,31^\circ \Omega$. Entonces,

$$V = IZ_{en} = 31,4\angle 11,31^\circ \text{ V} \quad \text{o} \quad v = 31,4e^{-t} \cos(2t + 11,31^\circ) \text{ (V)}$$

y $v(0,1) = 31,4e^{-0,1} \cos 22,77^\circ = 26,2 \text{ V}$.

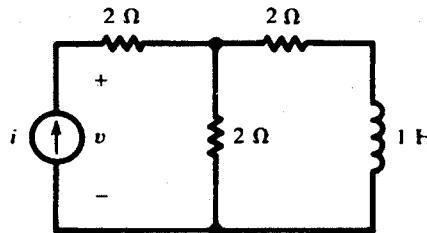


Figura 8.20.

- 8.11. Obtener la impedancia $Z_{en}(s)$ del circuito de la Figura 8.21 para: a) $s = 0$, b) $s = j4$ rad/s, c) $|s| = \infty$.

$$Z_{en}(s) = 2 + \frac{2(s+1)\left(\frac{4}{s}\right)}{4} = (2) \frac{s^2 + 3s + 4}{s^2 + s + 2}$$

a) $Z_{en}(0) = 4 \Omega$ es la impedancia ofrecida a una fuente constante (cc) en estado estacionario.

$$b) Z_{en}(j4) = 2 \frac{(j4)^2 + 3(j4) + 4}{(j4)^2 + j4 + 2} = 2,33/-29,05^\circ \Omega$$

Ésta es la impedancia ofrecida a una fuente sen $4t$ o cos $4t$.

c) $Z_{en}(\infty) = 2 \Omega$. A muy altas frecuencias la capacitancia actúa como un cortocircuito.

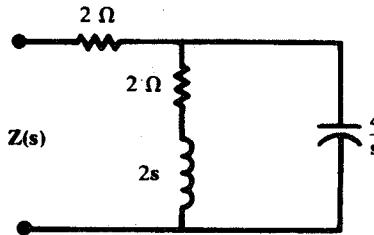


Figura 8.21.

- 8.12. Expresar la impedancia $Z(s)$ de la combinación paralelo de $L = 4 \text{ mH}$ y $C = 1 \text{ F}$. ¿A qué frecuencias s esta impedancia es cero o infinito?

$$Z(s) = \frac{(4s)(1/s)}{4s + (1/s)} = \frac{s}{s^2 + 0,25}$$

Se observa que $Z(0) = 0$ y $Z(\infty) = 0$, lo que coincide con lo que se sabe previamente sobre los circuitos paralelos LC a frecuencias cero (cc) e infinito. Para $|Z(s)| = \infty$,

$$s^2 + 0,25 = 0 \quad \text{o} \quad s = \pm j0,5 \text{ rad/s}$$

Una fuente de tensión sinusoidal, de pulsación 0,5 rad/s, produce resonancia en paralelo y una impedancia infinita.

- 8.13.** El circuito representado en la Figura 8.22 tiene una fuente de tensión conectada a los terminales ab . La respuesta a la excitación es la corriente de entrada. Obtener la función de transferencia del circuito $H(s)$.

$$H(s) = \frac{\text{respuesta}}{\text{excitación}} = \frac{I(s)}{V(s)} \equiv \frac{1}{Z(s)}$$

$$Z(s) = 2 + \frac{(2 + 1/s)(1)}{2 + 1/s + 1} = \frac{8s + 3}{3s + 1} \quad \text{de donde} \quad H(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{3s + 1}{8s + 3}$$

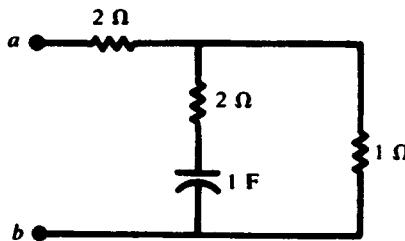


Figura 8.22.

- 8.14.** Obtener $H(s)$ del circuito de la Figura 8.23, en el que la excitación es la intensidad de corriente de alimentación $I(s)$ y la respuesta es la tensión en los terminales de entrada.

Aplicando la ley de Kirchhoff para las intensidades de corriente en el nudo a ,

$$I(s) + 2I(s) = \frac{s}{5} V'(s) \quad \text{o} \quad V'(s) = \frac{15}{s} I(s)$$

En los terminales de entrada, la ley de Kirchhoff para las tensiones da

$$V(s) = 2sI(s) + V'(s) = \left(2s + \frac{15}{s}\right)I(s)$$

Entonces,

$$H(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{2s^2 + 15}{s}$$

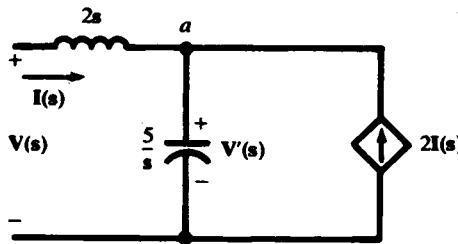


Figura 8.23.

- 8.15. Determinar los valores de R_1 , R_2 y C del circuito de cuatro terminales de la Figura 8.24, con los que la función de transferencia de la tensión es

$$H_v(s) \equiv \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{0,2}{s^2 + 3s + 2}$$

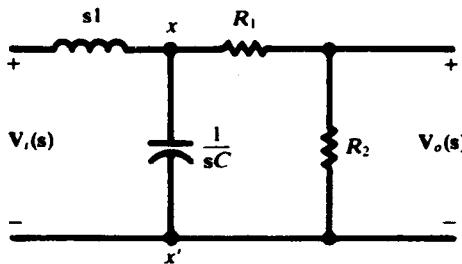


Figura 8.24.

La impedancia vista desde xx' es

$$Z' = \frac{(1/sC)(R_1 + R_2)}{(1/sC) + R_1 + R_2} = \frac{R_1 + R_2}{1 + (R_1 + R_2)Cs}$$

Entonces, multiplicando y dividiendo por $V_{xx'}$,

$$\frac{V_o}{V_i} = \left(\frac{V_o}{V_{xx'}} \right) \left(\frac{V_{xx'}}{V_i} \right) = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \left(\frac{Z'}{Z' + s1} \right) = \frac{R_2/(R_1 + R_2)C}{s^2 + \frac{1}{(R_1 + R_2)C}s + \frac{1}{C}}$$

Igualando los coeficientes de esta expresión a los dados en la expresión de $H_v(s)$, se obtiene:

$$C = \frac{1}{2} \text{ F} \quad R_1 = \frac{3}{5} \Omega \quad R_2 = \frac{1}{15} \Omega$$

- 8.16. Representar el gráfico de polos y ceros de la función de transferencia de la admitancia

$$H(s) = \frac{I_o(s)}{V_i(s)} = \frac{s^2 + 2s + 17}{s^2 + 3s + 2}$$

En forma factorial,

$$H(s) = \frac{(s + 1 + j4)(s + 1 - j4)}{(s + 1)(s + 2)}$$

Existen polos en -1 y en -2 ; y ceros en $-1 \pm j4$. Ver Figura 8.25.

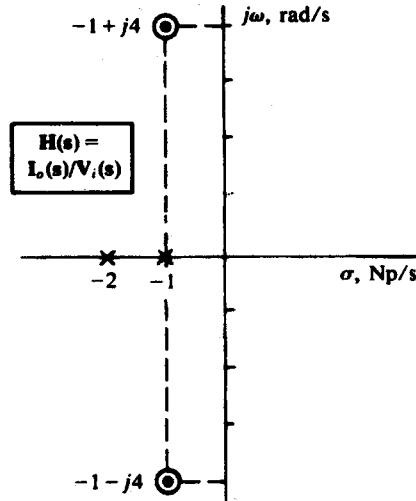


Figura 8.25.

- 8.17. Obtener las frecuencias de la respuesta natural del circuito de la Figura 8.26 al alimentarlo con una fuente de intensidad adecuadamente localizada.

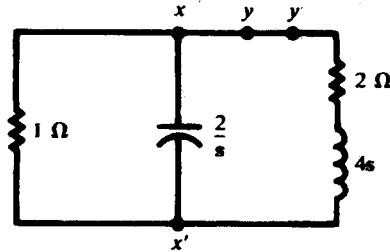


Figura 8.26.

La respuesta a una fuente de intensidad conectada entre xx' es una tensión entre estos mismos terminales; por tanto, la función de transferencia es $H(s) = V(s)/I(s) = Z(s)$. Entonces,

$$\frac{1}{Z(s)} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2/s} + \frac{1}{2 + 4s} = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{s^2 + 2,5s + 1,5}{s + 0,5}$$

Por tanto,

$$Z(s) = (2) \frac{s + 0,5}{s^2 + 2,5s + 1,5} = (2) \frac{s + 0,5}{(s + 1)(s + 1,5)}$$

Las frecuencias naturales son los polos de la función de transferencia, $s = -1$ Np/s y $s = -1,5$ Np/s.

- 8.18.** Repetir el Problema 8.17, alimentando ahora el circuito con una fuente de tensión situada adecuadamente.

El tramo conductor entre yy' en la Figura 8.26 se puede abrir para insertar una fuente de tensión. Entonces, $H(s) = I(s)/V(s) = 1/Z(s)$.

La impedancia del circuito desde los terminales yy' es

$$Z(s) = 2 + 4s + \frac{1(2/s)}{1 + 2/s} = (4) \frac{s^2 + 2,5s + 1,5}{s + 2}$$

Entonces,

$$H(s) = \frac{1}{Z(s)} = \left(\frac{1}{4}\right) \frac{s + 2}{s^2 + 2,5s + 1,5}$$

El denominador es el mismo que el del Problema 8.17, con las mismas raíces y las mismas frecuencias naturales correspondientes.

- 8.19.** Una fuente sinusoidal de pulsación 5000 rad/s, $V = 100/0^\circ$ V en forma fasorial, se conecta al circuito de la Figura 8.27. Obtener el factor de multiplicación de impedancias K_m y los valores de los elementos que limitarán la corriente a 89 mA (valor máximo).

Para $\omega = 5000$ rad/s,

$$Z_{en} = j\omega L_1 + \frac{(j\omega L_2)\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)}{j\omega L_2 + R + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$= j0,25 + \frac{(j0,5)(0,4 - j0,8)}{0,4 - j0,3} = 1,124/69,15^\circ \Omega$$

Para $|V| = 100$ V, $|I| = 100/1,124 = 89$ A. Por tanto, para limitar la corriente a $89 \cdot 10^{-3}$ A, la impedancia debe multiplicarse por el factor $K_m = 10^3$.

Los valores multiplicados de los elementos son: $R = 10^3(0,4\Omega) = 400\Omega$, $L_1 = 10^3(50\mu H) = 50$ mH, $L_2 = 10^3(100\mu H) = 100$ mH y $C = (250\mu F)/10^3 = 0,25\mu F$.

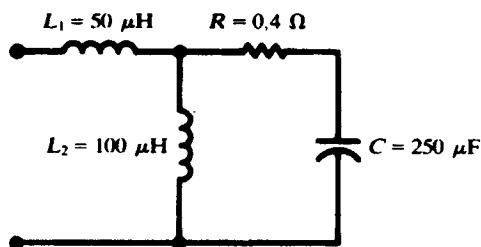


Figura 8.27.

- 8.20.** Obtener $H(s) = V_o/V_i$, del circuito de la Figura 8.28, para $s = j4 \cdot 10^6$ rad/s. Multiplicar el circuito por $K_m = 10^{-3}$ y comparar $H(s)$ de los dos circuitos.

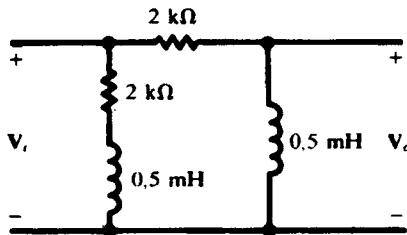


Figura 8.28.

Para $\omega = 4 \cdot 10^6$ rad/s, $X_L = (4 \cdot 10^6)(0.5 \cdot 10^{-3}) = 2000 \Omega$. Entonces,

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{j2000}{2000 + j2000} = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ$$

Después de la multiplicación de impedancias, la inductancia reactiva es $10^{-3}(2000 \Omega) = 2 \Omega$ y la resistencia es $10^{-3}(2 \text{ k}\Omega) = 2 \Omega$. Por tanto,

$$H(s) = \frac{j2}{2 + j2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ$$

La función de transferencia de la tensión no tiene cambios al multiplicar sus impedancias. En general, cualquier función de transferencia adimensional queda inalterada tras la multiplicación de sus impedancias; una función de transferencia con unidades de Ω queda multiplicada por K_m ; y una función con unidades de $S = 1/\Omega$ queda multiplicada por $1/K_m$.

- 8.21.** Un circuito serie contiene tres elementos $R = 5 \Omega$, $L = 4 \text{ H}$ y $C = 3,91 \text{ mF}$. Obtener la frecuencia de resonancia serie, en rad/s, y después multiplicar su frecuencia por $K_f = 1000$. Representar $|Z(\omega)|$ para ambos circuitos.

Antes de la multiplicación,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 8 \text{ rad/s} \quad \text{y} \quad Z(\omega_0) = R = 5 \Omega$$

Después de la multiplicación,

$$R = 5 \Omega \quad L = \frac{4 \text{ H}}{1000} = 4 \text{ mH} \quad C = \frac{3,91 \text{ mF}}{1000} = 3,91 \mu\text{F}$$

$$\omega_0 = 1000(8 \text{ rad/s}) = 8000 \text{ rad/s} \quad Z(\omega_0) = R = 5 \Omega$$

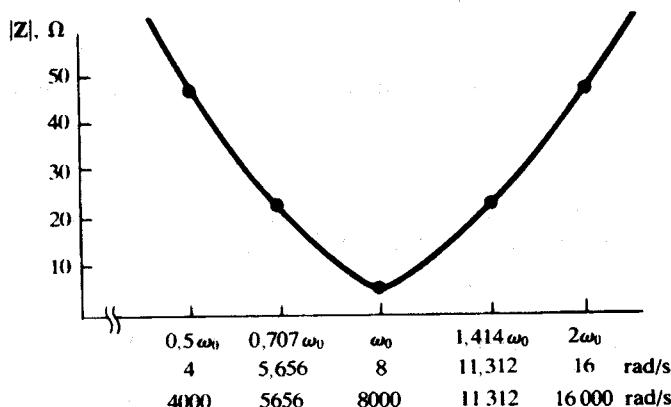


Figura 8.29.

En definitiva, al multiplicar la frecuencia por el factor 1000 se obtiene una impedancia de 5Ω a 8000 rad/s en vez de a 8 rad/s. Cualquier otro valor de la impedancia se mantiene también, tras multiplicar, a una frecuencia 1000 veces mayor que la que se tenía antes de la multiplicación. Por consiguiente, los dos gráficos de $|Z(\omega)|$ difieren solamente en la escala horizontal (ver Figura 8.29). (Se podría afirmar lo mismo para los dos gráficos de $\theta_{Z(\omega)}$.)

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

- 8.22. En el circuito RLC de la Figura 8.30 el condensador está inicialmente cargado con $V_0 = 200 \text{ V}$. Obtener el transitorio de la intensidad corriente tras el cierre del interruptor en el instante $t = 0$.
Solución: $-2e^{-1000t} \sin 1000t$ (A).

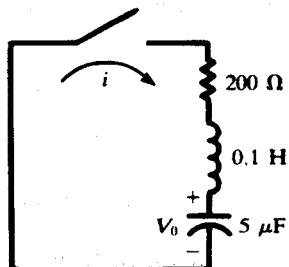


Figura 8.30.

- 8.23. Un circuito serie RLC , con $R = 200 \Omega$, $L = 0,1 \text{ H}$ y $C = 100 \mu\text{F}$, tiene una fuente de tensión de 200 V que se conecta en el instante $t = 0$. Determinar el transitorio de la intensidad de corriente, suponiendo carga inicial nula en el condensador.

Solución: $1,055(e^{-52t} - e^{-1948t})$ (A).

- 8.24. ¿Qué valor de capacidad debe tener el condensador, en vez de $100 \mu\text{F}$, para que el Problema 8.23 sea un caso críticamente amortiguado?

Solución: $10 \mu\text{F}$.

- 8.25. Calcular la frecuencia de resonancia natural, $|\beta|$, de un circuito serie RLC con $R = 200 \Omega$, $L = 0,1 \text{ H}$ y $C = 5 \mu\text{F}$.

Solución: 1000 rad/s.

- 8.26. Se aplica una tensión de 10 V en el instante $t = 0$ a un circuito serie RLC con $R = 5 \Omega$, $L = 0,1 \text{ H}$ y $C = 500 \mu\text{F}$. Determinar la caída de tensión transitoria en la resistencia.

Solución: $3,6e^{-25t} \sin 139t$ (V).

- 8.27. En el circuito de dos mallas de la Figura 8.31, el interruptor se cierra en el instante $t = 0$. Determinar i_1 e i_2 , para $t > 0$.

Solución: $i_1 = 0,101e^{-100t} + 9,899e^{-9950t}$ (A); $i_2 = -5,05e^{-100t} + 5 + 0,05e^{-9950t}$ (A).

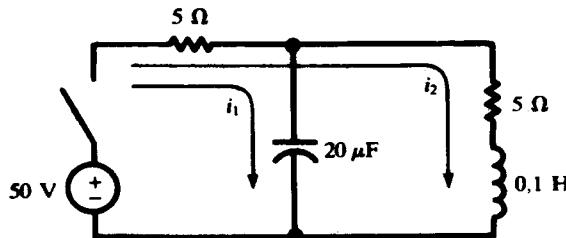


Figura 8.31.

- 8.28. La forma polar de una tensión en el dominio s es $100/30^\circ$ V. Expresarla en función del tiempo para: a) $s = -2 \text{ Np/s}$, b) $s = -1 + j5 \text{ s}^{-1}$.

Solución: a) $86,6e^{-2t}$ (V); b) $100e^{-t} \cos(5t + 30^\circ)$ (V).

- 8.29. Obtener las frecuencias complejas asociadas con la corriente $i(t) = 5 + 10e^{-3t} \cos(50t + 90^\circ)$ (A).

Solución: $0, -3 \pm j50 \text{ s}^{-1}$.

- 8.30. El fasor de intensidad $25/40^\circ$ A tiene una frecuencia compleja $s = -2 + j3 \text{ s}^{-1}$. ¿Cuál es el valor de $i(t)$ en el instante $t = 0,2 \text{ s}$?

Solución: 4,51 A.

- 8.31. Calcular la impedancia $Z(s)$ del circuito representado en la Figura 8.32 para: a) $s = 0$, b) $s = j1 \text{ rad/s}$, c) $s = j2 \text{ rad/s}$, d) $|s| = \infty$.

Solución: a) 1Ω ; b) $1,58/18,43^\circ \Omega$; c) $1,84/12,53^\circ \Omega$; d) 2Ω .

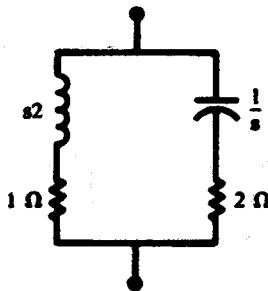


Figura 8.32.

- 8.32. La fuente de tensión del circuito en el dominio s representado en la Figura 8.33 tiene la expresión en el dominio del tiempo

$$v_i(t) = 10e^{-t} \cos 2t \text{ (V)}$$

Obtener $i_0(t)$.

Solución: $7,07e^{-t} \cos(2t + 98,13^\circ)$ (A).

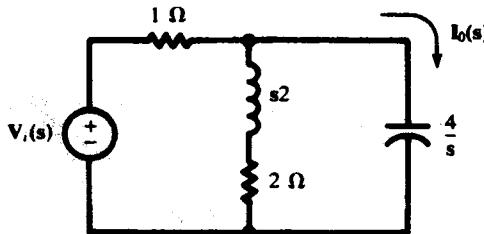


Figura 8.33.

- 8.33. Un circuito serie de R , L y C tiene, en el dominio del tiempo, una fuente de tensión v_i y unas caídas de tensión en los elementos v_R , v_L y v_C . Obtener las funciones de transferencia de tensión:
a) $V_R(s)/V_i(s)$, b) $V_C(s)/V_i(s)$.

Solución: a) $\frac{Rs/L}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$; b) $\frac{1/LC}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$

- 8.34. Obtener la función de transferencia $H(s)$ del circuito de la Figura 8.34. La respuesta es la tensión $V_i(s)$.

Solución:
$$\frac{(s + 7 - j2,65)(s + 7 + j2,65)}{(s + 2)(s + 4)}$$

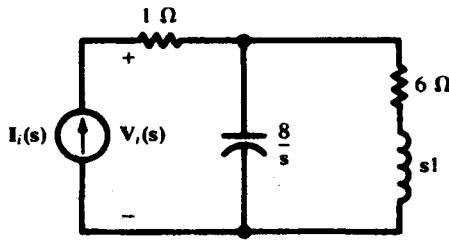


Figura 8.34.

- 8.35. Representar el diagrama de la función de transferencia del Problema 8.34 en el plano s. Evaluar $H(j3)$ a partir del diagrama.

Solución: Ver Figura 8.35.

$$\frac{(7,02)(9)/2,86^\circ + 38,91^\circ}{(3,61)(5)/56,31^\circ + 36,87^\circ} = 3,50/-51,41^\circ \Omega$$

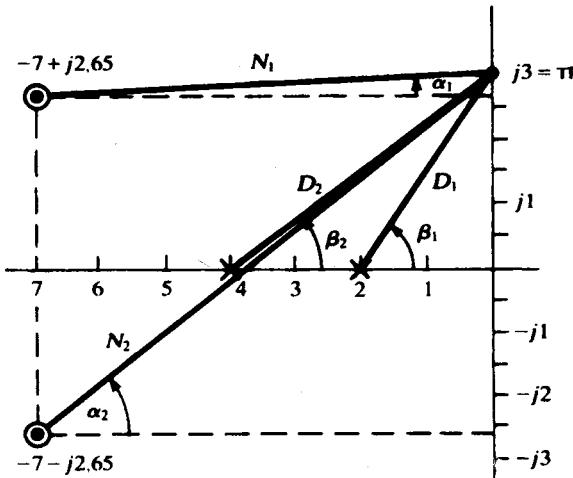


Figura 8.35.

- 8.36. Obtener $H(s) = V_i(s)/I_i(s)$ del circuito representado en la Figura 8.36 y representar su diagrama de polos y ceros.

$$\text{Solución: } H(s) = \frac{s(s^2 + 1,5)}{s^2 + 1} \quad \text{Ver Figura 8.37.}$$

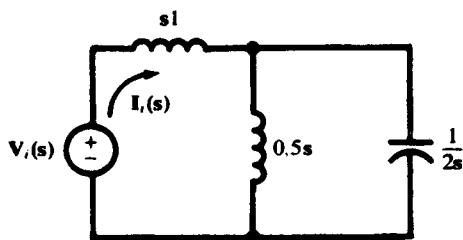


Figura 8.36.

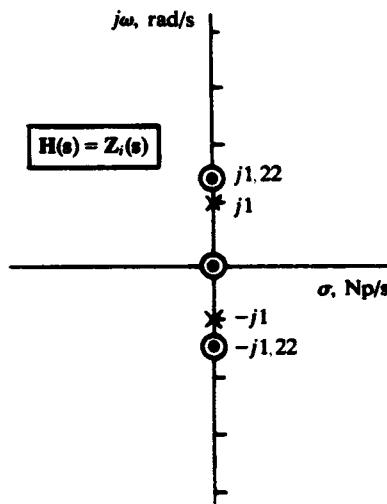


Figura 8.37.

- 8.37. Escribir la función de transferencia $H(s)$ cuyo diagrama de polos y ceros es el de la Figura 8.38.

Solución: $H(s) = k \frac{s^2 + 50s + 400}{s^2 + 40s + 2000}$

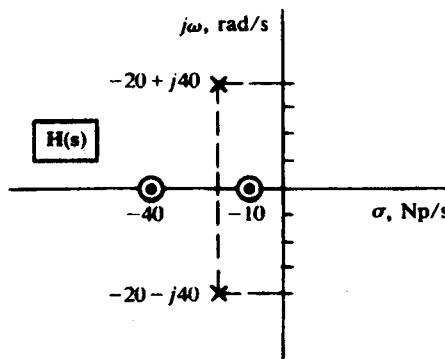


Figura 8.38.

- 8.38. El diagrama de polos y ceros de la Figura 8.39 muestra un polo para $s = 0$ y ceros para $s = -50 \pm j50$. Usar el método geométrico para evaluar la función de transferencia en el punto $j100$.

Solución: $H(j100) = 223,6/26,57^\circ$

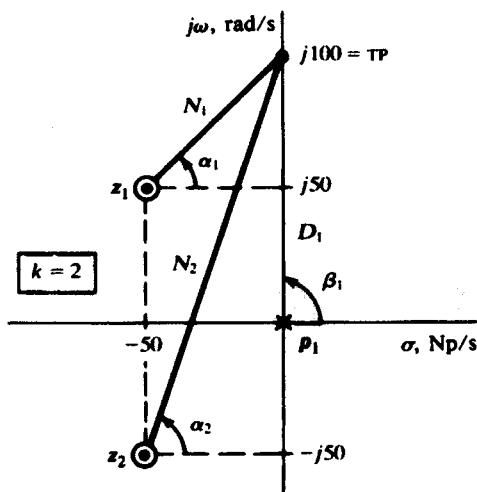


Figura 8.39.

- 8.39. Un circuito con dos ramas en paralelo tiene una resistencia de 20Ω en una rama y la combinación en serie de $R = 10 \Omega$ y $L = 0,1 \text{ mH}$ en la otra. Primero, aplicar una excitación, $I_i(s)$, y obtener la frecuencia natural a partir del denominador de la función de transferencia del circuito. Intentar diferentes localizaciones para instalar la fuente. Segundo, insertar una fuente de tensión, $V_i(s)$, y obtener la frecuencia natural.

Solución: -300 Np/s en todos los casos.

- 8.40. El interruptor del circuito de la Figura 8.40 se cierra en el instante $t = 0$. Para $t = 0^+$, $i = 0$ y

$$\frac{di}{dt} = 25 \text{ A/s}$$

Obtener las frecuencias naturales y la corriente completa, $i = i_n + i_f$.

Solución: $-8,5 \text{ Np/s}$, $-23,5 \text{ Np/s}$; $i = -2,25e^{-8,5t} - 0,25e^{-23,5t} + 2,5 \text{ (A)}$.

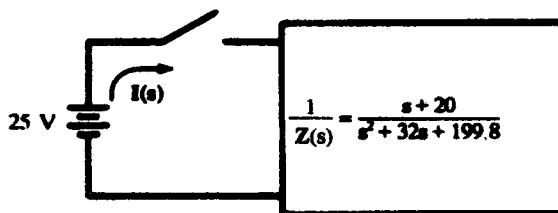


Figura 8.40.

- 8.41. Un circuito serie RLC contiene una $R = 1 \Omega$, una $L = 2 \text{ H}$ y una $C = 0,25 \text{ F}$. Aplicar simultáneamente una multiplicación de impedancias y otra de frecuencia, con $K_m = 2000$ y $K_f = 10^4$. ¿Cuáles son los valores de los elementos multiplicados?

Solución: 2000Ω , $0,4 \text{ H}$, $12,5 \mu\text{F}$.

- 8.42. Al suministrar una tensión $V_1 = 25/30^\circ$ V con una determinada pulsación ω_1 a un circuito pasivo se produce una intensidad de corriente $I_1 = 3,85/-30^\circ$ A. Las impedancias de los elementos del circuito se multiplican por $K_m = 10$. Obtener la intensidad de corriente que suministraría una segunda fuente de tensión, $V_2 = 10/45^\circ$ V, que sustituyera a la primera, si la pulsación de la segunda fuente fuera $\omega_2 = 10^3 \omega_1$.

Solución: $0,154/15^\circ$ A.

CAPÍTULO 9

Análisis de circuitos sinusoidales en estado estacionario

9.1. INTRODUCCIÓN

Este capítulo está dedicado a la respuesta estacionaria de circuitos alimentados por fuentes sinusoidales. La respuesta será también sinusoidal. Para un circuito lineal, la hipótesis de fuente sinusoidal no representa realmente una limitación, ya que una fuente cualquiera que pueda ser descrita por una función periódica puede ser reemplazada por una combinación equivalente de sinusoidales (series de Fourier). Este tema será tratado en el Capítulo 17.

9.2. RESPUESTA DE LOS ELEMENTOS

Las relaciones tensión-intensidad de corriente para los elementos R , L y C se examinaron en el Capítulo 2 y están resumidas en la Tabla 2.1. En este capítulo, las funciones de v e i serán senos o cosenos con el argumento ωt . ω es la pulsación y tiene unidades de rad/s. Además, $\omega = 2\pi f$, donde f es la frecuencia cuyas unidades son ciclo/s o más comúnmente hercios [Hz].

Sea una bobina L recorrida por una corriente $i = I \cos(\omega t + 45^\circ)$ (A) [ver Figura 9.1(a)]. La tensión entre sus extremos es

$$v_L = L \frac{di}{dt} = \omega LI [-\operatorname{sen}(\omega t + 45^\circ)] = \omega LI \cos(\omega t + 135^\circ) \text{ (V)}$$

Comparando v_L e i se observa que la intensidad de corriente está retrasada 90° o $\pi/2$ rad respecto a la tensión. Ambas funciones se han representado en la Figura 9.1(b). Obsérvese que la función de la corriente i está a la derecha de v_L y como la escala del eje horizontal es ωt , los sucesos desplazados a la derecha suceden más tarde en el tiempo. Esto ilustra que i está *retrasada* respecto a v . La escala horizontal debería estar en radianes, pero se han utilizado los grados (-135° , 180° , etc). Éste es un caso de mezcla de unidades al igual que $\omega t + 45^\circ$. Esto no es matemáticamente correcto, pero se acepta en la práctica para el análisis de circuitos. En el eje vertical se indican dos cantidades diferentes; esto es, v_L e i , por lo que debe incluir dos escalas en vez de una.

Al examinar este gráfico se puede destacar que una sinusoide está completamente definida cuando se conocen su máximo (V_L o I), su pulsación o frecuencia (ω o f) y su fase (45° o 135°).

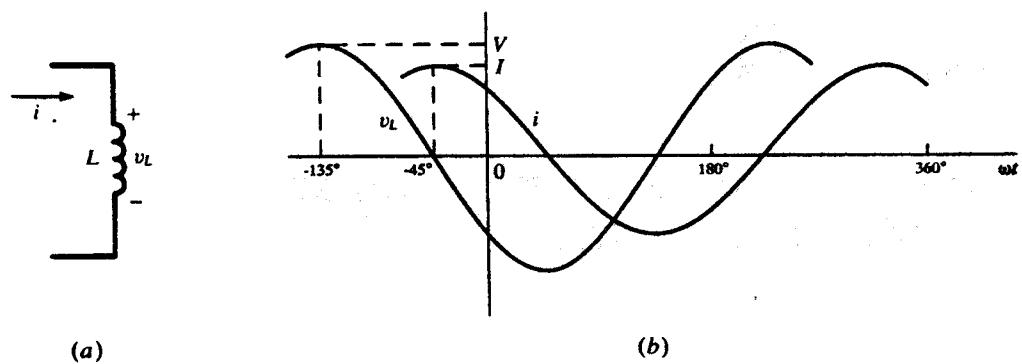


Figura 9.1.

En la Tabla 9.1 se indican las respuestas de los tres elementos básicos de un circuito cuando son recorridos por una intensidad de corriente $i = I \cos \omega t$ o cuando se les somete a una tensión $v = V \cos \omega t$. Si se representan las respuestas se verá que para una resistencia R , v_R e i están en fase. Para una bobina L , i retrasa 90° o $\pi/2$ rad respecto a v_L . Y para un condensador C , i adelanta 90° o $\pi/2$ rad respecto a i .

Tabla 9.1.

	$i = I \cos \omega t$	$v = V \cos \omega t$
	$v_R = RI \cos \omega t$	$i_R = \frac{V}{R} \cos \omega t$
	$v_L = \omega LI \cos (\omega t + 90^\circ)$	$i_L = \frac{V}{\omega L} \cos (\omega t - 90^\circ)$
	$v_C = \frac{I}{\omega C} \cos (\omega t - 90^\circ)$	$i_C = \omega CV \cos (\omega t + 90^\circ)$

EJEMPLO 9.1. Por el circuito serie RL representado en la Figura 9.2 circula una corriente $i = I \sin \omega t$. Determinar la diferencia de potencial total que se produce entre los dos elementos del circuito y representar v e i .

$$v_R = RI \operatorname{sen} \omega t \quad v_L = L \frac{di}{dt} = \omega LI \operatorname{sen} (\omega t + 90^\circ)$$

$$v = v_R + v_L = RI \operatorname{sen} \omega t + \omega LI \operatorname{sen} (\omega t + 90^\circ)$$

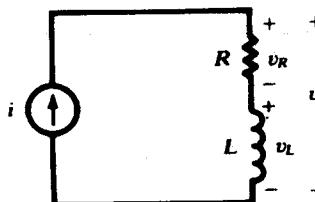


Figura 9.2.

Como la corriente es una función seno y

$$v = V \operatorname{sen} (\omega t + \theta) = V \operatorname{sen} \omega t \cos \theta + V \cos \omega t \operatorname{sen} \theta \quad (1)$$

de lo anterior se obtiene

$$v = RI \operatorname{sen} \omega t + \omega LI \operatorname{sen} \omega t \cos 90^\circ + \omega LI \cos \omega t \operatorname{sen} 90^\circ \quad (2)$$

Igualando los coeficientes de los términos semejantes de (1) y (2),

$$V \operatorname{sen} \theta = \omega LI \quad \text{y} \quad V \cos \theta = RI$$

Entonces $v = I \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \operatorname{sen} [\omega t + \operatorname{arc tg} (\omega L/R)]$

y $V = I \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad \text{y} \quad \theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega L}{R}$

En la Figura 9.3 se han representado las funciones v e i . El ángulo de fase θ , ángulo que i retraza respecto a v , está dentro del rango $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, cuyos límites se dan cuando $\omega L \ll R$ y cuando $\omega L \gg R$, respectivamente. Si el circuito tuviera una tensión de alimentación $v = V \operatorname{sen} \omega t$, la corriente resultante sería

$$i = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \operatorname{sen} (\omega t - \theta)$$

donde, al igual que antes, $\theta = \operatorname{tg}^{-1} (\omega L/R)$.

EJEMPLO 9.2. Si la corriente que circula por un circuito serie está definida por $i = I \operatorname{sen} \omega t$, obtener la diferencia de potencial total que se produce entre los dos elementos.

$$v_R = RI \operatorname{sen} \omega t \quad v_C = (1/\omega C) \operatorname{sen} (\omega t - 90^\circ)$$

$$v = v_R + v_C = V \operatorname{sen} (\omega t - \theta)$$

donde $V = I \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2} \quad \text{y} \quad \theta = \operatorname{tg}^{-1} (1/\omega CR)$

El ángulo de fase negativo sitúa a v a la derecha de la corriente i . Por consiguiente, i adelanta a v en un circuito serie RC . El ángulo de fase está limitado dentro del rango $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$. Para $(1/\omega C) \ll R$ el ángulo es $\theta = 0^\circ$ y para $(1/\omega C) \gg R$ el ángulo es $\theta = 90^\circ$. Ver la Figura 9.4.

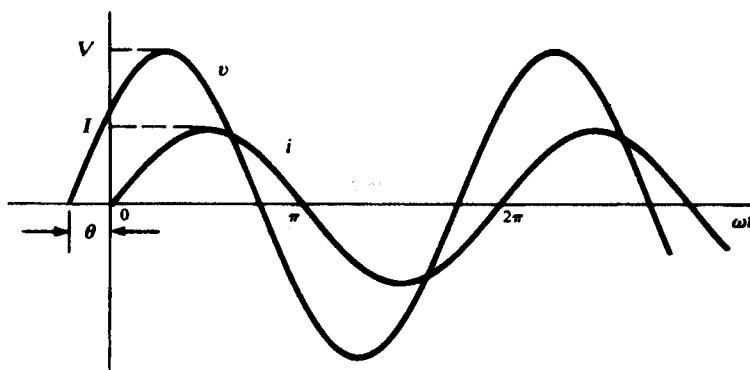


Figura 9.3.

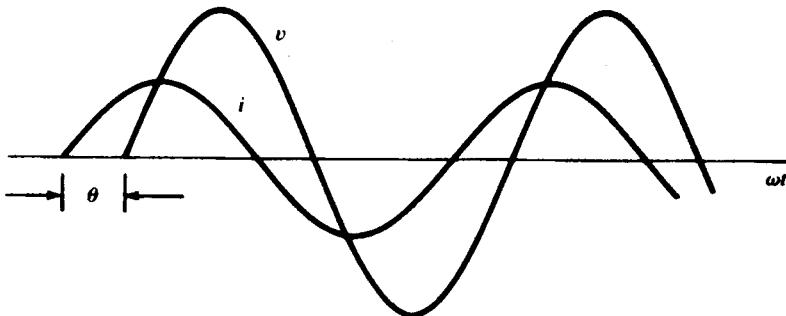


Figura 9.4.

9.3. FASORES

La simple observación de las sinusoides de tensión e intensidad en los ejemplos anteriores muestra que las amplitudes y las diferencias de fase son los dos parámetros principales. Un vector, o fasor, giratorio en el sentido de las agujas del reloj a velocidad angular constante ω (rad/s), como el representado en la Figura 9.5, tiene una proyección en el eje horizontal que corresponde a los valores de la función coseno. La longitud del fasor o su módulo es la amplitud o valor máximo de la función coseno. El ángulo entre dos posiciones del fasor es la diferencia de fase entre los puntos correspondientes en la función coseno.

En todo este texto *los fasores están definidos respecto a la función coseno*. Si una tensión o una corriente se definen como una función seno, se transformará a coseno restando 90° a la fase.

Véanse los ejemplos de la Tabla 9.2. Obsérvese que los fasores, que tienen naturaleza de segmentos dirigidos o vectores, están indicados con mayúsculas en negrita, es decir, \mathbf{V} e \mathbf{I} . El ángulo de fase de la función coseno es el ángulo del fasor. Los diagramas de fase que se usarán en lo sucesivo pueden ser considerados como una imagen instantánea de los fasores giratorios que corresponde al instante $t = 0$. La frecuencia f (Hz) y la pulsación ω (rad/s) no aparecen generalmente pero deben ser tenidas en cuenta, ya que están presentes implícitamente en cualquier problema de circuitos sinusoidales estacionarios.

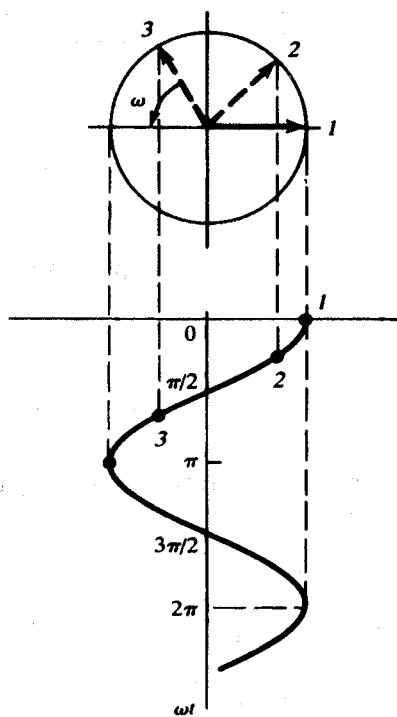


Figura 9.5.

Tabla 9.2.

Función	Diagrama fasorial
$v = 150 \cos(500t + 45^\circ)$ (V)	<p style="text-align: center;">$V = 150 \angle 45^\circ$ V</p>
$i = 3 \sin(2000t + 30^\circ)$ (mA) $= 3 \cos(2000t - 60^\circ)$ (mA)	<p style="text-align: center;">$I = 3 \angle -60^\circ$ mA</p>

EJEMPLO 9.3. Por una combinación serie de $R = 10 \Omega$ y $L = 20 \text{ mH}$ circula una intensidad de corriente $i = 5 \cos(500t + 10^\circ)$ (A). Obtener las tensiones v y \mathbf{V} , el fasor de intensidad de corriente \mathbf{I} y representar el diagrama fasorial.

Usando los métodos del Ejemplo 9.1,

$$v_R = 50 \cos(500t + 10^\circ) \quad v_L = L \frac{di}{dt} = 50 \cos(500t + 100^\circ)$$

$$v = v_R + v_L = 70,7 \cos(500t + 55^\circ) \text{ (V)}$$

Los fasores correspondientes son

$$\mathbf{I} = 5/10^\circ \text{ A} \quad \text{y} \quad \mathbf{V} = 70,7/55^\circ \text{ V}$$

El ángulo de desfase de 45° se puede ver en el gráfico temporal i y v representado en la Figura 9.6(a), y en el diagrama fasorial, con \mathbf{I} y \mathbf{V} , de la Figura 9.6(b).

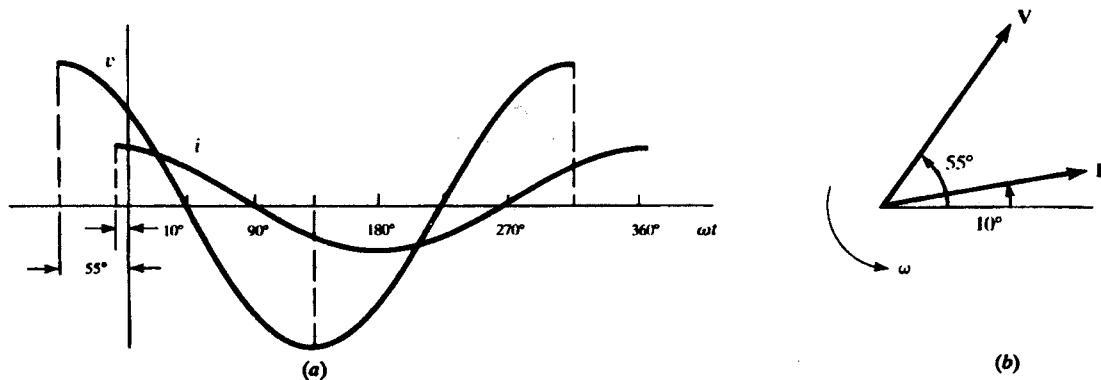


Figura 9.6.

Los fasores pueden ser tratados como números complejos. Cuando el eje horizontal se identifica con el eje real de un plano complejo, los fasores se convierten en números complejos y son aplicables sus reglas habituales. Según la *identidad de Euler*, los fasores tienen tres posibles notaciones equivalentes:

forma polar o módulo-argumental $\mathbf{V} = V/\theta$

forma rectangular o binómica $\mathbf{V} = V(\cos \theta + j \operatorname{sen} \theta)$

forma exponencial $\mathbf{V} = Ve^{j\theta}$

La expresión en coseno puede ser escrita también como

$$v = V \cos(\omega t + \theta) = \operatorname{Re}[Ve^{j(\omega t + \theta)}] = \operatorname{Re}[Ve^{j\omega t}]$$

La forma exponencial sugiere la forma de tratar el producto y el cociente entre fasores. Como $(V_1 e^{j\theta_1})(V_2 e^{j\theta_2}) = V_1 V_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$, entonces,

$$(V_1/\underline{\theta_1})(V_2/\underline{\theta_2}) = V_1 V_2/\underline{\theta_1 + \theta_2}$$

y, como $(V_1 e^{j\theta_1})/(V_2 e^{j\theta_2}) = (V_1/V_2) e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$, entonces,

$$\frac{V_1/\underline{\theta_1}}{V_2/\underline{\theta}} = V_1/V_2/\underline{\theta_1 - \theta_2}$$

La forma rectangular se usa para sumar o restar fasores.

EJEMPLO 9.4. Dados $\mathbf{V}_1 = 25/143,13^\circ$ y $\mathbf{V}_2 = 11,2/26,57^\circ$, calcular la relación $\mathbf{V}_1/\mathbf{V}_2$ y la suma $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$.

$$\mathbf{V}_1/\mathbf{V}_2 = \frac{25/143,13^\circ}{11,2/26,57^\circ} = 2,23/116,56^\circ = -1 + j1,99$$

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = (-20 + j15) + (10 + j5) = -10 + j20 = 23,36/116,57^\circ$$

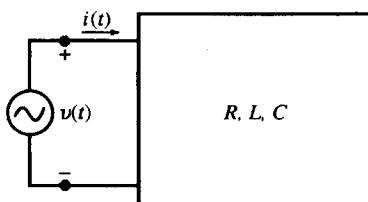
9.4. IMPEDANCIA Y ADMITANCIA

Una tensión o una corriente sinusoidal en un circuito pasivo RLC producen una respuesta sinusoidal. Al usar las funciones del tiempo, tales como $v(t)$ e $i(t)$, se dice que el circuito está en el *dominio del tiempo*, Figura 9.7(a); y cuando el circuito se analiza usando fasores, se dice que está en el *dominio de la frecuencia*, Figura 9.7(b). La tensión y la intensidad de corriente se pueden escribir, respectivamente:

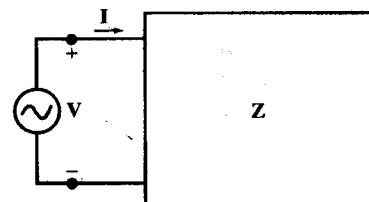
$$v(t) = V \cos (\omega t + \theta) = \operatorname{Re}[V e^{j\omega t}] \quad y \quad \mathbf{V} = V/\underline{\theta}$$

$$i(t) = I \cos (\omega t + \phi) = \operatorname{Re}[I e^{j\omega t}] \quad y \quad \mathbf{I} = I/\underline{\phi}$$

La relación entre el fasor de tensión \mathbf{V} y el de intensidad \mathbf{I} se define como impedancia \mathbf{Z} ; es decir, $\mathbf{Z} = \mathbf{V}/\mathbf{I} \Omega$. El inverso de la impedancia se denomina *admitancia* \mathbf{Y} , esto es, $\mathbf{Y} = 1/\mathbf{Z}$ (S), donde 1 S (siemens) = $1 \Omega^{-1}$. Tanto \mathbf{Y} como \mathbf{Z} son números complejos.



(a) Dominio del tiempo



(b) Dominio de la frecuencia

Figura 9.7.

Cuando la impedancia se expresa en forma cartesiana, la parte real es la resistencia R y la parte imaginaria es la *reactancia* X . El signo de la parte imaginaria puede ser positivo o negativo: cuando es positivo, X se denomina *reactancia inductiva* o *inductancia*, y cuando es negativo, X se denomina *reactancia capacitiva* o *capacitancia*. Cuando la admitancia se escribe en forma cartesiana, la parte real es la *conductancia* G y la parte imaginaria es la *susceptancia* B . El signo positivo en la susceptancia indica que es *capacitiva* y un signo negativo indica que es *inductiva*. En resumen,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= R + jX_L & \text{y} & \quad \mathbf{Z} = R - jX_C \\ \mathbf{Y} &= G - jB_L & \text{y} & \quad \mathbf{Y} = G + jB_C \end{aligned}$$

Las relaciones entre estos términos se obtienen de $\mathbf{Z} = 1/\mathbf{Y}$. Entonces,

$$\begin{aligned} R &= \frac{G}{G^2 + B^2} & \text{y} & \quad X = \frac{-B}{G^2 + B^2} \\ G &= \frac{R}{R^2 + X^2} & \text{y} & \quad B = \frac{-X}{R^2 + X^2} \end{aligned}$$

Estas expresiones no se usan mucho en los problemas en los que los cálculos se pueden hacer con los valores numéricos, como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 9.5. El fasor de la tensión entre los terminales de un circuito como el de la Figura 9.7(b) es $100/45^\circ$ V y la intensidad de corriente resultante es $5/15^\circ$ A. Calcular la impedancia y la admitancia equivalentes.

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{100/45^\circ}{5/15^\circ} = 20/30^\circ = 17,32 + j10 \Omega \\ \mathbf{Y} &= \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} = \frac{1}{Z} = 0,05/-30^\circ = (4,33 - j2,50) \cdot 10^{-2} \text{ S} \end{aligned}$$

Por tanto, $R = 17,32 \Omega$, $X_L = 10 \Omega$, $G = 4,33 \cdot 10^{-2} \text{ S}$ y $B_L = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ S}$.

Combinaciones de impedancias

La relación $\mathbf{V} = \mathbf{IZ}$ (en el dominio de la frecuencia) es formalmente idéntica a la ley de Ohm, $v = iR$, de una red resistiva (en el dominio del tiempo). Entonces, las impedancias se combinan exactamente igual que las resistencias:

$$\begin{aligned} \text{impedancias en serie} \quad \mathbf{Z}_{\text{eq}} &= \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \dots \\ \text{impedancias en paralelo} \quad \frac{1}{\mathbf{Z}_{\text{eq}}} &= \frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_2} + \dots \end{aligned}$$

En particular, para dos impedancias en paralelo, $\mathbf{Z}_{\text{eq}} = \mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2 / (\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2)$.

Diagrama de impedancias

En un *diagrama de impedancias*, una impedancia Z se representa por un punto a la derecha del plano complejo. La Figura 9.8 muestra dos impedancias; Z_1 , en el primer cuadrante, indica que la reactancia es inductiva, mientras Z_2 , en el cuarto cuadrante, indica una reactancia capacitiva. Su equivalente en serie, $Z_1 + Z_2$, se obtiene por suma de vectores, como se muestra en la figura. Obsérvese que los «vectores» no se han representado con flechas, para distinguir estos números complejos de los fasores.

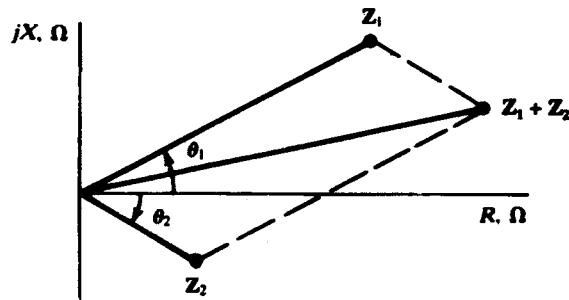


Figura 9.8.

Combinaciones de admitancias

Sustituyendo Z por $1/Y$ en las fórmulas anteriores se obtiene:

$$\begin{array}{ll} \text{admitancias en serie} & \frac{1}{Y_{eq}} = \frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2} + \dots \\ \text{admitancias en paralelo} & Y_{eq} = Y_1 + Y_2 + \dots \end{array}$$

Por tanto, los circuitos serie son más sencillos de tratar en términos de impedancias y los circuitos paralelos en términos de admitancias.

Diagrama de admitancias

Un *diagrama de admitancias*, como el de la Figura 9.9, es análogo al de impedancias de la Figura 9.8. Se muestra una admittance Y_1 con una susceptancia capacitativa y una admittance Y_2 con una susceptancia inductiva, junto con su vector suma $Y_1 + Y_2$, que corresponde a la admittance de la combinación en paralelo de Y_1 e Y_2 .

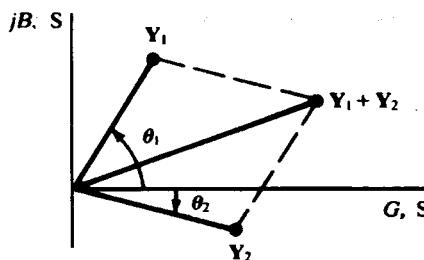


Figura 9.9.

9.5. DIVISIÓN DE LA TENSIÓN Y LA CORRIENTE EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

Debido a la analogía entre la impedancia en el dominio de la frecuencia y la resistencia en el dominio del tiempo, las Secciones 3.6 y 3.7 conducen a los siguientes resultados.

- 1) Las impedancias en serie dividen la tensión total según la relación de impedancias:

$$\frac{V_r}{V_s} = \frac{Z_r}{Z_s} \quad \text{o} \quad V_r = \frac{Z_r}{Z_{eq}} V_T$$

Véase la Figura 9.10.

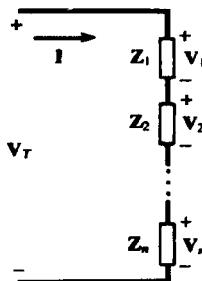


Figura 9.10.

- 2) Las impedancias en paralelo (admitancias en serie) dividen la corriente total en la relación inversa de las impedancias (relación de las admitancias):

$$\frac{I_r}{I_s} = \frac{Z_s}{Z_r} = \frac{Y_r}{Y_s} \quad \text{o} \quad I_r = \frac{Z_{eq}}{Z_r} I_T = \frac{Y_r}{Y_{eq}} I_T$$

Véase la Figura 9.11.

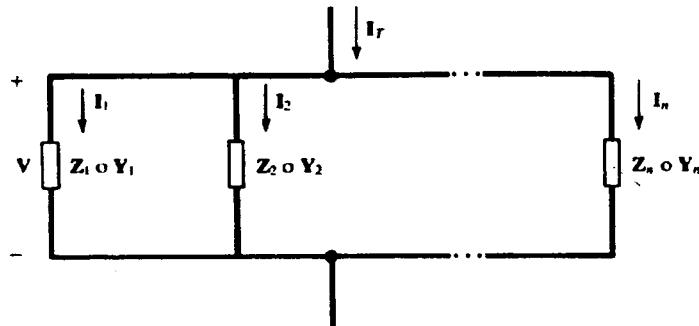


Figura 9.11.

9.6. EL MÉTODO DE LAS CORRIENTES DE MALLA

Sea el circuito de la Figura 9.12 en el dominio de la frecuencia. Aplicando la ley de Kirchhoff para las tensiones, según se vio en la Sección 4.3, o simplemente por inspección, se obtiene la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

para las corrientes de malla desconocidas I_1 , I_2 e I_3 . En este caso, $Z_{11} = Z_A + Z_B$, la *autoimpedancia* de la malla 1, es la suma de todas las impedancias por las que circula I_1 . Análogamente, $Z_{22} \equiv Z_B + Z_C + Z_D$ y $Z_{33} \equiv Z_D + Z_E$ son las autoimpedancias de las mallas 2 y 3.

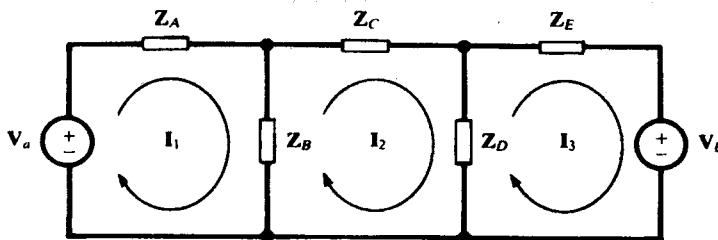


Figura 9.12.

El elemento Z_{12} de la matriz de impedancias está definido como:

$$Z_{12} \equiv \sum \pm (\text{impedancia común a } I_1 \text{ e } I_2)$$

donde un sumando cualquiera toma el signo positivo si las dos corrientes pasan a través de la impedancia en el mismo sentido y toma el signo negativo si tienen sentido contrario. Se deduce que, invariablemente, $Z_{12} = Z_{21}$. Según la Figura 9.12, I_1 e I_2 circulan por la impedancia común Z_B en sentido contrario, por tanto:

$$Z_{12} = Z_{21} = -Z_B$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} Z_{13} &= Z_{31} \equiv \sum \pm (\text{impedancia común a } I_1 \text{ e } I_3) = 0 \\ Z_{23} &= Z_{32} \equiv \sum \pm (\text{impedancia común a } I_2 \text{ e } I_3) = -Z_D \end{aligned}$$

La matriz Z es simétrica.

En la columna V a la derecha de la ecuación, los componentes V_k ($k = 1, 2, 3$) se definen exactamente igual que en la Sección 4.3:

$$V_k \equiv \sum \pm (\text{tensión de cada fuente situada en la malla } k)$$

donde un sumando cualquiera toma el signo positivo si la tensión de la fuente tiene el mismo sentido que I_k , y toma el signo menos en el caso contrario. En el circuito de la Figura 9.12,

$$V_1 = +V_a \quad V_2 = 0 \quad V_3 = -V_b$$

En vez de usar las mallas, o «ventanas» del circuito (plano), conviene a veces elegir un grupo de bucles apropiado, cada uno de los cuales puede contener una o más mallas en su interior. Es fácil ver que dos corrientes de bucle podrían tener el mismo sentido en una impedancia y sentidos contrarios en otra. Sin embargo, las reglas anteriores para escribir la matriz Z y la columna V , se han formulado de tal forma que pueden ser aplicadas tanto a mallas como a bucles. Esas reglas son, por supuesto, idénticas a las usadas en la Sección 4.3 para escribir la matriz R y la columna V .

EJEMPLO 9.6. Suponer que se desea determinar el fasor de tensión en Z_B , con la polaridad indicada en la Figura 9.13. Si se escogen las mallas como en la Figura 9.12, se debería calcular tanto I_1 como I_2 para obtener la tensión, ya que $V_B = (I_2 - I_1)Z_B$. En la Figura 9.13 se han seleccionado tres bucles (dos de los cuales son mallas) de forma que I_1 es la única corriente que circula por Z_B . Además, el sentido de I_1 se ha escogido de forma que $V_B = I_1 Z_B$. Escribiendo la ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} Z_A + Z_B & -Z_A & 0 \\ -Z_A & Z_A + Z_C + Z_D & Z_D \\ 0 & Z_D & Z_D + Z_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_a \\ V_a \\ V_b \end{bmatrix}$$

de la que

$$V_B = Z_B I_1 = \frac{Z_B}{\Delta_Z} \begin{vmatrix} -V_a & -Z_A & 0 \\ V_a & Z_A + Z_B + Z_C & Z_D \\ V_b & Z_D & Z_D + Z_E \end{vmatrix}$$

donde Δ_Z es el determinante de la matriz Z .

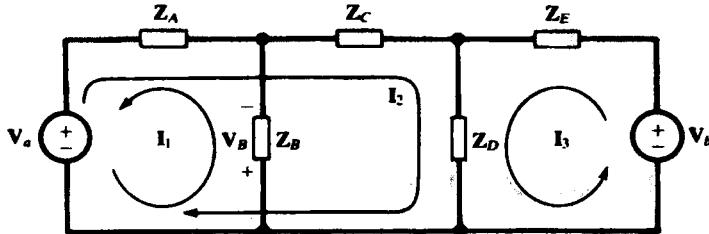


Figura 9.13.

Impedancias de entrada y de transferencia

Las definiciones de resistencia de entrada (Sección 4.5) y de resistencia de transferencia (Sección 4.6) tienen sus homólogas en el dominio de la frecuencia. Así, para el circuito con fuente única de la Figura 9.14, la *impedancia de entrada* es

$$\mathbf{Z}_{\text{ent},r} \equiv \frac{\mathbf{V}_r}{\mathbf{I}_r} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{rr}}$$

donde Δ_{rr} es el determinante adjunto del elemento Z_{rr} en Δ_Z ; y la *impedancia de transferencia* entre la malla (o bucle) r y la malla (o bucle) s es

$$\mathbf{Z}_{\text{transfer},rs} \equiv \frac{\mathbf{V}_r}{\mathbf{I}_s} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{rs}}$$

donde Δ_{rs} es el adjunto de Z_{rs} en Δ_Z .

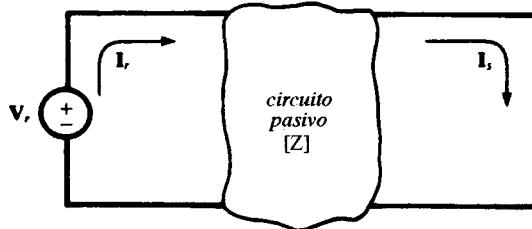


Figura 9.14.

Al igual que antes, el principio de superposición para un circuito arbitrario con n mallas o n bucles puede expresarse como

$$\mathbf{I}_k = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_{\text{transfer},1k}} + \dots + \frac{\mathbf{V}_{k-1}}{\mathbf{Z}_{\text{transfer},(k-1)k}} + \frac{\mathbf{V}_k}{\mathbf{Z}_{\text{ent},k}} + \frac{\mathbf{V}_{k+1}}{\mathbf{Z}_{\text{transfer},(k+1)k}} + \dots + \frac{\mathbf{V}_n}{\mathbf{Z}_{\text{transfer},nk}}$$

9.7. EL MÉTODO DE LAS TENSIONES EN LOS NUDOS

El procedimiento es exactamente igual al de la Sección 4.4, con admitancias en vez de las inversas de las resistencias. Un circuito en el dominio de la frecuencia, con n nudos principales, uno de ellos elegido como nudo de referencia, requiere $n - 1$ ecuaciones de tensión en los nudos. Así, para $n = 4$, la ecuación matricial sería

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

en la que las incógnitas, V_1 , V_2 y V_3 , son las tensiones de los nudos principales 1, 2 y 3 con respecto a la del nudo principal 4, el nudo de referencia.

Y_{11} es la *autoadmitancia* del nudo 1, dada por la suma de todas las admitancias conectadas al nudo 1. Análogamente, Y_{22} e Y_{33} son las autoadmitancias de los nudos 2 y 3.

Y_{12} , la *admitancia de acoplamiento* entre los nudos 1 y 2, está dada por la suma de todas las admitancias conectadas entre los nudos 1 y 2, con *signo menos*. Se deduce que $Y_{12} = Y_{21}$. Igualmente, las otras admitancias de acoplamiento: $Y_{13} = Y_{31}$, $Y_{23} = Y_{32}$. La matriz Y es, por tanto, simétrica.

A la derecha de la ecuación, la columna **I** está formada como se explicó en la Sección 4.4; esto es,

$$\mathbf{I}_k = \sum (\text{corriente dirigida hacia el nudo } k) \quad (k = 1, 2, 3)$$

en la que una corriente que *sale* del nudo k se toma como negativa.

Admitancias de entrada y de transferencia

La ecuación matricial del método de las tensiones en los nudos,

$$[\mathbf{Y}] [\mathbf{V}] = [\mathbf{I}]$$

es formalmente idéntica a la ecuación matricial del método de las corrientes de malla,

$$[\mathbf{Z}] [\mathbf{I}] = [\mathbf{V}]$$

Por ello, en teoría al menos, las *admitancias de entrada y de transferencia* se pueden definir por analogía con las impedancias de entrada y de transferencia:

$$Y_{\text{ent}, r} \equiv \frac{\mathbf{I}_r}{\mathbf{V}_r} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{rr}}$$

$$Y_{\text{transfer}, rs} \equiv \frac{\mathbf{I}_r}{\mathbf{V}_s} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{rs}}$$

donde ahora Δ_{rr} y Δ_{rs} son los adjuntos de \mathbf{Y}_{rr} e \mathbf{Y}_{rs} en Δ_Y . En la práctica, estas definiciones son frecuentemente de uso limitado. Sin embargo, son valiosas, proporcionando una expresión del principio de superposición (para las tensiones):

$$\mathbf{V}_k = \frac{\mathbf{I}_1}{Y_{\text{transfer}, 1k}} + \dots + \frac{\mathbf{I}_{k-1}}{Y_{\text{transfer}, (k-1)k}} + \frac{\mathbf{I}_k}{Y_{\text{ent}, k}} + \frac{\mathbf{I}_{k+1}}{Y_{\text{transfer}, (k+1)k}} + \dots + \frac{\mathbf{I}_{n-1}}{Y_{\text{transfer}, (n-1)k}}$$

para $k = 1, 2, \dots, n - 1$. En otras palabras: la tensión en cualquier nudo principal (respecto a la del nudo de referencia) se obtiene sumando las tensiones producidas en ese nudo por las distintas corrientes que concurren en él, actuando una a una.

9.8. TEOREMAS DE THÉVENIN Y NORTON

Estos son exactamente iguales a los definidos en la Sección 4.9, con la tensión de circuito abierto V' , la corriente de cortocircuito I' y la resistencia equivalente R' sustituidas por el fasor de tensión de circuito abierto \mathbf{V}' , el fasor de intensidad \mathbf{I}' y la impedancia equivalente \mathbf{Z}' . Ver la Figura 9.15.

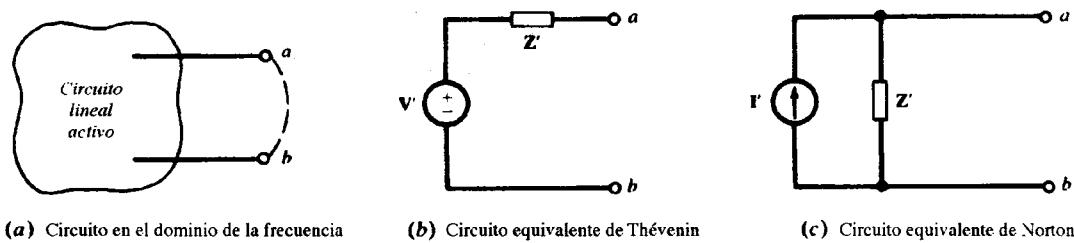


Figura 9.15.

PROBLEMAS RESUELTOS

- 9.1.** Por una bobina de 10 mH circula una intensidad de corriente $i = 5 \cos 2000t$ (A). Obtener la tensión v_L .

Según la Tabla 9.1, $v_L = \omega L I \cos(\omega t + 90^\circ) = 100 \cos(2000t + 90^\circ)$ (V). Utilizando la función seno,

$$v_L = 100 \operatorname{sen}(2000t + 180^\circ) = -100 \operatorname{sen} 2000t \text{ (V)}$$

- 9.2.** Por un circuito serie con $R = 10 \Omega$ y $L = 20 \text{ mH}$ circula una intensidad de corriente $i = 2 \operatorname{sen} 500t$ (A). Obtener la tensión total y el ángulo que i retrasa respecto a v .

Según los métodos del Ejemplo 9.1,

$$\theta = \operatorname{arc tg} \frac{500(20 \cdot 10^{-3})}{10} = 45^\circ$$

$$v = I \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \operatorname{sen}(\omega t + \theta) = 28,3 \operatorname{sen}(500t + 45^\circ) \text{ (V)}$$

Se observa que i retrasa 45° respecto de v .

- 9.3.** Determinar los dos elementos en un circuito serie, sabiendo que la corriente y la tensión son:

$$i = 10 \cos(5000t - 23,13^\circ) \text{ (A)} \quad v = 50 \cos(5000t + 30^\circ) \text{ (V)}$$

Como i retrasa respecto a v (en $53,13^\circ$), los elementos son una R y una L . La relación entre V_{\max} e I_{\max} es de $50/10$. Por tanto,

$$\frac{50}{10} = \sqrt{R^2 + (5000L)^2} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} 53,13^\circ = 1,33 = \frac{5000L}{R}$$

Resolviendo, $R = 3 \Omega$, $L = 0,8 \text{ mH}$.

- 9.4. Un circuito serie, con $R = 2 \Omega$ y $C = 200 \text{ pF}$, se alimenta con una tensión sinusoidal de frecuencia 99,47 MHz. Si la tensión máxima entre los extremos del condensador es 24 V, ¿cuál es la tensión máxima entre los extremos de la combinación serie?

$$\omega = 2\pi f = 6,25 \cdot 10^8 \text{ rad/s}$$

De la Tabla 9.1, $I_{\max} = \omega C V_{C,\max} = 3 \text{ A}$. Entonces, con los métodos del Ejemplo 9.2,

$$V_{\max} = I_{\max} \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2} = \sqrt{(6)^2 + (24)^2} = 24,74 \text{ V}$$

- 9.5. La intensidad de corriente en un circuito serie con $R = 5 \Omega$ y $L = 30 \text{ mH}$ retrasa 80° respecto a la tensión suministrada. Determinar la frecuencia de la fuente y la impedancia Z .

A partir del diagrama de impedancias, Figura 9.16,

$$5 + jX_L = Z/80^\circ \quad X_L = 5 \operatorname{tg} 80^\circ = 28,4 \Omega$$

Entonces $28,4 = \omega(30 \cdot 10^{-3})$; por consiguiente, $\omega = 954,2 \text{ rad/s}$ y $f = 150,4 \text{ Hz}$.

$$Z = 5 + j28,4 \Omega$$

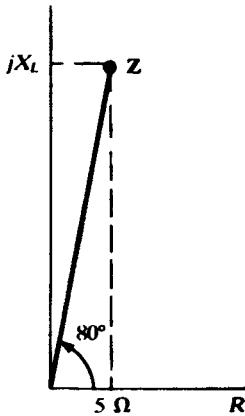


Figura 9.16.

- 9.6. ¿A qué frecuencia la intensidad de corriente adelantará a la tensión en 30° en un circuito serie con $R = 8 \Omega$ y $C = 30 \mu\text{F}$?

Del diagrama de impedancias, Figura 9.17,

$$8 - jX_C = Z/-30^\circ \quad -X_C = 8 \operatorname{tg} (-30^\circ) = -4,62 \Omega$$

Entonces $4,62 = \frac{1}{2\pi f(30 \cdot 10^{-6})}$ o $f = 1149 \text{ Hz}$

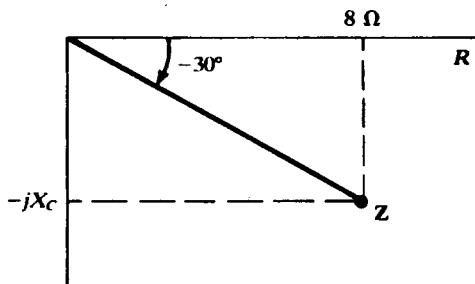


Figura 9.17.

- 9.7.** Un circuito serie RC , con $R = 10 \Omega$, tiene una impedancia total con un argumento de -45° para $f_1 = 500$ Hz. Determinar la frecuencia a la que el módulo de la impedancia es: a) dos veces mayor que con f_1 , b) la mitad que con f_1 .

De $10 - jX_C = Z_1/45^\circ$, $X_C = 10 \Omega$ y $Z_1 = 14,14 \Omega$.

- a) Para que el módulo sea el doble,

$$10 - jX_C = 28,28/0^\circ \quad \text{o} \quad X_C = \sqrt{(28,28)^2 - (10)^2} = 26,45 \Omega$$

Entonces, como X_C es inversamente proporcional a f ,

$$\frac{10}{26,45} = \frac{f_2}{500} \quad \text{o} \quad f_2 = 189 \text{ Hz}$$

- b) Un módulo de $Z_3 = 7,07 \Omega$ es imposible; el menor módulo posible es $Z = R = 10 \Omega$.

- 9.8.** Un circuito con dos elementos serie tiene una tensión $V = 240/0^\circ$ V y una intensidad de corriente $I = 50/-60^\circ$ A. Determinar la intensidad que se obtiene cuando la resistencia se reduce: a) un 30%, b) un 60%, de su valor inicial.

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{240/0^\circ}{50/-60^\circ} = 4,8/60^\circ = 2,4 + j4,16 \Omega$$

a) $30\% \cdot 2,4 = 0,72 \quad Z_1 = 0,72 + j4,16 = 4,22/80,2^\circ \Omega$

$$I_1 = \frac{240/0^\circ}{4,22/80,2^\circ} = 56,8/-80,2^\circ \text{ A}$$

b) $60\% \cdot 2,4 = 1,44 \quad Z_2 = 1,44 + j4,16 = 4,4/70,9^\circ \Omega$

$$I_2 = \frac{240/0^\circ}{4,4/70,9^\circ} = 54,5/-70,9^\circ \text{ A}$$

- 9.9. Determinar Z_{eq} e I en el circuito de la Figura 9.18.

Por estar las impedancias en serie,

$$Z_{eq} = 10/0^\circ + 4,47/63,4^\circ = 12 + j4 = 12,65/18,43^\circ \Omega$$

Entonces

$$I = \frac{V}{Z_{eq}} = \frac{100/0^\circ}{12,65/18,43^\circ} = 7,91/-18,43^\circ A$$

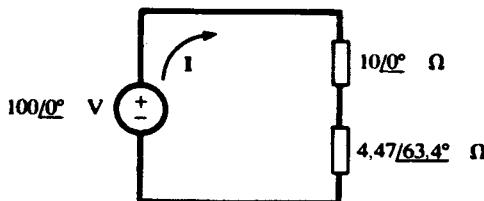


Figura 9.18.

- 9.10. Calcular la impedancia Z_1 en el circuito de la Figura 9.19.

$$Z = \frac{V}{I} = 20/60^\circ = 10 + j17,3 \Omega$$

Entonces, como las impedancias están en serie se suman,

$$5 + j8 + Z_1 = 10 + j17,3 \quad o \quad Z_1 = 5 + j9,3 \Omega$$

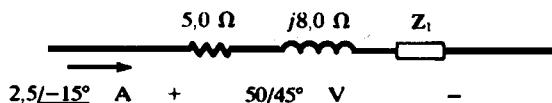


Figura 9.19.

- 9.11. Calcular la impedancia equivalente Z_{eq} y la admitancia equivalente Y_{eq} del circuito con cuatro ramas de la Figura 9.20.

Usando admitancias,

$$Y_1 = \frac{1}{j5} = -j0,2 S \quad Y_3 = \frac{1}{15} = 0,067 S$$

$$Y_2 = \frac{1}{5 + j8,66} = 0,05 - j0,087 S \quad Y_4 = \frac{1}{-j10} = j0,1 S$$

Entonces $Y_{eq} = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = 0,117 - j0,187 = 0,221/-58^\circ S$

y $Z_{eq} = \frac{1}{Y_{eq}} = 4,53/58^\circ \Omega$

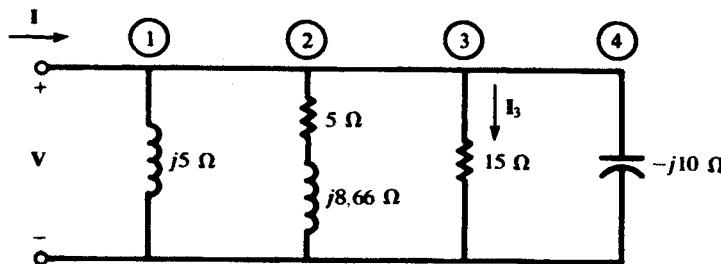


Figura 9.20.

- 9.12.** La intensidad de corriente total \mathbf{I} que absorbe el circuito de la Figura 9.20 es $33/-13^\circ$ A. Obtener la intensidad de corriente por la rama \mathbf{I}_3 y la tensión \mathbf{V} .

$$\mathbf{V} = \mathbf{I}Z_{eq} = (33/-13^\circ)(4,53/58^\circ) = 149,5/45^\circ \text{ V}$$

$$\mathbf{I}_3 = \mathbf{VY}_3 = (149,5/45^\circ) \left(\frac{1}{15} / 0^\circ \right) = 9,97/45^\circ \text{ A}$$

- 9.13.** Determinar \mathbf{Z}_1 en el circuito con tres ramas de la Figura 9.21, si $\mathbf{I} = 31,5/24^\circ$ A para una tensión de alimentación $\mathbf{V} = 50/60^\circ$ V.

$$\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} = 0,63/-36^\circ = 0,51 - j0,37 \text{ S}$$

Entonces $0,51 - j0,37 = \mathbf{Y}_1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{4 + j3}$

por tanto, $\mathbf{Y}_1 = 0,354/-45^\circ$ S y $\mathbf{Z}_1 = 2 + j2 \Omega$.

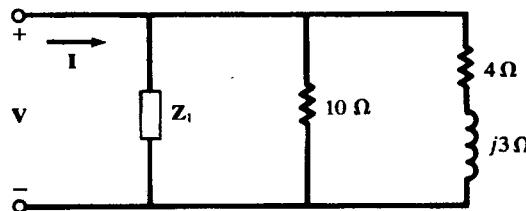


Figura 9.21.

- 9.14.** Las constantes R y L de una bobina se pueden obtener conectándola en serie con una resistencia desconocida y midiendo la tensión en la bobina V_x , en la resistencia V_1 , y la total V_T (Figura 9.22). La frecuencia debe ser también conocida, pero los ángulos de fase de las tensiones se desconocen. Dados $f = 60$ Hz, $V_1 = 20$ V, $V_x = 22,4$ V y $V_T = 36$ V, calcular R y L .

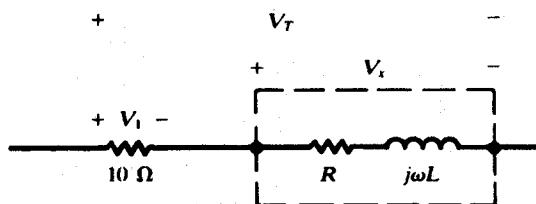


Figura 9.22.

Las tensiones medidas son valores eficaces; pero, en lo que se refiere a los cálculos de la impedancia, no hay diferencia si se trata de valores máximos o eficaces.

La intensidad de corriente (eficaz) es $I = V_1/10 = 2$ A. Entonces

$$Z_x = \frac{22,4}{2} = 11,2 \Omega \quad Z_{eq} = \frac{36}{2} = 18 \Omega$$

Del diagrama de impedancias, Figura 9.23,

$$(18)^2 = (10 + R)^2 + (\omega L)^2$$

$$(11,2)^2 = R^2 + (\omega L)^2$$

donde $\omega = 2\pi 60 = 377$ rad/s. Resolviendo el sistema,

$$R = 4,92 \Omega \quad L = 26,7 \text{ mH}$$

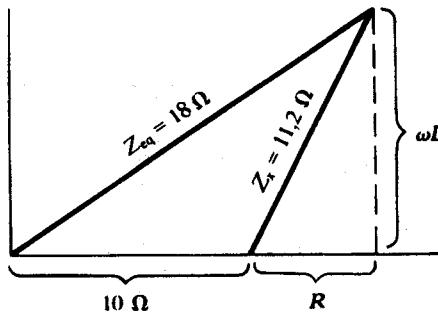


Figura 9.23.

- 9.15.** En el circuito paralelo representado en la Figura 9.24 los valores eficaces de las corrientes son: $I_x = 18$ A, $I_1 = 15$ A, $I_T = 30$ A. Determinar R y X_L .

El problema se puede resolver de forma similar a la del Problema 9.14, pero con el diagrama de admitancias.

La tensión (eficaz) es $V = I_1(4) = 60$ V. Entonces:

$$Y_x = \frac{I_x}{V} = 0,3 \text{ S} \quad Y_{eq} = \frac{I_T}{V} = 0,5 \text{ S} \quad Y_1 = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ S}$$

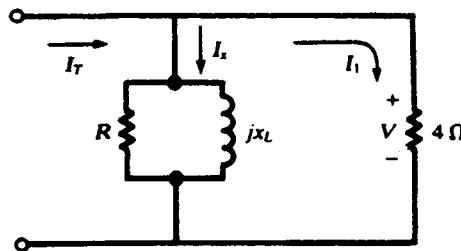


Figura 9.24.

Del diagrama de admitancias, Figura 9.25,

$$(0,5)^2 = (0,25 + G)^2 + B_L^2$$

$$(0,3)^2 = G^2 + B_L^2$$

de donde $G = 0,195 \text{ S}$, $B_L = 0,228 \text{ S}$. Entonces

$$R = \frac{1}{G} = 5,13 \Omega \quad \text{y} \quad jX_L = \frac{1}{-jB_L} = j4,39 \Omega$$

es decir, $X_L = 4,39 \Omega$.

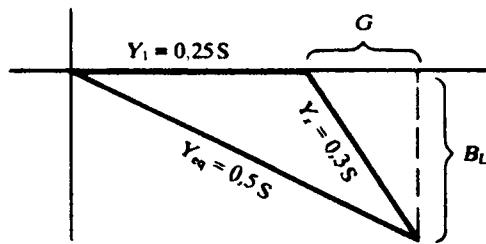


Figura 9.25.

- 9.16. Obtener el fasor de tensión \mathbf{V}_{AB} en el circuito paralelo con dos ramas de la Figura 9.26.

Por el método de la división de la intensidad de corriente, $I_1 = 4,64/120,1^\circ \text{ A}$ e $I_2 = 17,4/30,1^\circ \text{ A}$. Pueden considerarse los caminos AXB o AYB . Eligiendo el primero,

$$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{AX} + \mathbf{V}_{XB} = \mathbf{I}_1(20) - \mathbf{I}_2(j6) = 92,8/120,1^\circ + 104,4/-59,9^\circ = 11,6/-59,9^\circ \text{ V}$$

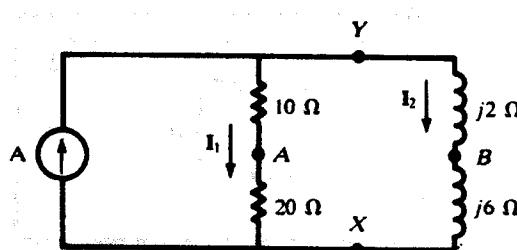


Figura 9.26.

- 9.17. En el circuito paralelo de la Figura 9.27, $V_{AB} = 48,3/30^\circ$ V. Determinar la tensión aplicada V .

Dividiendo la tensión en las dos ramas:

$$V_{AX} = \frac{-j4}{4 - j4} V = \frac{1}{1 + j} V \quad V_{BX} = \frac{j8,66}{5 + j8,66} V$$

y entonces $V_{AB} = V_{AX} - V_{BX} = \left(\frac{1}{1 + j} - \frac{j8,66}{5 + j8,66} \right) V = \frac{1}{-0,268 + j1} V$

o $V = (-0,268 + j1)V_{AB} = (1,035/105^\circ)(48,3/30^\circ) = 50/135^\circ V$

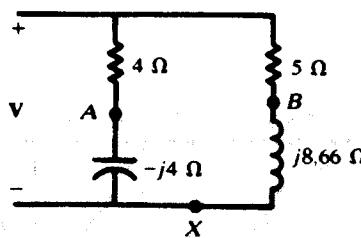


Figura 9.27.

- 9.18. Obtener la tensión V_x en el circuito de la Figura 9.28, usando el método de las intensidades de malla.

En el esquema del circuito se indican las intensidades de corriente de malla elegidas, con I_3 circulando por la resistencia de 10Ω en sentido tal que $V_x = I_3(10)$ V. La ecuación matricial se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} 7 + j3 & j5 & 5 \\ j5 & 12 + j3 & -(2 - j2) \\ 5 & -(2 - j2) & 17 - j2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/0^\circ \\ 5/30^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo por determinantes,

$$\mathbf{I}_3 = \frac{\begin{vmatrix} 7 + j3 & j5 & 10/0^\circ \\ j5 & 12 + j3 & 5/30^\circ \\ 5 & -2 + j2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 + j3 & j5 & 5 \\ j5 & 12 + j3 & -2 + j2 \\ 5 & -2 + j2 & 17 - j2 \end{vmatrix}} = \frac{667,96/169,09^\circ}{1534,5/25,06^\circ} = 0,435/-194,15^\circ \text{ A}$$

$$\text{y } \mathbf{V}_x = \mathbf{I}_3(10) = 4,35/-194,15^\circ \text{ V.}$$

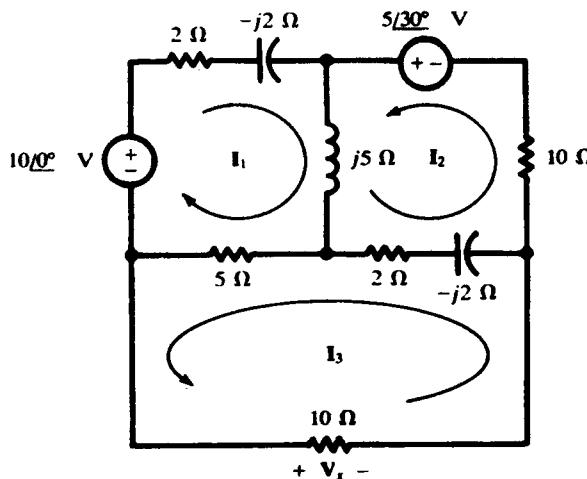


Figura 9.28.

- 9.19. En el circuito de la Figura 9.29, determinar la tensión \mathbf{V} que hace que la corriente que circula por la impedancia $2 + j3 \Omega$ sea nula.

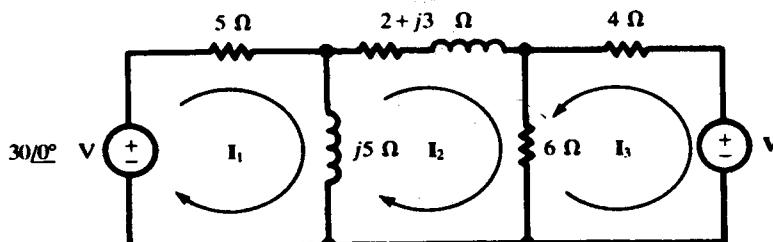


Figura 9.29.

Eligiendo las intensidades de malla como se muestra en el esquema del circuito,

$$\mathbf{I}_2 = \frac{1}{\Delta_Z} \begin{vmatrix} 5+j5 & 30/0^\circ & 0 \\ -j5 & 0 & 6 \\ 0 & V & 10 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante del numerador mediante los adjuntos de la segunda columna,

$$-(30/0^\circ) \begin{vmatrix} -j5 & 6 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} - V \begin{vmatrix} 5+j5 & 0 \\ -j5 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{por tanto} \quad V = 35,4/45^\circ \text{ V}$$

9.20. Resolver el Problema 9.19 por el método de las tensiones en los nudos.

El circuito se ha representado de nuevo en la Figura 9.30 tomando un extremo de la impedancia $2 + j3 \Omega$ como nudo de referencia. Según las reglas explicadas en la Sección 9.7, la ecuación matricial es:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{2+j3} & -\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{j5}\right) \\ -\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{j5}\right) & \frac{1}{5} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{30/0^\circ}{5} \\ \frac{-30/0^\circ}{5} - \frac{V}{4} \end{bmatrix}$$

Para que la tensión V_1 en el nudo sea cero es necesario que el determinante del numerador en la solución de V_1 sea igual a cero.

$$N_1 = \begin{vmatrix} \frac{30/0^\circ}{5} & -0,2 + j0,2 \\ \frac{-30/0^\circ}{5} - \frac{V}{4} & 0,617 - j0,2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{de donde} \quad V = 35,4/45^\circ \text{ V}$$

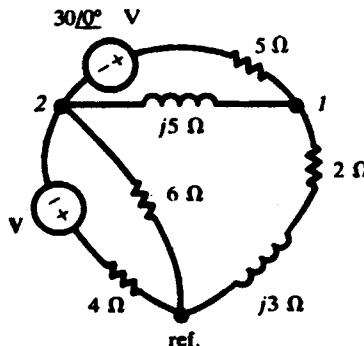


Figura 9.30.

- 9.21. Usar el método de las tensiones en los nudos para obtener la intensidad de corriente I en el circuito de la Figura 9.31.

Hay tres nudos principales en el circuito. El nudo de referencia y el nudo 1 se seleccionan para que la tensión en el nudo 1 sea igual a la tensión entre los extremos de la reactancia $j2 \Omega$.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} + \frac{1}{j2} + \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{1}{-j2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{50/0^\circ}{5} \\ \frac{50/90^\circ}{2} \end{bmatrix}$$

de donde

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -0,25 \\ j25 & 0,75 + j0,5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0,45 - j0,5 & -0,250 \\ -0,25 & 0,75 + j0,5 \end{vmatrix}} = \frac{13,52/56,31^\circ}{0,546/-15,94^\circ} = 24,76/72,25^\circ \text{ V}$$

e

$$I = \frac{24,76/72,25^\circ}{2/90^\circ} = 12,38/-17,75^\circ \text{ A}$$

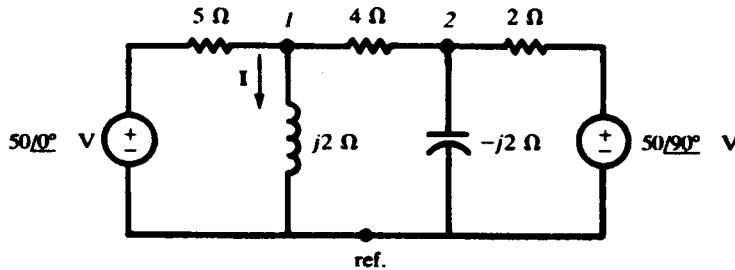


Figura 9.31.

- 9.22. Determinar la impedancia de entrada vista desde los terminales ab del circuito de la Figura 9.32.

Con la corriente de malla I_1 seleccionada como se muestra en el esquema eléctrico,

$$Z_{ent,1} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} 8 - j2 & -3 & 0 \\ -3 & 8 + j5 & -5 \\ 0 & -5 & 7 - j2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 + j5 & -5 \\ -5 & 7 - j2 \end{vmatrix}} = \frac{315,5/16,19^\circ}{45,2/24,86^\circ} = 6,98/-8,67^\circ \Omega$$

- 9.23. Determinar la intensidad de corriente I_x por la bobina del circuito de la Figura 9.32, obteniendo antes la impedancia de transferencia. Sea $V = 10/30^\circ$ V.

$$Z_{\text{transfer},12} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{12}} = \frac{315,5/16,19^\circ}{\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 0 & 7-j2 \end{vmatrix}} = 14,45/32,14^\circ \Omega$$

Entonces $I_x = I_2 = \frac{V}{Z_{\text{transfer},12}} = \frac{10/30^\circ}{14,45/32,14^\circ} = 0,692/-2,14^\circ$ A

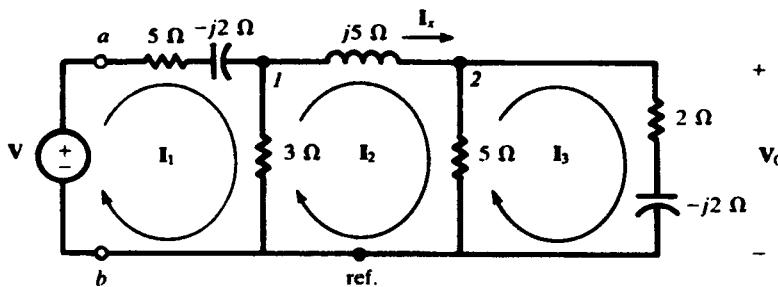


Figura 9.32.

- 9.24. Determinar el valor de la fuente de tensión V que produce una tensión $V_0 = 5/0^\circ$ V en el circuito de la Figura 9.32.

La impedancia de transferencia se puede usar para calcular la intensidad de corriente que circula por la impedancia $2 - j2 \Omega$, a partir de la cual puede obtenerse V_0 .

$$Z_{\text{transfer},13} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{13}} = \frac{315,5/16,19^\circ}{15/0^\circ} = 21/16,19^\circ \Omega$$

$$V_0 = I_3(2 - j2) = \frac{V}{Z_{\text{transfer},13}} (2 - j2) = V(0,135/-61,19^\circ)$$

En definitiva, si $V_0 = 5/0^\circ$ V,

$$V = \frac{5/0^\circ}{0,135/-61,19^\circ} = 37/61,19^\circ \text{ V}$$

Método alternativo

Se puede usar también el método de las tensiones en los nudos. V_0 es la tensión del nudo V_2 según la selección de los nudos indicada en la Figura 9.32.

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_2 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{5-j2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{j5} & \frac{\mathbf{V}}{5-j2} \\ -\frac{1}{j5} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{5-j2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{j5} & -\frac{1}{j5} \\ -\frac{1}{j5} & \frac{1}{j5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2-j2} \end{vmatrix}} = \mathbf{V}(0,134/-61,15^\circ)$$

Para $\mathbf{V}_0 = 5/0^\circ$ V, $\mathbf{V} = 37,3/61,15^\circ$ V, que coincide con el resultado anterior salvo por los errores de redondeo.

- 9.25. Obtener la impedancia de entrada del circuito de la Figura 9.33 y usarla para calcular la tensión del nudo \mathbf{V}_1 .

$$\mathbf{Y}_{\text{ent},1} = \frac{\Delta_y}{\Delta_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{10} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{3+j4} + \frac{1}{-j10} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{3+j4} + \frac{1}{-j10} \end{vmatrix}} = 0,311/-49,97^\circ \text{ S}$$

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{Y}_{\text{ent},1}} = \frac{5/0^\circ}{0,311/-49,97^\circ} = 16,1/49,97^\circ \text{ V}$$

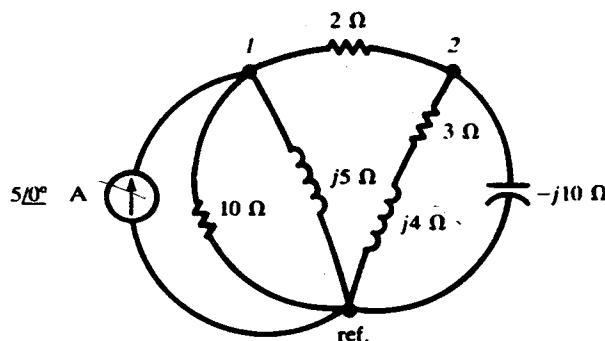


Figura 9.33.

- 9.26. Calcular la admitancia de transferencia $Y_{\text{transfer},12}$ del circuito del Problema 9.25 y usarla para obtener la tensión del nudo V_2 .

$$Y_{\text{transfer},12} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{12}} = \frac{0,194/-55,49^\circ}{-(-0,5)} = 0,388/-55,49^\circ \text{ S}$$

$$V_2 = \frac{I_1}{Y_{\text{transfer},12}} = 12,9/55,49^\circ \text{ V}$$

- 9.27. Sustituir el circuito activo de la Figura 9.34(a) visto desde los terminales ab por el circuito Thévenin equivalente.

$$Z' = j5 + \frac{5(3+j4)}{5+3+j4} = 2,5 + j6,25 \Omega$$

La tensión del circuito abierto V' entre los terminales ab es igual a la tensión en la impedancia $3 + j4 \Omega$:

$$V' = \left(\frac{10/0^\circ}{8+j4} \right) (3+j4) = 5,59/26,56^\circ \text{ V}$$

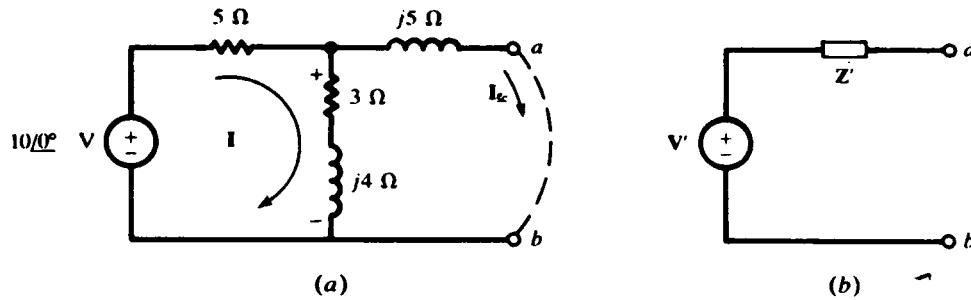


Figura 9.34.

- 9.28. Obtener el circuito Norton equivalente del circuito del Problema 9.27 (Figura 9.35).

I_{sc} entre los terminales ab es la corriente de Norton I' . Por división de la intensidad,

$$I' = \frac{10/0^\circ}{j5(3+j4)} \left(\frac{3+j4}{3+j9} \right) = 0,83/-41,63^\circ \text{ A}$$

La impedancia en paralelo Z' es igual a la del Problema 9.27, $Z' = 2,5 + j6,25 \Omega$.

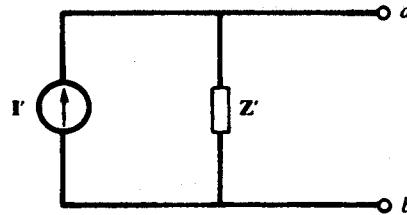


Figura 9.35.

- 9.29. Obtener el equivalente Thévenin del circuito puente de la Figura 9.36. Tomar V' como la tensión de a con respecto a b .

Por división de la tensión en cada rama,

$$V_{ax} = \frac{12 + j24}{33 + j24} (20/0^\circ) \quad V_{bx} = \frac{30 + j60}{80 + j60} (20/0^\circ)$$

Por tanto,

$$V_{ab} = V_{ax} - V_{bx} = (20/0^\circ) \left(\frac{12 + j24}{33 + j24} - \frac{30 + j60}{80 + j60} \right) = 0,326/169,4^\circ \text{ V} = V'$$

Visto desde ab con la fuente de tensión desconectada, el circuito consiste en la combinación en paralelo de dos ramas con elementos en serie, y entonces,

$$Z' = \frac{21(12 + j24)}{33 + j24} + \frac{50(30 + j60)}{80 + j60} = 47,35/26,81^\circ \Omega$$

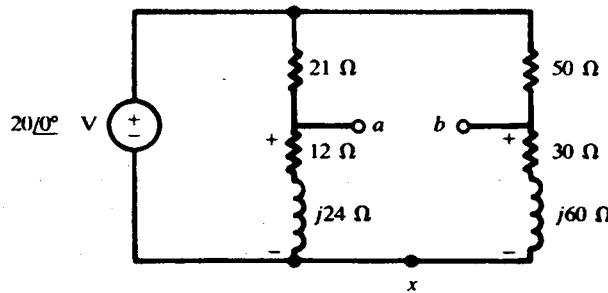


Figura 9.36.

- 9.30. Sustituir el circuito de la Figura 9.37 entre los terminales ab por un Norton equivalente y por un Thévenin equivalente.

Por división de la intensidad,

$$I_{sc} = I' = \left[\frac{\frac{10/0^\circ}{(-j10)(3 + j4)}}{10 + \frac{(-j10)(3 + j4)}{3 - j6}} \right] \left(\frac{3 + j4}{3 - j6} \right) = 0,439/105,26^\circ \text{ A}$$

y por división de la tensión en el circuito abierto,

$$\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{V}' = \frac{3 + j4}{13 + j4} (10/0^\circ) = 3,68/36,03^\circ \text{ V}$$

Entonces $\mathbf{Z}' = \frac{\mathbf{V}'}{\mathbf{I}'} = \frac{3,68/36,03^\circ}{0,439/105,26^\circ} = 8,37/-69,23^\circ \Omega$

Véase la Figura 9.38.

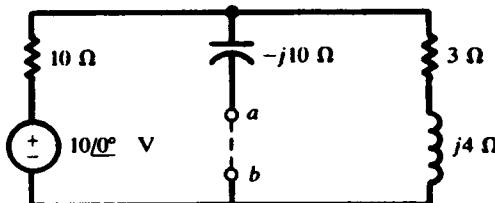


Figura 9.37.

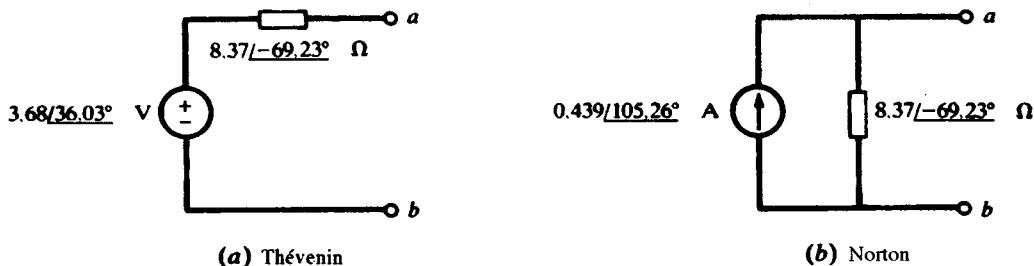


Figura 9.38.

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

- 9.31. Un circuito con dos elementos en serie tiene una intensidad de corriente y una tensión total

$$i = 13,42 \operatorname{sen}(500t - 53,4^\circ) \text{ (A)} \quad v = 150 \operatorname{sen}(500t + 10^\circ) \text{ (V)}$$

Identificar los dos elementos.

Solución: $R = 5 \Omega$, $L = 20 \text{ mH}$.

- 9.32. Un circuito con dos elementos en serie tiene una intensidad de corriente y una tensión total

$$i = 4 \cos(2000t + 13,2^\circ) \text{ (A)} \quad v = 200 \operatorname{sen}(2000t + 5^\circ) \text{ (V)}$$

Identificar los dos elementos.

Solución: $R = 30 \Omega$, $C = 12,5 \mu\text{F}$.

- 9.33. Un circuito serie RC , con $R = 27,5 \Omega$ y $C = 66,7 \mu\text{F}$, tiene una tensión y una intensidad de corriente sinusoidales de pulsación 1500 rad/s. Determinar el ángulo de fase que la intensidad adelanta a la tensión.

Solución: 20° .

- 9.34. Un circuito serie RLC , con $R = 15 \Omega$, $L = 80 \text{ mH}$ y $C = 30 \mu\text{F}$, tiene una intensidad de corriente y una tensión sinusoidales de pulsación 500 rad/s. Determinar el ángulo de desfase y si la corriente adelanta o retrasa respecto a la tensión total.

Solución: $60,6^\circ$; adelanta.

- 9.35. Un condensador $C = 35 \mu\text{F}$ está conectado en paralelo con un cierto elemento. Identificar el elemento, sabiendo que la tensión y la intensidad de corriente total son

$$v = 150 \operatorname{sen} 3000t \text{ (V)} \quad i_T = 16,5 \operatorname{sen} (3000t + 72,4^\circ) \text{ (A)}$$

Solución: $R = 30,1 \Omega$.

- 9.36. Un circuito serie de dos elementos, con $R = 20 \Omega$ y $L = 20 \text{ mH}$, tiene una impedancia de $40/\theta \Omega$. Determinar el ángulo θ y la frecuencia.

Solución: 60° , 276 Hz.

- 9.37. Determinar la impedancia del circuito serie RL , con $R = 25 \Omega$ y $L = 10 \text{ mH}$, para a) 100 Hz, b) 500 Hz, c) 1000 Hz.

Solución: a) $25,8/14,1^\circ \Omega$; b) $40,1/51,5^\circ \Omega$; c) $67,6/68,3^\circ \Omega$.

- 9.38. Determinar las constantes del circuito serie de dos elementos si la tensión suministrada

$$v = 150 \operatorname{sen} (5000t + 45^\circ) \text{ (V)}$$

produce una intensidad de corriente $i = 3 \operatorname{sen} (5000t - 15^\circ) \text{ (A)}$.

Solución: 25Ω , $8,66 \text{ mH}$.

- 9.39. Un circuito serie con $R = 10 \Omega$ y $C = 40 \mu\text{F}$ tiene una tensión aplicada $v = 500 \cos (2500t - 20^\circ) \text{ (V)}$. Determinar la intensidad i por el circuito.

Solución: $25 \sqrt{2} \cos (2500t + 25^\circ) \text{ (A)}$.

- 9.40. Sean tres impedancias montadas en serie: $Z_1 = 3/45^\circ \Omega$, $Z_2 = 10\sqrt{2}/45^\circ \Omega$, $Z_3 = 5/-90^\circ \Omega$. Determinar la tensión aplicada V , si la tensión entre los extremos de Z_1 es $27/-10^\circ \text{ V}$.

Solución: $126,5/-24,6^\circ \text{ V}$.

- 9.41. En el circuito de la Figura 9.39 con tres elementos en serie, a) determinar la intensidad de corriente I ; b) determinar la tensión en cada impedancia y representar el diagrama fasorial de las tensiones que demuestra que $V_1 + V_2 + V_3 = 100/0^\circ \text{ V}$.

Solución: a) $6,28/-9,17^\circ \text{ A}$; b) ver Figura 9.40.

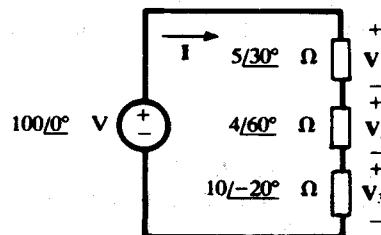


Figura 9.39.

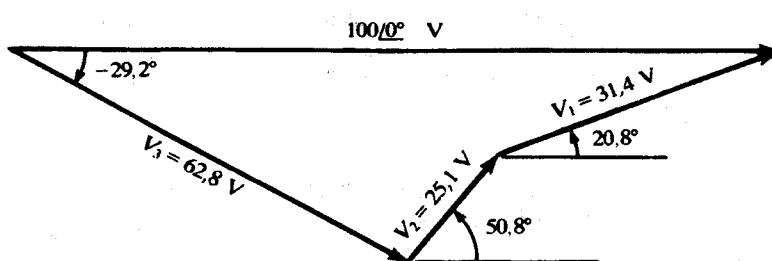


Figura 9.40.

- 9.42. Determinar Z en el circuito paralelo de la Figura 9.41, si $V = 50\angle 30^\circ \text{ V}$ e $I = 27,9\angle 57,8^\circ \text{ A}$.
Solución: $5\angle -30^\circ \Omega$.

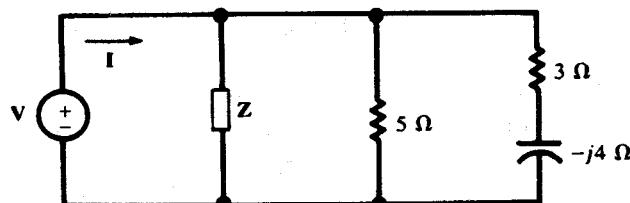


Figura 9.41.

- 9.43. Obtener la conductancia y la susceptancia que al ser alimentadas a una tensión $V = 85\angle 205^\circ \text{ V}$ consumen una corriente $I = 41,2\angle -141^\circ \text{ A}$.
Solución: $0,471 \text{ S}, 0,117 \text{ S}$ (capacitiva).

- 9.44. Una bobina real tiene una resistencia así como una inductancia y se puede representar o por un circuito serie o por uno en paralelo, como se indica en la Figura 9.42. Obtener R_p y L_p en función de R_s y L_s .

Solución: $R_p = R_s + \frac{(\omega L_s)^2}{R_s}$, $L_p = L_s + \frac{R_s^2}{\omega^2 L_s}$.

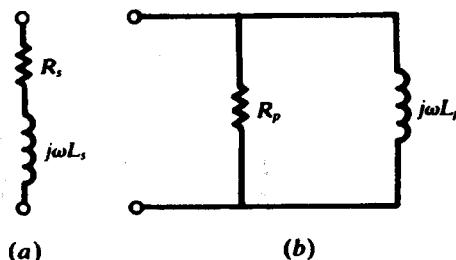


Figura 9.42.

- 9.45.** En el circuito de la Figura 9.43 se conocen los valores de las intensidades de corriente a 60 Hz: $I_T = 29,9$ A, $I_1 = 22,3$ A e $I_2 = 8$ A. Obtener las constantes R y L del circuito.

Solución: $5,8 \Omega$, $38,5 \text{ mH}$.

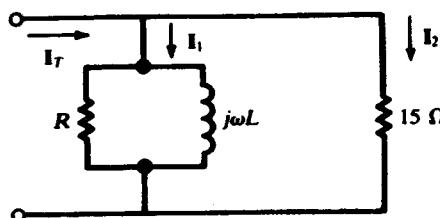


Figura 9.43.

- 9.46.** Obtener el valor de la tensión V_{AB} en el circuito con dos ramas en paralelo de la Figura 9.44, si X_L es a) 5Ω , b) 15Ω , c) 0Ω .

Solución: 50 V, para cualquier X_L .

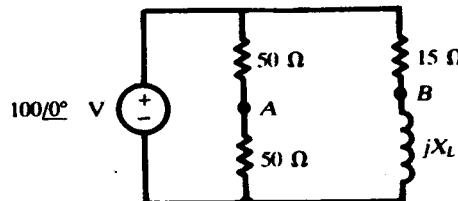


Figura 9.44.

- 9.47.** En el circuito representado en la Figura 9.45, $V_{AB} = 36,1/3,18^\circ$ V. Determinar la tensión de la fuente V .

Solución: $75^\circ - 90^\circ$ V.

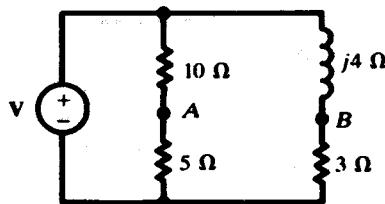


Figura 9.45.

- 9.48. En el circuito de la Figura 9.46, asignar dos grupos diferentes de corrientes de malla y demostrar que para ambos, $\Delta Z = 55,9/-26,57^\circ \Omega^2$. Para cada elección, calcular el fotor de tensión V . Obtener el fotor de la tensión en la impedancia $3 + j4 \Omega$ y comparar con V .

Solución: $V = V_{3+j4} = 22,36/-10,3^\circ \text{ V}$.

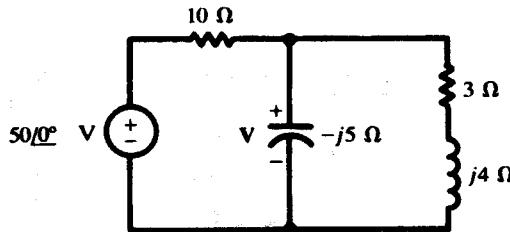


Figura 9.46.

- 9.49. Usar el método de las corrientes de malla para calcular la intensidad de corriente por la impedancia $2 + j3 \Omega$ del circuito de la Figura 9.47, debido a cada una de las fuentes V_1 y V_2 .

Solución: $2,41/6,45^\circ \text{ A}$, $1,36/141,45^\circ \text{ A}$.

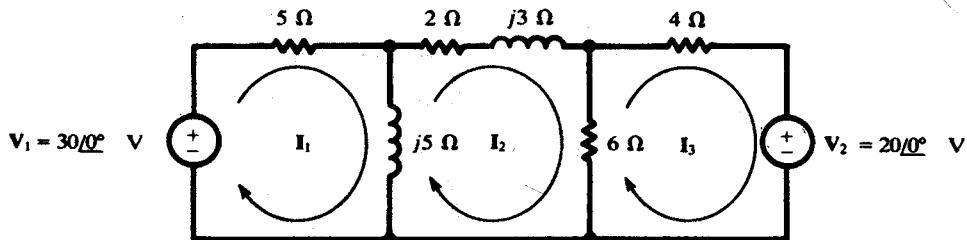


Figura 9.47.

- 9.50. En el circuito de la Figura 9.48 los dos condensadores iguales y la resistencia en paralelo se ajustan hasta que la corriente I_D es cero. Suponiendo que la fuente tiene una pulsación ω , determinar los valores de R_x y L_x .

Solución: $R_x = 1/(\omega^2 C^2 R)$, $L_x = 1/(2\omega C)$.

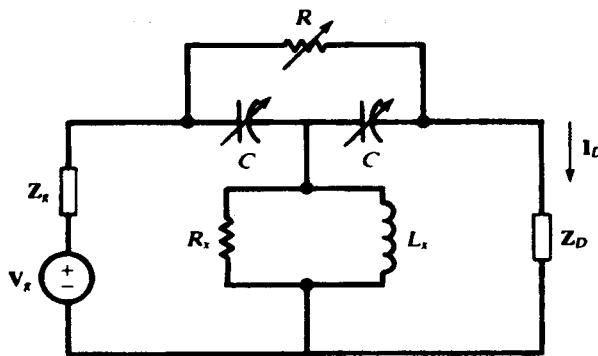


Figura 9.48.

- 9.51. Obtener la relación de intensidades de corriente I_1/I_3 , del circuito de la Figura 9.49.

Solución: $3,3/-90^\circ$.

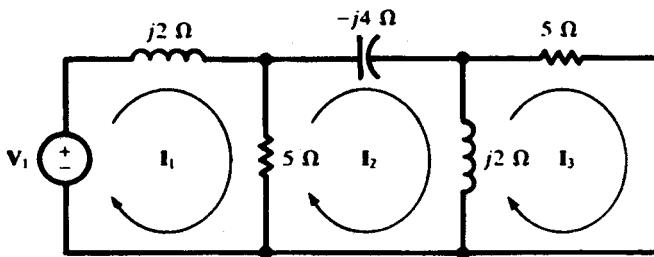


Figura 9.49.

- 9.52. Obtener $Z_{\text{ent},1}$ y $Z_{\text{transfer},13}$ del circuito de la Figura 9.49. Demostrar que $Z_{\text{transfer},31} = Z_{\text{transfer},13}$.

Solución: $1,31/21,8^\circ \Omega$, $4,31/-68,2^\circ \Omega$.

- 9.53. Obtener la relación de tensiones V_1/V_2 del circuito de la Figura 9.50 usando el método de las tensiones en los nudos.

Solución: $\frac{\Delta_{11}}{\Delta_{12}} = 1,61/-29,8^\circ$.

- 9.54. Obtener la impedancia vista por la fuente $Z_{\text{ent},1}$ en el circuito de la Figura 9.51.

Solución: $5,59/17,35^\circ \Omega$.

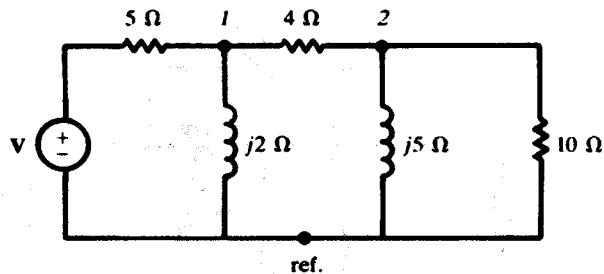


Figura 9.50.

- 9.55. Obtener los circuitos equivalentes Thévenin y Norton entre los terminales ab en el circuito de la Figura 9.51. Elegir la polaridad tal que $V' = V_{ab}$.

Solución: $V' = 20/0^\circ$ V, $I' = 5,56/-23,06^\circ$ A, $Z' = 3,6/23,06^\circ$ Ω.

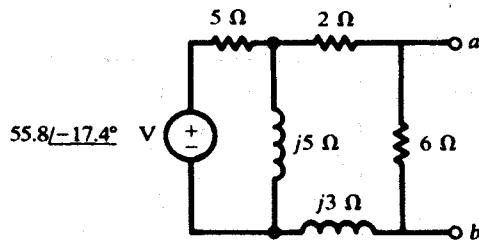


Figura 9.51.

- 9.56. Obtener los circuitos equivalentes Thévenin y Norton entre los terminales ab en el circuito de la Figura 9.52.

Solución: $V' = 11,5/-95,8^\circ$ V, $I' = 1,39/-80,6^\circ$ A, $Z' = 8,26/-15,2^\circ$ Ω.

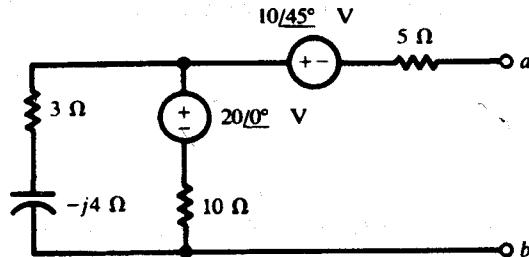


Figura 9.52.

- 9.57. Obtener los circuitos equivalentes Thévenin y Norton entre los terminales ab del circuito de la Figura 9.53.

Solución: $V' = 11,18/93,43^\circ$ V, $I' = 2,24/56,56^\circ$ A, $Z' = 5/36,87^\circ$ Ω.

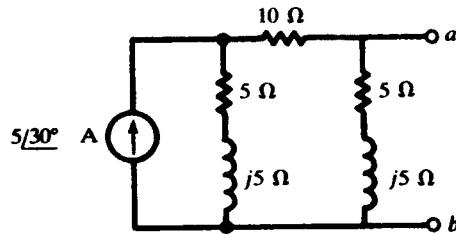


Figura 9.53.

CAPÍTULO 10

Potencia en CA

10.1. POTENCIA EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

La potencia instantánea que consume un circuito C de dos terminales (Figura 10.1) está definida por

$$p(t) = v(t)i(t) \quad (1)$$

donde $v(t)$ e $i(t)$ son la tensión y la intensidad de corriente en los terminales, respectivamente. Si p es positiva, se está suministrando energía al circuito. Si p es negativa, el circuito está devolviendo energía a la fuente.

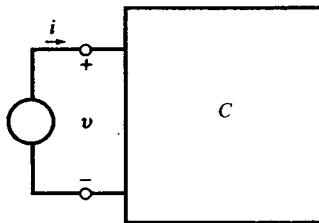


Figura 10.1.

En este capítulo se consideran tensiones e intensidades de corrientes periódicas, con interés especial en el estado estacionario sinusoidal de circuitos lineales RLC . Como la capacidad de almacenamiento de energía de una bobina o un condensador es finita, estos elementos pasivos no pueden recibir permanentemente energía. Entonces, en estado estacionario y durante cada ciclo, toda la energía que recibe una bobina o un condensador la devuelven. Sin embargo, la energía que recibe una resistencia se disipa en forma de calor, energía mecánica, química y/o electromagnética. Por tanto, la energía neta que consume un circuito pasivo durante un ciclo es positiva o cero.

EJEMPLO 10.1. En la Figura 10.2(a) se ha representado la intensidad de corriente que circula por una resistencia de $1\text{ k}\Omega$. Calcular y representar la potencia instantánea que consume $p(t)$.

De $v = Ri$ se tiene que $p(t) = vi = Ri^2 = 1000 \cdot 10^{-6} = 10^{-3} \text{ W} = 1 \text{ mW}$. Ver Figura 10.2(b).

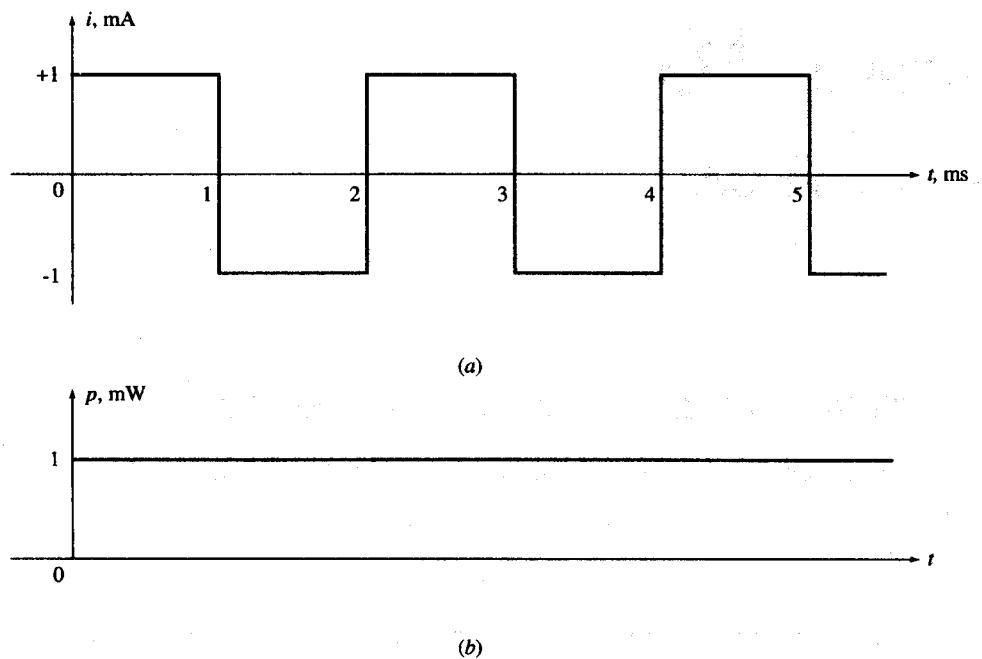


Figura 10.2.

EJEMPLO 10.2. La intensidad de corriente del Ejemplo 10.1 circula por un condensador de $0,5 \mu\text{F}$. Calcular la potencia $p(t)$ que consume y la energía $w(t)$ que almacena el condensador. Suponer que $v_C(0) = 0$. Representar $p(t)$ y $w(t)$.

La Figura 10.2(a) indica que la intensidad de corriente por el condensador es una función periódica con un período $T = 2 \text{ ms}$. Durante un período la intensidad está definida por

$$i = \begin{cases} 1 \text{ mA} & (0 < t < 1 \text{ ms}) \\ -1 \text{ mA} & (1 < t < 2 \text{ ms}) \end{cases}$$

La tensión en el condensador es también una función periódica de igual período T [Figura 10.3(a)]. Durante un período la tensión es

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i \, dt = \begin{cases} 2000t \text{ (V)} & (0 < t < 1 \text{ ms}) \\ 4 - 2000t \text{ (V)} & (1 < t < 2 \text{ ms}) \end{cases}$$

Finalmente, la potencia que consume y la energía que almacena el condensador (ambas funciones periódicas de período T) son:

$$p(t) = vi = \begin{cases} 2000t \text{ (mW)} & (0 < t < 1 \text{ ms}) \\ 2000t - 4 \text{ (mW)} & (1 < t < 2 \text{ ms}) \end{cases} \quad [\text{Figura 10.3(b)}]$$

$$w(t) = \frac{1}{2} Cv^2 = \begin{cases} t^2 \text{ (J)} & (0 < t < 1 \text{ ms}) \\ t^2 + 4 \cdot 10^{-6} - 4 \cdot 10^{-3}t \text{ (J)} & (1 < t < 2 \text{ ms}) \end{cases} \quad [\text{Figura 10.3(c)}]$$

Como método alternativo, $w(t)$ se puede obtener integrando $p(t)$. La potencia que consume el condensador durante un período es también positiva y negativa [ver Figura 10.3(b)]. La energía almacenada en el condensador es siempre positiva, como se ve en la Figura 10.3(c). La energía máxima almacenada es $W_{\max} = 10^{-6} \text{ J} = 1 \mu\text{J}$ en los instantes $t = 1, 3, 4, \dots, \text{ms}$.

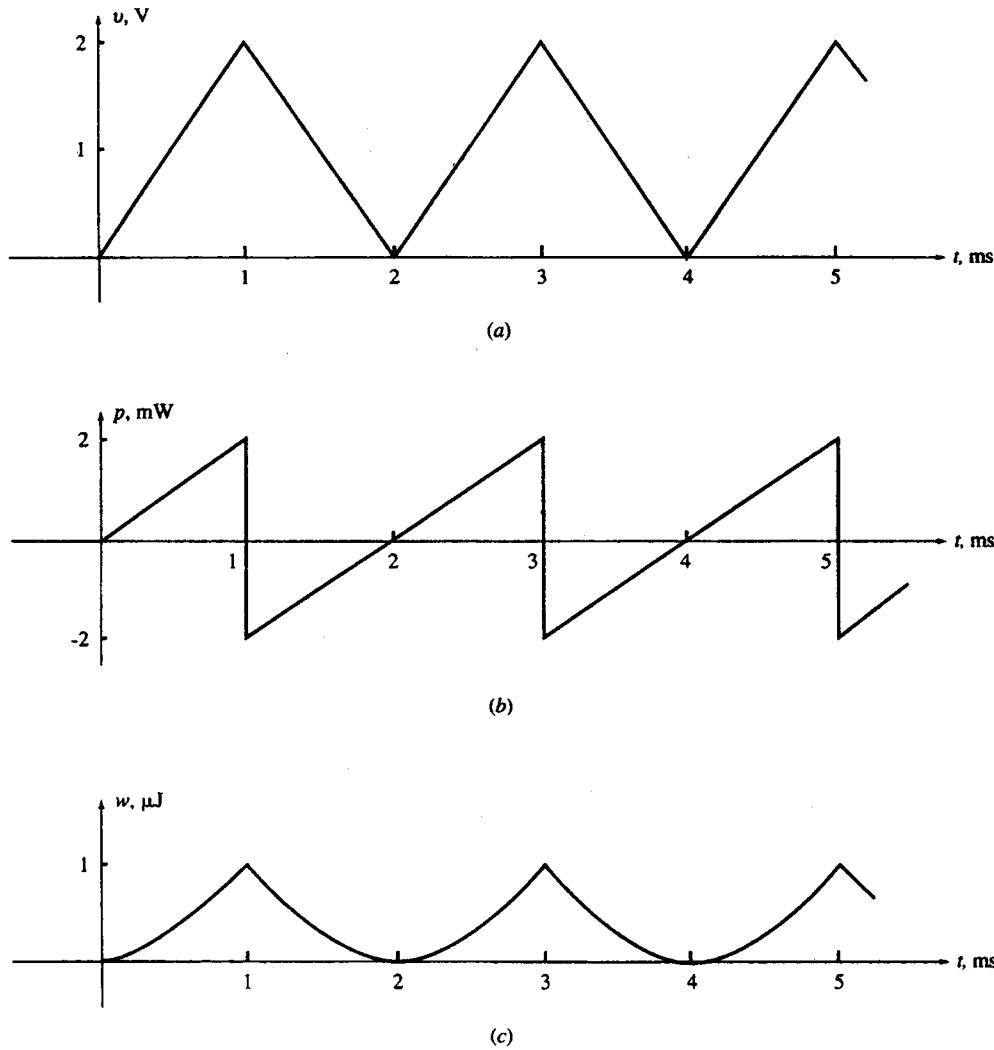


Figura 10.3.

10.2. POTENCIA EN ESTADO ESTACIONARIO SINUSOIDAL

Al suministrar una tensión sinusoidal, $v = V_m \cos \omega t$, a una impedancia $Z = |Z|/\theta$, se establece una intensidad de corriente $i = I_m \cos (\omega t - \theta)$. La potencia total consumida por la impedancia en el instante t es

$$\begin{aligned}
 p(t) &= vi = V_m I_m \cos \omega t \cos (\omega t - \theta) = \frac{1}{2} V_m I_m [\cos \theta + \cos (2\omega t - \theta)] \\
 &= V_{ef} I_{ef} [\cos \theta + \cos (2\omega t - \theta)] \\
 &= V_{ef} I_{ef} \cos \theta + V_{ef} I_{ef} \cos (2\omega t - \theta)
 \end{aligned} \tag{2}$$

donde $V_{ef} = V_m/\sqrt{2}$, $I_{ef} = I_m/\sqrt{2}$ e $I_{ef} = V_{ef}/|Z|$. La potencia instantánea según (2) consta de una componente sinusoidal, $V_{ef} I_{ef} \cos (2\omega t - \theta)$ más un valor constante $V_{ef} I_{ef} \cos \theta$, que es el valor medio de la potencia, P_{med} . Esto queda ilustrado en la Figura 10.4. Durante una parte del ciclo, la potencia instantánea es positiva, lo que indica que la potencia va hacia la carga. Durante el resto del ciclo, la potencia instantánea puede ser negativa, lo que indica que la carga devuelve potencia. El flujo neto de potencia durante un ciclo no puede ser negativo, y se conoce como *potencia media*.

EJEMPLO 10.3. Se aplica una tensión $v = 140 \cos \omega t$ a una impedancia $Z = 5/-60^\circ$. Calcular $p(t)$. La tensión v aplicada produce una intensidad de corriente $i = 28 \cos(\omega t + 60^\circ)$. Entonces,

$$p(t) = vi = 140(28) \cos \omega t \cos(\omega t + 60^\circ) = 980 + 1960 \cos(2\omega t + 60^\circ)$$

La potencia instantánea tiene una componente constante de 980 W y una componente sinusoidal de doble frecuencia que la fuente. El gráfico de p frente a t es similar al de la Figura 10.4 con $\theta = -\pi/3$.

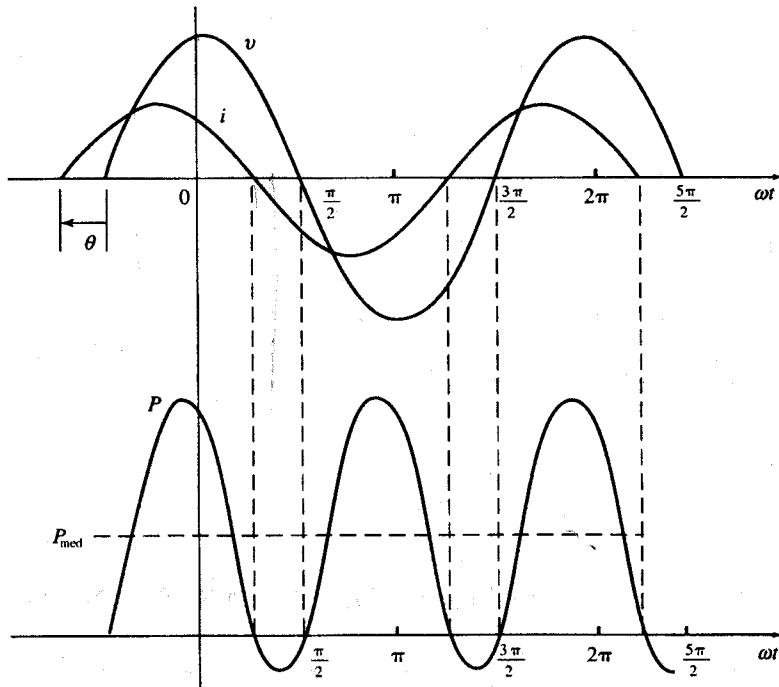


Figura 10.4.

10.3. POTENCIA MEDIA O ACTIVA

La potencia neta o media $P_{\text{med}} = \langle p(t) \rangle$ que consume una carga durante un período se denomina *potencia activa*. Como el valor medio de $\cos(2\omega t - \theta)$ en un período completo es cero, de (2) se obtiene,

$$P_{\text{med}} = V_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \cos \theta \quad (3)$$

Si $Z = R + jX = |Z|/\theta$, entonces $\cos \theta = R/|Z|$ y P_{med} puede ser expresada como

$$P_{\text{med}} = V_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \frac{R}{|Z|} \quad (4)$$

o

$$P_{\text{med}} = \frac{V_{\text{ef}}^2}{|Z|^2} R \quad (5)$$

o

$$P_{\text{med}} = RI_{\text{ef}}^2 \quad (6)$$

La potencia media no puede ser negativa. Depende de V , I y del ángulo de desfase entre ambas. Para unos V_{ef} e I_{ef} dados, P es máxima cuando $\theta = 0$. Esto ocurre cuando la carga es puramente resistiva. Para una carga puramente reactiva, $|\theta| = 90^\circ$ y $P_{\text{med}} = 0$. La relación de la P_{med} con el producto $V_{\text{ef}} I_{\text{ef}}$ se denomina *factor de potencia*, fp. Según (3), la relación es igual a $\cos \theta$ y, por tanto,

$$\text{fp} = \frac{P_{\text{med}}}{V_{\text{ef}} I_{\text{ef}}} \quad 0 \leq \text{fp} \leq 1 \quad (7)$$

El subíndice med en la potencia activa P_{med} se omite frecuentemente y, por tanto, en el resto de este capítulo P representará la potencia activa.

EJEMPLO 10.4. Calcular la potencia activa P suministrada por una fuente de tensión sinusoidal con $V_{\text{ef}} = 110$ V a una impedancia $Z = 10 + j8$. Determinar el factor de potencia.

$$Z = 10 + j8 = 12,81/38,7^\circ \Omega$$

$$I_{\text{ef}} = \frac{V_{\text{ef}}}{Z} = \frac{110}{12,81/38,7^\circ} = 8,59/-38,7^\circ \text{ A}$$

$$P = V_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \cos \theta = 110(8,59 \cos 38,7^\circ) = 737,43 \text{ W}$$

$$\text{fp} = \cos 38,7^\circ = 0,78$$

Solución alternativa

Se tiene que $|Z|^2 = 100 + 64 = 164$. Entonces,

$$P = V_{\text{ef}}^2 R / |Z|^2 = 110^2(10)/164 = 737,8 \text{ W}$$

El método alternativo da una solución más exacta.

10.4. POTENCIA REACTIVA

Si un circuito pasivo contiene bobinas, condensadores o ambos tipos de elementos, una parte de la energía consumida durante un ciclo se almacena en ellos y posteriormente vuelve a la fuente. Durante el período de retorno de la energía, la potencia es negativa. La potencia envuelta en este intercambio se denomina *potencia reactiva o en cuadratura*. Aunque el efecto neto de la potencia reactiva es cero, su existencia degrada la operación de los sistemas de potencia. La potencia reactiva, que se designa como Q , se define como,

$$Q = V_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \sin \theta \quad (8)$$

Si $Z = R + jX = |Z|/\theta$, entonces $\sin \theta = X/|Z|$ y Q puede expresarse como

$$Q = V_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \frac{X}{|Z|} \quad (9)$$

o

$$Q = \frac{V_{\text{ef}}^2}{|Z|^2} X \quad (10)$$

o

$$Q = X I_{\text{ef}}^2 \quad (11)$$

La unidad de la potencia reactiva es el *voltamperio reactivo* (VAr).

La potencia reactiva Q depende de V , I y del desfase entre ellas. Es el producto de la tensión y la componente de la corriente que desfaza 90° con la tensión. Q es cero para $\theta = 0^\circ$. Esto sucede para una carga puramente resistiva, cuando V e I están en fase. Cuando la carga es puramente reactiva, $|\theta| = 90^\circ$ y Q alcanza su valor máximo para una V y una I dadas. Obsérvese que, mientras P es siempre positiva, Q puede tomar valores positivos (para una carga inductiva donde la corriente está retrasada respecto a la tensión) o valores negativos (para una carga capacitiva en la que la corriente está adelantada respecto a la tensión). Es habitual citar el valor absoluto de Q y el tipo de carga. Por ejemplo, 100 kVAr inductiva indica $Q = 100$ kVAr y 100 kVAr capacitiva indica $Q = -100$ kVAr.

EJEMPLO 10.5. La tensión y la corriente en una carga están dadas por $V_{\text{ef}} = 110$ V e $I_{\text{ef}} = 20/-50^\circ$ A. Calcular P y Q .

$$P = 110(20 \cos 50^\circ) = 1414 \text{ W} \quad Q = 110(20 \sin 50^\circ) = 1685 \text{ VAr}$$

10.5. RESUMEN DE LA POTENCIA EN CA PARA R , L Y C

La potencia en CA en resistencias, bobinas y condensadores está resumida en la Tabla 10.1. Se usan V_{ef} e I_{ef} para incluir los ángulos de fase. La última columna de la Tabla 10.1 es $S = VI$, donde S es conocida como *potencia aparente*. S se explica más detalladamente en la Sección 10.7.

Tabla 10.1.

		$v = (V\sqrt{2}) \cos \omega t$	$V_a = V/0^\circ$	$i = (I\sqrt{2}) \cos(\omega t - \theta)$	$I_a = I/-\theta^\circ$	$P = VI \cos \theta, Q = VI \sin \theta$ y $S = VI$ (potencia aparente)		
	Z			I_a	$p(t)$	P	Q	S
R	R	$\frac{V\sqrt{2}}{R} \cos \omega t$	$\frac{V}{R}/0^\circ$	$\frac{V^2}{R} (1 + \cos 2\omega t)$	$\frac{V^2}{R}$	0	$\frac{V^2}{R}$	
L	$jL\omega$	$\frac{V\sqrt{2}}{L\omega} \cos(\omega t - 90^\circ)$	$\frac{V}{L\omega}/-90^\circ$	$\frac{V^2}{L\omega} \sin 2\omega t$	0	$\frac{V^2}{L\omega}$	$\frac{V^2}{L\omega}$	
C	$\frac{-j}{C\omega}$	$V\sqrt{2}C\omega \cos(\omega t + 90^\circ)$	$VC\omega/90^\circ$	$-V^2C\omega \sin 2\omega t$	0	$-V^2C\omega$	$V^2C\omega$	

EJEMPLO 10.6. Calcular la potencia suministrada por una fuente sinusoidal a una resistencia R . Denominar a los valores eficaces de la tensión y la intensidad como V e I , respectivamente.

$$\begin{aligned}
 p_R(t) &= vi_R = (\sqrt{2}V \cos \omega t)(\sqrt{2}I \cos \omega t) = 2VI \cos^2 \omega t = VI(1 + \cos 2\omega t) = \\
 &= RI^2(1 + \cos 2\omega t) = \frac{V^2}{R} (1 + \cos 2\omega t)
 \end{aligned}$$

Por tanto, $P_R = \frac{V^2}{R} = RI^2 \quad Q = 0$

La potencia instantánea consumida por una resistencia varía sinusoidalmente entre cero y $2RI^2$, con el doble de la frecuencia de la excitación, y con un valor medio de $P = RI^2$. En la Figura 10.5(a) se han representado $v(t)$ y $p_R(t)$.

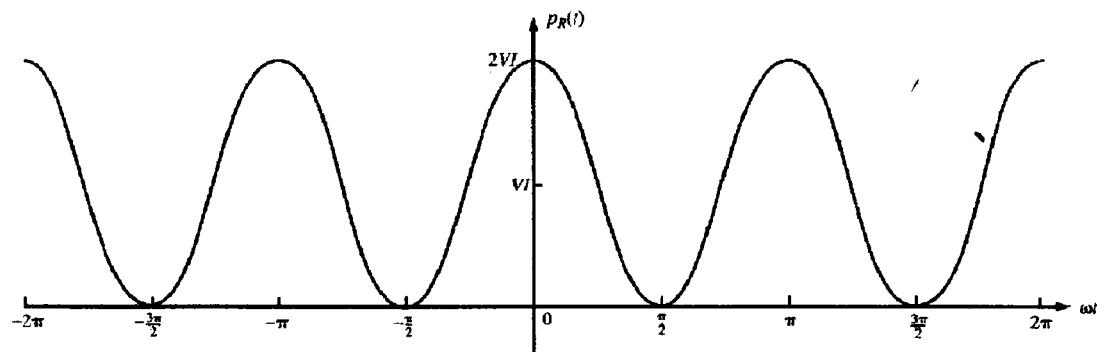
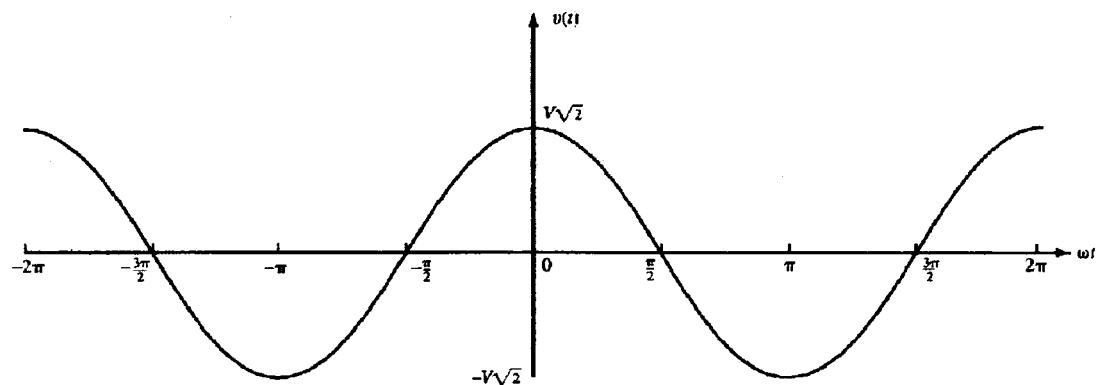
EJEMPLO 10.7. Calcular la potencia de CA consumida por una bobina L .

$$p_L(t) = vi_L = (\sqrt{2}V \cos \omega t)[\sqrt{2}I \cos(\omega t - 90^\circ)] = 2VI \cos \omega t \sin \omega t = VI \sin 2\omega t = \omega LI^2 \sin 2\omega t$$

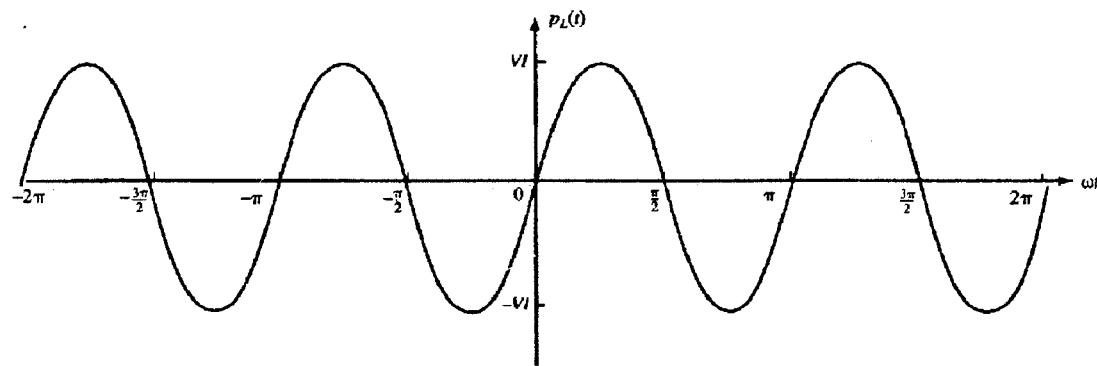
$$= \frac{V^2}{L\omega} \sin 2\omega t$$

Por tanto, $P = 0 \quad Q = VI = \frac{V^2}{L\omega} = L\omega I^2$

La potencia instantánea consumida por una bobina varía sinusoidalmente entre Q y $-Q$, con el doble de frecuencia que la fuente, y un valor medio nulo. Véase Figura 10.5(b).



(a)



(b)

Figura 10.5 (continúa).

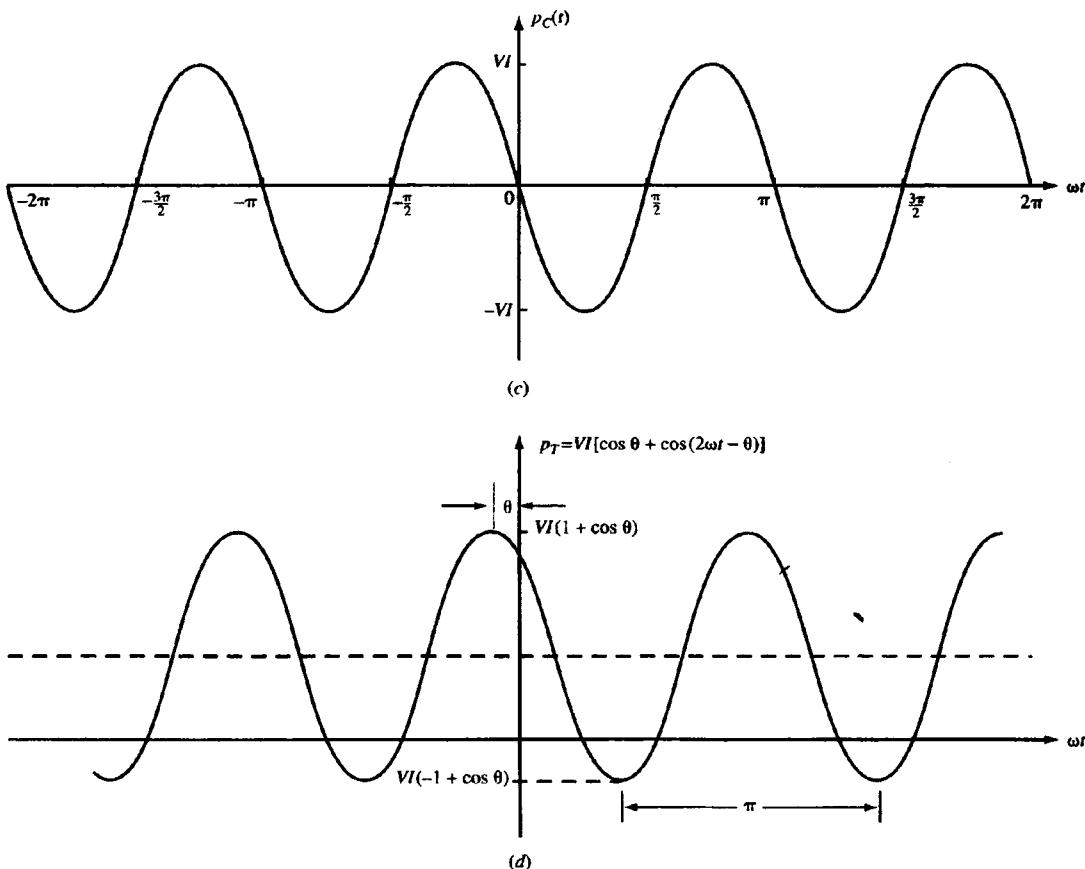


Figura 10.5 (continuación).

EJEMPLO 10.8. Calcular la potencia de CA consumida por un condensador C .

$$p_C(t) = vi_C = (\sqrt{2}V \cos \omega t)[\sqrt{2}I \cos(\omega t + 90^\circ)] = -2VI \cos \omega t \sin \omega t = -VI \sin 2\omega t = -\omega CV^2 \sin 2\omega t$$

$$= -\frac{I^2}{C\omega} \sin 2\omega t$$

Por tanto,

$$P = 0 \quad Q = -VI = -\frac{I^2}{C\omega} = -C\omega V^2$$

Como en el caso de la bobina, la potencia instantánea consumida por un condensador varía sinusoidalmente entre $-Q$ y Q , con el doble de frecuencia que la fuente, y un valor medio nulo. Véase Figura 10.5(c).

10.6. INTERCAMBIO DE ENERGÍA ENTRE UNA BOBINA Y UN CONDENSADOR

Si una bobina y un condensador se alimentan en paralelo por la misma fuente de tensión de CA o en serie con la misma fuente de intensidad, la potencia consumida por el condensador está 180° desfasada respecto a la potencia que consume la bobina. Esto está explícitamente reflejado en los signos opuestos de la potencia reactiva Q para la bobina y el condensador. En ese caso, la bobina y el condensador intercambiarán energía una con otra, al margen de la fuente. Esto reduce la potencia reactiva suministrada por la fuente a la combinación LC y, por consiguiente, mejora el factor de potencia. Ver las Secciones 10.8 y 10.9.

EJEMPLO 10.9. Calcular la potencia instantánea total $p(t)$, la potencia activa P y la potencia reactiva Q , suministradas por una fuente $v = (V\sqrt{2}) \cos \omega t$ a una combinación paralelo RLC .

La potencia instantánea total es

$$p_T = vi = v(i_R + i_L + i_C) = p_R + p_L + p_C$$

Sustituyendo los valores de p_R , p_L y p_C calculados en los Ejemplos 10.6, 10.7 y 10.8, respectivamente, se obtiene

$$p_T = \frac{V^2}{R} (1 + \cos 2\omega t) + V^2 \left[\left(\frac{1}{L\omega} - C\omega \right) \sin 2\omega t \right]$$

La potencia media o activa es

$$p_T = p_R = V^2/R$$

La potencia reactiva es

$$Q_T = Q_L + Q_C = V^2 \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega \right) \quad (12)$$

Para $(1/L\omega) - C\omega = 0$, la potencia reactiva total es cero. La Figura 10.5(d) muestra $p_T(t)$ para una carga con un factor de potencia en adelanto.

10.7. POTENCIA COMPLEJA, POTENCIA APARENTE Y TRIÁNGULO DE POTENCIAS

Las dos componentes P y Q de la potencia tienen diferentes significados y no pueden ser sumados aritméticamente. Sin embargo, pueden ser representados apropiadamente en forma de una magnitud vectorial denominada *potencia compleja S*, que se define como $S = P + jQ$. El módulo $|S| = \sqrt{P^2 + Q^2} = V_{ef} I_{ef}$ se denomina *potencia aparente S* y se expresa en unidades de voltamperios (VA). Las tres magnitudes escalares, S , P y Q , se pueden representar geométricamente como la hipotenusa, el cateto horizontal y el vertical, respectivamente, de un triángulo rectángulo (denominado triángulo de potencias), como se ve en la Figura 10.6(a). El triángulo de potencias es simplemente el triángulo de la impedancia Z multiplicado por el factor I_{ef}^2 según muestra la Figura 10.6(b). En la Figura 10.6(c) y (d) se han representado los triángulos de potencias de una carga inductiva y una carga capacitiva, respectivamente.

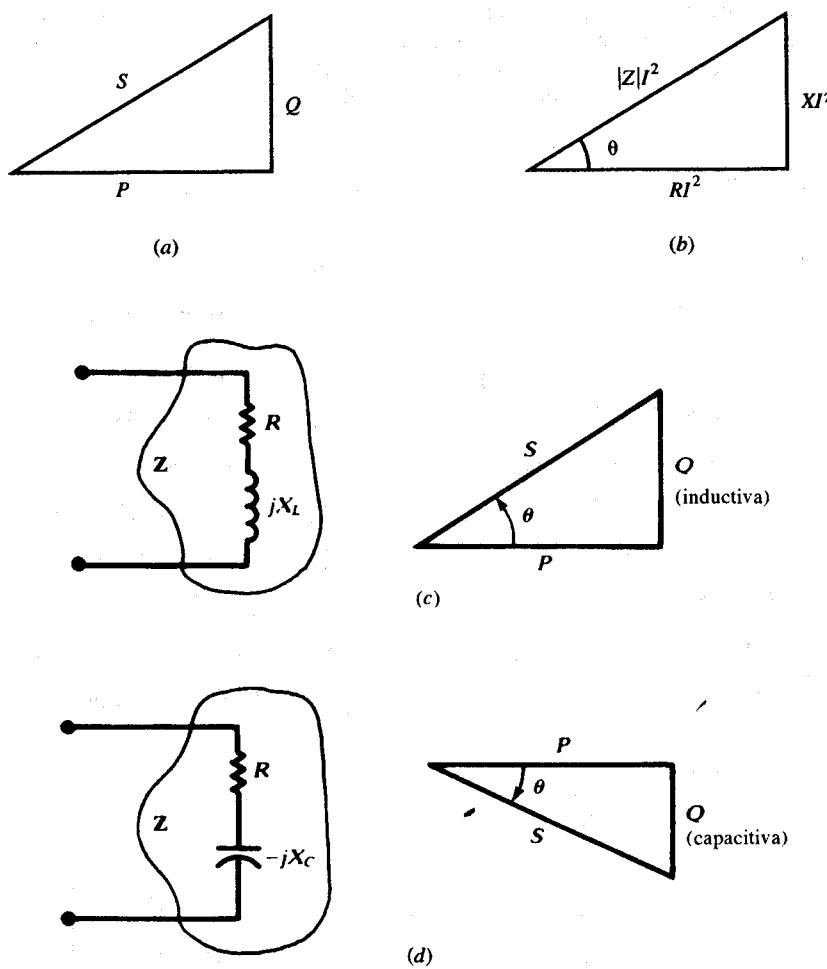


Figura 10.6.

Se puede probar fácilmente que $S = V_{\text{ef}} I_{\text{ef}}^*$, donde V_{ef} es el complejo del valor eficaz de la tensión e I_{ef}^* es el complejo conjugado del valor eficaz de la intensidad de corriente. Una fórmula equivalente es $S = I_{\text{ef}}^2 Z$.

En resumen,

$$\text{Potencia compleja: } S = V_{\text{ef}} I_{\text{ef}}^* = P + jQ = I_{\text{ef}}^2 Z \quad (13)$$

$$\text{Potencia activa: } P = \text{Re}[S] = V_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \cos \theta \quad (14)$$

$$\text{Potencia reactiva: } Q = \text{Im}[S] = V_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \sin \theta \quad (15)$$

$$\text{Potencia aparente: } S = V_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \quad (16)$$

EJEMPLO 10.10. a) Una tensión sinusoidal de valor eficaz $V_{\text{ef}} = 10 \text{ V}$ se conecta a una impedancia $\mathbf{Z}_1 = 1 + j\Omega$ según muestra la Figura 10.7(a). Calcular, i_1 , $\mathbf{I}_{1,\text{ef}}$, p_1 , Q_1 , el factor de potencia fp_1 y \mathbf{S}_1 . b) Repetir el apartado a) después de sustituir la carga \mathbf{Z}_1 por $\mathbf{Z}_2 = 1 - j\Omega$, según la Figura 10.7(b). c) Repetir el apartado a) después de conectar en paralelo \mathbf{Z}_1 y \mathbf{Z}_2 , como se ve en la Figura 10.7(c).

Sea $v = 10\sqrt{2} \cos \omega t$.

a) Véase Figura 10.7(a).

$$\mathbf{Z}_1 = \sqrt{2}/45^\circ$$

$$i_1 = 10 \cos(\omega t - 45^\circ)$$

$$\mathbf{I}_{1,\text{ef}} = 5\sqrt{2}/-45^\circ$$

$$\begin{aligned} p_1(t) &= (100\sqrt{2}) \cos \omega t \cos(\omega t - 45^\circ) = \\ &= 50 + (50\sqrt{2}) \cos(2\omega t - 45^\circ) \text{ W} \end{aligned}$$

$$P_1 = V_{\text{ef}} I_{1,\text{ef}} \cos 45^\circ = 50 \text{ W}$$

$$Q_1 = V_{\text{ef}} I_{1,\text{ef}} \sin 45^\circ = 50 \text{ VAr}$$

$$\mathbf{S}_1 = P_1 + jQ_1 = 50 + j50$$

$$S_1 = |\mathbf{S}_1| = 50\sqrt{2} = 70,7 \text{ VA}$$

$$\text{fp}_1 = 0,707 \text{ en retraso}$$

b) Véase Figura 10.7(b).

$$\mathbf{Z}_2 = \sqrt{2}/-45^\circ$$

$$i_2 = 10 \cos(\omega t + 45^\circ)$$

$$\mathbf{I}_{2,\text{ef}} = 10\sqrt{2}/45^\circ$$

$$\begin{aligned} p_2(t) &= (100\sqrt{2}) \cos \omega t \cos(\omega t + 45^\circ) \text{ W} \\ &= 50 + (50\sqrt{2}) \cos(2\omega t + 45^\circ) \text{ W} \end{aligned}$$

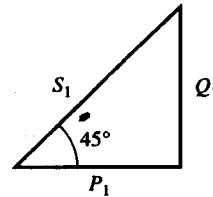
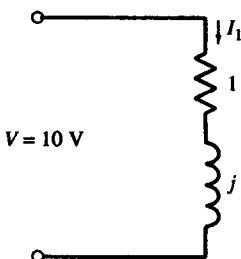
$$P_2 = V_{\text{ef}} I_{2,\text{ef}} \cos 45^\circ = 50 \text{ W}$$

$$Q_2 = -V_{\text{ef}} I_{2,\text{ef}} \sin 45^\circ = -50 \text{ VAr}$$

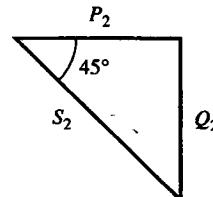
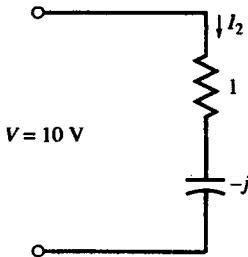
$$\mathbf{S}_2 = P_2 + jQ_2 = 50 - j50$$

$$S_2 = |\mathbf{S}_2| = 50\sqrt{2} = 70,7 \text{ VA}$$

$$\text{fp}_2 = 0,707 \text{ en adelante}$$

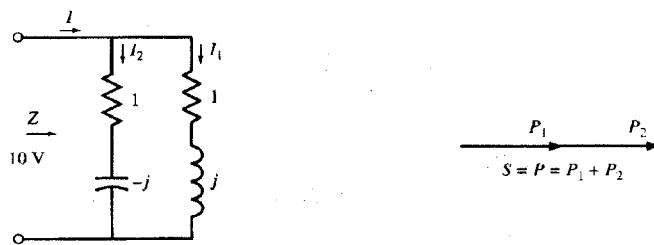


(a)

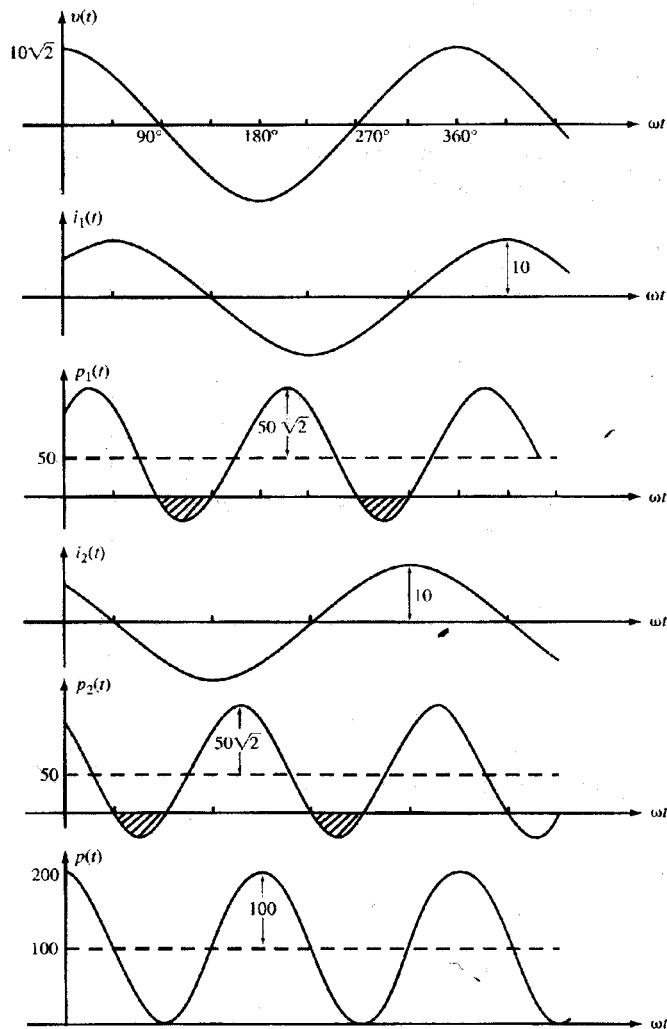


(b)

Figura 10.7 (continúa).



(c)



(d)

Figura 10.7 (continuación).

c) Véase Figura 10.7(c)

$$\begin{aligned} Z &= Z_1 \parallel Z_2 = \frac{(1+j)(1-j)}{(1+j)+(1-j)} = 1 \\ i &= 10\sqrt{2} \cos \omega t \\ I_{\text{ef}} &= 10 \\ p(t) &= 200 \cos^2 \omega t = 100 + 100 \cos 2\omega t \text{ (W)} \\ P &= V_{\text{ef}} I_{\text{ef}} = 100 \text{ W} \\ Q &= 0 \\ S &= P = 100 \\ S &= |S| = 100 \text{ VA} \\ \text{fp} &= 1 \end{aligned}$$

Los resultados del apartado c) también pueden obtenerse observando que para la combinación $Z_1 \parallel Z_2$ en paralelo, $i = i_1 + i_2$ y, por consiguiente,

$$\begin{aligned} p(t) &= p_1(t) + p_2(t) = \\ &= [50 + 50\sqrt{2} \cos(2\omega t - 45^\circ)] + [50 + 50\sqrt{2} \cos(2\omega t + 45^\circ)] = \\ &= 100 + 100 \cos 2\omega t \text{ W} \\ P &= P_1 + P_2 = 50 + 50 = 100 \text{ W} \\ Q &= Q_1 + Q_2 = 50 - 50 = 0 \\ S &= 100 < S_1 + S_2 \end{aligned}$$

En las Figuras 10.7(a), (b) y (c) se han representado los triángulos de potencias. La Figura 10.7(d) muestra las gráficas de v , i y p de las tres cargas.

EJEMPLO 10.11. Un cierto circuito pasivo tiene una impedancia equivalente $Z = 3 + j4 \Omega$ y una tensión aplicada

$$v = 42,5 \cos(1000t + 30^\circ) \text{ (V)}$$

Obtener la información completa sobre las potencias.

$$V_{\text{ef}} = \frac{42,5}{\sqrt{2}} \angle 30^\circ \text{ V}$$

$$I_{\text{ef}} = \frac{V_{\text{ef}}}{Z} = \frac{(42,5/\sqrt{2})/30^\circ}{5/53,13^\circ} = \frac{8,5}{\sqrt{2}} \angle -23,13^\circ \text{ A}$$

$$S = V_{\text{ef}} I_{\text{ef}}^* = 180,6 \angle 53,13^\circ = 108,4 + j144,5$$

Por tanto, $P = 108,4 \text{ W}$, $Q = 144,5 \text{ VAr (inductiva)}$, $S = 180,6 \text{ VA}$ y $\text{fp} = \cos 53,13^\circ = 0,6$ en retraso.

10.8. CIRCUITOS CONECTADOS EN PARALELO

La potencia compleja S es también útil para analizar circuitos reales, por ejemplo, un conjunto de electrodomésticos conectados en la misma línea de potencia. Según la Figura 10.8,

$$\begin{aligned} S_T &= V_{\text{ef}} I_{\text{ef}}^* = V_{\text{ef}} (I_{1,\text{ef}}^* + I_{2,\text{ef}}^* + \dots + I_{n,\text{ef}}^*) = \\ &= S_1 + S_2 + \dots + S_n \end{aligned}$$

de donde

$$P_T = P_1 + P_2 + \dots + P_n$$

$$Q_T = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$$

$$S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2}$$

$$\text{fp}_T = \frac{P_T}{S_T}$$

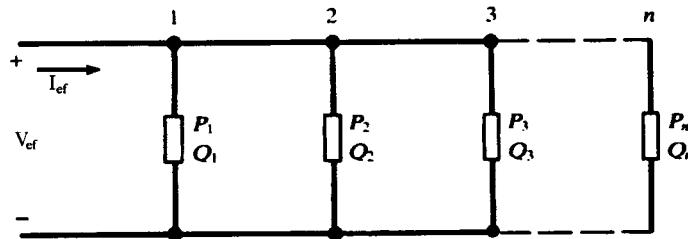


Figura 10.8.

Estos resultados (que son los mismos para circuitos conectados en serie) implican que el triángulo de potencias del circuito se puede obtener sumando los triángulos de cada una de las ramas. En el ejemplo de la Figura 10.9, $n = 3$, con las ramas 1 y 3 supuestas inductivas y la rama 2 capacitiva. En ese diagrama, algunos triángulos pueden degenerar simplemente en segmentos rectos si las correspondientes R o X son nulas.

Si los datos de potencia de las ramas individuales no son importantes, el circuito puede ser sustituido por su admitancia equivalente, y con ella se puede calcular directamente S_T .

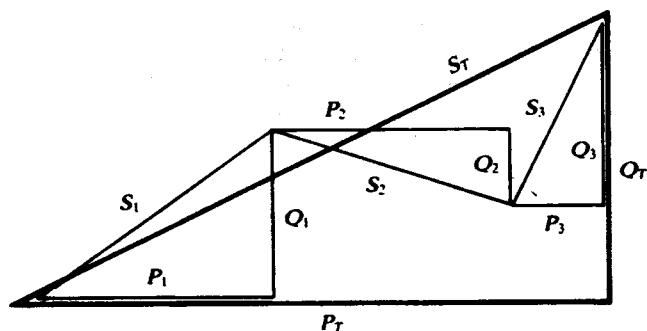


Figura 10.9.

EJEMPLO 10.12. Se conectan tres cargas en paralelo a una línea de CA de 6 kV_{ef} , como se ve en la Figura 10.8. Sabiendo que

$$P_1 = 10 \text{ kW}, \text{fp}_1 = 1; \quad P_2 = 20 \text{ kW}, \text{fp}_2 = 0,5 \text{ en retraso}; \quad P_3 = 15 \text{ kW}, \text{fp}_3 = 0,6 \text{ en retraso},$$

calcular P_T , Q_T , S_T , fp_T , y la intensidad de corriente I_{ef} .

En primer lugar se calcula la potencia reactiva de cada carga:

$$\begin{array}{lll} \text{fp}_1 = \cos \theta_1 = 1 & \text{tg } \theta_1 = 0 & Q_1 = P_1 \text{ tg } \theta_1 = 0 \text{ kVar} \\ \text{fp}_2 = \cos \theta_2 = 0,5 & \text{tg } \theta_2 = 1,73 & Q_2 = P_2 \text{ tg } \theta_2 = 34,6 \text{ kVar} \\ \text{fp}_3 = \cos \theta_3 = 0,6 & \text{tg } \theta_3 = 1,33 & Q_3 = P_3 \text{ tg } \theta_3 = 20 \text{ kVar} \end{array}$$

Entonces, P_T , Q_T , S_T y fp_T son

$$\begin{aligned} P_T &= P_1 + P_2 + P_3 = 10 + 20 + 15 = 45 \text{ W} \\ Q_T &= Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 + 34,6 + 20 = 54,6 \text{ kVar} \\ S_T &= \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{45^2 + 54,6^2} = 70,75 \text{ kVA} \\ \text{fp}_T &= P_T/S_T = 0,64 = \cos \theta_T; \theta_T = 50,5^\circ \text{ en retraso} \\ I_{\text{ef}} &= S/V_{\text{ef}} = (70,75 \text{ kVA})/(6 \text{ kV}) = 11,8 \text{ A} \\ I_{\text{ef}} &= 11,8/-50,5^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

La intensidad de corriente también se podría haber determinado de $I = I_1 + I_2 + I_3$. Sin embargo, esta opción llevaría más tiempo.

10.9. MEJORA DEL FACTOR DE POTENCIA

El servicio eléctrico a los consumidores industriales es trifásico, a diferencia de la energía monofásica que se suministra a los consumidores domésticos y pequeños comerciantes. Mientras las formas de medida y facturación varían según las utilidades, para los grandes consumidores será siempre ventajoso reducir la componente en cuadratura de su triángulo de potencias; esto se denomina «mejora o corrección del factor de potencia». Las industrias generalmente tienen una componente inductiva global debido a su gran número de motores. Cada carga individual es o una resistencia pura, con factor de potencia unidad, o una resistencia con una reactancia inductiva con un factor de potencia en retraso. Todas las cargas están conectadas en paralelo, y la impedancia equivalente hace que la corriente esté retrasada y que exista un consumo de potencia reactiva inductiva Q . Para corregir el factor de potencia se conectan a la fuente baterías trifásicas de condensadores o en el lado primario o en el secundario del transformador principal, tal que la combinación de la carga de la instalación y las baterías de condensadores presente una carga a la fuente que esté próxima al factor de potencia unidad.

EJEMPLO 10.13. ¿Qué potencia reactiva capacitiva Q debe ser proporcionada por la batería de condensadores de la Figura 10.10 para corregir el factor de potencia hasta 0,95 en retraso?

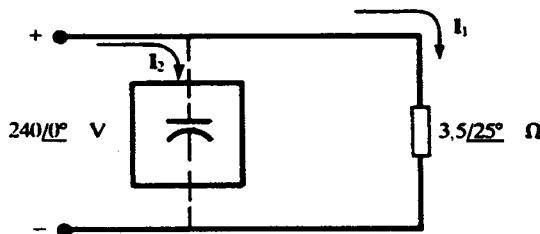


Figura 10.10.

Antes de conectar la batería de condensadores, $\text{fp} = \cos 25^\circ = 0,906$ en retraso, y

$$I_1 = \frac{240/0^\circ}{3,5/25^\circ} = 68,6/-25^\circ \text{ A}$$

$$S = V_{\text{ef}} I_{\text{ref}}^* = \left(\frac{240}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ \right) \left(\frac{68,6}{\sqrt{2}} \angle +25^\circ = 8232/25^\circ \right) = 7461 + j3479$$

Después de la corrección, el triángulo tiene la misma P , pero su ángulo es $\cos^{-1} 0,95 = 18,19^\circ$. Entonces (ver Figura 10.11),

$$\frac{3479 - Q_c}{7461} = \operatorname{tg} 18,19^\circ \quad \text{o} \quad Q_c = 1027 \text{ VAr (capacitiva)}$$

El nuevo valor de potencia aparente es $S' = 7854 \text{ VA}$, siendo el original $S = 8232 \text{ VA}$. El descenso, 378 VA, representa un 4,6%.

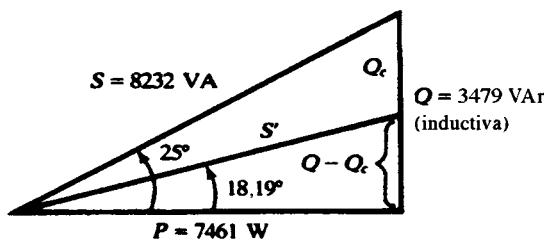


Figura 10.11

Las potencias nominales de los transformadores, los sistemas de distribución y los alternadores de la compañía se dan en kVA o MVA. Por consiguiente, una mejora en el factor de potencia, con su correspondiente reducción en kVA, libera parte de su capacidad de generación y transporte que puede ser usada para atender a otros consumidores. Ésta es la razón estructural de fondo que encarece operar con un bajo factor de potencia a un cliente industrial. Frecuentemente se realizan estudios económicos comparando el coste de una batería de condensadores frente al ahorro que supondría. Los resultados de esos estudios demostrarán si debería realizarse la corrección y el factor de potencia final que debería obtenerse.

EJEMPLO 10.14. Una carga de $P = 1000$ kW con un $\text{fp} = 0,5$ en retraso es alimentada por una fuente de 5 kV. Se añade un condensador en paralelo para corregir el factor de potencia hasta 0,8. Calcular la reducción en la intensidad de corriente suministrada por el generador.

Antes de la corrección:

$$P = 1000 \text{ kW}; \cos \theta = 0,5; S = P/\cos \theta = 2000 \text{ kVA}; I = 400 \text{ A}$$

Después de la corrección:

$$P = 1000 \text{ kW}; \cos \theta = 0,8; S = P/\cos \theta = 1250 \text{ kVA}; I = 250 \text{ A}$$

Por tanto, para la misma cantidad de potencia activa, la corriente se reduce en $(400 - 250)/400 = 0,375$ o un 37,5%.

EJEMPLO 10.15. En el Ejemplo 10.12 se añade una cuarta carga Q_4 en paralelo con las otras tres, de forma que el factor de potencia total suba a 0,8 mientras se mantiene el consumo de potencia activa total. Calcular Q_4 y la potencia aparente S resultante. Explicar el efecto sobre la corriente.

En el Ejemplo 10.12 se determinó que las potencias activa y reactiva totales eran $P = P_1 + P_2 + P_3 = 45$ kW y $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 54,6$ kVAr, respectivamente. Para compensar, se añade una carga Q_4 (con $P_4 = 0$) tal que el nuevo factor de potencia sea $\text{fp} = \cos \theta = 0,8$, $\theta = 36,87^\circ$.

Entonces,

$$\tan 36,87^\circ = P/(Q + Q_4) = 45/(54,6 + Q_4) = 0,75 \quad Q_4 = -20,85 \text{ kVAr}$$

Los resultados están resumidos en la Tabla 10.2. Al añadir la carga de compensación Q_4 se reduce la potencia reactiva de 54,6 kVAr a 33,75 kVAr y se mejora el factor de potencia. Esto reduce la potencia aparente S desde 70,75 kVA a 56,25 kVA. La corriente se reduce en la misma proporción.

Tabla 10.2.

Carga	P , kW	pf	Q , kVAr	S , kVA
#1	10	1	0	10
#2	20	0,5 retraso	34,6	40
#3	15	0,6 retraso	20	25
#(1 + 2 + 3)	45	0,64	54,6	70,75
#4	0	1 retraso	-20,85	20,85
Total	45	0,8	33,75	56,25

10.10. POTENCIA MÁXIMA TRANSFERIDA

La potencia activa suministrada a una carga Z_1 desde un generador sinusoidal con una tensión en circuito abierto V_g y una impedancia interna $Z_g = R + jX$ es máxima cuando Z_1 es igual al complejo conjugado de Z_g , esto es, $Z_1 = R - jX$. La potencia activa máxima suministrada a Z_1 resulta $P_{\max} = V_g^2/4R$.

EJEMPLO 10.16. Un generador de tensión eficaz $V_g = 100$ V y $Z_g = 1 + j$ alimenta a una carga $Z_1 = 2 \Omega$ (Figura 10.12). a) Calcular la potencia activa P_{Z_1} (consumida por Z_1), la potencia activa P_g (disipada en Z_g) y P_T (suministrada por el generador). b) Calcular el valor de una segunda carga Z_2 tal que, al ser conectada en paralelo con Z_1 , haga que la impedancia equivalente valga $Z = Z_1 \parallel Z_2 = Z_g$.

c) Conectar en paralelo la carga \mathbf{Z}_2 obtenida en el apartado b) y calcular las potencias P_Z , P_{Z_1} , P_{Z_2} (consumidas por \mathbf{Z} , \mathbf{Z}_1 y \mathbf{Z}_2 , respectivamente), P_g (consumida por \mathbf{Z}_g) y P_T (suministrada por el generador).

- a) $|\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_g| = |2 + 1 + j| = \sqrt{10}$. Por tanto, $\mathbf{I} = \mathbf{V}_g / (\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_g) = 100 / (2 + 1 + j)$ e $|I| = 10\sqrt{10}$ A. Las potencias requeridas son:

$$P_{Z_1} = \operatorname{Re}[\mathbf{Z}_1] \cdot |I|^2 = 2(10\sqrt{10})^2 = 2000 \text{ W}$$

$$P_g = \operatorname{Re}[\mathbf{Z}_g] \cdot |I|^2 = 1(10\sqrt{10})^2 = 1000 \text{ W}$$

$$P_T = P_{Z_1} + P_g = 2000 + 1000 = 3000 \text{ W}$$

- b) Sea $\mathbf{Z}_2 = a + jb$. Para determinar a y b se iguala $\mathbf{Z}_1 \parallel \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_g^* = 1 - j$. Entonces,

$$\frac{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = \frac{2(a + jb)}{2 + a + jb} = 1 - j$$

de donde $a - b - 2 = 0$ y $a + b + 2 = 0$. Resolviendo este sistema de ecuaciones, $a = 0$ y $b = -2$; sustituyendo en la ecuación anterior, $\mathbf{Z}_2 = -j2$.

- c) $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 \parallel \mathbf{Z}_2 = 1 - j$ y $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}_g = 1 - j + 1 + j = 2$.

Entonces, $I = V_g / (\mathbf{Z} + \mathbf{Z}_g) = 100 / (1 - j + 1 + j) = 100/2 = 50$ A, y, por tanto,

$$P_Z = \operatorname{Re}[\mathbf{Z}] \cdot I^2 = 1 \cdot 50^2 = 2500 \text{ W} \quad P_g = \operatorname{Re}[\mathbf{Z}_g] \cdot I^2 = 1 \cdot 50^2 = 2500 \text{ W}$$

Para calcular P_{Z_1} y P_{Z_2} se determina primero \mathbf{V}_Z en \mathbf{Z} : $\mathbf{V}_Z = \mathbf{I}\mathbf{Z} = 50(1 - j)$. Entonces $\mathbf{I}_{Z_1} = \mathbf{V}_Z / \mathbf{Z}_1 = 50(1 - j)/2 = (25\sqrt{2})/-45^\circ$, y

$$P_{Z_1} = \operatorname{Re}[\mathbf{Z}_1] \cdot |\mathbf{I}_{Z_1}|^2 = 2(25\sqrt{2})^2 = 2500 \text{ W} \quad P_{Z_2} = 0 \text{ W} \quad P_T = P_g + P_{Z_1} = 5000 \text{ W}$$

Se puede concluir que

$$P_{Z_2} = 0 \quad \text{y} \quad P_{Z_1} = P_Z = 2500 \text{ W}$$

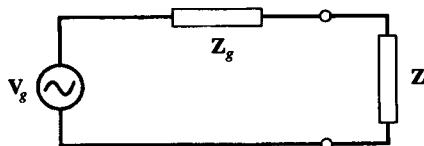


Figura 10.12.

PROBLEMAS RESUELTOS

- 10.1. La intensidad de corriente representada en la Figura 10.2(a) circula por un condensador de $0,5 \mu\text{F}$ en serie con una resistencia de $1 \text{k}\Omega$. Calcular y representar: a) la caída de tensión total entre ambos elementos en serie y b) la potencia instantánea p consumida por RC . c) Comparar los resultados con los Ejemplos 10.1 y 10.2

- a) Según la Figura 10.2(a), las tensiones durante cada ciclo son

$$v_R = \begin{cases} 1 \text{ V} & (0 < t < 1 \text{ ms}) \\ -1 \text{ V} & (1 < t < 2 \text{ ms}) \end{cases}$$

$$v_C = \frac{1}{C} \int_0^t i \, dt = \begin{cases} 2000t \text{ (V)} & (0 < t < 1 \text{ ms}) \\ 4 - 2000t \text{ (V)} & (1 < t < 2 \text{ ms}) \end{cases}$$

$$v = v_R + v_C = \begin{cases} 1 + 2000t \text{ (V)} & (0 < t < 1 \text{ ms}) \\ 3 - 2000t \text{ (V)} & (1 < t < 2 \text{ ms}) \end{cases} \quad [\text{Ver Figura 10.13(a)}]$$

- b) Durante un ciclo,

$$p_R = R i^2 = 1 \text{ mW}$$

$$p_C = v_C i = \begin{cases} 2000t \text{ (mW)} & (0 < t < 1 \text{ ms}) \\ 2000t - 4 \text{ (mW)} & (1 < t < 2 \text{ ms}) \end{cases}$$

$$p = vi = p_R + p_C = \begin{cases} 1 + 2000t \text{ (mW)} & (0 < t < 1 \text{ ms}) \\ 2000t - 3 \text{ (mW)} & (1 < t < 2 \text{ ms}) \end{cases} \quad [\text{Ver Figura 10.13(b)}]$$

- c) La potencia media suministrada al circuito durante un ciclo es igual a la potencia media consumida por la resistencia. Éste es el mismo resultado obtenido en el Ejemplo 10.1. La potencia que se intercambia entre la fuente y el circuito también coincide con el resultado obtenido en el Ejemplo 10.2.
- 10.2.** Una tensión de CA de 1 V alimenta: a) a una resistencia de 1Ω , b) a una carga $\mathbf{Z} = 1 + j \Omega$ y c) a una carga $\mathbf{Z} = 1 - j \Omega$. Calcular P en cada uno de los casos.
- a) $P = V^2/R = 1/1 = 1 \text{ W}$.
- b) $|\mathbf{Z}| = |1 + j| = \sqrt{2}$. Entonces $P = V^2/|\mathbf{Z}| = 1/\sqrt{2} = 0,707 \text{ W}$.
- c) $|\mathbf{Z}| = |1 - j| = \sqrt{2}$. Entonces $P = V^2/|\mathbf{Z}| = 1/\sqrt{2} = 0,707 \text{ W}$.
- 10.3.** Obtener la información completa sobre la potencia en un circuito pasivo alimentado con una tensión aplicada de $v = 150 \cos(\omega t + 10^\circ)$ V y que absorbe una corriente $i = 5 \cos(\omega t - 50^\circ)$ A.

Usando la potencia compleja

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{\text{ef}} \mathbf{I}_{\text{ef}}^* = \left(\frac{150}{\sqrt{2}} \angle 10^\circ \right) \left(\frac{5}{\sqrt{2}} \angle -50^\circ \right) = 375 \angle 60^\circ = 187,5 + j324,8$$

Por tanto, $P = 187,5 \text{ W}$, $Q = 324,8 \text{ VAr}$ (inductiva), $S = 375 \text{ VA}$ y $\text{fp} = \cos 60^\circ = 0,5$ en retraso.

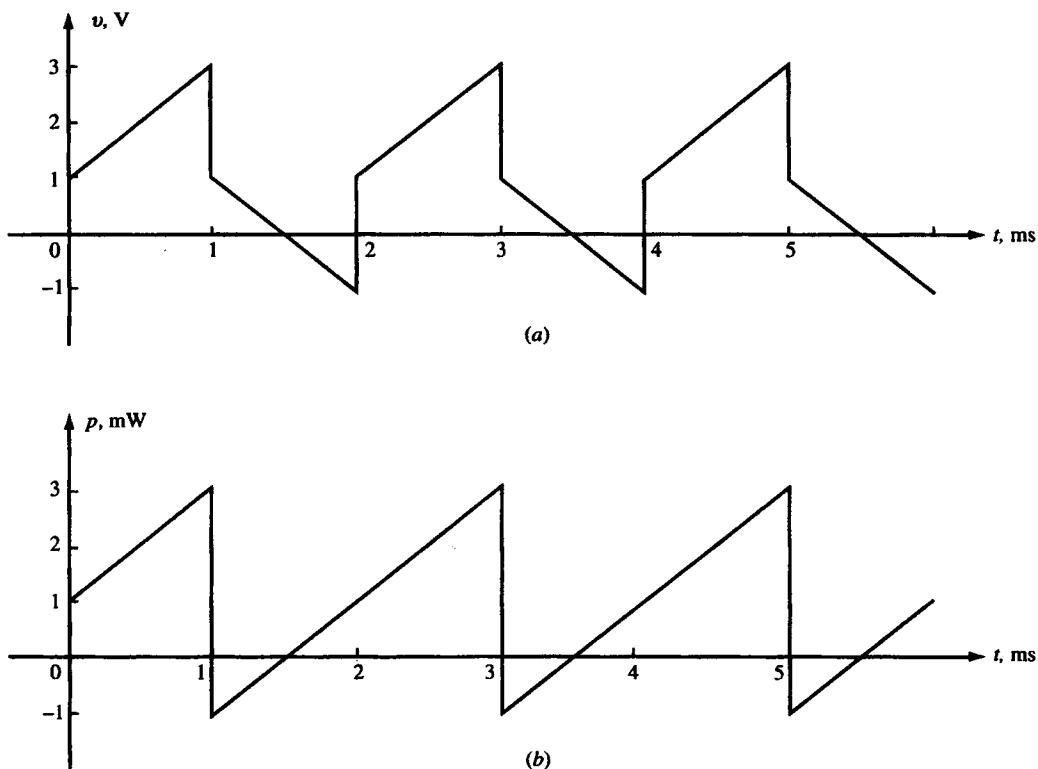


Figura 10.13.

- 10.4.** Un circuito serie con dos elementos consume una potencia activa de 940 W y tiene un factor de potencia 0,707 en adelanto. Determinar los elementos del circuito si la tensión aplicada es $v = 99 \cos(6000t + 30^\circ)$ V.

La tensión eficaz es $99/\sqrt{2} = 70$ V. Sustituyendo en $P = V_{\text{ef}}I_{\text{ef}} \cos \theta$,

$$940 = (70)I_{\text{ef}}(0,707) \quad \text{o} \quad I_{\text{ef}} = 19 \text{ A}$$

Entonces, $(19)^2R = 940$, de donde $R = 2,6 \Omega$. Para un fp en adelanto, $\theta = \cos^{-1} 0,707 = -45^\circ$ y, por tanto,

$$Z = R - jX_C \quad \text{donde} \quad X_C = R \tan 45^\circ = 2,6 \Omega$$

Finalmente, de $2,6 = 1/\omega C$, $C = 64,1 \mu\text{F}$.

- 10.5.** Determinar los dos elementos de un circuito serie conociendo la intensidad de corriente $i = 4,24 \cos(5000t + 45^\circ)$ A, la potencia activa 180 W y el factor de potencia 0,8 en retraso.

El valor eficaz de la corriente es $I_{\text{ef}} = 4,24/\sqrt{2} = 3$ A. Entonces,

$$180 = (3)^2R \quad \text{o} \quad R = 20 \Omega$$

El argumento de la impedancia es $\theta = \cos^{-1} 0,8 = +36,87^\circ$, por lo que el segundo elemento debe ser una bobina. Del triángulo de potencia,

$$\frac{Q}{P} = \frac{I_{\text{ef}}^2 X_L}{180} = \tan 36,87^\circ \quad \text{o} \quad X_L = 15 \Omega$$

Finalmente, de $15 = 5000L$, $L = 3 \text{ mH}$.

- 10.6.** Calcular las potencias consumidas por cada elemento de la Figura 10.14 y dibujar sus triángulos de potencia.

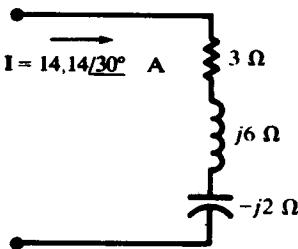


Figura 10.14.

La corriente eficaz es $14,14/\sqrt{2} = 10 \text{ A}$.

$$P = (10)^2 3 = 300 \text{ W} \quad Q_{j6\Omega} = (10)^2 6 = 600 \text{ VAr (inductiva)}$$

$$Q_{-j2\Omega} = (10)^2 2 = 200 \text{ VAr (capacitiva)}$$

$$S = \sqrt{(300)^2 + (600 - 200)^2} = 500 \text{ VA} \quad \text{fp} = P/S = 0,6 \text{ en retraso}$$

Los triángulos de potencia están representados en la Figura 10.15.

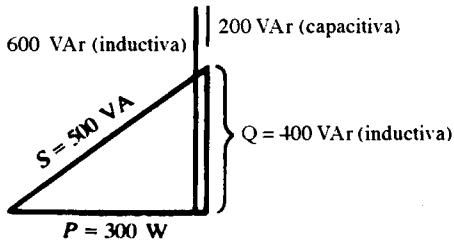


Figura 10.15.

- 10.7.** Un circuito serie con $R = 10 \Omega$ y $X_C = 5 \Omega$ tiene una tensión eficaz aplicada de 120 V. Determinar las potencias consumidas por los elementos.

$$Z = \sqrt{10^2 + 5^2} = 11,18 \Omega \quad I_{\text{ef}} = \frac{120}{11,18} = 10,73 \text{ A}$$

Entonces:

$$P = I_{\text{ef}}^2 R = 1152 \text{ W} \quad Q = I_{\text{ef}}^2 X_C = 576 \text{ VAr (capacitiva)}$$

$$S = \sqrt{(1152)^2 + (576)^2} = 1288 \text{ VA}$$

y $\text{fp} = 1152/1288 = 0,894$ en adelanto.

- 10.8.** Las impedancias $Z_1 = 5,83/-59^\circ \Omega$ y $Z_2 = 8,94/63,43^\circ \Omega$ están en serie y por ellas circula una intensidad de corriente de valor eficaz 5 A. Determinar los valores totales de las potencias que consumen ambas impedancias.

$$Z_T = Z_1 + Z_2 = 7 + j3 \Omega$$

Por tanto,

$$P_T = (5)^2(7) = 175 \text{ W} \quad Q_T = (5)^2(3) = 75 \text{ VAr (inductiva)}$$

$$S_T = \sqrt{(175)^2 + (75)^2} = 190,4 \text{ VA} \quad \text{fp} = \frac{175}{190,4} = 0,919 \text{ en retraso}$$

- 10.9.** Obtener las potencias totales consumidas por el circuito paralelo de la Figura 10.16.

Por división de la corriente,

$$I_5 = 17,88/18,43^\circ \text{ A} \quad I_4 = 26,05/-12,53^\circ \text{ A}$$

Entonces, $P_T = \left(\frac{17,88}{\sqrt{2}}\right)^2(5) + \left(\frac{26,05}{\sqrt{2}}\right)^2(4) = 2156 \text{ W}$

$$Q_T = \left(\frac{17,88}{\sqrt{2}}\right)^2(3) = 480 \text{ VAr (capacitiva)}$$

$$S_T = \sqrt{(2156)^2 + (480)^2} = 2209 \text{ VA}$$

$$\text{pf} = \frac{2156}{2209} = 0,976 \text{ en adelanto}$$

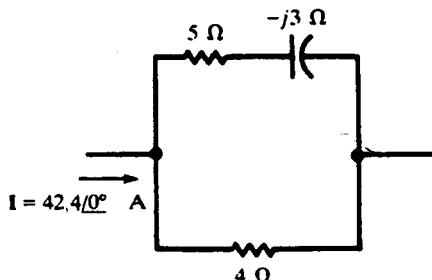


Figura 10.16.

Método alternativo

$$\mathbf{Z}_{\text{eq}} = \frac{4(5 - j3)}{9 - j3} = 2,4 - j0,53 \Omega$$

Entonces,

$$P = (42,4/\sqrt{2})^2(2,4) = 2157 \text{ W} \text{ y } Q = (42,4/\sqrt{2})^2(0,53) = 476 \text{ VAr (capacitiva).}$$

10.10. Calcular el factor de potencia del circuito de la Figura 10.17.

Sin especificar la tensión o la corriente, P , Q y S no se pueden calcular. Sin embargo, el factor de potencia es el coseno del ángulo de la impedancia equivalente.

$$\mathbf{Z}_{\text{eq}} = \frac{(3 + j4)(10)}{13 + j4} = 3,68/36,03^\circ \Omega$$

$$\text{fp} = \cos 36,03^\circ = 0,809 \text{ en retraso}$$

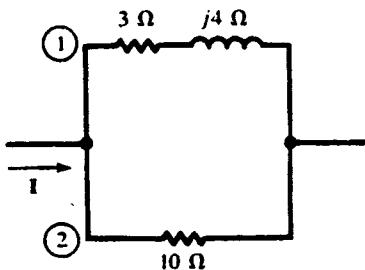


Figura 10.17.

10.11. Si la potencia total en el circuito de la Figura 10.17 es 1100 W, ¿cuáles son las potencias que se disipan en las dos resistencias?

Por división de la corriente,

$$\frac{I_{1,\text{ef}}}{I_{2,\text{ef}}} = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{10}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

y, por tanto,

$$\frac{P_{3\Omega}}{P_{10\Omega}} = \frac{I_{1,\text{ef}}^2(3)}{I_{2,\text{ef}}^2(10)} = \frac{6}{5}$$

Resolviendo la ecuación anterior junto con $P_{3\Omega} + P_{10\Omega} = 1100 \text{ W}$ se obtiene $P_{3\Omega} = 600 \text{ W}$ y $P_{10\Omega} = 500 \text{ W}$.

- 10.12.** Obtener el factor de potencia de un circuito con dos ramas en paralelo en el que en la primera rama hay una $Z_1 = 2 + j4 \Omega$, y en la segunda una $Z_2 = 6 + j0 \Omega$. ¿Por qué valor debe ser sustituida la resistencia de 6Ω para obtener un factor de potencia total de 0,9 en retraso?

Como el ángulo en la admitancia equivalente es el valor negativo del ángulo de la impedancia equivalente, su coseno también da el factor de potencia.

$$Y_{eq} = \frac{1}{2+j4} + \frac{1}{6} = 0,334 / -36,84^\circ S$$

$$fp = \cos(-36,84^\circ) = 0,8 \text{ en retraso}$$

El fp está en retraso, ya que el argumento de la impedancia es positivo.

Ahora, para elevar el factor de potencia a 0,9, el ángulo de la admitancia debe ser $\cos^{-1} 0,9 = -25,84^\circ$. Entonces,

$$Y'_{eq} = \frac{1}{2+j4} + \frac{1}{R} = \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{R} \right) - j \frac{1}{5}$$

se requiere $\frac{1/5}{\frac{1}{10} + \frac{1}{R}} = \operatorname{tg} 25,84^\circ$ o $R = 3,20 \Omega$

- 10.13.** Una tensión de $28,28/60^\circ$ V se aplica a un circuito paralelo de dos ramas en el que $Z_1 = 4/30^\circ \Omega$ y $Z_2 = 5/60^\circ \Omega$. Obtener los triángulos de potencias de ambas ramas y combinarlos en un triángulo de potencias total.

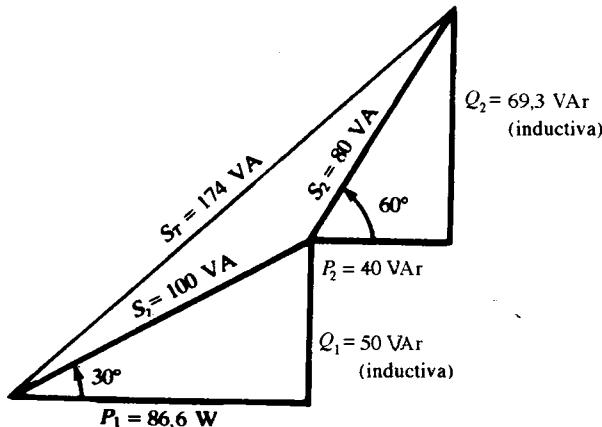


Figura 10.18.

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_1} = 7,07/30^\circ \text{ A} \quad \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_2} = 5,66/0^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{S}_1 = \left(\frac{28,28}{\sqrt{2}} /60^\circ \right) \left(\frac{7,07}{\sqrt{2}} \angle -30^\circ \right) = 100/30^\circ = 86,6 + j50$$

$$\mathbf{S}_2 = \left(\frac{28,28}{\sqrt{2}} /60^\circ \right) \left(\frac{5,66}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ \right) = 80/60^\circ = 40 + j69,3$$

$$\mathbf{S}_T = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = 126,6 + j119,3 = 174/43,3^\circ \text{ VA}$$

Los triángulos de potencias y su suma se han representado en la Figura 10.18.

- 10.14.** Determinar las potencias que consumen las tres cargas conectadas en paralelo: carga #1, 250 VA, fp = 0,5 en retraso; carga #2, 180 W, fp = 0,8 en adelanto; carga #3, 300 VA, 100 VAr (inductiva).

Se calcula la potencia activa P y la reactiva Q de cada carga.

Carga #1 Dados $S = 250 \text{ VA}$, $\cos \theta = 0,5$ en retraso. Entonces,

$$P = 250(0,5) = 125 \text{ W} \quad Q = \sqrt{(250)^2 - (125)^2} = 216,5 \text{ VAr (inductiva)}$$

Carga #2 Dados $P = 180 \text{ W}$, $\cos \theta = 0,8$ en adelanto. Entonces $\theta = \cos^{-1} 0,8 = -36,87^\circ$ y

$$Q = 180 \operatorname{tg}(-36,87^\circ) = 135 \text{ VAr (capacitiva)}$$

Carga #3 Dados $S = 300 \text{ VA}$, $Q = 100 \text{ VAr (inductiva)}$. Entonces,

$$P = \sqrt{(300)^2 - (100)^2} = 282,8 \text{ W}$$

Combinando los componentes:

$$P_T = 125 + 180 + 282,8 = 587,8 \text{ W}$$

$$Q_T = 216,5 - 135 + 100 = 181,5 \text{ VAr (inductiva)}$$

$$\mathbf{S}_T = 587,8 + j181,5 = 615,2/17,16^\circ$$

Por tanto, $S_T = 615,2 \text{ VA}$ y $\operatorname{fp} = \cos 17,16^\circ = 0,955$ en retraso.

- 10.15.** Obtener el triángulo de potencias y la intensidad de corriente total en el circuito en paralelo de la Figura 10.19, si en la rama 2, $S_2 = 1490 \text{ VA}$.

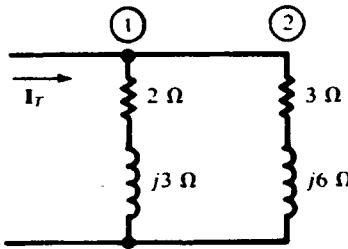


Figura 10.19.

De $S_2 = I_{2,\text{ef}}^2 Z_2$,

$$I_{2,\text{ef}}^2 = \frac{1490}{\sqrt{3^2 + 6^2}} = 222 \text{ A}^2$$

y por división de la corriente,

$$\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2} = \frac{3 + j6}{2 + j3} \quad \text{por tanto} \quad I_{1,\text{ef}}^2 = \frac{3^2 + 6^2}{2^2 + 3^2} I_{2,\text{ef}}^2 = \frac{45}{13} (222) = 768 \text{ A}^2$$

Entonces,

$$\mathbf{S}_1 = I_{1,\text{ef}}^2 \mathbf{Z}_1 = 768(2 + j3) = 1536 + j2304$$

$$\mathbf{S}_2 = I_{2,\text{ef}}^2 \mathbf{Z}_2 = 222(3 + j6) = 666 + j1332$$

$$\mathbf{S}_T = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = 2202 + j3636$$

esto es, $P_T = 2202 \text{ W}$, $Q_T = 3636 \text{ VAr (inductiva)}$,

$$S_T = \sqrt{(2202)^2 + (3636)^2} = 4251 \text{ VA} \quad \text{y} \quad \text{fp} = \frac{2202}{4251} = 0,518 \text{ en retraso}$$

Como el ángulo de fase de la tensión es desconocido, solamente se puede obtener el valor de \mathbf{I}_T . Por división de la corriente,

$$\mathbf{I}_2 = \frac{2 + j3}{5 + j9} \mathbf{I}_T \quad \text{o} \quad I_{2,\text{ef}}^2 = \frac{2^2 + 3^2}{5^2 + 9^2} I_{T,\text{ef}}^2 = \frac{13}{106} I_{T,\text{ef}}^2$$

y entonces

$$I_{T,\text{ef}}^2 = \frac{106}{13} (222) = 1811 \text{ A}^2 \quad \text{o} \quad I_{T,\text{ef}} = 42,6 \text{ A}$$

- 10.16.** Obtener el triángulo de potencias del circuito de la Figura 10.20, si la potencia reactiva total es 2500 VAr (inductiva). Determinar las potencias de las ramas, P_1 y P_2 .

La admitancia equivalente permite calcular el triángulo de potencias total.

$$\mathbf{Y}_{\text{eq}} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 = 0,2488 / -39,57^\circ \text{ S}$$

Entonces,

$$P_T = 2500 \operatorname{ctg} 39,57^\circ = 3025 \text{ W}$$

$$S_T = 3025 + j2500 = 3924 / 39,57^\circ \text{ VA}$$

y $\text{fp} = P_T / S_T = 0,771$ en retraso.

La relación de las intensidades es $I_1/I_2 = Y_1/Y_2 = 0,177/0,0745$.

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{I_1^2(4)}{I_2^2(12)} = 1,88 \quad \text{y} \quad P_1 + P_2 = 3025 \text{ W}$$

de donde $P_1 = 1975 \text{ W}$ y $P_2 = 1050 \text{ W}$.

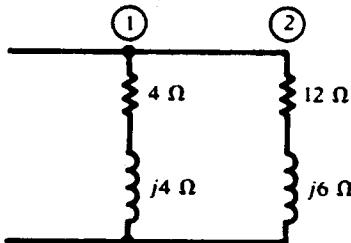


Figura 10.20.

- 10.17.** Se ha corregido el factor de potencia de una carga de 300 kW, con un factor inicial de 0,65 en retraso, hasta 0,9 en retraso mediante condensadores en paralelo. ¿Cuántas kVAr deben suministrar esos condensadores, y cuál es el porcentaje de reducción de la potencia aparente?

En primer lugar se obtienen los ángulos correspondientes a los factores de potencia:

$$\cos^{-1} 0,65 = 49,46^\circ \quad \cos^{-1} 0,9 = 25,84^\circ$$

Entonces (ver Figura 10.21),

$$Q = 300 \operatorname{tg} 49,46^\circ = 350,7 \text{ kVAr (inductiva)}$$

$$Q - Q_c = 300 \operatorname{tg} 25,84^\circ = 145,3 \text{ kVAr (inductiva)}$$

de donde, $Q_c = 205,4 \text{ kVAr (capacitiva)}$. Como

$$S = \frac{300}{0,65} = 461,5 \text{ kVA} \quad S' = \frac{300}{0,90} = 333,3 \text{ kVA}$$

la reducción es

$$\frac{461,5 - 333,3}{461,5} (100\%) = 27,8\%$$

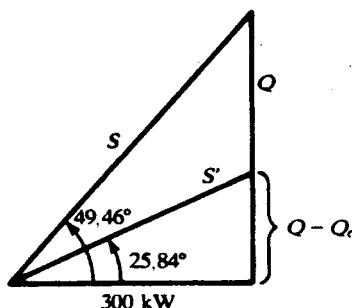


Figura 10.21.

- 10.18.** Calcular la capacidad C necesaria para corregir el factor de potencia a 0,95 en retraso en el circuito de la Figura 10.22, si la tensión eficaz de 120 V tiene una frecuencia de 60 Hz.

El uso de la admitancia es una buena opción.

$$Y_{eq} = j\omega C + \frac{1}{20/30^\circ} = 0,0433 - j(0,025 - \omega C) \quad (\text{S})$$

El diagrama de admitancias, Figura 10.23, ilustra el siguiente paso:

$$\begin{aligned}\theta &= \cos^{-1} 0,95 = 18,19^\circ \\ 0,025 - \omega C &= (0,0433)(\operatorname{tg} 18,19^\circ) \\ \omega C &= 0,0108 \\ C &= 28,6 \mu\text{F}\end{aligned}$$

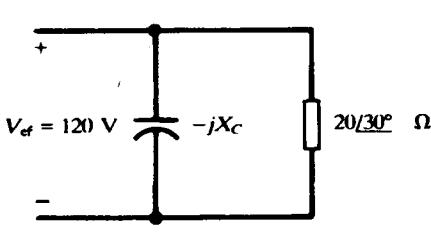


Figura 10.22.

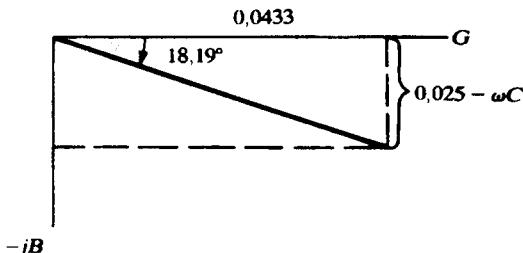


Figura 10.23.

- 10.19.** Un circuito con una impedancia $Z = 10/60^\circ \Omega$ tiene su factor de potencia corregido por una reactancia capacitativa en paralelo de 20Ω . ¿Qué porcentaje de reducción resulta en la intensidad de corriente?

Como $I = VY$, la reducción de la corriente se puede obtener de la relación de admitancias antes y después de la instalación de los condensadores.

$$Y_{\text{antes}} = 0,1/-60^\circ \text{ S} \quad \text{e} \quad Y_{\text{después}} = 0,05/90^\circ + 0,1/-60^\circ = 0,062/-36,2^\circ \text{ S}$$

$$\frac{I_{\text{antes}}}{I_{\text{después}}} = \frac{0,062}{0,1} = 0,62$$

por tanto, la reducción es de un 38%.

- 10.20.** Un transformador de potencia nominal 25 kVA alimenta a una carga de 12 kW y factor de potencia 0,6 en retraso. ¿Qué porcentaje de la potencia nominal del transformador representa esta carga? ¿Qué carga adicional en kW, con factor de potencia unidad, puede ser añadida sin que el transformador exceda su potencia nominal?

Para la carga de 12 kW, $S = 12/0,6 = 20 \text{ kVA}$. El transformador está al $(20/25)(100) = 80\%$ de su valor nominal.

La carga adicional con factor de potencia unidad no modifica la potencia reactiva.

$$Q = \sqrt{(20)^2 - (12)^2} = 16 \text{ kVAr (inductiva)}$$

Entonces, a su capacidad máxima,

$$\begin{aligned}\theta' &= \operatorname{sen}^{-1}(16/25) = 39,79^\circ \\ P' &= 25 \cos 39,79^\circ = 19,2 \text{ kW} \\ P_{\text{adicional}} &= 19,2 - 12 = 7,2 \text{ kW}\end{aligned}$$

Obsérvese que la potencia nominal en kVA se representa por un arco de radio 25 en la Figura 10.24.

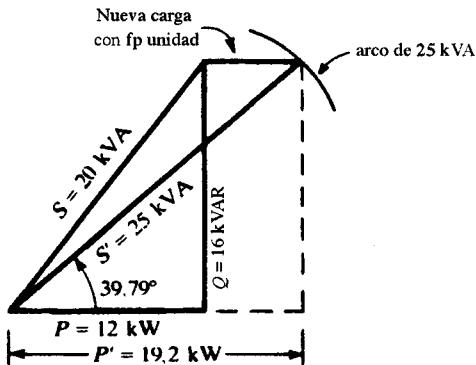


Figura 10.24.

- 10.21.** En relación con el Problema 10.20, si la carga adicional tuviera un factor de potencia 0,866 en adelanto, ¿cuánto consumo de potencia aparente se puede añadir sin exceder la potencia nominal del transformador?

La carga inicial es $S = 12 + j16 \text{ kVA}$ y la carga añadida es

$$S_2 = S_2 / -30^\circ = S_2(0,866) - jS_2(0,5) \text{ (kVA)}$$

El total es $S_T = (12 + 0,866S_2) + j(16 - 0,5S_2)$ (kVA). Entonces,

$$S_T^2 = (12 + 0,866S_2)^2 + (16 - 0,5S_2)^2 = (25)^2$$

se obtiene $S_2 = 12,8 \text{ kVA}$.

- 10.22.** Un motor de inducción con una potencia de salida de 1,5 kW tiene un rendimiento del 85%. A plena carga, el factor de potencia es 0,8 en retraso. Obtener las potencias de entrada al motor.

$$\frac{P_{\text{sal}}}{P_{\text{ent}}} = 0,85 \quad \text{o} \quad P_{\text{ent}} = \frac{1,5}{0,85} = 1,765 \text{ kW}$$

Entonces, del triángulo de potencias,

$$S_{\text{ent}} = \frac{1,765}{0,80} = 2,206 \text{ kVA} \quad Q_{\text{ent}} = \sqrt{(2,206)^2 - (1,765)^2} = 1,324 \text{ kVAr (inductiva)}$$

El circuito equivalente de un motor de inducción contiene una resistencia variable que es función de la carga en el eje. El factor de potencia es, por tanto, variable, en el rango desde 0,3 en el arranque hasta 0,85 a plena carga.

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

- 10.23.** Dado un circuito con una tensión aplicada $v = 14,14 \cos \omega t$ (V) y una intensidad de corriente $i = 17,1 \cos(\omega t - 14,05^\circ)$ (mA), determinar el triángulo de potencias completo.

Solución: $P = 117$ mW, $Q = 29,3$ mVAr (inductiva), $\text{fp} = 0,97$ en retraso.

- 10.24.** Dado un circuito con una tensión aplicada $v = 340 \sin(\omega t - 60^\circ)$ (V) y una intensidad de corriente $i = 13,3 \sin(\omega t - 48,7^\circ)$ (A), determinar el triángulo de potencias completo.

Solución: $P = 2217$ W, $Q = 443$ VAr (capacitiva), $\text{fp} = 0,981$ en adelanto.

- 10.25.** Un circuito serie de dos elementos, con $R = 5 \Omega$ y $X_L = 15 \Omega$, tiene una diferencia de potencial en la resistencia de valor eficaz 31,6 V. Calcular la potencia compleja y el factor de potencia.

Solución: $200 + j600$ VA, 0,316 en retraso.

- 10.26.** Un circuito con una impedancia $Z = 8 - j6 \Omega$ se alimenta con una tensión eficaz de fasor $70,7/-90^\circ$ V. Obtener el triángulo de potencias completo.

Solución: $P = 200$ W, $Q = 150$ VAr (capacitiva), $\text{fp} = 0,8$ en adelanto.

- 10.27.** Determinar la impedancia del circuito que tiene una potencia compleja $S = 5031/-26,57^\circ$ VA con una tensión aplicada de fasor $212,1/0^\circ$.

Solución: $4 - j2 \Omega$.

- 10.28.** Determinar la impedancia que consume una potencia aparente de 3500 VA, con un factor de potencia 0,76 en retraso y una intensidad de corriente de valor eficaz 18 A.

Solución: $10,8/40,54^\circ \Omega$.

- 10.29.** Un circuito con dos ramas en paralelo, con $Z_1 = 10/0^\circ \Omega$ y $Z_2 = 8/-30^\circ \Omega$, consume una intensidad de corriente total $i = 7,07 \cos(\omega t - 90^\circ)$ (A). Obtener el triángulo de potencias total.

Solución: $P = 110$ W, $Q = 32,9$ VAr (capacitiva), $\text{fp} = 0,958$ en adelanto.

- 10.30.** Un circuito con dos ramas en paralelo tiene sendas impedancias, $Z_1 = 2 - j5 \Omega$ y $Z_2 = 1 + j1 \Omega$. Obtener el triángulo de potencias total del circuito si la resistencia de 2Ω consume 20 W.

Solución: $P = 165$ W, $Q = 95$ VAr (inductiva), $\text{fp} = 0,867$ en retraso.

- 10.31.** Un circuito con dos ramas en paralelo, con impedancias $Z_1 = 4/-30^\circ \Omega$ y $Z_2 = 5/60^\circ \Omega$, tiene una tensión aplicada de valor eficaz 20 V. Obtener los triángulos de potencias de ambas ramas y el total.

Solución: $S_T = 128,1$ VA, $\text{fp} = 0,989$ en retraso.

- 10.32.** Obtener la potencia compleja total en el circuito de la Figura 10.25 si la rama 1 consume 8 kVAr.

Solución: $S = 8 + j12$ kVA, $\text{fp} = 0,555$ en retraso.

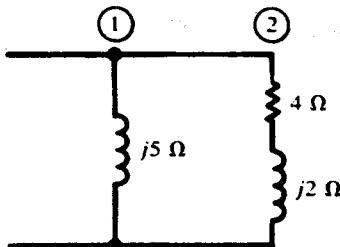


Figura 10.25.

- 10.33.** Calcular \mathbf{Z} en el circuito de la Figura 10.26, si $S_T = 3373$ VA, $f_p = 0,938$ en adelanto, y la resistencia de $3\ \Omega$ consume una potencia activa de 666 W.

Solución: $2 - j2\ \Omega$.

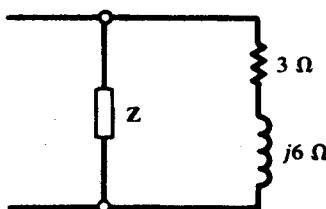


Figura 10.26.

- 10.34.** El circuito paralelo de la Figura 10.27 consume una potencia activa total de 1500 W. Obtener el triángulo de potencias total.

Solución: $S = 1500 + j2471$ VA, $f_p = 0,519$ en retraso.

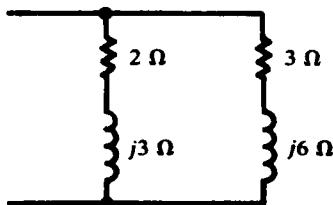


Figura 10.27.

- 10.35.** Calcular la potencia activa que consumen las resistencias de $15\ \Omega$ y $8\ \Omega$ de la Figura 10.28, si la potencia activa total consumida en el circuito es 2000 W.

Solución: 723 W, 1277 W.

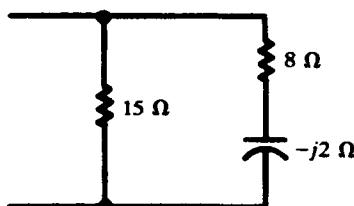


Figura 10.28.

- 10.36.** Un circuito con tres ramas en paralelo, con $Z_1 = 25/15^\circ \Omega$, $Z_2 = 15/60^\circ \Omega$ y $Z_3 = 15/90^\circ \Omega$, tiene una tensión aplicada $V = 339,4/-30^\circ V$. Obtener la potencia aparente total y el factor de potencia global.

Solución: 4291 VA, 0,966 en retraso.

- 10.37.** Obtener el triángulo de potencias total de las siguientes cargas conectadas en paralelo: carga #1, 1,5 kW, $fp = 0,8$ en retraso; carga #2, 4 kVA, 2 kVAr (capacitiva); carga #3, 6 kVA, $fp = 0,9$ en retraso.

Solución: 14,535 kVA, $fp = 0,954$ en retraso.

- 10.38.** Obtener el triángulo de potencias total de las siguientes cargas conectadas en paralelo: carga #1, 200 VA, $fp = 0,7$ en retraso; carga #2, 350 VA, $fp = 0,5$ en retraso; carga #3, 275 VA, $fp = 1$.

Solución: $S = 590 + j444$ VA, $fp = 0,799$ en retraso.

- 10.39.** Una carga de 4500 VA con un factor de potencia 0,75 en retraso se alimenta desde una fuente a 60 Hz con una tensión de valor eficaz 240 V. Determinar la capacidad a instalar en paralelo para corregir el factor de potencia hasta: a) 0,9 en retraso, b) 0,9 en adelanto.

Solución: a) 61,8 μF ; b) 212 μF .

- 10.40.** En el Problema 10.39, ¿qué porcentaje de reducción en la intensidad de corriente de línea y en la potencia aparente total se consigue en el apartado a)? ¿Qué porcentaje adicional se consigue en el apartado b)?

Solución: 16,1%, ninguno.

- 10.41.** La instalación de una batería de condensadores de 20 kVAr mejora el factor de potencia de una carga hasta 0,9 en retraso. Determinar la potencia compleja antes de la instalación de los condensadores, si la potencia aparente final es 185 kVA.

Solución: $S = 166,5 + j100,6$ kVA.

- 10.42.** A una carga de 25 kVA con un factor de potencia de 0,8 en retraso se conecta en paralelo un grupo resistivo de unidades de calor con factor de potencia unidad. ¿Cuántos kW consumen esas unidades, si el nuevo factor de potencia global es 0,85 en retraso?

Solución: 4,2 kW.

- 10.43.** Un transformador de 500 kVA funciona a plena carga con un factor de potencia 0,6 en retraso. Se conecta una batería de condensadores que corrige el factor de potencia hasta 0,9 en retraso. Despues de la corrección, ¿qué porcentaje de la potencia aparente nominal está proporcionando el transformador?

Solución: 66,7%.

- 10.44.** Un transformador de 100 kVA funciona a un 80% de su potencia nominal con un factor de potencia en retraso de 0,85. ¿Cuántas kVA adicionales puede suministrar el transformador a una carga con factor de potencia 0,6 en retraso hasta llegar a plena carga?

Solución: 21,2 kVA.

- 10.45.** Un transformador de 250 kVA funciona a plena carga con factor de potencia 0,8 en retraso. a) ¿Cuántas kVAr capacitivas deben ser añadidas para corregir el factor de potencia hasta

0,9 en retraso? b) Después de la corrección del factor de potencia, se conecta una nueva carga con un factor de potencia 0,5 en retraso. ¿Cuántas kVA puede proporcionar el transformador a la nueva carga para llegar a plena potencia, y cuál es el factor de potencia final?

Solución: a) 53,1 kVAr (capacitiva); b) 33,35 kVA, 0,867 en retraso.

- 10.46.** Una carga de 65 kVA con factor de potencia en retraso se combina con un motor síncrono de 25 kVA que funciona con un $f_p = 0,6$ en adelanto. Calcular el factor de potencia de la carga de 65 kVA, si el global es 0,85 en retraso.

Solución: 0,585 en retraso.

- 10.47.** Un motor de inducción de 2000 kVA tiene un factor de potencia 0,8 en retraso. Se añaden varios motores síncronos con una potencia aparente total de 500 kVA y funcionando con factor de potencia en adelanto. Si el factor de potencia global es 0,9 en retraso, ¿cuál es el factor de potencia de los motores síncronos?

Solución: 0,92 en adelanto.

CAPÍTULO 11

Circuitos polifásicos

11.1. INTRODUCCIÓN

La potencia instantánea suministrada por una fuente sinusoidal a una impedancia es

$$p(t) = v(t)i(t) = V_p I_p \cos \theta + V_p I_p \cos (2\omega t - \theta) \quad (1)$$

donde V_p e I_p son los valores eficaces de v e i , respectivamente, y θ es el ángulo de desfase entre ambas. La potencia oscila entre $V_p I_p (1 + \cos \theta)$ y $V_p I_p (-1 + \cos \theta)$. En los sistemas de potencia, especialmente en los de muy alta potencia, es deseable tener un flujo estacionario de potencia desde la fuente a la carga. Por esta razón se usan los sistemas polifásicos. Otra ventaja consiste en disponer de más de un valor de tensión en las líneas. En los sistemas polifásicos, V_p e I_p indican la tensión y la intensidad de corriente, respectivamente, en una fase, que pueden ser diferentes de las tensiones y las intensidades en otras fases. Este capítulo trata principalmente de los sistemas trifásicos, que son los que se usan normalmente en la industria. Sin embargo, también se describen los sistemas bifásicos.

11.2. SISTEMAS BIFÁSICOS

Un generador bifásico equilibrado dispone de dos fuentes de tensión de igual amplitud y frecuencia, pero desfasados 90° o 180° . Estos sistemas tienen algunas ventajas, ya que dan al usuario la opción de disponer de dos tensiones y dos campos magnéticos. La potencia puede ser constante o pulsante.

EJEMPLO 11.1. Un generador de CA tiene dos fuentes de tensión de igual amplitud y frecuencia, pero desfasadas 90° . Un terminal de cada generador se conecta entre sí para formar el terminal de referencia n del generador. El sistema alimenta a dos cargas idénticas [Figura 11.1(a)]. Determinar las intensidades de corriente, las tensiones y la potencia instantánea y media que suministra.

Las tensiones y las intensidades de corriente en los terminales del generador son:

$$\begin{aligned} v_a(t) &= \sqrt{2}V_p \cos \omega t & v_b(t) &= \sqrt{2}V_p \cos (\omega t - 90^\circ) \\ i_a(t) &= \sqrt{2}I_p \cos (\omega t - \theta) & i_b(t) &= \sqrt{2}I_p \cos (\omega t - 90^\circ - \theta) \end{aligned} \quad (2)$$

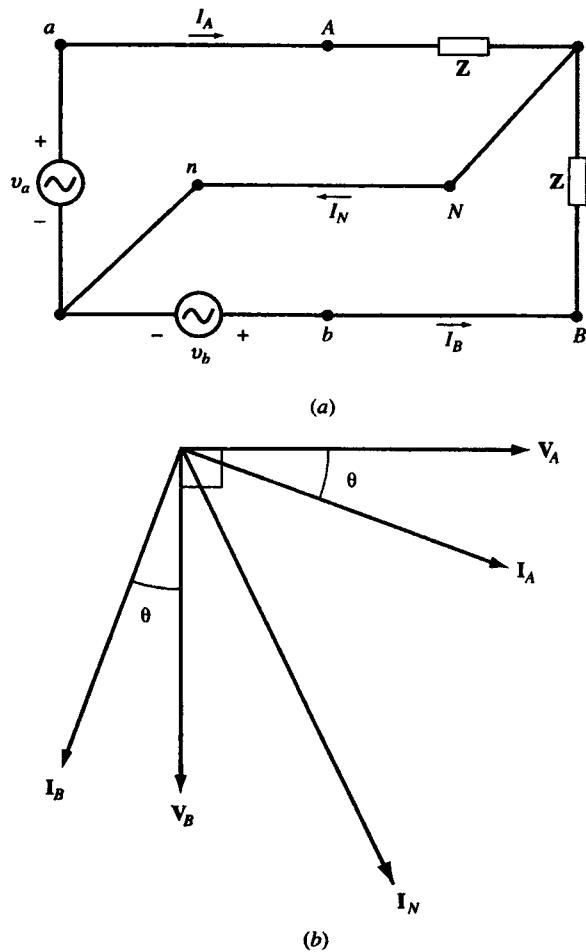


Figura 11.1.

En el dominio fasorial, sea $\mathbf{Z} = |Z|/\underline{\theta}$ e $I_p = V_p/|Z|$. Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{AN} &= V_p/0^\circ & \mathbf{V}_{BN} &= V_p/-90^\circ & \mathbf{V}_{AB} &= \mathbf{V}_{AN} - \mathbf{V}_{BN} = \sqrt{2}V_p/45^\circ \\ \mathbf{I}_A &= I_p/-\theta & \mathbf{I}_B &= I_p/-90^\circ - \theta & \mathbf{I}_N &= \mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B = I_p\sqrt{2}/-45^\circ - \theta^\circ\end{aligned}\quad (3)$$

En la Figura 11.1(b) se han representado los fasores de tensión y de intensidad. Las potencias instantáneas $p_a(t)$ y $p_b(t)$ suministradas por las dos fuentes son

$$\begin{aligned}p_a(t) &= v_a(t)i_a(t) = V_p I_p \cos \theta + V_p I_p \cos (2\omega t - \theta) \\ p_b(t) &= v_b(t)i_b(t) = V_p I_p \cos \theta - V_p I_p \cos (2\omega t - \theta)\end{aligned}$$

La potencia instantánea total $p_T(t)$ suministrada por el generador es

$$\begin{aligned} p_T(t) &= p_a(t) + p_b(t) = V_p I_p \cos \theta + V_p I_p \cos (2\omega t - \theta) + \\ &+ V_p I_p \cos \theta - V_p I_p \cos (2\omega t - \theta) = 2V_p I_p \cos \theta \end{aligned}$$

Por tanto,

$$p_T(t) = P_{\text{med}} = 2V_p I_p \cos \theta \quad (4)$$

En el sistema de la Figura 11.1(a) se dispone de dos valores de tensión, V_p y $\sqrt{2}V_p$, para la carga y la potencia suministrada es constante. Además, el desfase de 90° entre las dos tensiones se puede usar para producir un campo magnético giratorio especial, necesario en algunas aplicaciones.

11.3. SISTEMAS TRIFÁSICOS

Los generadores trifásicos contienen tres fuentes sinusoidales de tensión de igual frecuencia pero desfasadas 120° unas con otras. Esto se realiza situando tres bobinas separadas 120° eléctricos en un mismo rotor. Normalmente, las amplitudes de las tres fases son también iguales. En este caso se dice que el generador está equilibrado. En la Figura 11.2 las tres bobinas están igualmente distribuidas alrededor de la circunferencia del rotor, es decir, las bobinas están desplazadas unas de otras en 120° mecánicos. Los terminales de las bobinas y los anillos rozantes no se han representado; sin embargo, es evidente que al girar en el sentido contrario a las agujas del reloj hace que los laterales A, B y C de las bobinas pasen bajo los polos en el orden ...A-B-C-A-B-C... La polaridad de la tensión se invierte en cada cambio de polo. Suponiendo que la forma del polo y la correspondiente densidad de flujo magnético son tales que las tensiones inducidas son sinusoidales, el resultado en las tres bobinas es el que se ha representado en la Figura 11.3. La tensión B está 120° eléctricos retrasada respecto a la A, y la C retrasa 240° . Esta distribución se conoce como *secuencia ABC*. Cambiando el sentido de giro se obtendría ...A-C-B-A-C-B..., que se denomina *secuencia BCA*.

Las tensiones equilibradas de la secuencia ABC, en los dominios fasorial y temporal, se citan en (5) y (6), respectivamente. El diagrama fasorial de las tensiones se ha representado en la Figura 11.4.

$$\begin{aligned} v_{an}(t) &= (V_p \sqrt{2}) \cos \omega t & v_{bn}(t) &= (V_p \sqrt{2}) \cos (\omega t - 120^\circ) \\ v_{cn}(t) &= (V_p \sqrt{2}) \cos (\omega t - 240^\circ) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\mathbf{V}_{an} = V_p / 0^\circ \quad \mathbf{V}_{bn} = V_p / -120^\circ \quad \mathbf{V}_{cn} = V_p / -240^\circ \quad (6)$$

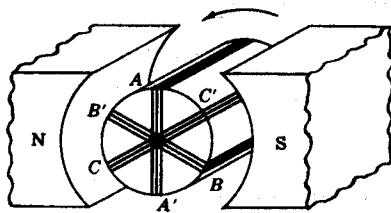


Figura 11.2.

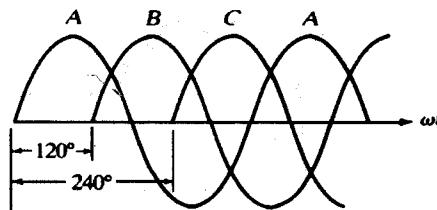


Figura 11.3.

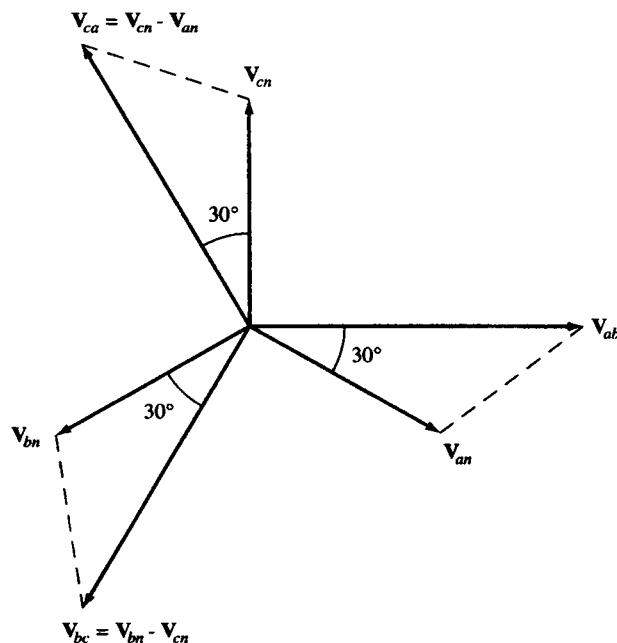


Figura 11.4.

11.4. SISTEMAS EN TRIÁNGULO Y EN ESTRELLA

Los extremos de las bobinas se pueden conectar en estrella (también designado Y; ver Sección 11.8), con los extremos A' , B' y C' unidos en un punto común denominado *neutro*, N ; y los extremos A , B y C se prolongan para ser las líneas o fases, A , B y C , del sistema trifásico. Si se envía un conductor desde el neutro junto con las líneas se dice que es un *sistema trifásico a cuatro hilos*. En la Figura 11.5 las líneas se han designado con minúsculas

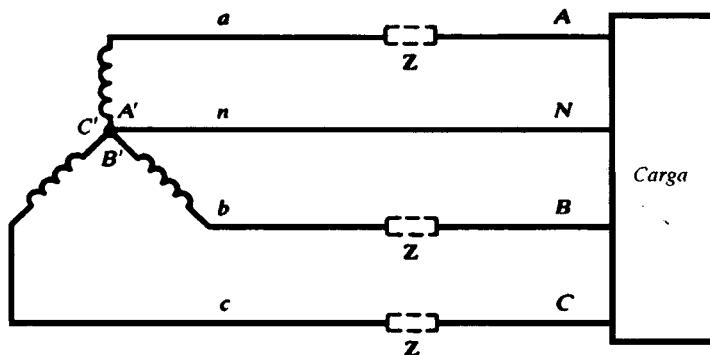


Figura 11.5.

las a , b y c en la fuente, que puede ser un transformador o un alternador trifásico, y con mayúsculas A , B y C en la carga. Si se tienen que considerar las impedancias de las líneas, entonces el sentido de la corriente por ellas, por ejemplo en la línea aA , sería I_{aA} , y el fasor de la caída de tensión en la línea es \mathbf{V}_{aA} .

Los terminales de las bobinas del generador se pueden conectar según muestra la Figura 11.6, obteniéndose en ese caso un sistema trifásico conectado en triángulo (o Δ), con líneas a , b y c . Una conexión en triángulo de las bobinas no tiene neutro para realizar el sistema a cuatro hilos, excepto si se usan transformadores con conexión Δ - Y .

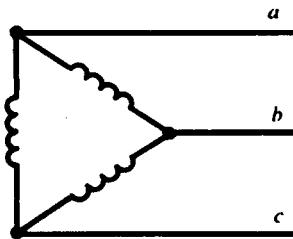
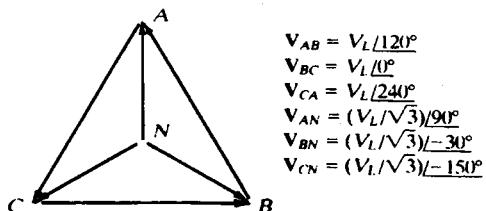


Figura 11.6.

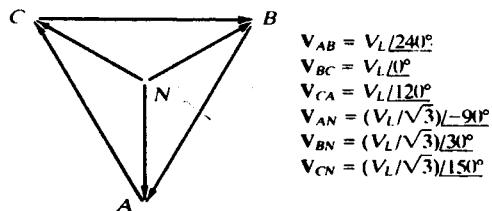
11.5. FASORES DE LAS TENSIONES

La selección del ángulo de fase de una de las tensiones en el sistema trifásico fija los ángulos de todas las demás. Esto es equivalente a fijar el instante inicial $t = 0$ en el eje horizontal de la Figura 11.3, lo que se puede hacer arbitrariamente. En este capítulo se asociará siempre un ángulo cero con el fasor de tensión de la línea B con respecto a la C : $\mathbf{V}_{BC} \equiv V_L/0^\circ$.

En el Problema 11.4 se demuestra que la tensión entre fases V_L es $\sqrt{3}$ veces la tensión entre cada fase y el neutro. Todas las tensiones de la secuencia ABC se han representado en la Figura 11.7(a) y las tensiones de la secuencia BCA en la Figura 11.7(b). Esos fasores de tensión, en coherencia con los capítulos anteriores, reflejan los valores máximos. En el sistema trifásico a cuatro hilos y 480 V, de uso general para cargas industriales, y en el sistema de 208 V, común en edificios comerciales, los valores citados son los eficaces. En este capítulo, la tensión entre fases en el primer caso sería $\mathbf{V}_{BC} = 678,8/0^\circ$ V, con lo que $\mathbf{V}_{BC,\text{ef}} = 678,8/\sqrt{2} = 480$ V. Las personas que trabajan habitualmente en este campo utilizan fasores con valores eficaces y, por tanto, escribirían $\mathbf{V}_{BC} = 480/0^\circ$ V.



(a) Secuencia ABC



(b) Secuencia CBA

Figura 11.7.

11.6. CARGAS EQUILIBRADAS EN TRIÁNGULO

Tres impedancias idénticas conectadas como muestra la Figura 11-8 constituyen una carga equilibrada en triángulo, Δ . Las intensidades de corriente que circulan por las impedancias se denominan *corrientes de fase* o *corrientes por las cargas*, y las tres serán iguales en módulo y estarán desfasadas mutuamente 120° . Las corrientes por las líneas también serán iguales entre sí en módulo y estarán desfasadas 120° unas de otras; por convenio se les asigna el sentido desde la fuente hasta la carga.

EJEMPLO 11.2. Un sistema trifásico ABC a tres hilos, con una tensión de línea de valor eficaz 120 V , tiene tres impedancias iguales conectadas en Δ de valor $5/\underline{45}^\circ \Omega$. Determinar las intensidades de corriente de línea y representar el diagrama fasorial de las tensiones y las intensidades.

El máximo de la tensión de línea es $120\sqrt{2} = 169,7\text{ V}$. Según la Figura 11.7(a), las tensiones son:

$$\mathbf{V}_{AB} = 169,7/\underline{120}^\circ \text{ V} \quad \mathbf{V}_{BC} = 169,7/\underline{0}^\circ \text{ V} \quad \mathbf{V}_{CA} = 169,7/\underline{240}^\circ \text{ V}$$

El doble subíndice indica el sentido de las intensidades de fase; por ejemplo, \mathbf{I}_{AB} circula a través de la impedancia desde la línea A a la B . En la Figura 11.8 se han representado todos los sentidos de las corrientes. Por tanto, las corrientes de fase son:

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}} = \frac{169,7/\underline{120}^\circ}{5/\underline{45}^\circ} = 33,9/\underline{75}^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}} = \frac{169,7/\underline{0}^\circ}{5/\underline{45}^\circ} = 33,9/\underline{-45}^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}} = \frac{169,7/\underline{240}^\circ}{5/\underline{45}^\circ} = 33,9/\underline{195}^\circ \text{ A}$$

Según la ley de Kirchhoff para las corrientes, la intensidad de línea \mathbf{I}_A se obtiene como

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_{AB} + \mathbf{I}_{AC} = 33,9/\underline{75}^\circ - 33,9/\underline{195}^\circ = 58,7/\underline{45}^\circ \text{ A}$$

Análogamente, $\mathbf{I}_B = 58,7/\underline{-75}^\circ \text{ A}$ e $\mathbf{I}_C = 58,7/\underline{165}^\circ \text{ A}$.

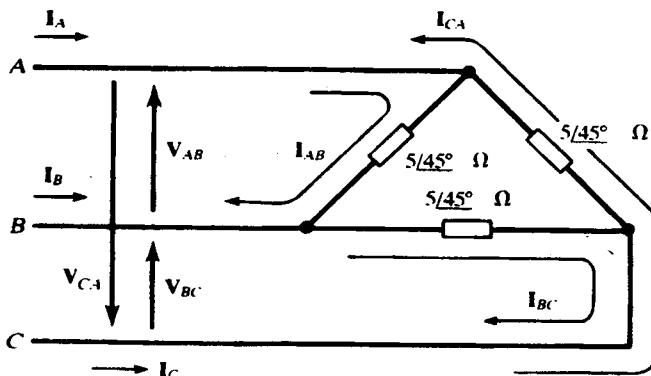


Figura 11.8.

Las tensiones entre fases y todas las intensidades de corriente se han representado en el diagrama fasorial de la Figura 11.9. Se observa que las intensidades de corriente están equilibradas. Después de calcular una de las corrientes de fase, todas las demás se pueden obtener por la simetría del diagrama fasorial. Obsérvese también que $33,9 \cdot \sqrt{3} = 58,7$; es decir, $I_L = \sqrt{3} I_F$, para una carga equilibrada en triángulo.

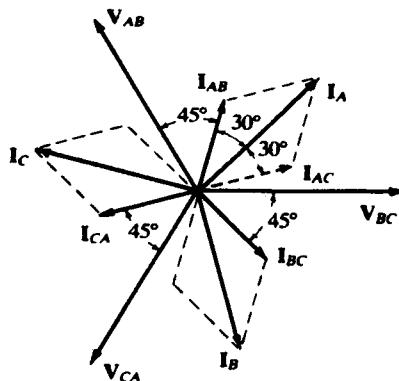


Figura 11.9.

11.7. CARGAS EQUILIBRADAS EN ESTRELLA A CUATRO HILOS

Tres impedancias idénticas conectadas según muestra la Figura 11.10 constituyen una carga equilibrada conectada en estrella, Y. Las corrientes que circulan por las impedancias son también las corrientes por las líneas; y su sentido elegido es desde la fuente a la carga, al igual que antes.

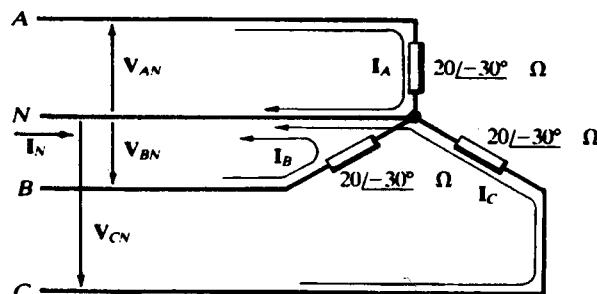


Figura 11.10.

EJEMPLO 11.3. Un sistema trifásico CBA a cuatro hilos, con una tensión de línea de valor eficaz 120 V, tiene tres impedancias de $20/-30^\circ \Omega$ conectadas en Y (Figura 11.10). Determinar las intensidades de línea y representar el diagrama fasorial de las tensiones y las intensidades de corriente.

El máximo de la tensión de línea es 169,7 V, y el de la tensión fase-neutro, $169,7/\sqrt{3} = 98$ V. De la Figura 11.7(b),

$$\mathbf{V}_{AN} = 98 \angle -90^\circ \text{ V} \quad \mathbf{V}_{BN} = 98 \angle 30^\circ \text{ V} \quad \mathbf{V}_{CN} = 98 \angle 150^\circ \text{ V}$$

Entonces

$$\mathbf{I}_A = \frac{\mathbf{V}_{AN}}{\mathbf{Z}} = \frac{98,01 \angle -90^\circ}{20 \angle -30^\circ} = 4,9 \angle -60^\circ \text{ A}$$

y, análogamente, $\mathbf{I}_B = 4,9 \angle 60^\circ \text{ A}$, $\mathbf{I}_C = 4,9 \angle 180^\circ \text{ A}$.

El diagrama fasorial de las intensidades y las tensiones se ha representado en la Figura 11.11. Se observa que con una corriente de línea calculada, las otras dos se pueden obtener a través de la simetría del diagrama. Las tres intensidades de línea regresan por el neutro. Por tanto, la intensidad de corriente por el neutro es la suma de las intensidades de línea con signo menos:

$$\mathbf{I}_N = -(\mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_C) = 0$$

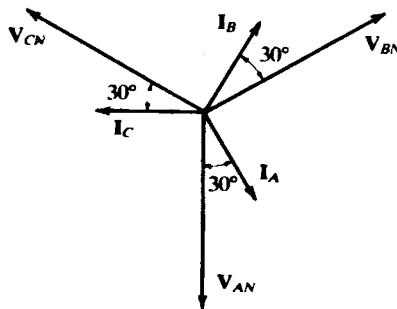


Figura 11.11.

Como la corriente por el neutro para una carga trifásica equilibrada en estrella es siempre cero, se puede quitar el conductor del neutro al realizar los cálculos sin que los resultados varíen. En los circuitos reales no se puede quitar físicamente el neutro, ya que transporta el (pequeño) desequilibrio de corrientes, transporta las corrientes de defecto o de cortocircuito que activan a los sistemas de protección y previene de sobretensiones en la carga. Como el cálculo en el Ejemplo 11.3 se ha realizado sin dificultad, el neutro se incluirá al calcular las intensidades de línea en cargas equilibradas en Y, incluso si el sistema es a tres hilos.

11.8. EQUIVALENCIA ESTRELLA-TRIÁNGULO

En la Figura 11.12 se ven tres impedancias conectadas en triángulo, Δ , y tres impedancias conectadas en estrella, Y . Se identifican los terminales de ambas conexiones con α , β y γ , como se indica en la figura. Entonces Z_1 es la impedancia «adjunta» al terminal α en la configuración en estrella y Z_C es la impedancia «opuesta» al terminal α en la configuración en triángulo; etc. Mirando entre dos de los terminales cualesquiera, las dos conexiones serán equivalentes si las correspondientes impedancias de entrada, de salida y de transferencia son iguales. Las relaciones de equivalencia son:

Transformación Y a Δ

$$\mathbf{Z}_A = \frac{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2 \mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_3}$$

$$\mathbf{Z}_B = \frac{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2 \mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2}$$

$$\mathbf{Z}_C = \frac{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2 \mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1}$$

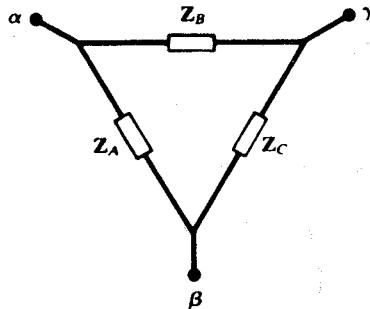
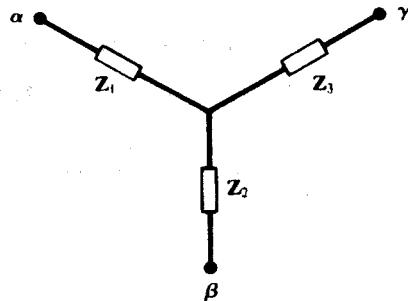
Transformación Δ a Y

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{Z}_A \mathbf{Z}_B}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C}$$

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{Z}_A \mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C}$$

$$\mathbf{Z}_3 = \frac{\mathbf{Z}_B \mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C}$$

Obsérvese que si las tres impedancias de una conexión son iguales, entonces lo son las de la conexión equivalente, siendo $\mathbf{Z}_\Delta/\mathbf{Z}_Y = 3$.

(a) Conexión en triángulo (Δ)

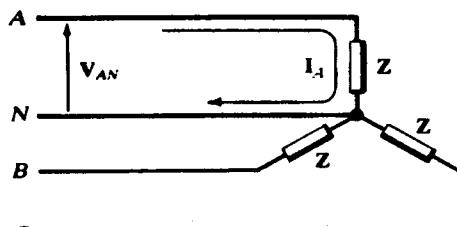
(b) Conexión en estrella (Y)

Figura 11.12.

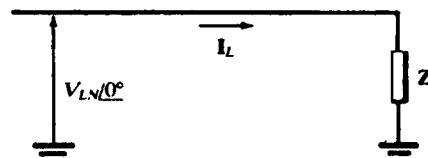
11.9. CIRCUITO MONOFÁSICO EQUIVALENTE DE CARGAS TRIFÁSICAS EQUILIBRADAS

La Figura 11.13(a) muestra una carga equilibrada conectada en Y. En muchos casos, por ejemplo en cálculos de potencia, solamente se necesita el módulo I_L de las tres intensidades de línea. Ésta se puede obtener a partir del *circuito monofásico equivalente*, Figura 11.13(b), que representa una fase del sistema original, en la que se da arbitrariamente a la tensión fase-neutro ángulo de fase cero. Esto hace que $\mathbf{I}_L = I_L / -\theta$, donde θ es el argumento de la impedancia. Si se desea conocer las intensidades de línea reales \mathbf{I}_A , \mathbf{I}_B e \mathbf{I}_C , sus ángulos de fase se determinan añadiendo $-\theta$ a los ángulos de fase de \mathbf{V}_{AN} , \mathbf{V}_{BN} y \mathbf{V}_{CN} , según se indica en la Figura 11.7. Observar que el ángulo de \mathbf{I}_L indica el fp de cada fase, $fp = \cos \theta$.

El método puede aplicarse a cargas conectadas en Δ si la carga se sustituye por su equivalente en Y, donde $\mathbf{Z}_Y = \mathbf{Z}_\Delta/3$ (Sección 11.8).



(a)



(b)

Figura 11.13.

EJEMPLO 11.4. Resolver el Ejemplo 11.3 mediante el circuito monofásico equivalente.

En relación con la Figura 11.14 (en la que el símbolo Y indica el tipo de conexión de la carga original),

$$I_L = \frac{V_{LN}}{Z} = \frac{98/0^\circ}{20/-30^\circ} = 4,9/30^\circ \text{ A}$$

De la Figura 11.7(b), los ángulos de fase de V_{AN} , V_{BN} y V_{CN} son -90° , 30° y 150° . Por tanto,

$$I_A = 4,9/-60^\circ \text{ A} \quad I_B = 4,9/60^\circ \text{ A} \quad I_C = 4,9/180^\circ \text{ A}$$

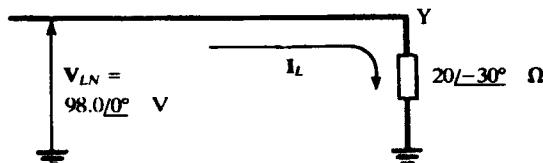


Figura 11.14.

11.10. CARGAS DESEQUILIBRADAS EN TRIÁNGULO

La solución de cargas desequilibradas en Δ consiste en calcular las intensidades de fase y posteriormente aplicar la ley de Kirchhoff para las corrientes para obtener las de línea. Las intensidades de corriente serán distintas entre sí y no tendrán la simetría del caso equilibrado.

EJEMPLO 11.5. Un sistema trifásico ABC de 339,4 V [Figura 11-15(a)] tiene conectada una carga en Δ , con

$$Z_{AB} = 10/0^\circ \Omega \quad Z_{BC} = 10/30^\circ \Omega \quad Z_{CA} = 15/-30^\circ \Omega$$

Obtener las intensidades de fase y de línea y representar el diagrama fasorial.

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z_{AB}} = \frac{339,4/120^\circ}{10/0^\circ} = 33,94/120^\circ \text{ A}$$

Análogamente, $\mathbf{I}_{BC} = 33,94/-30^\circ$ A e $\mathbf{I}_{CA} = 22,63/270^\circ$ A. Por tanto,

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_{AB} + \mathbf{I}_{AC} = 33,94/120^\circ - 22,63/270^\circ = 54,72/108,1^\circ$$

Además, $\mathbf{I}_B = 65,56/-45^\circ$ A e $\mathbf{I}_C = 29,93/169,1^\circ$ A.

El diagrama fasorial de tensiones e intensidades se ha representado en la Figura 11.15(b), con los módulos y los ángulos a escala.

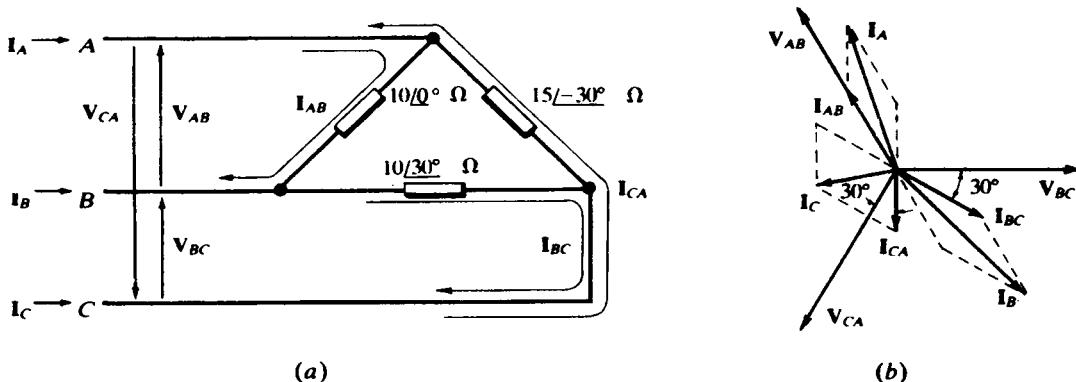


Figura 11.15.

11.11. CARGAS DESEQUILIBRADAS EN ESTRELLA

A cuatro hilos

El conductor del neutro transporta la corriente de desequilibrio de una carga conectada en Y y mantiene el valor de la tensión fase-neutro a lo largo de cada línea hasta la carga. Las intensidades de línea son distintas entre sí y no guardan simetría alguna en el diagrama fasorial.

EJEMPLO 11.6. A un sistema trifásico CBA a cuatro hilos se conecta una carga en Y con

$$\mathbf{Z}_A = 6/0^\circ \Omega \quad \mathbf{Z}_B = 6/30^\circ \Omega \quad \mathbf{Z}_C = 5/45^\circ \Omega$$

Calcular las intensidades de línea y representar el diagrama fasorial. Ver Figura 11.16(a).

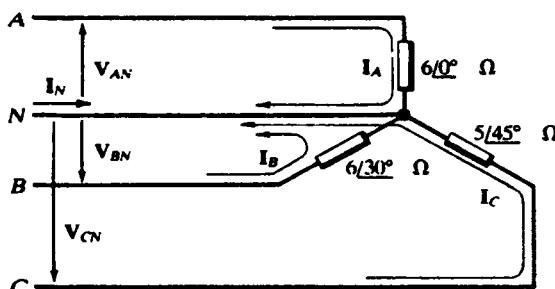
$$\mathbf{I}_A = \frac{\mathbf{V}_{AN}}{\mathbf{Z}_A} = \frac{86,6/-90^\circ}{6/0^\circ} = 14,43/-90^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_B = \frac{\mathbf{V}_{BN}}{\mathbf{Z}_B} = \frac{86,6/30^\circ}{6/30^\circ} = 14,43/0^\circ \text{ A}$$

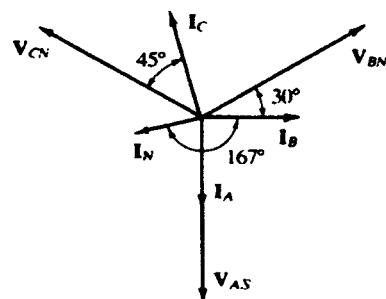
$$\mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{V}_{CN}}{\mathbf{Z}_C} = \frac{86,6/150^\circ}{5/45^\circ} = 17,32/105^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_N = -(14,43/-90^\circ + 14,43/0^\circ + 17,32/105^\circ) = 10,21/-167^\circ \text{ A}$$

El diagrama fasorial se ha representado en la Figura 11-16(b).



(a)



(b)

Figura 11.16.

A tres hilos

Sin el conductor del neutro, las impedancias conectadas en estrella estarán bajo tensiones que diferirán considerablemente de la tensión fase-neutro.

EJEMPLO 11.7. La Figura 11.17(a) muestra el mismo sistema tratado en el Ejemplo 11.6, excepto que no se ha representado el hilo del neutro. Obtener las intensidades de línea y determinar la tensión de desplazamiento del neutro, V_{ON} .

El circuito se ha vuelto a representar en la Figura 11.17(b) con un aspecto que sugiere que se resuelva mediante una única ecuación de tensión en un nudo, con V_{OB} como incógnita.

$$\frac{V_{OB} - V_{AB}}{Z_A} + \frac{V_{OB}}{Z_B} + \frac{V_{OB} + V_{BC}}{Z_C} = 0$$

$$V_{OB} \left(\frac{1}{6/0^\circ} + \frac{1}{6/30^\circ} + \frac{1}{5/45^\circ} \right) = \frac{150/240^\circ}{6/0^\circ} - \frac{150/0^\circ}{5/45^\circ}$$

de donde $V_{OB} = 66,76/-152,85^\circ$ V. Entonces,

$$I_B = -\frac{V_{OB}}{Z_B} = 11,13/-2,85^\circ \text{ A}$$

De $V_{OA} + V_{AB} = V_{OB}$, $V_{OA} = 100,7/81,08^\circ$ V, e

$$I_A = -\frac{V_{OA}}{Z_A} = 16,78/-98,92^\circ \text{ A}$$

Análogamente, $\mathbf{V}_{OC} = \mathbf{V}_{OB} - \mathbf{V}_{CB} = 95,58/-18,58^\circ$ V, e

$$\mathbf{I}_C = 19,12/116,4^\circ$$
 A

El punto O está desplazado del neutro N por un fasor de tensión \mathbf{V}_{ON} , dado por

$$\mathbf{V}_{ON} = \mathbf{V}_{OA} + \mathbf{V}_{AN} = 100,7/81,08^\circ + \frac{150}{\sqrt{3}}/-90^\circ = 20,24/39,53^\circ$$
 V

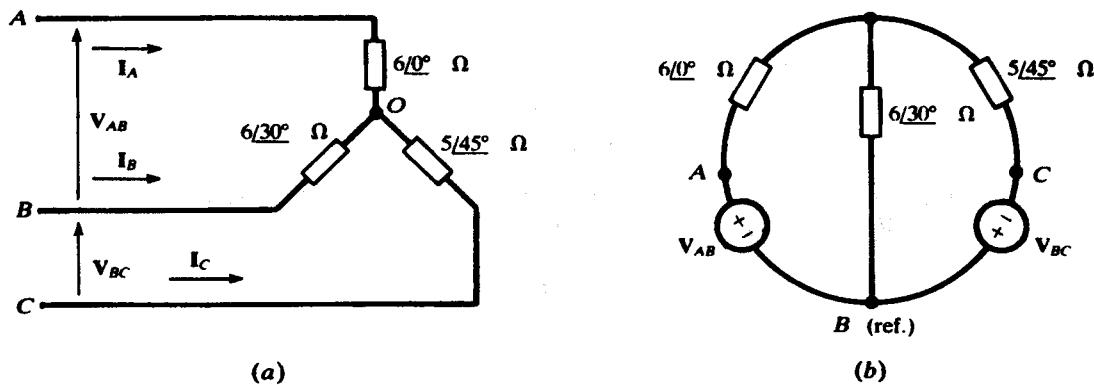


Figura 11.17.

El diagrama fasorial, Figura 11.18, muestra el desplazamiento del punto O del centroide del triángulo equilátero.

En el Problema 11.13 se puede observar un método alternativo.

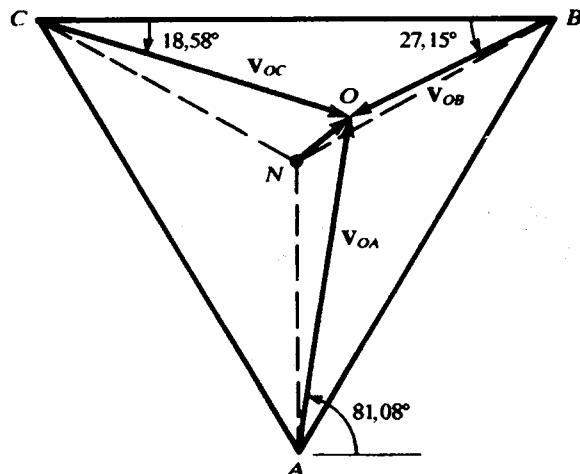


Figura 11.18.

11.12. POTENCIA TRIFÁSICA

Las potencias suministradas por las tres fases de un generador equilibrado a tres impedancias idénticas con argumento θ son

$$\begin{aligned} p_a(t) &= V_p I_p \cos \theta + V_p I_p \cos (2\omega t - \theta) \\ p_b(t) &= V_p I_p \cos \theta + V_p I_p \cos (2\omega t - 240^\circ - \theta) \\ p_c(t) &= V_p I_p \cos \theta + V_p I_p \cos (2\omega t - 480^\circ - \theta) \\ p_T(t) &= p_a(t) + p_b(t) + p_c(t) = \\ &= 3V_p I_p \cos \theta + V_p I_p [\cos (2\omega t - \theta) + \cos (2\omega t - 240^\circ - \theta) + \cos (2\omega t - 480^\circ - \theta)] \end{aligned}$$

Pero $\cos (2\omega t - \theta) + \cos (2\omega t - 240^\circ - \theta) + \cos (2\omega t - 480^\circ - \theta) = 0$ para cualquier t . Entonces,

$$p_T(t) = 3V_p I_p \cos \theta = P$$

La potencia instantánea es igual a la potencia media total. Se puede escribir en función de la tensión de línea V_L y de la intensidad de línea I_L , quedando

En el sistema en Δ , $V_L = V_p$ e $I_L = \sqrt{3}I_p$. Entonces, $P = \sqrt{3}V_L I_L \cos \theta$.

En el sistema en Y , $V_L = \sqrt{3}V_p$ e $I_L = I_p$. Entonces, $P = \sqrt{3}V_L I_L \cos \theta$.

La expresión $\sqrt{3}V_L I_L \cos \theta$ da la potencia en un sistema trifásico equilibrado, independientemente de la forma de conexión. El factor de potencia del sistema trifásico es $\cos \theta$. La tensión de línea V_L en los sistemas industriales es siempre conocida. Si la carga está equilibrada, la potencia total se puede calcular a partir de la intensidad de línea y el factor de potencia.

En resumen, potencia activa, reactiva, aparente y factor de potencia en un sistema trifásico son

$$P = \sqrt{3}V_L I_L \cos \theta \quad Q = \sqrt{3}V_L I_L \sin \theta \quad S = \sqrt{3}V_L I_L \quad \text{fp} = \frac{P}{S}$$

Por supuesto, todas las tensiones e intensidades indicadas son valores eficaces.

11.13. MEDIDA DE POTENCIA Y MÉTODO DE LOS DOS VATÍMETROS

Un vatímetro de CA tiene una bobina de tensión y otra de intensidad, y responde al producto de la tensión eficaz, la intensidad de corriente eficaz y el coseno del desfase entre ambos fasores. Por tanto, en la Figura 11.19 el vatímetro indicará la potencia activa suministrada al circuito pasivo.

$$P = V_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \cos \theta = \text{Re}(V_{\text{ef}} V_{\text{ef}}^*)$$

(Véase la Sección 10.7).

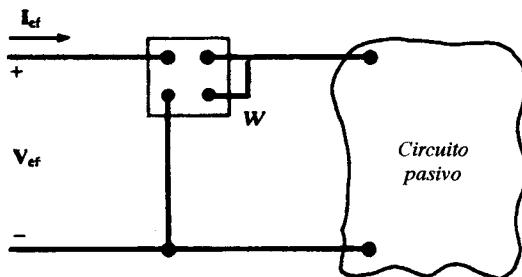


Figura 11.19.

Dos vatímetros conectados en dos cualesquiera de las líneas de un sistema trifásico a tres hilos indicarán correctamente la potencia trifásica total mediante la suma de las dos lecturas. Un vatímetro intentará medir negativo si el desfase entre la tensión y la corriente es mayor de 90°. En este caso, se deben invertir las conexiones de la bobina de intensidad y la medida realizada se debe tratar como negativa en la suma. En la Figura 11.20 los vatímetros están instalados en las líneas A y C, con las bobinas de tensión conectadas en la línea B. Sus lecturas serán:

$$W_A = \operatorname{Re}(V_{AB,\text{ef}} I_{A,\text{ef}}^*) = \operatorname{Re}(V_{AB,\text{ef}} I_{AB,\text{ef}}^*) + \operatorname{Re}(V_{AB,\text{ef}} I_{AC,\text{ef}}^*)$$

$$W_C = \operatorname{Re}(V_{CB,\text{ef}} I_{C,\text{ef}}^*) = \operatorname{Re}(V_{CB,\text{ef}} I_{CA,\text{ef}}^*) + \operatorname{Re}(V_{CB,\text{ef}} I_{CB,\text{ef}}^*)$$

en las que se han usado las relaciones de la ley de Kirchhoff para las corrientes $I_A = I_{AB} + I_{AC}$ e $I_C = I_{CA} + I_{CB}$, con el fin de sustituir las intensidades de línea por las de fase. El primer sumando en W_A es P_{AB} , la potencia activa que consume la carga entre las fases AB; asimismo, el segundo sumando en W_C es P_{CB} . Sumando ambas ecuaciones y combinando los sumandos intermedios se llega a

$$W_A + W_C = P_{AB} = \operatorname{Re}[(V_{AB,\text{ef}} - V_{CB,\text{ef}}) I_{AC,\text{ef}}^*] + P_{CB} = P_{AB} + P_{AC} + P_{CB}$$

ya que, según la ley de Kirchhoff para las tensiones, $V_{AB} - V_{CB} = V_{AC}$.

El mismo razonamiento lleva a un resultado análogo para una carga conectada en Y.

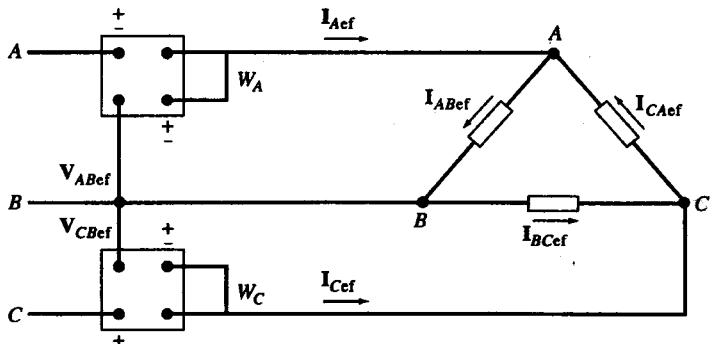


Figura 11.20.

Cargas equilibradas

Cuando tres impedancias iguales Z/θ se conectan en Δ , las intensidades de fase forman ángulos de 30° con sus intensidades de línea resultantes. La Figura 11.21 corresponde a la Figura 11.20 considerando secuencia ABC . Se ve que V_{AB} adelanta a I_A en $\theta + 30^\circ$, mientras V_{CB} adelanta a I_C en $\theta - 30^\circ$. Por consiguiente, las lecturas de los vatímetros serán:

$$W_A = V_{AB,\text{ef}} I_{A,\text{ef}} \cos (\theta + 30^\circ) \quad W_C = V_{CB,\text{ef}} I_{C,\text{ef}} \cos (\theta - 30^\circ)$$

o, como en general no se conoce el orden relativo en secuencia de las líneas escogidas para el montaje de los vatímetros,

$$W_1 = V_{L,\text{ef}} I_{L,\text{ef}} \cos (\theta + 30^\circ)$$

$$W_2 = V_{L,\text{ef}} I_{L,\text{ef}} \cos (\theta - 30^\circ)$$

Estas expresiones son iguales para una carga equilibrada en Y.

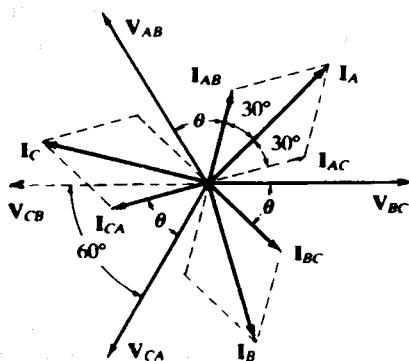


Figura 11.21.

Eliminando $V_{L,\text{ef}} I_{L,\text{ef}}$ entre las dos ecuaciones correspondientes a las lecturas, se obtiene:

$$\operatorname{tg} \theta = \sqrt{3} \left(\frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1} \right)$$

Por tanto, de las lecturas de los dos vatímetros se puede obtener el valor del argumento θ de la carga. El signo de la $\operatorname{tg} \theta$ obtenido de la fórmula anterior no es significativo, ya que los subíndices arbitrarios 1 y 2 podrían haber sido tomados al revés. Sin embargo, en la práctica se sabe que normalmente la carga equilibrada es inductiva ($\theta > 0$).

PROBLEMAS RESUELTOS

- 11.1. El generador bifásico equilibrado de CA de la Figura 11.22 alimenta a dos cargas idénticas. Las dos fuentes de tensión están desfasadas 180° . Determinar: a) las intensi-

dades de línea, las tensiones y sus ángulos de fase, y b) las potencias instantánea y media suministradas por el generador.

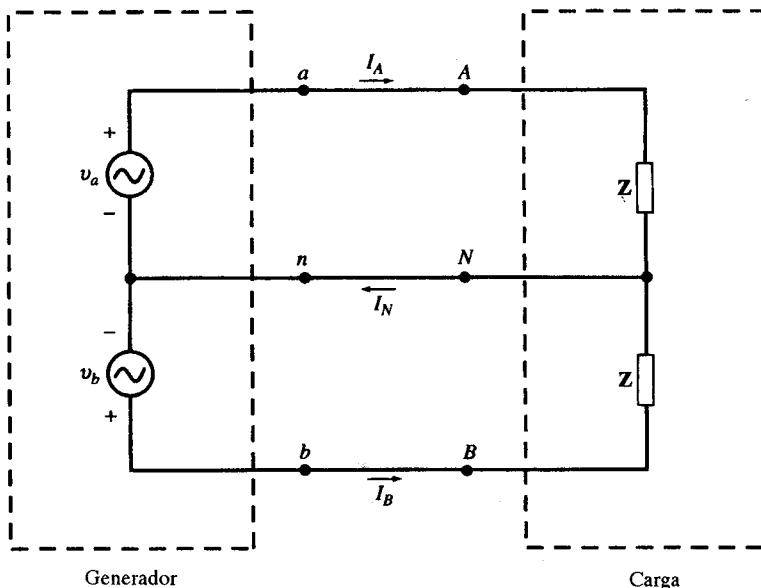


Figura 11.22.

Sea $\mathbf{Z} = |Z| \angle \theta$ e $I_p = V_p / |Z|$.

- a) Las tensiones en el dominio fasorial son

$$\mathbf{V}_{AN} = V_p \angle 0^\circ \quad \mathbf{V}_{BN} = V_p \angle -180^\circ = -V_p \angle 0^\circ \quad \mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{AN} - \mathbf{V}_{BN} = 2V_p \angle 0^\circ$$

Además, con I_p y \mathbf{Z} dadas anteriormente, se tiene:

$$\mathbf{I}_A = I_p \angle -\theta \quad \mathbf{I}_B = I_p \angle -180^\circ - \theta = -I_p \angle -\theta \quad \mathbf{I}_N = \mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B = 0$$

- b) Las potencias instantáneas suministradas son:

$$p_a(t) = v_a(t)i_a(t) = V_p I_p \cos \theta + V_p I_p \cos (2\omega t - \theta)$$

$$p_b(t) = v_b(t)i_b(t) = V_p I_p \cos \theta + V_p I_p \cos (2\omega t - \theta)$$

La potencia instantánea total $p_T(t)$ es

$$p_T(t) = p_a(t) + p_b(t) = 2V_p I_p \cos \theta + 2V_p I_p \cos (2\omega t - \theta)$$

La potencia media es $P_{med} = 2V_p I_p \cos \theta$.

11.2. Resolver el Problema 11.1 con $V_p = 110$ V y $\mathbf{Z} = 4 + j3 \Omega$.

- a) En forma fasorial, $\mathbf{Z} = 4 + j3 = 5/36,9^\circ \Omega$. Entonces,

$$\mathbf{V}_{AN} = 110 \angle 0^\circ \text{ V} \quad \mathbf{V}_{BN} = 110 \angle -180^\circ \text{ V}$$

$$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{AN} - \mathbf{V}_{BN} = 110 \angle 0^\circ - 110 \angle -180^\circ = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\text{e} \quad \mathbf{I}_A = \mathbf{V}_{AN}/Z = 22/\underline{-36,9^\circ} \text{ A} \quad \mathbf{I}_B = \mathbf{V}_{BN}/Z = 22/\underline{-216,9^\circ} = -22/\underline{-36,9^\circ} \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_N = \mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B = 0$$

b) $p_a(t) = 110(22)[\cos 36,9^\circ + \cos(2\omega t - 36,9^\circ)] = 1936 + 2420 \cos(2\omega t - 36,9^\circ) \text{ (W)}$
 $p_b(t) = 110(22)[\cos 36,9^\circ + \cos(2\omega t - 36,9^\circ - 360^\circ)] = 1936 + 2420 \cos(2\omega t - 36,9^\circ) \text{ (W)}$
 $p(t) = p_a(t) + p_b(t) = 3872 + 4840 \cos(2\omega t - 36,9^\circ) \text{ (W)}$
 $P_{\text{med}} = 3872 \text{ W}$

- 11.3. Repetid el Problema 11.2 pero con las dos fuentes de tensión del Problema 11.1 desfasadas 90° .

a) De nuevo, $\mathbf{Z} = 5/\underline{36,9^\circ}$. Entonces,

$$\mathbf{V}_{AN} = 110/\underline{0^\circ} \text{ V} \quad \mathbf{V}_{BN} = 110/\underline{-90^\circ} \text{ V}$$

$$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{AN} - \mathbf{V}_{BN} = 110/\underline{0^\circ} - 110/\underline{-90^\circ} = 110(\sqrt{2}/\underline{-45^\circ}) = 155,6/\underline{-45^\circ} \text{ V}$$

e) $\mathbf{I}_A = \mathbf{V}_{AN}/Z = 22/\underline{-36,9^\circ} \text{ A} \quad \mathbf{I}_B = \mathbf{V}_{BN}/Z = 22/\underline{-126,9^\circ} \text{ A}$

$$\mathbf{I}_N = \mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B = 22/\underline{-36,9^\circ} + 22/\underline{-126,9^\circ} = 22(\sqrt{2}/\underline{-81,9^\circ}) = 31,1/\underline{-81,9^\circ} \text{ A}$$

b) $p_a(t) = 110(22)[\cos 36,9^\circ + \cos(2\omega t - 36,9^\circ)] = 1936 + 2420 \cos(2\omega t - 36,9^\circ) \text{ (W)}$
 $p_b(t) = 110(22)[\cos 36,9^\circ + \cos(2\omega t - 36,9^\circ - 180^\circ)] = 1936 - 2420 \cos(2\omega t - 36,9^\circ) \text{ (W)}$
 $p(t) = P_a(t) + P_b(t) = 2(1936) = 3872 \text{ W}$
 $P_{\text{med}} = p(t) = 3872 \text{ W}$

- 11.4. Demostrar que la tensión entre líneas V_L en un sistema trifásico es $\sqrt{3}$ veces la tensión fase-neutro V_F .

Véase el diagrama fasorial de las tensiones (de la secuencia ABC), Figura 11.23.

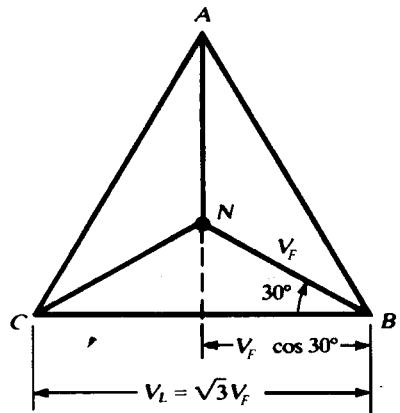


Figura 11.23.

- 11.5. Un sistema trifásico ABC, con una tensión de valor eficaz 70,7 V, tiene una carga equilibrada conectada en triángulo con impedancias $20/\underline{45^\circ} \Omega$. Obtener las intensidades de línea y dibujar el diagrama fasorial de tensiones e intensidades.

El circuito se ha representado en la Figura 11.24. Los fasores de tensión tienen un módulo $V_{\text{máx}} = \sqrt{3}V_{\text{ef}} = 100$ V. Los ángulos de fase se obtienen de la Figura 11.7(a). Entonces,

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z} = \frac{100/120^\circ}{20/45^\circ} = 5\angle 75^\circ \text{ A}$$

Análogamente, $I_{BC} = 5\angle -45^\circ$ A e $I_{CA} = 5\angle 195^\circ$ A. Las intensidades de línea son:

$$I_A = I_{AB} + I_{AC} = 5\angle 75^\circ - 5\angle 195^\circ = 8,65\angle 45^\circ \text{ A}$$

Análogamente, $I_B = 8,65\angle -75^\circ$ A, $I_C = 8,65\angle 165^\circ$ A.

El diagrama fasorial de tensiones e intensidades se ha representado en la Figura 11.25.

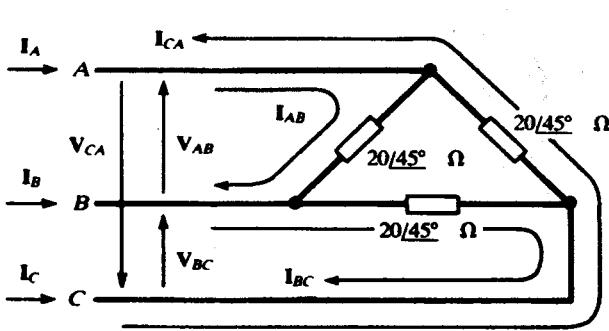


Figura 11.24.

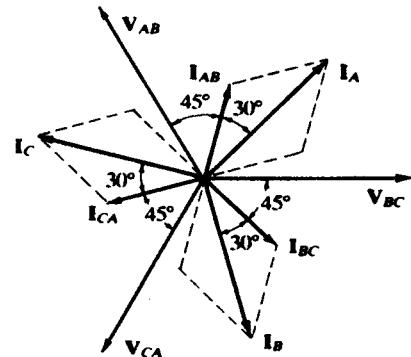


Figura 11.25.

- 11.6. Un sistema trifásico CBA a tres hilos, con una tensión de línea de valor eficaz 106,1 V, tiene conectada una carga equilibrada en estrella con impedancias $5\angle -30^\circ \Omega$ (Figura 11.26). Obtener las intensidades y dibujar el diagrama fasorial de tensiones e intensidades.

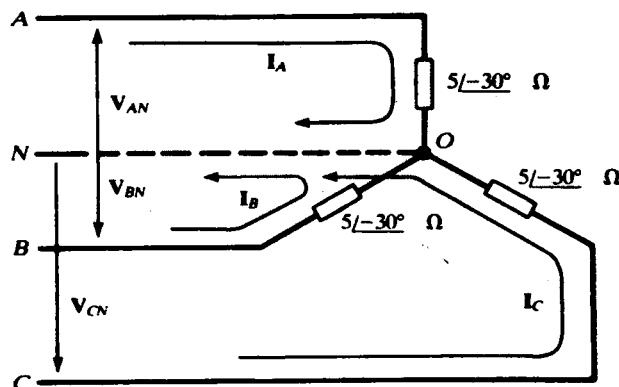


Figura 11.26.

En cargas equilibradas en estrella el conductor neutro no transporta corriente. Pero aunque este sistema es a tres hilos, se puede añadir el neutro para simplificar los cálculos de las intensidades de línea. El valor de la tensión de línea es $V_L = \sqrt{2}(106,1) = 150$ V. Entonces el valor de la tensión fase-neutro es $V_{LN} = 150/\sqrt{3} = 86,6$ V.

$$I_A = \frac{V_{AN}}{Z} = \frac{86,6/-90^\circ}{5/-30^\circ} = 17,32/-60^\circ \text{ A}$$

Análogamente, $I_B = 17,32/60^\circ$ A e $I_C = 17,32/180^\circ$ A. Véase el diagrama fasorial, Figura 11.27, en el que el conjunto de intensidades de línea equilibradas adelanta a las tensiones de fase-neutro en 30° , el argumento de las impedancias (con signo menos).

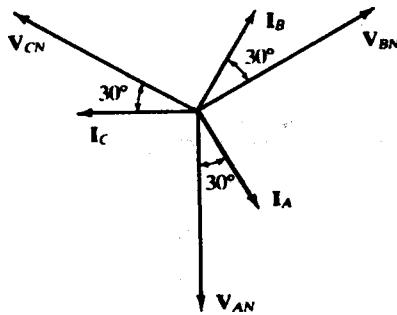


Figura 11.27.

- 11.7. Un sistema trifásico *CBA* a tres hilos, con una tensión de línea de valor eficaz 106,1 V, tiene conectada una carga equilibrada en triángulo con impedancias $Z = 15/30^\circ \Omega$. Obtener las intensidades de línea y de fase por el método del circuito monofásico equivalente.

Según la Figura 11.28, $V_{LN} = (141,4\sqrt{2})/\sqrt{3} = 115,5$ V y, por tanto,

$$I_L = \frac{115,5/0^\circ}{(15/3)/30^\circ} = 23,1/-30^\circ \text{ A}$$

Las intensidades de línea retrasan respecto a las tensiones fase-neutro de la secuencia *ABC* en 30° .

$$I_A = 23,1/60^\circ \text{ A} \quad I_B = 23,1/-60^\circ \text{ A} \quad I_C = 23,1/180^\circ \text{ A}$$

Las intensidades de fase, de módulo $I_F = I_L/\sqrt{3} = 13,3$ A, retrasan respecto a las tensiones de línea correspondientes en 30° .

$$I_{AB} = 13,3/90^\circ \text{ A} \quad I_{BC} = 13,3/-30^\circ \text{ A} \quad I_{CA} = 13,3/210^\circ \text{ A}$$

Los ángulos anteriores serán evidentes realizando la representación del diagrama fasorial.

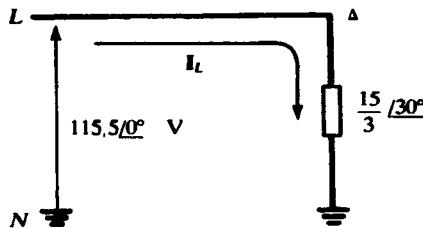


Figura 11.28.

- 11.8.** Un sistema trifásico a tres hilos, con una tensión de línea de valor eficaz 176,8 V, alimenta a dos cargas equilibradas, una en triángulo con $Z_\Delta = 15/0^\circ$ Ω y la otra en estrella con $Z_Y = 10/30^\circ$ Ω. Obtener la potencia total.

En primer lugar se convierte la carga en triángulo a estrella, y se usa el circuito monofásico equivalente, Figura 11.29, para obtener la intensidad de línea.

$$I_L = \frac{144,3/0^\circ}{5/0^\circ} + \frac{144,3/0^\circ}{10/30^\circ} = 42/-9,9^\circ \text{ A}$$

Entonces $P = \sqrt{3}V_{L,\text{ef}}I_{L,\text{ef}} \cos \theta = \sqrt{3}(176,8)(29,7) \cos 9,9^\circ = 8959 \text{ W}$

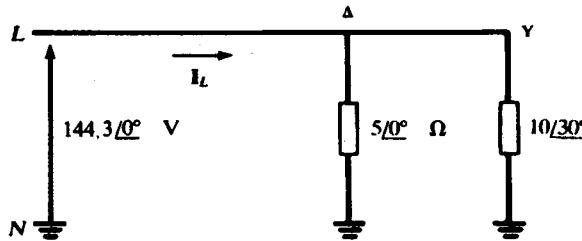


Figura 11.29.

- 11.9.** Obtener las dos medidas cuando se utiliza el método de los dos vatímetros en el circuito del Problema 11.8.

El ángulo de fase de I_L , $-9,9^\circ$, es el negativo del argumento de la impedancia equivalente de la combinación en paralelo de $5/0^\circ$ Ω y $10/30^\circ$ Ω. Por tanto, $\theta = 9,9^\circ$ en las fórmulas de la Sección 11.13.

$$W_1 = V_{L,\text{ef}}I_{L,\text{ef}} \cos (\theta + 30^\circ) = (176,8)(29,7) \cos 39,9^\circ = 4028 \text{ W}$$

$$W_2 = V_{L,\text{ef}}I_{L,\text{ef}} \cos (\theta - 30^\circ) = (176,8)(29,7) \cos (-20,1^\circ) = 4931 \text{ W}$$

Como se puede comprobar, $W_1 + W_2 = 8959 \text{ W}$, de acuerdo con el Problema 11.8.

- 11.10.** Una fuente trifásica, con una tensión de línea de valor eficaz 240 V, tiene conectada la carga desequilibrada en triángulo de la Figura 11.30. Obtener las intensidades de línea y la potencia total.

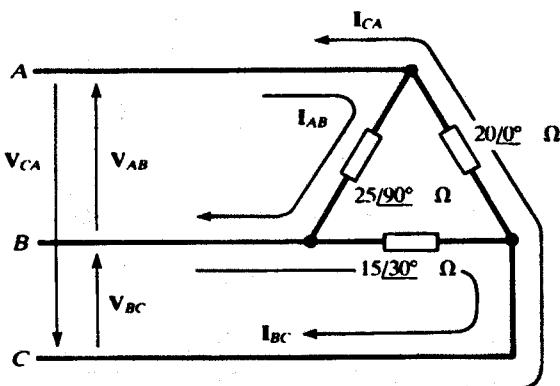


Figura 11.30.

Los cálculos de la potencia se pueden hacer sin conocer la secuencia del sistema. Los valores eficaces de las corrientes de fase son:

$$I_{AB,\text{ef}} = \frac{240}{25} = 9,6 \text{ A} \quad I_{BC,\text{ef}} = \frac{240}{15} = 16 \text{ A} \quad I_{CA,\text{ef}} = \frac{240}{20} = 12 \text{ A}$$

Por tanto, las potencias complejas en las tres fases son

$$\begin{aligned} S_{AB} &= (9,6)^2(25/90^\circ) = 2304/90^\circ = 0 + j2304 \\ S_{BC} &= (16)^2(15/30^\circ) = 3840/30^\circ = 3325 + j1920 \\ S_{CA} &= (12)^2(20/0^\circ) = 2880/0^\circ = 2880 + j0 \end{aligned}$$

y la potencia compleja total es la suma

$$S_T = 6205 + j4224$$

que es $P_T = 6205 \text{ W}$ y $Q_T = 4224 \text{ VAr}$ (inductiva).

Para determinar las intensidades de corriente se debe suponer una secuencia; se toma la *ABC*. Entonces, usando la Figura 11.7(a),

$$I_{AB} = \frac{339,4/120^\circ}{25/90^\circ} = 13,6/30^\circ \text{ A}$$

$$I_{BC} = \frac{339,4/0^\circ}{15/30^\circ} = 22,6/-30^\circ \text{ A}$$

$$I_{CA} = \frac{339,4/240^\circ}{20/0^\circ} = 17/240^\circ \text{ A}$$

Las intensidades de línea se obtienen aplicando la ley de Kirchhoff para las corrientes en los nudos de la carga.

$$I_A = I_{AB} + I_{AC} = 13,6/30^\circ - 17/240^\circ = 29,6/46,7^\circ \text{ A}$$

$$I_B = I_{BC} + I_{BA} = 22,6/-30^\circ - 13,6/30^\circ = 19,7/-66,7^\circ \text{ A}$$

$$I_C = I_{CA} + I_{CB} = 17/240^\circ - 22,6/-30^\circ = 28,3/-173,1^\circ \text{ A}$$

- 11.11. Obtener las lecturas de los vatímetros conectados en las líneas *A* y *B* del circuito del Problema 11.10 (ambos vatímetros toman el potencial de referencia en la línea *C*).

$$\begin{aligned}V_A &= \operatorname{Re}(\mathbf{V}_{AC,\text{ef}} \mathbf{I}_{A,\text{ef}}^*) = \operatorname{Re}\left[(240/60^\circ) \left(\frac{29,6}{\sqrt{2}} \angle -46,7^\circ\right)\right] \\&= \operatorname{Re}(5023/13,3^\circ) = 4888 \text{ W} \\W_B &= \operatorname{Re}(\mathbf{V}_{BC,\text{ef}} \mathbf{I}_{B,\text{ef}}^*) = \operatorname{Re}\left[(240/0^\circ) \left(\frac{19,7}{\sqrt{2}} \angle 66,7^\circ\right)\right] \\&= \operatorname{Re}(3343/66,7^\circ) = 1322 \text{ W}\end{aligned}$$

Obsérvese que $W_A + W_B = 6210 \text{ W}$, que coincide con P_T calculada en el Problema 11.10.

- 11.12. Un sistema trifásico *ABC* a cuatro hilos, con una tensión de línea $\mathbf{V}_{BC} = 294,2/0^\circ \text{ V}$, tiene conectada una carga en estrella con $\mathbf{Z}_A = 10/0^\circ \Omega$, $\mathbf{Z}_B = 15/30^\circ \Omega$ y $\mathbf{Z}_C = 10/-30^\circ \Omega$ (Figura 11.31). Obtener las intensidades de corriente por las líneas y por el neutro.

$$\mathbf{I}_A = \frac{169,9/90^\circ}{10/0^\circ} = 16,99/90^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_B = \frac{169,9/-30^\circ}{15/30^\circ} = 11,33/-60^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_C = \frac{169,9/-150^\circ}{10/-30^\circ} = 16,99/-120^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_N = -(\mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_C) = 8,04/69,5^\circ \text{ A}$$

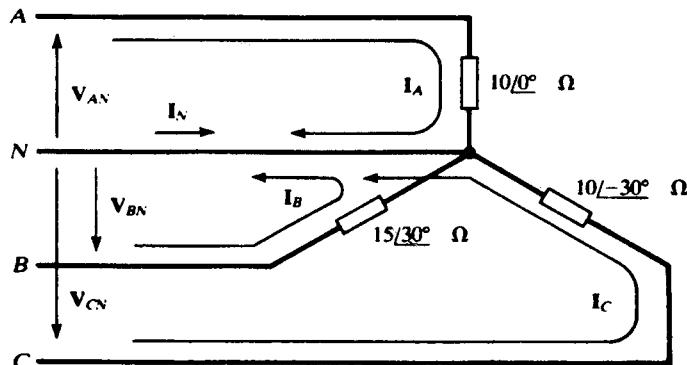


Figura 11.31.

- 11.13. Las impedancias de la carga conectada en Y de la Figura 11.32, $Z_A = 10/0^\circ \Omega$, $Z_B = 15/30^\circ \Omega$ y $Z_C = 10/-30^\circ \Omega$, se alimentan por un sistema trifásico ABC a tres hilos en el que $V_{BC} = 208/0^\circ$ V. Obtener las tensiones en los extremos de las impedancias y la tensión de desplazamiento del neutro V_{ON} .

Se puede aplicar el método del Ejemplo 11.7, resolviendo la ecuación de la tensión en un nudo. Sin embargo, las corrientes de malla I_1 e I_2 representadas en la Figura 11.32 dan otra posibilidad.

$$\begin{bmatrix} 10/0^\circ + 15/30^\circ & -15/30^\circ \\ -15/30^\circ & 15/30^\circ + 10/-30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 208/120^\circ \\ 208/0^\circ \end{bmatrix}$$

Resolviendo, $I_1 = 14,16/86,09^\circ$ A e $I_2 = 10,21/52,41^\circ$ A. Entonces, las intensidades de línea son

$$I_A = I_1 = 14,16/86,09^\circ \text{ A} \quad I_B = I_2 - I_1 = 8,01/-48,93^\circ \text{ A}$$

$$I_C = -I_2 = 10,21/-127,59^\circ \text{ A}$$

Ahora se pueden calcular los fasores de las tensiones en las cargas.

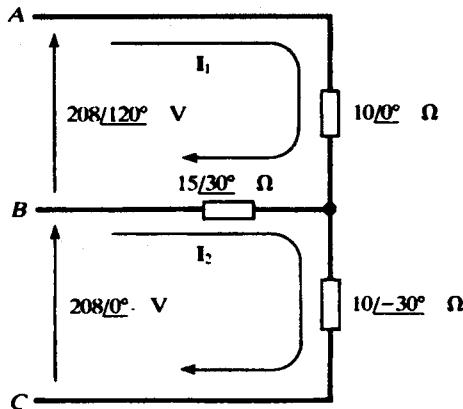


Figura 11.32.

$$V_{AO} = I_A Z_A = 141,6/86,09^\circ \text{ V}$$

$$V_{BO} = I_B Z_B = 120,2/-18,93^\circ \text{ V}$$

$$V_{CO} = I_C Z_C = 102,1/-157,59^\circ \text{ V}$$

$$V_{ON} = V_{OA} + V_{AN} = 141,6/-93,91^\circ + 120,1/90^\circ = 23,3/-114,53^\circ \text{ V}$$

El diagrama fasorial es el de la Figura 11.33.

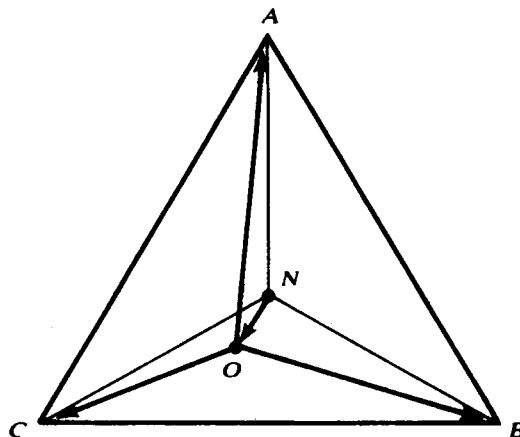


Figura 11.33.

- 11.14.** Calcular la potencia activa total que consume la carga desequilibrada en Y del Problema 11.13 y comparar con las lecturas de los vatímetros en las líneas B y C.

La potencia que consume cada carga es

$$P_A = I_{A,\text{ef}}^2 R_A = \left(\frac{14,16}{\sqrt{2}} \right) (10) = 1002,5 \text{ W}$$

$$P_B = I_{B,\text{ef}}^2 R_B = \left(\frac{8,01}{\sqrt{2}} \right) (15 \cos 30^\circ) = 417 \text{ W}$$

$$P_C = I_{C,\text{ef}}^2 R_C = \left(\frac{10,21}{\sqrt{2}} \right)^2 (10 \cos 30^\circ) = 451,4 \text{ W}$$

y, por tanto, la potencia activa total es 1870,9 W.

A partir de los resultados del Problema 11.13, las lecturas de los vatímetros son:

$$W_B = \operatorname{Re}(\mathbf{V}_{BA,\text{ef}} \mathbf{I}_{B,\text{ef}}^*) = \operatorname{Re} \left[\left(\frac{208}{\sqrt{2}} \angle -60^\circ \right) \left(\frac{8,01}{\sqrt{2}} \angle 48,93^\circ \right) \right] = 817,1 \text{ W}$$

$$W_C = \operatorname{Re}(\mathbf{V}_{CA,\text{ef}} \mathbf{I}_{C,\text{ef}}^*) = \operatorname{Re} \left[\left(\frac{208}{\sqrt{2}} \angle 2400^\circ \right) \left(\frac{10,21}{\sqrt{2}} \angle 127,59^\circ \right) \right] = 1052,8 \text{ W}$$

La potencia total medida por los dos vatímetros es 1869,9 W.

- 11.15.** Una carga trifásica equilibrada a tres hilos conectada en Δ produce unas lecturas en dos vatímetros de 1154 W y 577 W. Obtener la impedancia de la carga, si la tensión de línea es 141,4 V.

$$\pm \operatorname{tg} \theta = \sqrt{3} \left(\frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1} \right) = \sqrt{3} \left(\frac{577}{1731} \right) = 0,577 \quad \theta = \pm 30^\circ$$

y, usando $P_T = \sqrt{3}V_{L,\text{ef}}I_{L,\text{ef}} \cos \theta$,

$$Z_\Delta = \frac{V_{L,\text{ef}}}{I_{F,\text{ef}}} = \frac{\sqrt{3}V_{L,\text{ef}}}{I_{L,\text{ef}}} = \frac{3V_{L,\text{ef}}^2 \cos \theta}{P_T} = \frac{3(100)^2 \cos 30^\circ}{1154 + 577} \Omega = 15 \Omega$$

Por tanto, $Z_\Delta = 15/\pm 30^\circ \Omega$.

- 11.16.** Una conexión equilibrada en Δ , con $Z_\Delta = 30/30^\circ \Omega$, está conectada a un sistema trifásico a tres hilos de 250 V, a través de una línea con una impedancia por fase $Z_c = 0,4 + j0,3 \Omega$. Calcular la tensión de línea en la carga.

En la Figura 11.34 se ha representado el circuito monofásico equivalente. Por división de tensión, entre los extremos de la carga equivalente en Y, la tensión es

$$V_{AN} = \left(\frac{10/30^\circ}{0,4 + j0,3 + 10/30^\circ} \right) \left(\frac{250}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ \right) = 137,4/-0,33^\circ \text{ V}$$

donde $V_L = (137,4)(\sqrt{3}) = 238 \text{ V}$.

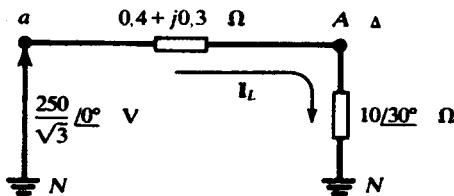


Figura 11.34.

Considerando solamente los módulos, la tensión de línea de 238 V en la carga supone una caída de tensión en la línea de 12 V. La sección y la longitud total del hilo influyen en la resistencia de Z_L , mientras que los materiales que envuelven al conductor (por ejemplo, acero, aluminio o fibra), así como la longitud, afecta a la reactancia inductiva.

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

A continuación, el diagrama fasorial de tensiones e intensidades no se ha incluido en la solución, incluso cuando el problema lo pide específicamente. Como regla general, se debería representar el diagrama fasorial en todos los problemas polifásicos.

- 11.17.** Tres impedancias de $10/53,13^\circ \Omega$ están conectadas en triángulo a un sistema trifásico CBA con una tensión de línea de valor eficaz 240 V. Obtener las intensidades de línea.

Solución: $I_A = 58,8/-143,13^\circ \text{ A}$, $I_B = 58,8/-23,13^\circ \text{ A}$, $I_C = 58,8/96,87^\circ \text{ A}$.

- 11.18. Tres impedancias de $42/-35^\circ \Omega$ están conectadas en triángulo a un sistema trifásico *ABC* con $V_{BC} = 495/0^\circ$ V. Obtener las intensidades de línea.

Solución: $I_A = 20,41/125^\circ$ A, $I_B = 20,41/5^\circ$ A, $I_C = 20,41/-115^\circ$ A.

- 11.19. Un sistema trifásico a tres hilos, con una tensión de línea de valor eficaz 100 V, tiene unas intensidades de corriente

$$I_A = 15,41/-160^\circ \text{ A} \quad I_B = 15,41/-40^\circ \text{ A} \quad I_C = 15,41/80^\circ \text{ A}$$

¿Cuál es la secuencia del sistema y cuánto valen las impedancias, si la conexión es en triángulo?

Solución: CBA , $15,9/70^\circ \Omega$.

- 11.20. Una carga equilibrada conectada en Y, con impedancias $6/45^\circ \Omega$, está conectada a un sistema trifásico *CBA* a cuatro hilos con una tensión de línea de valor eficaz 208 V. Calcular las intensidades de línea y por el neutro.

Solución: $I_A = 28,31/-135^\circ$ A, $I_B = 28,31/-15^\circ$ A, $I_C = 28,31/105^\circ$ A, $I_N = 0$.

- 11.21. Una carga equilibrada conectada en Y, con impedancias $65/-20^\circ \Omega$, está conectada a un sistema trifásico *CBA* a tres hilos, donde $V_{AB} = 678,8/-120^\circ$ V. Obtener las intensidades de línea.

Solución: $I_A = 6,03/-70^\circ$ A, $I_B = 6,03/50^\circ$ A, $I_C = 6,03/170^\circ$ A.

- 11.22. Una carga equilibrada conectada en Δ , con $Z_A = 9/-30^\circ \Omega$, y una carga equilibrada conectada en Y con $Z_Y = 5/45^\circ \Omega$, están alimentadas por el mismo sistema trifásico *ABC*, con una tensión de línea de valor eficaz 480 V. Obtener las intensidades de línea, usando el método del circuito monofásico equivalente.

Solución: $I_A = 168,9/93,36^\circ$ A, $I_B = 168,9/-26,64^\circ$ A, $I_C = 168,9/-146,64^\circ$ A.

- 11.23. Una carga equilibrada conectada en Δ de impedancias $27/-25^\circ \Omega$ y una carga equilibrada conectada en Y de impedancias $10/-30^\circ \Omega$ son alimentadas por el mismo sistema trifásico *ABC*, con $V_{CN} = 169,8/-150^\circ$ V. Obtener las intensidades de línea.

Solución: $I_A = 35,8/117,36^\circ$ A, $I_B = 35,8/-2,64^\circ$ A, $I_C = 35,8/-122,64^\circ$ A.

- 11.24. Una carga equilibrada conectada en Δ , con impedancias de $10/-36,9^\circ \Omega$, y una carga equilibrada conectada en Y, son alimentadas por el mismo sistema trifásico *ABC* con $V_{CA} = 141,4/240^\circ$ V. Si $I_B = 40,44/13,41^\circ$ A, ¿cuánto valen las impedancias conectadas en Y?

Solución: $5/-53,3^\circ \Omega$.

- 11.25. Un sistema trifásico *ABC*, de tensión de línea de valor eficaz 500 V, tiene una carga conectada en Δ en la que

$$Z_{AB} = 10/30^\circ \Omega \quad Z_{BC} = 25/0^\circ \Omega \quad Z_{CA} = 20/-30^\circ \Omega$$

Calcular las intensidades de línea.

Solución: $I_A = 106,1/90^\circ$ A, $I_B = 76,15/-68,2^\circ$ A, $I_C = 45,28/-128,65^\circ$ A.

- 11.26. Un sistema trifásico ABC , con $V_{BC} = 294,2/0^\circ$ V, tiene una carga conectada en Δ

$$Z_{AB} = 5/0^\circ \Omega \quad Z_{BC} = 4/30^\circ \Omega \quad Z_{CA} = 6/-15^\circ \Omega$$

Calcular las intensidades de línea.

Solución: $I_A = 99,7/99,7^\circ$ A, $I_B = 127,9/-43,3^\circ$ A, $I_C = 77,1/-172,1^\circ$ A.

- 11.27. Un sistema trifásico CBA a cuatro hilos, con tensión de línea de valor eficaz 100 V, tiene conectadas en Y las impedancias

$$Z_A = 3/0^\circ \Omega \quad Z_B = 3,61/56,31^\circ \Omega \quad Z_C = 2,24/-26,57^\circ \Omega$$

Calcular las intensidades de corriente I_A , I_B , I_C e I_N .

Solución: $27,2/-90^\circ$ A, $22,6/-26,3^\circ$ A, $36,4/176,6^\circ$ A, $38,6/65,3^\circ$ A.

- 11.28. Un sistema trifásico ABC a cuatro hilos, con $V_{BC} = 294,2/0^\circ$ A, tiene conectadas en Y las impedancias

$$Z_A = 12/45^\circ \Omega \quad Z_B = 10/30^\circ \Omega \quad Z_C = 8/0^\circ \Omega$$

Calcular las intensidades de corriente I_A , I_B , I_C e I_N .

Solución: $14,16/45^\circ$ A, $16,99/-60^\circ$ A, $21,24/-150^\circ$ A, $15,32/90,4^\circ$ A.

- 11.29. Una carga conectada en Y, con $Z_A = 10/0^\circ \Omega$, $Z_B = 10/60^\circ \Omega$ y $Z_C = 10/-60^\circ \Omega$, está conectada a un sistema trifásico ABC a tres hilos con una tensión de línea de valor eficaz 141,4 V. Determinar las tensiones en las cargas V_{AO} , V_{BO} , V_{CO} y la tensión de desplazamiento del neutro V_{ON} . Dibujar un diagrama fasorial similar al de la Figura 11.18.

Solución: $173,2/90^\circ$ V, $100/0^\circ$ V, $100/180^\circ$ V, $57,73/-90^\circ$ V.

- 11.30. Una carga conectada en Y, con $Z_A = 10/-60^\circ \Omega$, $Z_B = 10/0^\circ \Omega$ y $Z_C = 10/60^\circ \Omega$, se conecta a un sistema trifásico CBA a tres hilos con una tensión de línea de valor eficaz 147,1 V. Calcular las intensidades de línea I_A , I_B e I_C .

Solución: $20,8/-60^\circ$ A, 0 A, $20,8/120^\circ$ A.

- 11.31. Un sistema trifásico ABC a tres hilos con una carga equilibrada tiene una tensión de línea de valor eficaz 200 V y una intensidad de línea (máxima) $I_A = 13,61/60^\circ$ A. Calcular la potencia total.

Solución: 2887 W.

- 11.32. Dos cargas equilibradas conectadas en Δ , con impedancias $20/-60^\circ \Omega$ y $18/45^\circ \Omega$, respectivamente, están conectadas a un sistema trifásico en el que la tensión de línea es $V_{BC} = 212,1/0^\circ$ V. Calcular la potencia por fase de cada carga. Después, usando el método del circuito monofásico equivalente, calcular la intensidad de línea total, la potencia total y comparar con la suma de las potencias por fase.

Solución: 562,3 W, 883,6 W, $4337,5$ W = $3(562,3)$ W + $3(883,6)$ W.

- 11.33. En el Problema 11.5 se conecta una carga equilibrada en Δ con $Z = 20/45^\circ \Omega$, que consume unas intensidades de línea de 8,65 A con unas tensiones de línea de 100 V, ambos valores máximos. Calcular las lecturas de dos vatímetros usados para medir la potencia activa total.

Solución: 111,9 W, 417,7 W.

- 11.34. Determinar las lecturas de dos vatímetros conectados en un sistema trifásico a tres hilos con tensión de línea de valor eficaz 240 V y una carga equilibrada conectada en Δ con impedancias $20/\underline{80^\circ} \Omega$.

Solución: -1706 W, 3206 W.

- 11.35. Un sistema trifásico ABC a tres hilos, con una tensión de línea $V_{BC} = 311,1/\underline{0^\circ}$ V, tiene unas intensidades de línea

$$I_A = 61,5/\underline{116,6^\circ} \text{ A} \quad I_B = 61,2/\underline{-48^\circ} \text{ A} \quad I_C = 16,1/\underline{218^\circ} \text{ A}$$

Determinar las lecturas de los vatímetros conectados en las líneas: a) A y B, b) B y C, c) A y C.

Solución: a) 5266 W, 6370 W; b) 9312 W, 2322 W; c) 9549 W, 1973 W.

- 11.36. Un sistema trifásico ABC a tres hilos tiene una tensión de línea de valor eficaz 440 V. Las intensidades de línea son

$$I_A = 27,9/\underline{90^\circ} \text{ A} \quad I_B = 81/\underline{-9,9^\circ} \text{ A} \quad I_C = 81/\underline{189,9^\circ} \text{ A}$$

Determinar las lecturas de los vatímetros conectados en las líneas: a) A y B, b) B y C.

Solución: a) $7,52$ kW, $24,8$ kW; b) $16,16$ kW, $16,16$ kW.

- 11.37. Dos vatímetros en un sistema trifásico a tres hilos, con una tensión de línea de valor eficaz 120 V, miden 1500 W y 500 W. ¿Cuál es la impedancia de la carga equilibrada conectada en Δ?

Solución: $16,3/\pm 40,9^\circ \Omega$.

- 11.38. Un sistema trifásico ABC a tres hilos tiene una tensión de línea de valor eficaz 173,2 V. Dos vatímetros conectados en las líneas A y B miden -301 W y 1327 W, respectivamente. Calcular la impedancia de la carga equilibrada conectada en Y. (Al ser conocida la secuencia, se puede determinar el signo del argumento de la carga.)

Solución: $10/\underline{-70^\circ} \Omega$.

- 11.39. Un sistema trifásico a tres hilos, con una tensión de línea $V_{BC} = 339,4/\underline{0^\circ}$ V, tiene conectada una carga equilibrada en Y de $Z_Y = 15/\underline{60^\circ} \Omega$. Las líneas entre el sistema y la carga tienen unas impedancias de $2,24/\underline{26,57^\circ} \Omega$. Determinar el módulo de la tensión de línea en la carga.

Solución: $301,1$ V.

- 11.40. Repetir el Problema 11.39 con una carga de impedancia $Z_Y = 15/\underline{-60^\circ} \Omega$. Ilustrar el efecto del argumento de la carga en la caída de tensión en una impedancia de línea dada, representando los diagramas fasoriales de las tensiones de los dos casos.

Solución: $332,9$ V.

CAPÍTULO 12

Respuesta en frecuencia, filtros y resonancia

12.1. RESPUESTA EN FRECUENCIA

La respuesta de los circuitos lineales a una excitación sinusoidal es también una sinusoides, con la misma frecuencia pero posiblemente con diferente amplitud y ángulo de fase. Esta respuesta es función de la frecuencia. Como ya se ha estudiado, una sinusoides se puede representar por un fasor que indica su módulo y su fase. Se define *la respuesta en frecuencia* de un circuito como la relación del fasor de salida respecto al fasor de entrada. Es una función de $j\omega$ y viene definida por

$$\mathbf{H}(j\omega) = \operatorname{Re}[\mathbf{H}] + j \operatorname{Im}[\mathbf{H}] = |\mathbf{H}| e^{j\theta} \quad (1a)$$

donde $\operatorname{Re}[\mathbf{H}]$ e $\operatorname{Im}[\mathbf{H}]$ son las partes real e imaginaria de $\mathbf{H}(j\omega)$, y $|\mathbf{H}|$ y θ son su módulo y su ángulo de fase. $\operatorname{Re}[\mathbf{H}]$, $\operatorname{Im}[\mathbf{H}]$, $|\mathbf{H}|$ y θ son, en general, funciones de ω . Sus relaciones son

$$|\mathbf{H}|^2 = |\mathbf{H}(j\omega)|^2 = \operatorname{Re}^2[\mathbf{H}] + \operatorname{Im}^2[\mathbf{H}] \quad (1b)$$

$$\theta = \angle \mathbf{H}(j\omega) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\operatorname{Im}[\mathbf{H}]}{\operatorname{Re}[\mathbf{H}]} \quad (1c)$$

La respuesta en frecuencia, por tanto, depende de la elección de las variables de entrada y salida. Por ejemplo, si se conecta una fuente de intensidad al circuito de la Figura 12.1(a), la corriente por el terminal es la entrada y la tensión se puede tomar como la salida. En este caso, la respuesta en frecuencia coincide con la impedancia de entrada $Z = V_1/I_1$. Por el contrario, si se conecta una fuente de tensión a la entrada y se mide la corriente por el terminal, la respuesta en frecuencia coincide con la admitancia de entrada $Y = I_1/V_1 = 1/Z$.

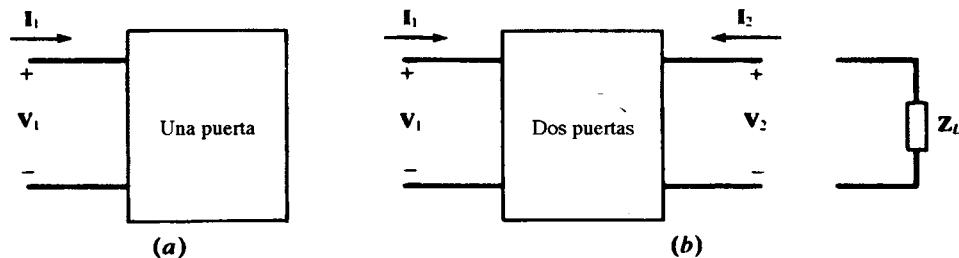


Figura 12.1.

Para el circuito de dos puertas de la Figura 12.1(b) se definen las siguientes respuestas en frecuencia:

<i>Impedancia de entrada</i>	$Z_{en}(j\omega) = V_1/I_1$
<i>Admitancia de entrada</i>	$Y_{en}(j\omega) = 1/Z_{en}(j\omega) = I_1/V_1$
<i>Función de transferencia de tensión</i>	$H_v(j\omega) = V_2/V_1$
<i>Función de transferencia de intensidad</i>	$H_i(j\omega) = I_2/I_1$
<i>Impedancias de transferencia</i>	V_2/I_1 y V_1/I_2 .

EJEMPLO 12.1. Determinar la respuesta en frecuencia V_2/V_1 del circuito de dos puertas de la Figura 12.2.

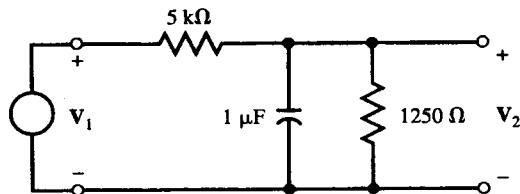


Figura 12.2.

Sea Y_{RC} la admitancia de la combinación RC en paralelo. Entonces, $Y_{RC} = 10^{-6}\omega + 1/1250$. La relación V_2/V_1 se obtiene de dividir V_1 entre Z_{RC} más la resistencia de $5\text{ k}\Omega$.

$$H(j\omega) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_{RC}}{Z_{RC} + 5000} = \frac{1}{1 + 5000Y_{RC}} = \frac{1}{5(1 + 10^{-3}\omega)} \quad (2a)$$

$$|H| = \frac{1}{5\sqrt{1 + 10^{-6}\omega^2}} \quad \theta = -\tan^{-1}(10^{-3}\omega) \quad (2b)$$

Solución alternativa: Primero se obtiene el circuito equivalente de Thévenin de la parte resistiva del circuito, $V_{Th} = V_1/5$ y $R_{Th} = 1\text{ k}\Omega$, y después se divide V_{Th} entre R_{Th} y el condensador de $1\text{ }\mu\text{F}$ para obtener (2a).

12.2. CIRCUITOS PASA-ALTOS Y PASA-BAJOS

La Figura 12.3 muestra un divisor de tensión resistivo en vacío, con las tensiones e intensidades de corriente estándar en las dos puertas. La función de transferencia de la tensión y la impedancia de entrada son

$$H_{v(x)}(\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad H_{z(x)}(\omega) = R_1 + R_2$$

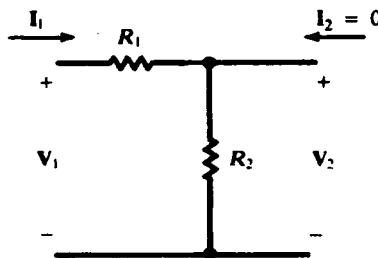


Figura 12.3.

El subíndice ∞ indica la condición de vacío. Tanto $H_{v\infty}$ como $H_{z\infty}$ son constantes reales, independientes de la frecuencia, ya que no hay elementos reactivos. Si el circuito contuviera una bobina o un condensador, entonces $H_{v\infty}$ y $H_{z\infty}$ serían complejos y variarán con la frecuencia. Si $|H_{v\infty}|$ decrece según crece la frecuencia, el funcionamiento produce la atenuación de las altas frecuencias y el circuito se denomina *pasa-bajos*. Por el contrario, un circuito *pasa-altos* producirá atenuación de las bajas frecuencias, con $|H_{v\infty}|$ decreciente cuando la frecuencia decrece. La Figura 12.4 muestra cuatro circuitos de dos elementos, dos pasa-bajos y dos pasa-altos.

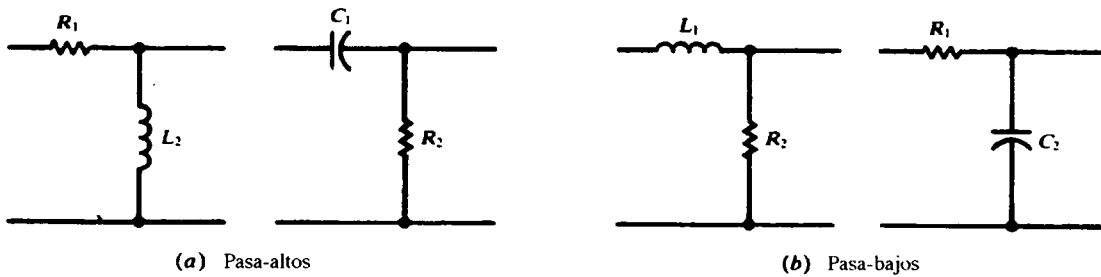


Figura 12.4.

El circuito pasa-altos RL de la Figura 12.5 está en vacío o sin carga. La respuesta en frecuencia de la impedancia de entrada se determina representando el módulo y el ángulo de fase de

$$H_{z\infty}(\omega) = R_1 + j\omega L_2 \equiv |H_z| \angle \theta_H$$

o, dividiendo por R_1 y escribiendo $\omega_x \equiv R_1/L_2$,

$$\frac{H_{z\infty}(\omega)}{R_1} = 1 + j(\omega/\omega_x) = \sqrt{1 + (\omega/\omega_x)^2} \angle \operatorname{tg}^{-1}(\omega/\omega_x)$$

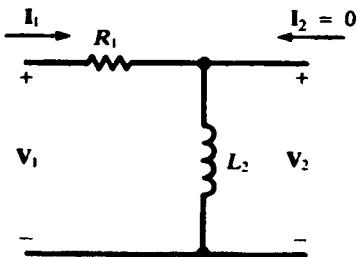


Figura 12.5.

Cinco valores de ω proporcionan datos suficientes para representar $|H_z|/R_1$ y θ_H , según se ve en la Figura 12.6. El módulo tiende a infinito cuando la frecuencia crece y, por tanto, a muy altas frecuencias, la corriente I_1 por el circuito tenderá a cero.

ω	H_z/R_1	θ_H
0	1	0°
$0,5 \omega_x$	$0,5\sqrt{5}$	26,6°
ω_x	$\sqrt{2}$	45°
$2 \omega_x$	$\sqrt{5}$	63,4°
∞	∞	90°

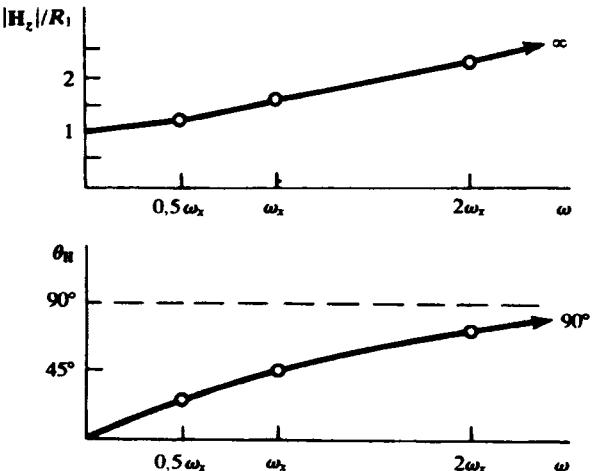


Figura 12.6.

Análogamente se puede obtener la respuesta en frecuencia de la relación de tensión de entrada y salida. Por división de tensión en vacío se obtiene

$$H_{v\infty}(\omega) = \frac{j\omega L_2}{R_1 + j\omega L_2} = \frac{1}{1 - j(\omega_x/\omega)}$$

por tanto, $|H_v| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_x/\omega)^2}}$ y $\theta_H = \tan^{-1}(\omega_x/\omega)$

El módulo y la fase se han representado en la Figura 12.7. Esta función de transferencia tiende a unidades a altas frecuencias, donde la tensión de salida es igual a la de entrada. De ahí la descripción de «atenuador de bajas frecuencias» y el nombre de circuito «pasa-altos».

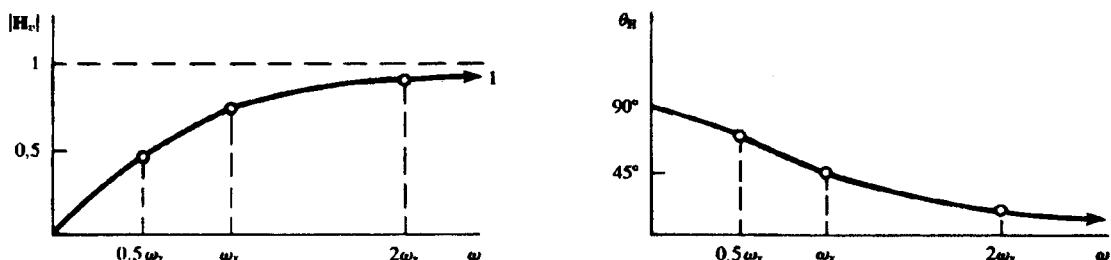


Figura 12.7.

La impedancia de transferencia del circuito pasa-altos RL en vacío es

$$\mathbf{H}_\infty(\omega) = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_1} = j\omega L_2 \quad \text{o} \quad \frac{\mathbf{H}_\infty(\omega)}{R_1} = j \frac{\omega}{\omega_x}$$

La fase es constante e igual a 90° ; la gráfica del módulo frente a ω es una recta similar a la representación de ωL frente a ω en el caso de una reactancia. Véase la Figura 12.8.

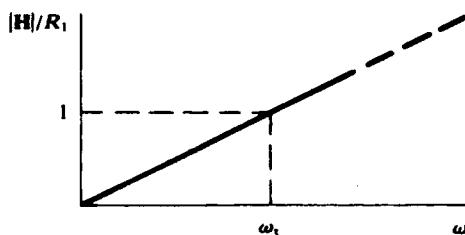


Figura 12.8.

Intercambiando las posiciones de R y L se obtiene un circuito pasa-bajos con atenuación de altas frecuencias (Figura 12.9). Bajo la condición de circuito abierto,

$$\mathbf{H}_{v\infty}(\omega) = \frac{R_2}{R_2 + j\omega L_1} = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_x)}$$

con $\omega_x \equiv R_2/L_1$; esto es,

$$|\mathbf{H}_v| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_x)^2}} \quad \text{y} \quad \theta_H = \operatorname{tg}^{-1} (-\omega/\omega_x)$$

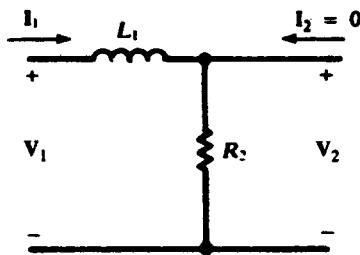


Figura 12.9.

La Figura 12.10 muestra las gráficas del módulo y el ángulo de fase. La función de transferencia de la tensión $H_{v\infty}$ tiende a cero a altas frecuencias y a uno cuando $\omega = 0$. De aquí el nombre de «pasa-bajos».

Las otras funciones del circuito pasa-bajos se obtienen en los Problemas Resueltos.

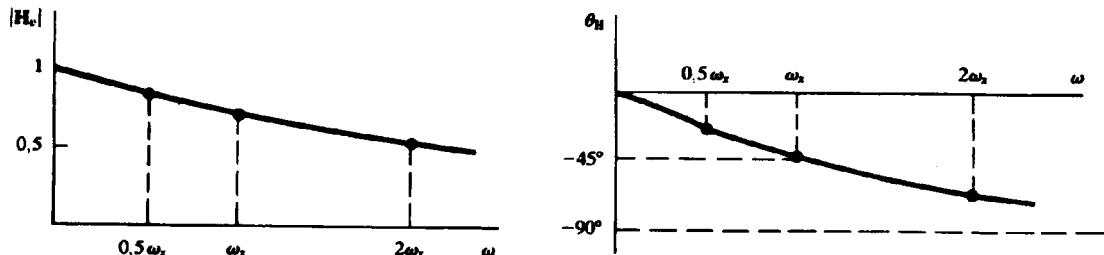


Figura 12.10.

EJEMPLO 12.2. Obtener la función de transferencia de la tensión $H_{v\infty}$ del circuito abierto de la Figura 12.11. ¿A qué frecuencia, en hercios, $|H_v| = 1/\sqrt{2}$ si: a) $C_2 = 10 \text{ nF}$, b) $C_2 = 1 \text{ nF}$?

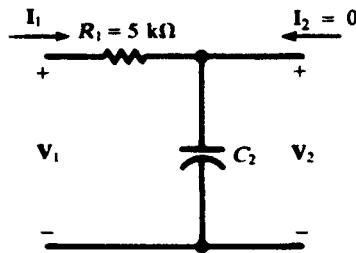


Figura 12.11.

$$H_{v\infty}(\omega) = \frac{1/j\omega C_2}{R_1 + (1/j\omega C_2)} = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_x)} \quad \text{donde} \quad \omega_x \equiv \frac{1}{R_1 C_2} = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{C_2} \text{ (rad/s)}$$

a)

$$|H_v| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_x)^2}}$$

y, por tanto, $|\mathbf{H}_v| = 1/\sqrt{2}$ cuando

$$\omega = \omega_x = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{10 \cdot 10^{-9}} = 2 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$$

o cuando $f = (2 \cdot 10^4)/2\pi = 3,18 \text{ kHz}$.

b) $f = \frac{10}{1} (3,18) = 31,8 \text{ kHz}$

Comparando (a) y (b) se observa que cuanto mayor es el valor de C_2 , tanto menor es la frecuencia a la cual $|\mathbf{H}_v|$ cae hasta el 0,707 de su valor de pico que es 1; es decir, un valor mayor de C_2 correspondería a la representación de $|\mathbf{H}_v|$ de la Figura 12.10 desplazada hacia la izquierda. Por tanto, cualquier condensador conectado en paralelo con C_2 sirve para reducir la respuesta del circuito.

12.3. FRECUENCIAS DE MEDIA POTENCIA

La frecuencia ω_x calculada en el Ejemplo 12.2 es la frecuencia a la que

$$|\mathbf{H}_v| = 0,707 |\mathbf{H}_v|_{\max}$$

y se denomina *frecuencia de media potencia*. En este caso, el nombre se justifica en el Problema 12.5, que demuestra que la potencia de entrada al circuito de la Figura 12.11 será la mitad del máximo cuando

$$\left| \frac{1}{j\omega C_2} \right| = R_1$$

esto es, cuando $\omega = \omega_x$.

En muchos casos, una función de transferencia $\mathbf{H}(\omega)$ no constante tendrá su valor máximo absoluto a alguna frecuencia única ω_x . A la frecuencia a la que

$$|\mathbf{H}(\omega)| = 0,707 |\mathbf{H}(\omega_x)|$$

se le denominará *frecuencia de media potencia* (o punto de media potencia), tanto si esta frecuencia corresponde realmente a la mitad de la potencia como si no. En muchos casos, $0 < \omega_x < \infty$, tal que existen dos frecuencias, una menor y otra mayor que la frecuencia de pico. Éstas se denominan frecuencias (puntos) *superior* e *inferior* de media potencia, y su separación, *el ancho de banda*, sirve como medida de la agudeza del pico.

12.4. CIRCUITOS GENERALIZADOS CON DOS PUERTAS Y DOS IMPEDANCIAS

El circuito básico RL o RC , del tipo examinado en la Sección 12.2, se puede generalizar con Z_1 y Z_2 , según muestra la Figura 12.12; la carga de impedancia Z_L se conecta en la puerta de salida.

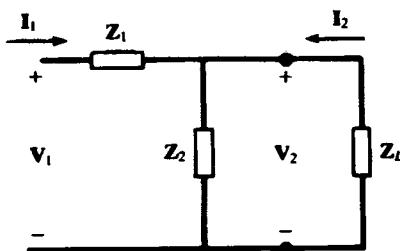


Figura 12.12.

Por división de tensión,

$$V_2 = \frac{Z'}{Z_1 + Z'} V_1 \quad \text{o} \quad H_v = \frac{V_2}{V_1} = \frac{Z'}{Z_1 + Z'}$$

donde $Z' = Z_2 Z_L / (Z_2 + Z_L)$ es la impedancia equivalente de Z_2 y Z_L en paralelo. Las otras funciones de transferencia se calculan de forma similar y están incluidas en la Tabla 12.1.

Tabla 12.1.

Condición de salida	$H_v = \frac{V_2}{V_1} (O)$	$H_i = \frac{V_2}{Y_1}$	$H_o = \frac{V_2}{I_1}$	$H_{I_o} = \frac{I_2}{I_1} (S)$	$H_{V_o} = \frac{V_2}{V_1} (S)$
Cortocircuito, $Z_L = 0$	Z_1	0	-1	0	$-\frac{1}{Z_1}$
Circuito abierto, $Z_L = \infty$	$Z_1 + Z_2$	$\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$	0	Z_2	0
Carga, Z_L	$Z_1 + Z'$	$\frac{Z'}{Z_1 + Z'}$	$\frac{-Z_2}{Z_2 + Z_L}$	Z'	$\frac{-Z'}{Z_L(Z_1 + Z')}$

12.5. RESPUESTA EN FRECUENCIA Y FUNCIONES DE TRANSFERENCIA

La respuesta en frecuencia de un circuito se puede determinar sustituyendo $j\omega$ por s en su función de transferencia. Este útil método se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 12.3. Determinar: a) la función de transferencia $H(s) = V_2/V_1$ del circuito de la Figura 12.13; b) $H(j\omega)$ para $LC = 2/\omega_0^2$ y $L/C = R^2$, y c) el módulo y el ángulo de fase de $H(j\omega)$ en b) para $\omega_0 = 1$ rad/s.

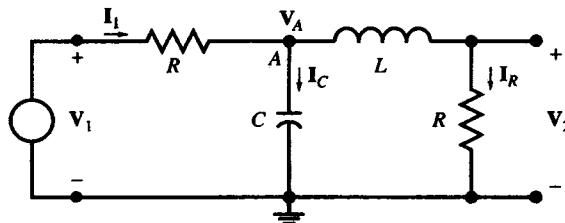


Figura 12.13.

- a) Se supone que V_2 es conocida. Se usan las impedancias generalizadas Ls y $1/Cs$ y se determina V_1 . De $I_R = V_2/R$,

$$V_A = (R + Ls)I_R = \frac{R + Ls}{R} V_2 \quad (3)$$

$$I_C = CsV_A = \frac{Cs(R + Ls)}{R} V_2$$

$$\text{e} \quad I_1 = I_R + I_C = \frac{V_2}{R} + \frac{Cs(R + Ls)}{R} V_2 = \frac{1 + Cs(R + Ls)}{R} V_2$$

Entonces,

$$V_1 = V_A + RI_1 = \frac{R + Ls}{R} V_2 + [1 + Cs(R + Ls)]V_2$$

y

$$H(s) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{2 + (L/R + CR)s + Ls^2} \quad (4a)$$

- b) De $LC = 2/\omega_0^2$ y $L/C = R^2$ se tiene que $L = \sqrt{2}R/\omega_0$ y $C = \sqrt{2}/R\omega_0$. Sustituyendo L y C en (4a) se obtiene:

$$H(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + \sqrt{2}(s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2} \right) \quad \text{o} \quad H(j\omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + j\sqrt{2}(\omega/\omega_0) - (\omega/\omega_0)^2} \right) \quad (4b)$$

$$|H|^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1 + (\omega/\omega_0)^4} \right) \quad \text{y} \quad \theta = -\tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

Obsérvese que $H(j\omega)$ es independiente de R . El circuito deja pasar sinusoides de baja frecuencia y anula, o atenúa, las sinusoides de alta frecuencia. Es un filtro pasa-bajos con una frecuencia de media potencia $\omega = \omega_0$ y, en este caso, el módulo de la respuesta en frecuencia es $|H(j\omega_0)| = |H(0)|/\sqrt{2} = \sqrt{2}/4$ y su ángulo de fase es $\angle H(j\omega_0) = -\pi/2$.

- c) Para $\omega_0 = 1$,

$$H(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + \sqrt{2}s + s^2} \right) \quad \text{o} \quad H(j\omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + j\sqrt{2}\omega - \omega^2} \right) \quad (4c)$$

$$|H|^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{1 + \omega^4} \quad \text{y} \quad \theta = -\tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}\omega}{1 - \omega^2} \right)$$

El circuito RC de la Figura 12.4(b) se definió como un filtro pasa-bajos de primer orden con una frecuencia de media potencia $\omega_0 = 1/R_1 C_2$. El circuito de la Figura 12.13 se denomina *filtro Butterworth de segundo orden*. Su corte es muy pronunciado.

12.6. RESPUESTA EN FRECUENCIA SEGÚN LA LOCALIZACIÓN DE POLOS Y CEROS

La respuesta en frecuencia de un circuito es el valor de la función de transferencia $H(s)$ para $s = j\omega$. Esta observación se puede usar para evaluar $H(j\omega)$ gráficamente. El método gráfico puede proporcionar un boceto rápido de $H(j\omega)$ y dar una idea aproximada de su comportamiento cerca de los polos y los ceros sin la necesidad de una solución completa.

EJEMPLO 12.4. Determinar los polos y los ceros de $H(s) = 10s/(s^2 + 2s + 26)$. Situarlos en el dominio s y usar el diagrama de polos y ceros para representar $H(j\omega)$.

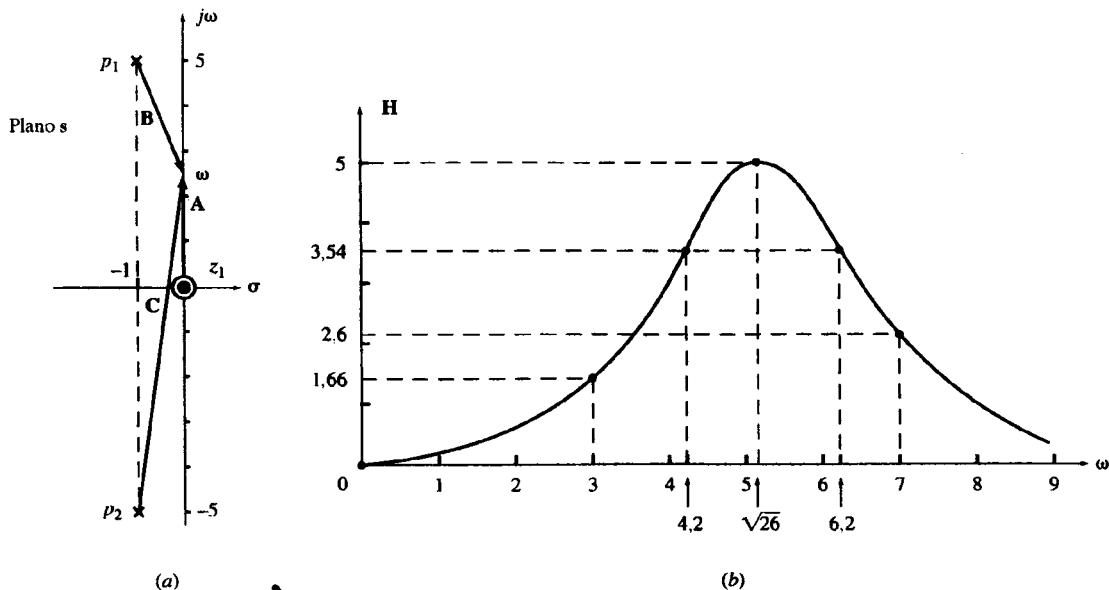


Figura 12.14.

$H(s)$ tiene un cero en $z_1 = 0$. Sus polos p_1 y p_2 se obtienen de $s^2 + 2s + 26 = 0$, resultando $p_1 = -1 + j5$ y $p_2 = -1 - j5$. El diagrama de polos y ceros es el de la Figura 12.14(a). La función de transferencia se puede escribir como

$$H(s) = (10) \frac{s - z_1}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

Para cada valor de s , el término $(s - z_1)$ es un vector con origen en el cero z_1 y extremo en el punto s del dominio s . Análogamente, $s - p_1$ y $s - p_2$ son vectores dirigidos desde los polos p_1 y p_2 , respectivamente.

mente, hasta el punto s . Entonces, para cualquier valor de s , la función de transferencia se puede expresar en función de tres vectores, \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} , de la forma siguiente:

$$H(s) = (10) \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}} \quad \text{donde } \mathbf{A} = (s - z_1), \mathbf{B} = (s - p_1) \text{ y } \mathbf{C} = (s - p_2)$$

El módulo y el ángulo de fase de $H(s)$ para cualquier punto del plano s se puede obtener como

$$|H(s)| = (10) \frac{|\mathbf{A}|}{|\mathbf{B}| \cdot |\mathbf{C}|} \quad (5a)$$

$$\angle H(s) = \angle \mathbf{A} - \angle \mathbf{B} - \angle \mathbf{C} \quad (5b)$$

Situando s en el eje $j\omega$ [Figura 12.14(a)], variando ω desde 0 a ∞ , y midiendo los módulos y las fases de los vectores \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} , se puede usar (5a) y (5b) para obtener los gráficos del módulo y del ángulo de fase. La Figura 12.14(b) muestra el gráfico correspondiente al módulo.

12.7. FILTROS IDEALES Y REALES

En general, los circuitos son selectivos para la frecuencia. Los filtros constituyen un tipo de circuitos diseñados para obtener características específicas de selectividad respecto a la frecuencia. Dejan pasar unas frecuencias sin afectarlas (la banda de paso) y eliminan otras (la banda de anulación). Idealmente, en la banda de paso, $H(j\omega) = 1$, y en la banda de anulación $H(j\omega) = 0$. Se reconocen los siguientes tipos de filtros: pasa-bajos [Figura 12.15(a)], pasa-altos [Figura 12.15(b)], pasa-banda [Figura 12.15(c)] y parada-banda [Figura 12.15(d)]. Los filtros ideales no son físicamente realizable, pero se pueden diseñar y construir filtros reales tan cercanos a los ideales como se desee. Cuanto más se aproxime a la característica ideal, más complejo será el circuito real.

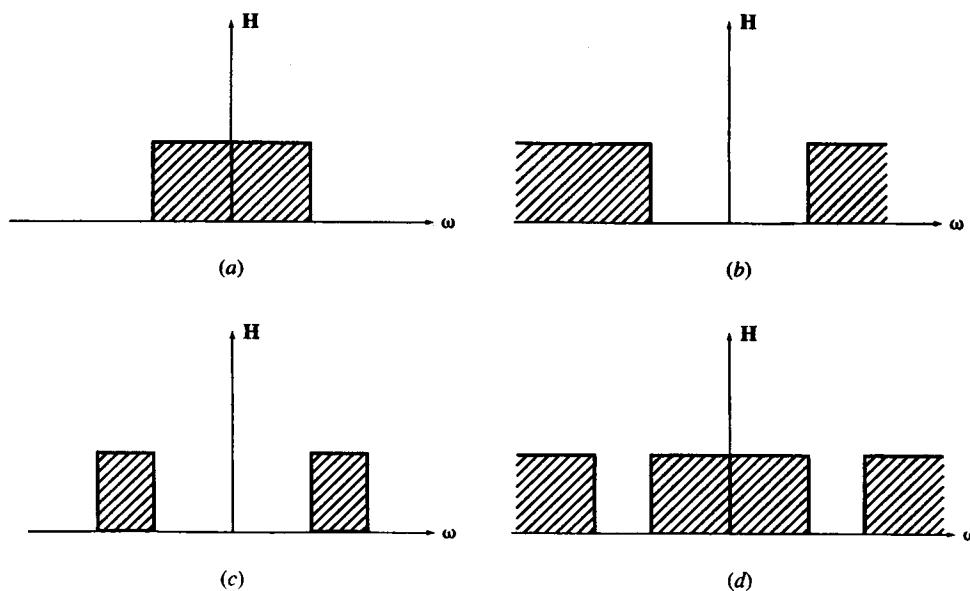


Figura 12.15.

Los circuitos RC o RL de la Sección 12.2 son filtros de primer orden. Están alejados de los filtros ideales. Como se ilustra en el ejemplo siguiente, la respuesta en frecuencia se puede aproximar a la de los filtros ideales si se incrementa el orden del filtro.

EJEMPLO 12.5. Las funciones de transferencia \mathbf{H}_1 , \mathbf{H}_2 y \mathbf{H}_3 están definidas por

$$a) \quad \mathbf{H}_1 = \frac{1}{s + 1} \quad b) \quad \mathbf{H}_2 = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

$$c) \quad \mathbf{H}_3 = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{(s + 1)(s^2 + s + 1)}$$

Determinar el módulo de sus respuestas en frecuencia. Demostrar que las tres funciones son pasa-bajos con frecuencia de media potencia igual a $\omega_0 = 1$.

$$a) \quad |\mathbf{H}_1|^2 = \frac{1}{(1 + j\omega)(1 - j\omega)} = \frac{1}{1 + \omega^2}$$

$$b) \quad |\mathbf{H}_2|^2 = \frac{1}{(1 - \omega^2 + j\sqrt{2}\omega)(1 - \omega^2 - j\sqrt{2}\omega)} = \frac{1}{1 + \omega^4}$$

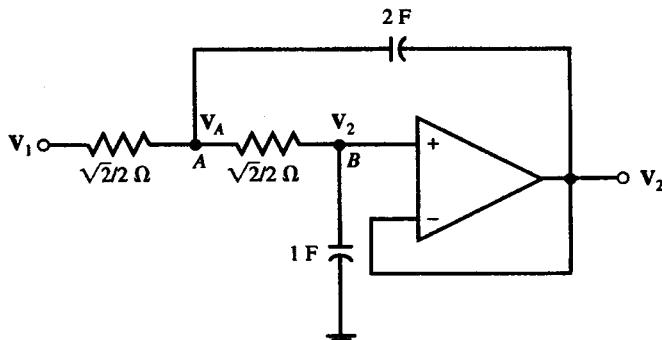
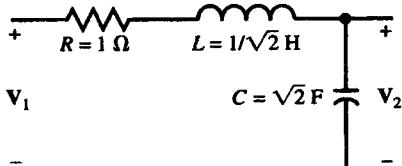
$$c) \quad |\mathbf{H}_3|^2 = \frac{1}{(1 + \omega^2)(1 - \omega^2 + j\omega)(1 - \omega^2 - j\omega)} = \frac{1}{1 + \omega^6}$$

Para $\omega = 0, 1$ y ∞ , las tres funciones valen $|\mathbf{H}|^2 = 1, 1/2$ y 0 , respectivamente. Por tanto, las tres funciones de transferencia son pasa-bajos, con la misma frecuencia de media potencia $\omega_0 = 1$. Estas funciones corresponden a filtros Butterworth de primero, segundo y tercer orden, respectivamente. Cuanto mayor es el orden del filtro, más pronunciado es el corte en la respuesta en frecuencia.

12.8. FILTROS ACTIVOS Y PASIVOS

Los filtros que contienen solamente resistencias, bobinas y condensadores se denominan *pasivos*. Los que además contienen fuentes dependientes se denominan *activos*. Los filtros pasivos no requieren fuentes externas de energía y pueden funcionar siempre. Los filtros activos se componen generalmente de circuitos RC y amplificadores. El circuito de la Figura 12.16(a) muestra un filtro pasivo pasa-bajos de segundo orden. El circuito de la Figura 12.16(b) muestra un filtro activo con una respuesta en frecuencia V_2/V_1 equivalente a la del circuito de la Figura 12.16(a).

EJEMPLO 12.6. Determinar la función de transferencia V_2/V_1 en los circuitos representados en: a) Figura 12.16(a) y b) Figura 12.16(b).



(a)

(b)

Figura 12.16.

- a) En la Figura 12.16(a) se obtiene V_2 a partir de V_1 por división de tensión.

$$\mathbf{V}_2 = \frac{1}{Cs} \frac{\mathbf{V}_1}{R + Ls + 1/Cs} = \frac{\mathbf{V}_1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{1}{LC} \frac{\mathbf{V}_1}{s^2 + (RL)s + (1/LC)}$$

Sustituyendo para $R = 1$, $L = 1/\sqrt{2}$ y $C = \sqrt{2}$, y dividiendo por V_1 , se obtiene:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

- b) En la Figura 12.16(b) se aplica la ley de Kirchhoff para las corrientes en los nodos A y B con $\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_2$.

$$Nodo A: \quad \sqrt{2}(\mathbf{V}_A - \mathbf{V}_1) + \sqrt{2}(\mathbf{V}_A - \mathbf{V}_2) + 2s(\mathbf{V}_A - \mathbf{V}_3) = 0 \quad (6a)$$

$$Nodo\ B: \quad V_2 s + \sqrt{2}(V_2 - V_A) = 0 \quad (6b)$$

La función de transferencia $H(s) = V_2/V_1$ se obtiene eliminando V_4 entre (6a) y (6b). Por tanto,

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

Se observa que las funciones de transferencia de los circuitos de la Figura 12.16(a) y (b) son idénticas. Ambos son filtros pasa-bajos Butterworth con frecuencia de media potencia para $\omega = 1$ rad/s.

12.9. FILTROS PASA-BANDA Y RESONANCIA

La función de transferencia siguiente se denomina *función pasa-banda*.

$$\mathbf{H}(s) = \frac{ks}{s^2 + as + b} \quad \text{donde} \quad a > 0, b > 0, k > 0 \quad (7)$$

El nombre es especialmente apropiado cuando los polos son complejos, próximos al eje $j\omega$, y alejados del origen del dominio s. La respuesta en frecuencia de la función pasa-banda es

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{kj\omega}{b - \omega^2 + aj\omega} \quad |\mathbf{H}|^2 = \frac{k^2 \omega^2}{(b - \omega^2)^2 + a^2 \omega^2} = \frac{k^2}{a^2 + (b - \omega^2)^2/\omega^2} \quad (8)$$

El máximo de $|\mathbf{H}|$ se produce cuando $b - \omega^2 = 0$ o $\omega = \sqrt{b}$, denominada *frecuencia central* ω_0 . Para la frecuencia central se tiene que $|\mathbf{H}|_{\max} = |\mathbf{H}(\omega_0)| = k/a$. Las frecuencias de media potencia se presentan a ω_i y ω_s , donde

$$|\mathbf{H}(\omega_i)|^2 = |\mathbf{H}(\omega_s)|^2 = \frac{1}{2} |\mathbf{H}(\omega_0)|^2 \quad (9a)$$

Sustituyendo (8) en (9a) se obtiene que ω_i y ω_s son las raíces de la ecuación siguiente:

$$\frac{(b - \omega^2)^2}{\omega^2} = a^2 \quad (9b)$$

Resolviendo,

$$\omega_i = \sqrt{a^2/4 + b} - a/2 \quad (9c)$$

$$\omega_s = \sqrt{a^2/4 + b} + a/2 \quad (9d)$$

De (9c) y (9d) se obtiene

$$\omega_s - \omega_i = a \quad \text{y} \quad \omega_s \omega_i = b = \omega_0^2 \quad (10b)$$

Se define el *ancho de banda* β como

$$\beta = \omega_s - \omega_i = a \quad (10c)$$

Se define el *factor de calidad* Q como

$$Q = \omega_0/\beta = \sqrt{b}/a \quad (10d)$$

El factor de calidad mide la agudeza de la respuesta en frecuencia alrededor de la frecuencia central. Este comportamiento también se denomina *resonancia* (ver Secciones desde 12.11 a 12.15). Cuando el factor de calidad es alto, ω_i y ω_s se pueden aproximar por $\omega_0 - \beta/2$ y $\omega_0 + \beta/2$, respectivamente.

EJEMPLO 12.7. Sea la función de transferencia $\mathbf{H}(s) = 10s/(s^2 + 300s + 10^6)$. Determinar la frecuencia central, las frecuencias superior e inferior de media potencia, el ancho de banda y el factor de calidad.

Como $\omega_0^2 = 10^6$, la frecuencia central es $\omega_0 = 1000$ rad/s.

Las frecuencias inferior y superior de media potencia son, respectivamente,

$$\omega_i = \sqrt{a^2/4 + b} - a/2 = \sqrt{300^2/4 + 10^6} - 300/2 = 861,2 \text{ rad/s}$$

$$\omega_s = \sqrt{a^2/4 + b} + a/2 = \sqrt{300^2/4 + 10^6} + 300/2 = 1161,2 \text{ rad/s}$$

El ancho de banda $\beta = \omega_s - \omega_i = 1161,2 - 861,2 = 300$ rad/s.

El factor de calidad $Q = 1000/300 = 3,3$.

EJEMPLO 12.8. Repetir el Ejemplo 12.7 para $H(s) = 10s/(s^2 + 30s + 10^6)$. Nuevamente, de $\omega_0^2 = 10^6$, $\omega_0 = 1000$ rad/s.

Entonces,

$$\omega_i = \sqrt{30^2/4 + 10^6} - 30/2 = 985,1 \text{ rad/s}$$

$$\omega_s = \sqrt{30^2/4 + 10^6} + 30/2 = 1015,1 \text{ rad/s}$$

$$\beta = a = 30 \text{ rad/s} \quad \text{y} \quad Q = 1000/30 = 33,3$$

Se observa que ω_i y ω_s se pueden aproximar con buena precisión por

$$\omega_i = \omega_0 - \beta/2 = 1000 - 30/2 = 985 \text{ rad/s} \quad \text{y} \quad \omega_s = \omega_0 + \beta/2 = 1000 + 30/2 = 1015 \text{ rad/s}$$

12.10. FRECUENCIA NATURAL Y FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO

El denominador de la función pasa-banda dada en (7) se puede expresar como

$$s^2 + as + b = s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2$$

donde $\omega_0 = \sqrt{b}$ se denomina *frecuencia natural* y $\xi = a/(2\sqrt{b})$ se denomina *factor de amortiguamiento*. Para $\xi > 1$, el circuito tiene dos polos distintos en el eje real negativo y se denomina *sobreamortiguada*. Para $\xi = 1$, el circuito tiene un polo real de orden dos para $-\omega_0$, y se denomina *críticamente amortiguada*. Para $\xi < 1$, el circuito tiene un par de polos conjugados en $-\xi\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ y $-\xi\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$. Los polos están situados sobre un semicírculo de radio ω_0 en el semiplano izquierdo. El ángulo de situación de los polos es $\phi = \operatorname{tg}^{-1} \xi$ (véase la Figura 12.17). El circuito está *subamortiguado* y puede tener oscilaciones amortiguadas. Obsérvese que el factor de amortiguamiento es igual a la mitad de la inversa del factor de calidad.

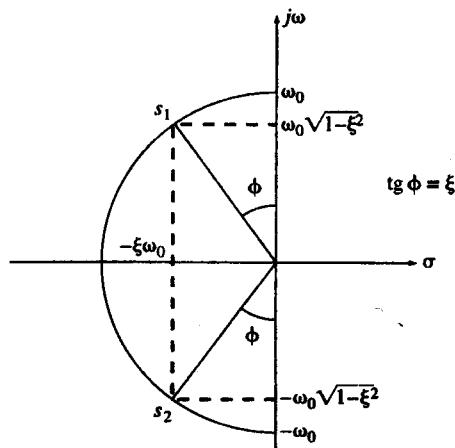


Figura 12.17.

12.11. CIRCUITO SERIE RLC: RESONANCIA SERIE

El circuito serie *RLC* representado en la Figura 12.18 tiene, en condiciones de circuito abierto, una impedancia de entrada

$$Z_{\text{en}}(\omega) = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

Se dice que el circuito es una *resonancia en serie* (o *resonancia de baja impedancia*) cuando $Z_{\text{en}}(\omega)$ es real (y, por tanto, $|Z_{\text{en}}(\omega)|$ es mínimo); esto es, cuando

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad \text{o} \quad \omega = \omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

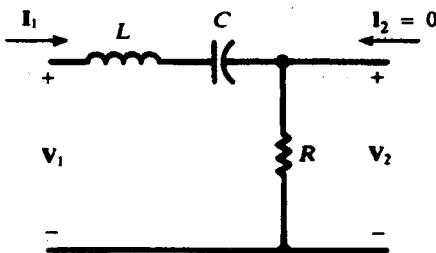


Figura 12.18.

La Figura 12.19 muestra la respuesta en frecuencia. La reactancia capacitiva, inversamente proporcional a ω , es mayor a bajas frecuencias, mientras que la reactancia inductiva, directamente proporcional a ω , es mayor a altas frecuencias. Por consiguiente, la reactancia neta a frecuencias por debajo de ω_0 es capacitativa, y el argumento de Z_{en} es negativo. A frecuencias por encima de ω_0 el circuito es inductivo, y el argumento de Z_{en} es positivo.

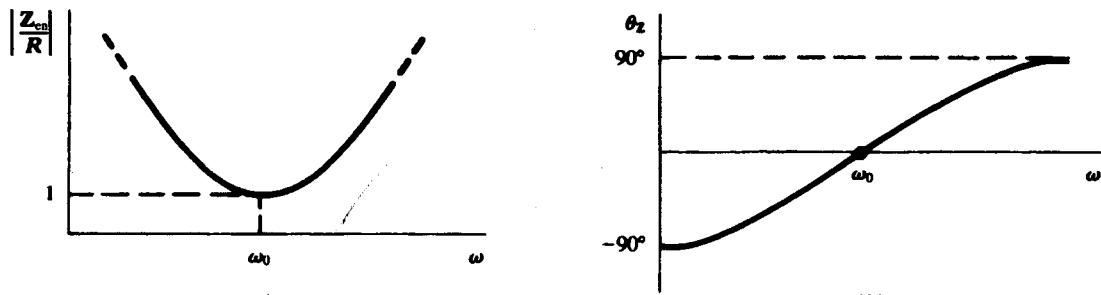


Figura 12.19.

Por división de tensión, la función de transferencia de tensión para la Figura 12.18 es

$$H_{v\infty}(\omega) = \frac{R}{Z_{\text{en}}(\omega)} = RY_{\text{en}}(\omega)$$

La respuesta en frecuencia (sólo el módulo) se ha representado en la Figura 12.20; la curva es igual a la de la Figura 12.19(a) pero invertida. Obsérvese que la atenuación se produce por encima y por debajo de la frecuencia de resonancia serie ω_0 . Los puntos en los que la respuesta es 0,707, puntos de media potencia (Sección 12.3), se producen a las frecuencias ω_i y ω_s . El ancho de banda es la distancia entre estas dos frecuencias: $\beta = \omega_s - \omega_i$.

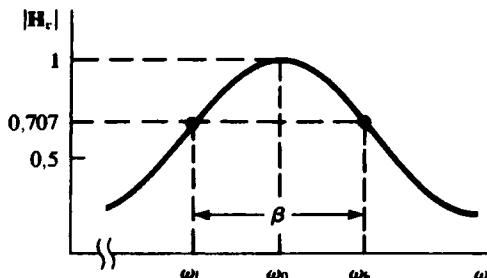


Figura 12.20.

Se puede definir un *factor de calidad*, $Q_0 = \omega_0 L / R$, para el circuito serie *RLC* en resonancia. (Véase la Sección 12.12, donde se da la definición general de Q .) Las frecuencias de media potencia se pueden expresar en función de los elementos del circuito, o en función de ω_0 y Q_0 , de la forma siguiente:

$$\omega_s = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = \omega_0 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{4Q_0^2}} + \frac{1}{2Q_0} \right)$$

$$\omega_i = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = \omega_0 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{4Q_0^2}} - \frac{1}{2Q_0} \right)$$

Véase el Problema 12.5. Restando entre sí las expresiones anteriores se obtiene:

$$\beta = \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q_0}$$

lo que sugiere que cuanto mayor es la «calidad», más estrecho es el ancho de banda.

12.12. FACTOR DE CALIDAD

A un componente o a un circuito completo se le puede asignar un *factor de calidad* o de *mérito*, definido como

$$Q \equiv 2\pi \left(\frac{\text{máxima energía almacenada}}{\text{energía disipada por ciclo}} \right)$$

que es un número adimensional. Esta definición está de acuerdo con la definición dada en las Secciones 12.9 y 12.11.

En la Figura 12.21 se muestra la modelización de una bobina real, en la que están presentes tanto una resistencia como una inductancia. La energía máxima almacenada es $\frac{1}{2}LI_{\max}^2$, mientras que la energía que se disipa en cada ciclo es

$$(I_{\text{ef}}^2 R) \left(\frac{2\pi}{\omega} \right) = \frac{I_{\max}^2 R \pi}{\omega}$$

Por tanto,

$$Q_{\text{bob}} = \frac{\omega L}{R}$$

Un condensador real se puede modelizar por una combinación en paralelo de R y C , como se ve en la Figura 12.22. La energía máxima almacenada es $\frac{1}{2}CV_{\max}^2$ y la energía que se disipa en cada ciclo es $V_{\max}^2 \pi / R \omega$. Por tanto, $Q_{\text{con}} = \omega C R$.

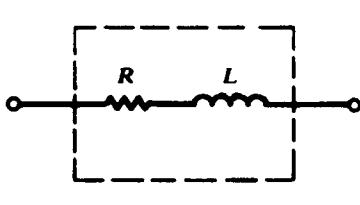


Figura 12.21.

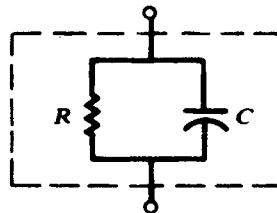


Figura 12.22.

El Q del circuito serie RLC se obtiene del Problema 12.6(a). Normalmente se aplica a la resonancia, en cuyo caso tiene la forma equivalente

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

12.13. CIRCUITO PARALELO RLC . RESONANCIA PARALELO

En la Figura 12.23 se muestra un circuito paralelo RLC . Se observa que $\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1$. En condiciones de circuito abierto, la impedancia de entrada es

$$\mathbf{Y}_{\text{en}}(\omega) = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{Z_{\text{en}}(\omega)}$$

El circuito estará en *resonancia en paralelo* (o *resonancia de alta impedancia*) cuando $\mathbf{Y}_{\text{en}}(\omega)$, y por tanto $Z_{\text{en}}(\omega)$ es real (y, por tanto, $|\mathbf{Y}_{\text{en}}(\omega)|$ es mínima y $|Z_{\text{en}}(\omega)|$ es máxima); esto es, cuando

$$-\frac{1}{\omega L} + \omega C = 0 \quad \text{o} \quad \omega = \omega_a \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

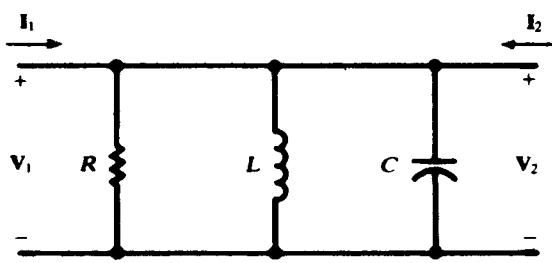


Figura 12.23.

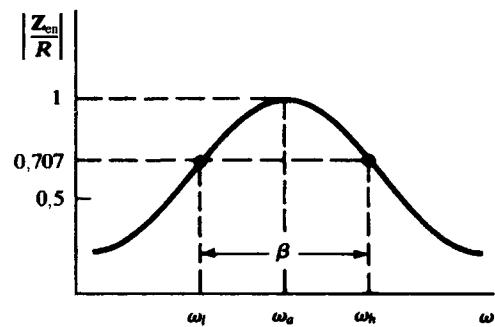


Figura 12.24.

El símbolo ω_a se usa ahora para indicar la cantidad $1/\sqrt{LC}$, con el fin de distinguir esta resonancia de una resonancia de baja impedancia. Los circuitos complejos serie-paralelo pueden tener varias frecuencias resonantes de alta impedancia ω_a y varias frecuencias resonantes de baja impedancia ω_0 .

La impedancia de entrada normalizada

$$\frac{Z_{en}(\omega)}{R} = \frac{1}{1 + jR\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$$

se ha representado (en módulo solamente) en la Figura 12.24. Se han indicado en el gráfico las frecuencias de media potencia ω_i y ω_s . Análogamente a la resonancia serie, el ancho de banda está dado por

$$\beta = \frac{\omega_a}{Q_a}$$

donde Q_a , el factor de calidad del circuito paralelo para $\omega = \omega_a$, tiene las expresiones equivalentes

$$Q_a = \frac{R}{\omega_a L} = \omega_a R C = R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Véase el Problema 12.6(b).

12.14. CIRCUITO PARALELO REAL LC

Un circuito paralelo «tanque» LC tiene aplicaciones frecuentes en electrónica como sistema de selección de frecuencias o sintonizador. Mientras el condensador se puede tratar con frecuencia como una C pura se deben considerar las pérdidas en la bobina. Un modelo razonable del tanque real es el de la Figura 12.25. La admitancia de entrada es

$$Y_{en}(\omega) = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j \left[\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right]$$

En la resonancia,

$$\omega_a C = \frac{\omega_a L}{R^2 + (\omega_a L)^2} \quad \text{o} \quad \omega_a = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{L}}$$

A la frecuencia de resonancia, $\mathbf{Y}_{en}(\omega_a) = RC/L$ y, de la Sección 12.11, el Q de la bobina es

$$Q_{\text{bob}} = \frac{\omega_a L}{R} = \sqrt{\frac{L}{CR^2} - 1}$$

Si $Q_{\text{bob}} \geq 10$, entonces $\omega_a \approx 1/\sqrt{LC}$ y

$$\left| \frac{\mathbf{Z}_{en}(\omega_a)}{R} \right| \approx Q_{\text{bob}}^2$$

La respuesta en frecuencia es similar a la del circuito paralelo RLC , excepto que la resonancia a alta impedancia se produce a baja frecuencia para Q_{bob} pequeño. Esto es evidente cuando la expresión anterior de ω_a se reescribe como

$$\omega_a = \left(\frac{1}{\sqrt{LC}} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + (1/Q_{\text{bob}}^2)}}$$

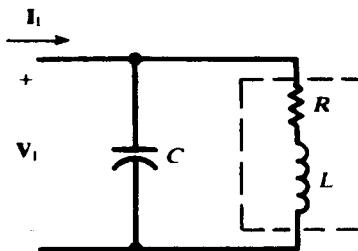


Figura 12.25.

12.15. CONVERSIONES SERIE-PARALELO

En el análisis de circuitos conviene con frecuencia convertir el RL serie en paralelo (ver Figura 12.26). Dados R_s , L_s y la *frecuencia de operación* ω , los elementos R_p y L_p del circuito paralelo equivalente se determinan evaluando las admitancias

$$\mathbf{Y}_s = \frac{R_s - j\omega L_s}{R_s^2 + (\omega L_s)^2} \quad \text{e} \quad \mathbf{Y}_p = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{j\omega L_p}$$

Los resultados son:

$$R_p = R_s \left[1 + \left(\frac{\omega L_s}{R_s} \right)^2 \right] = R_s (1 + Q_s^2)$$

$$L_p = L_s \left[1 + \left(\frac{R_s}{\omega L_s} \right)^2 \right] = L_s \left(1 + \frac{1}{Q_s^2} \right)$$

Si $Q_s \geq 10$, $R_p \approx R_s Q_s^2$ y $L_p \approx L_s$.

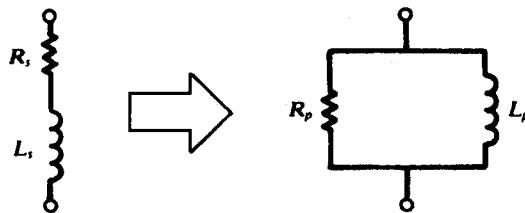


Figura 12.26.

En ocasiones se desea convertir el circuito RC montado de una de las formas a la otra (ver Figura 12.27). Evaluando las impedancias o las admitancias se obtiene:

$$R_p = \frac{R_s}{1 + (\omega C_p R_p)^2} = \frac{R_s}{1 + Q_p^2}$$

$$C_p = C_s \left[1 + \frac{1}{(\omega C_s R_p)^2} \right] = C_s \left(1 + \frac{1}{Q_p^2} \right)$$

para la transformación paralelo a serie, y

$$R_p = R_s \left[1 + \frac{1}{(\omega C_s R_s)^2} \right] = R_s (1 + Q_s^2)$$

$$C_p = \frac{C_s}{1 + (\omega C_s R_s)^2} = \frac{C_s}{1 + (1/Q_s)^2}$$

para la transformación serie a paralelo. Nuevamente, la equivalencia depende de la frecuencia de operación.

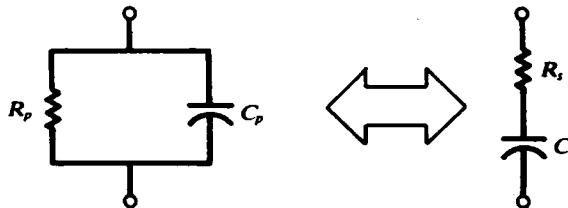


Figura 12.27.

12.16. DIAGRAMAS DE LOCALIZACIÓN

Hasta ahora, la respuesta en frecuencia de un circuito se ha representado dibujando separadamente el módulo y el ángulo de fase de su función de transferencia frente a la frecuencia ω . Esta misma información puede presentarse en un único diagrama: en el plano complejo se traza la curva (diagrama de localización), cuyos puntos se obtienen calculando el valor de la función de transferencia según ω varía desde 0 a ∞ . En esta sección se explicará el diagrama

de localización para la impedancia de entrada o la admitancia de entrada; en algunos casos la variable no será ω , sino otro parámetro (tal como la resistencia R).

Para el circuito serie RL , la Figura 12.28(a) muestra el diagrama de localización de Z con ωL fijo y R variable; la Figura 12.28(b) muestra la localización de Z cuando R está fijo y ω o L es variable, y la Figura 12.28(c) muestra el diagrama de localización de Y cuando R está fijo y ω o L es variable. Este último diagrama se obtiene de

$$Y = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} / \text{tg}^{-1}(-\omega L/R)$$

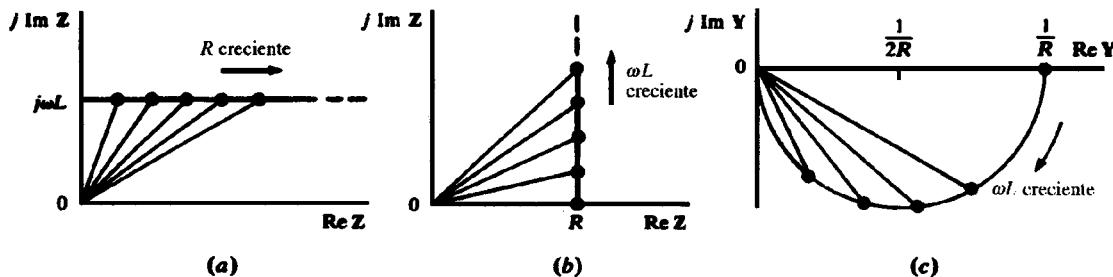


Figura 12.28.

Se observa que para $\omega L = 0$, $Y = (1/R)/0^\circ$, y para $\omega L \rightarrow \infty$, $Y \rightarrow 0/-90^\circ$. Cuando $\omega L = R$,

$$Y = \frac{1}{R\sqrt{2}} / -45^\circ$$

Unos pocos puntos más confirmarán que el diagrama es semicircular, con centro en $1/2R$ y radio $1/2R$. La respuesta en frecuencia del circuito se obtiene de la Figura 12.28(b) o de la 12.28(c).

En la Figura 12.29 se han representado los diagramas de localización de Y y de Z de un circuito paralelo RC ; éstas se obtienen de

$$Y = \frac{1}{R} + j\omega C \quad \text{y} \quad Z = \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} / \text{tg}^{-1}(-\omega CR)$$

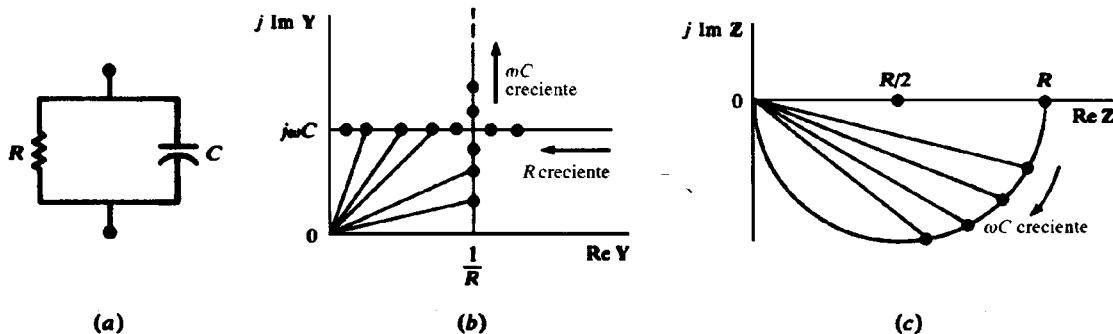


Figura 12.29.

Para el circuito serie *RLC*, la localización de \mathbf{Y} , con ω como variable, se puede determinar escribiendo:

$$\mathbf{Y} = G + jB = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2}$$

donde

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad B = \frac{X}{R^2 + X^2}$$

Tanto G como B dependen de ω a través de X . Eliminando X entre las dos expresiones se obtiene la ecuación del diagrama de localización en la forma

$$G^2 + B^2 = \frac{G}{R} \quad \text{o} \quad \left(G - \frac{1}{2R}\right)^2 + B^2 = \left(\frac{1}{2R}\right)^2$$

es decir, el círculo de la Figura 12.30. Obsérvese que los puntos en el diagrama corresponden a $\omega = \omega_i$, $\omega = \omega_0$ y $\omega = \omega_s$.

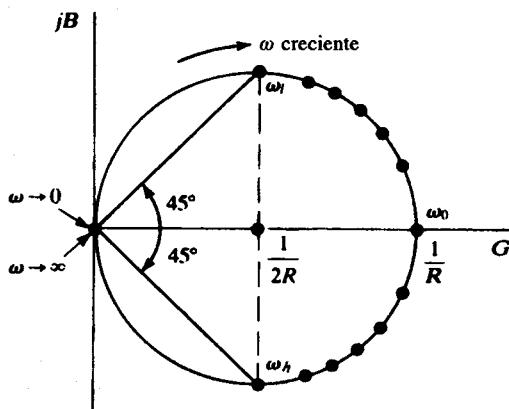


Figura 12.30.

El diagrama de localización de \mathbf{Y} del circuito «tanque» real estudiado en la Sección 12.14 se puede obtener combinando el diagrama de la rama C y el de la rama RL . Para ilustrar el proceso de la suma, los puntos correspondientes a las frecuencias $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$ están señalados en cada diagrama individual y en el de la suma, representado en la Figura 12.31(c). Se ve que $|\mathbf{Y}|_{\min}$ se produce a una frecuencia mayor que ω_a ; esto es, la resonancia es de alta impedancia pero no de máxima impedancia. Esto sucede porque G varía con ω (ver Sección 12.14), y varía de forma que para $B = 0$ no se minimiza automáticamente $G^2 + B^2$. La separación de las frecuencias de resonancia y admitancia mínima es función del Q de la bobina. Valores mayores de Q_{bob} corresponden a valores menores de R . En la Figura 12.31(b) se observa que con R menor se obtiene un semicírculo mayor, que, al ser combinado con el diagrama de localización de \mathbf{Y}_C , produce una ω_a mayor y una menor frecuencia de admitancia mínima. Cuando $Q_{\text{bob}} \leq 10$, las dos frecuencias son aproximadamente iguales.

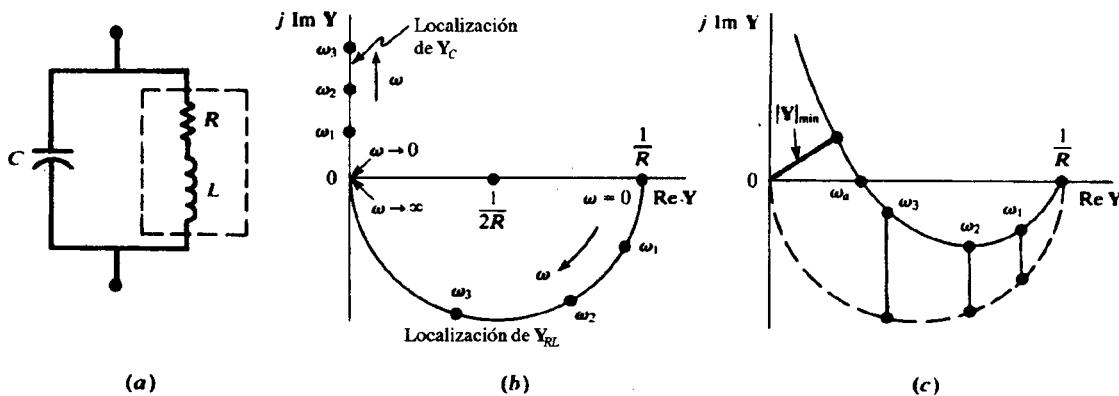


Figura 12.31.

El caso del circuito de dos ramas RC y RL de la Figura 12.32(a) se puede estudiar sumando el diagrama de admitancias de las dos ramas. Para una tensión fija $V = V/0^\circ$, esto equivale a sumar el diagrama de localización de las corrientes de las dos ramas. Se toma C variable sin limitación, y R_1, R_2, L y ω constantes. Entonces la corriente I_L es constante según se ve en la Figura 12.32(b). El diagrama semicircular de I_C se suma al de I_L para obtener el de I_T .

La resonancia del circuito se produce para $\theta_T = 0$. Esto puede suceder para dos valores positivos del parámetro C [caso ilustrado en la Figura 12.32(b)], para un valor o para ninguno, dependiendo del número de raíces reales positivas de la ecuación $\text{Im } Y_T(C) = 0$.

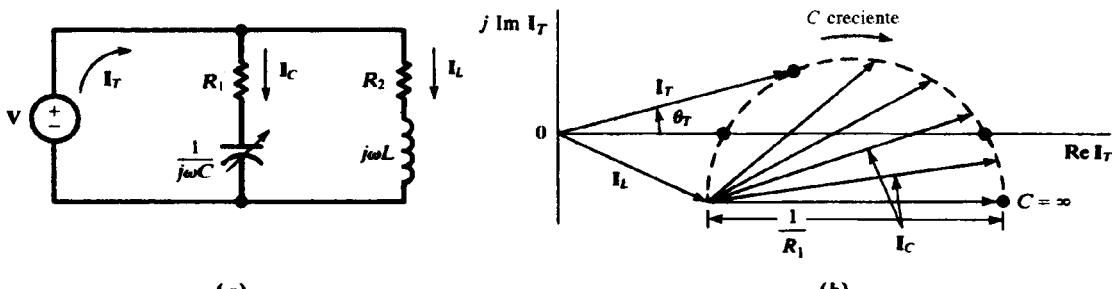


Figura 12.32.

PROBLEMAS RESUELTOS

- 12.1.** En el circuito con dos puertas de la Figura 12.33, $R_1 = 7 \text{ k}\Omega$ y $R_2 = 3 \text{ k}\Omega$. Obtener la relación de tensiones V_2/V_1 : a) en vacío, b) con $R_L = 20 \text{ k}\Omega$.

a) En vacío, la división de tensión da

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{3}{7 + 3} = 0,3$$

b) Con $R_L = 20 \text{ k}\Omega$,

$$R_p = \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L} = \frac{60}{23} \text{ k}\Omega$$

y

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{R_p}{R_1 + R_p} = \frac{60}{221} = 0,27$$

La relación de tensiones es independiente de la frecuencia. La carga resistiva de $20 \text{ k}\Omega$ reduce la relación de 0,3 a 0,27.

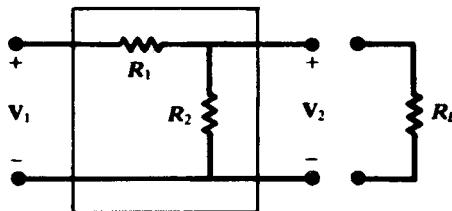


Figura 12.33.

- 12.2. a) Determinar L_2 en el circuito pasa-altos de la Figura 12.34, si $|\mathbf{H}_v(\omega)| = 0,5$ a una frecuencia de 0,5 MHz. b) ¿A qué frecuencia es $|\mathbf{H}_v(\omega)| = 0,9$?

a) De la Sección 12.2, con $\omega_x \equiv R_1/L_2$,

$$|\mathbf{H}_v(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_x/\omega)^2}}$$

Entonces,

$$0,5 = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_x/50)^2}} \quad \text{o} \quad f_x = 50\sqrt{3} \text{ MHz}$$

y

$$L_2 = \frac{R_1}{2\pi f_x} = \frac{50 \cdot 10^3}{2\pi(50\sqrt{3} \cdot 10^6)} = 91,9 \mu\text{H}$$

b)

$$0,9 = \frac{1}{1 + (50\sqrt{3}/f)^2} \quad \text{o} \quad f = 179 \text{ MHz}$$

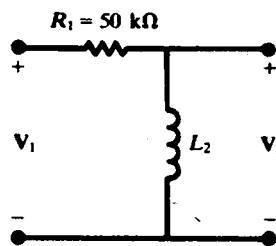


Figura 12.34.

- 12.3. Se puede construir un divisor de tensión, útil para aplicaciones a alta frecuencia, con dos condensadores C_1 y C_2 en el circuito general de dos puertas de la Figura 12.12. En vacío, determinar C_2 , si $C_1 = 0,01 \mu\text{F}$ y $|\mathbf{H}_v| = 0,2$.

De la Tabla 12.1,

$$\mathbf{H}_v = \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = \frac{1/j\omega C_2}{\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

Por tanto, $0,2 = \frac{0,01}{0,01 + C_2}$ o $C_2 = 0,04 \mu\text{F}$

Se observa que la relación de tensiones en circuito abierto es independiente de la frecuencia.

- 12.4.** Calcular la frecuencia a la que $|\mathbf{H}_v| = 0,5$, en el circuito pasa-bajos RC de la Figura 12.35.

$$\mathbf{H}_v(\omega) = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_x)} \quad \text{donde} \quad \omega_x \equiv \frac{1}{R_1 C_2}$$

Entonces, $(0,5)^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_x)^2}$ de donde $\frac{\omega}{\omega_x} = \sqrt{3}$

y $\omega = \sqrt{3} \left(\frac{1}{R_1 C_2} \right) = 8660 \text{ rad/s}$ o $f = 1378 \text{ Hz}$

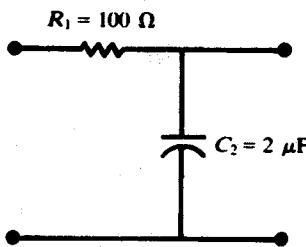


Figura 12.35.

- 12.5.** Calcular la frecuencia de resonancia $\omega_0 = 2\pi f_0$ del circuito serie RLC de la Figura 12.36. Obtener también las frecuencias de media potencia y el ancho de banda β .

$$\mathbf{Z}_{en}(\omega) = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

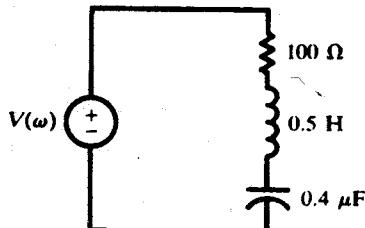


Figura 12.36.

En resonancia, $Z_{\text{en}}(\omega) = R$ y $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0,5(0,4 \cdot 10^{-6})}} = 2236,1 \text{ rad/s} \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 355,9 \text{ Hz}$$

La fórmula de la potencia

$$P = I_{\text{ef}}^2 R = \frac{V_{\text{ef}}^2 R}{|Z_{\text{en}}|^2}$$

demuestra que $P_{\text{max}} = V_{\text{ef}}^2/R$, para $\omega = \omega_0$, y que $P = \frac{1}{2}P_{\text{max}}$ cuando $|Z_{\text{en}}|^2 = 2R^2$; es decir, cuando

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = \pm R \quad \text{o} \quad \omega^2 \mp \frac{R}{L} \omega - \frac{1}{LC} = 0$$

Utilizando el signo superior, hay una única raíz real positiva:

$$\omega_s = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = 2338,3 \text{ rad/s} \quad \text{o} \quad f_s = 372,1 \text{ Hz}$$

y utilizando el signo inferior, la única raíz real positiva es:

$$\omega_i = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = 2138,3 \text{ rad/s} \quad \text{o} \quad f_i = 340,3 \text{ Hz}$$

12.6. Obtener el Q de: a) el circuito serie RLC , b) el circuito paralelo RLC .

a) En el dominio del tiempo, la energía instantánea almacenada en el circuito es

$$W_s = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C}$$

Será máxima para,

$$\frac{dW_s}{dt} = Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = i \left(L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \right) = i(v_L + v_C) = 0$$

Por tanto, la máxima energía almacenada es igual al valor mayor de W_s para $i = 0$ o para $v_L + v_C = 0$. La tensión en el condensador, y por tanto la carga, retrasa respecto a la corriente en 90° ; por tanto, $i = 0$ implica que $q = \pm Q_{\text{max}}$ y

$$W_s|_{i=0} = \frac{Q_{\text{max}}^2}{2C} = \frac{1}{2}CV_{C\text{max}}^2 = \frac{1}{2}C\left(\frac{I_{\text{max}}}{\omega C}\right)^2 = \frac{I_{\text{max}}^2}{2C\omega^2}$$

Por otra parte, $v_L + v_C = 0$ implica que $v_L = v_C = 0$ e $i = \pm I_{\max}$ (ver el diagrama fasorial de la Figura 12.37), y entonces

$$W_s|_{v_L+v_C=0} = \frac{1}{2} L I_{\max}^2$$

Finalmente se llega a

$$W_{s\max} = \begin{cases} I_{\max}^2/2C\omega^2 & (\omega \leq \omega_0) \\ LI_{\max}^2/2 & (\omega \geq \omega_0) \end{cases}$$

La energía que se disipa en cada ciclo (en la resistencia) es $W_d = I_{\max}^2 R \pi/\omega$. Por tanto,

$$Q = 2\pi \frac{W_{s\max}}{W_d} = \begin{cases} 1/\omega CR & (\omega \leq \omega_0) \\ \omega L/R & (\omega \geq \omega_0) \end{cases}$$

b) Para la combinación en paralelo con tensión aplicada $v(t)$,

$$W_s = \frac{1}{2} L i_L^2 + \frac{1}{2C} q_C^2$$

y

$$\frac{dW_s}{dt} = L i_L \frac{di_L}{dt} + \frac{q_C}{C} \dot{q}_C = v(i_L + i_C) = 0$$

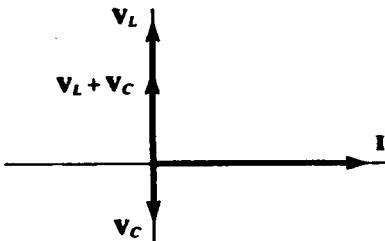


Figura 12.37.

Si $v = 0$, entonces $q_C = 0$ e

$$i_L = \pm I_{L\max} = \pm \frac{V_{\max}}{\omega L}$$

obteniéndose

$$W_s|_{v=0} = \frac{V_{\max}^2}{2L\omega^2}$$

Si $i_L + i_C = 0$, entonces (ver Figura 12.38) $i_L = i_C = 0$ y $q_C = \pm CV_{\max}$, obteniéndose:

$$W_s|_{i_L+i_C=0} = \frac{1}{2} CV_{\max}^2$$

Entonces,

$$W_{s\max} = \begin{cases} V_{\max}^2/2L\omega^2 & (\omega \leq \omega_a) \\ CV_{\max}^2/2 & (\omega \geq \omega_a) \end{cases}$$

La energía disipada en R en cada ciclo es $W_d = V_{\max}^2 \pi / R \omega$. Por consiguiente,

$$Q = 2\pi \frac{W_{s \max}}{W_d} = \begin{cases} R/L\omega & (\omega \leq \omega_a) \\ \omega CR & (\omega \geq \omega_a) \end{cases}$$

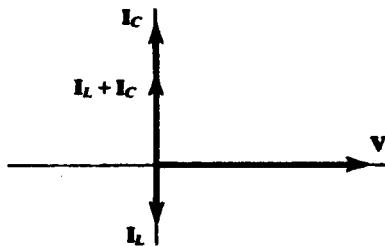


Figura 12.38.

- 12.7.** Un circuito serie de tres elementos contiene $R = 10 \Omega$, $L = 5 \text{ mH}$ y $C = 12,5 \mu\text{F}$. Dibujar el módulo y el argumento de Z como función de ω para valores de ω desde $0,8 \omega_0$ hasta $1,2 \omega_0$.

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 4000 \text{ rad/s. Para } \omega_0,$$

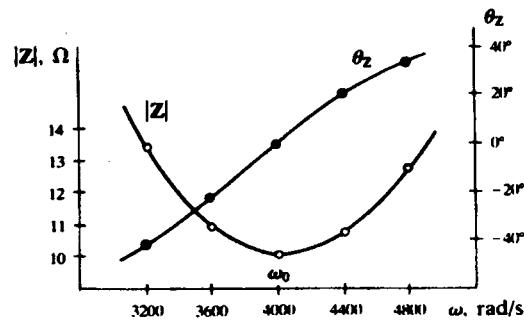
$$X_L = (4000)(5 \cdot 10^{-3}) = 20 \Omega \quad X_C = \frac{1}{(4000)(12,5 \cdot 10^{-6})} = 20 \Omega$$

$$Z = 10 + j(X_L - X_C) = 10 + j0 \Omega$$

Los valores de las reactancias a frecuencias distintas se obtienen fácilmente. En la Figura 12.39(a) se muestra una tabla con las reactancias y las impedancias y en la Figura 12.39(b) se han representado las gráficas requeridas.

3200	16	25	$10 - j9$	$13,4/-42^\circ$
3600	18	22,2	$10 - j4,2$	$10,8/-22,8^\circ$
4000	20	20	10	$10/0^\circ$
4400	22	18,2	$10 + j3,8$	$10,7/20,8^\circ$
4800	24	16,7	$10 + j7,3$	$12,4/36,2^\circ$

(a)



(b)

Figura 12.39.

- 12.8.** Demostrar que $\omega_0 = \sqrt{\omega_i \omega_s}$ para el circuito serie RLC .

Según los resultados del Problema 12.5,

$$\omega_i \omega_s = \left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} - \frac{R}{2L} \right) \left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} + \frac{R}{2L} \right) = \frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

- 12.9.** Calcular el factor de calidad de un circuito serie RLC , con $R = 20 \Omega$, $L = 50 \text{ mH}$ y $C = 1 \mu\text{F}$, usando: a) $Q = \omega_0 L / R$, b) $Q = 1 / \omega_0 C R$ y c) $Q = \omega_0 / \beta$.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0,05 \cdot 10^{-6}}} = 4472 \text{ rad/s}$$

$$\omega_i = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = 4276,6 \text{ rad/s} \quad \omega_s = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = 4676,6 \text{ rad/s}$$

y $\beta = \omega_s - \omega_i = 400 \text{ rad/s}$.

a)
$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{4472(0,05)}{20} = 11,2$$

b)
$$Q = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{1}{4472(10^{-6})20} = 11,2$$

c)
$$Q = \frac{\omega_0}{\beta} = \frac{4472}{400} = 11,2$$

- 12.10.** Una bobina se representa por una combinación en serie de $L = 50 \text{ mH}$ y $R = 15 \Omega$. Calcular el factor de calidad para: a) 10 kHz, b) 50 kHz.

a)
$$Q_{\text{bob}} = \frac{\omega L}{R} = \frac{2\pi(10 \cdot 10^3)(50 \cdot 10^{-3})}{15} = 209$$

b)
$$Q_{\text{bob}} = 209 \left(\frac{50}{10} \right) = 1047$$

- 12.11.** Convertir las constantes del circuito del Problema 12.10 al equivalente en paralelo: a) para 10 kHz, b) para 250 Hz.

a)
$$R_p = R_s \left[1 + \left(\frac{\omega L_s}{R_s} \right)^2 \right] = R_s [1 + Q_s^2] = 15 [1 + (209)^2] = 655 \text{ k}\Omega$$

o, como $Q_s \gg 10$, $R_p \approx R_s Q_s^2 = 15(209)^2 = 655 \text{ k}\Omega$.

$$L_p = L_s \left(1 + \frac{1}{Q_s^2} \right) \approx L_s = 50 \text{ mH}$$

b) Para 250 Hz,

$$Q_s = \frac{2\pi(250)(50 \cdot 10^{-3})}{15} = 5,24$$

$$R_p = R_s [1 + Q_s^2] = 15 [1 + (5,24)^2] = 426,9 \text{ }\Omega$$

$$L_p = L_s \left[1 + \frac{1}{Q_s^2} \right] = (50 \cdot 10^{-3}) \left[1 + \frac{1}{(5,24)^2} \right] = 51,8 \text{ mH}$$

La conversión de los elementos del circuito serie a paralelo se puede realizar a una frecuencia específica, y la equivalencia será válida solamente para esa frecuencia. Obsérvese que en b), donde $Q_s < 10$, L_p es significativamente diferente de L_s .

- 12.12. Para el circuito de la Figura 12.40: a) calcular la función de transferencia de la tensión $H_v(\omega)$ y b) determinar la frecuencia a la que la función es real.

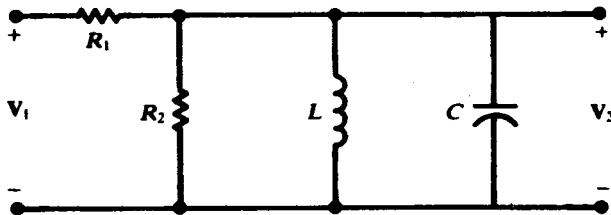


Figura 12.40.

- a) Sean Z_2 e Y_2 la impedancia y la admitancia representativas del circuito paralelo R_2LC .

$$\begin{aligned} H_v(\omega) &= \frac{Z_2}{R_1 + Z_2} = \frac{1}{1 + R_1 Y_2} = \frac{1}{1 + R_1 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \right)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + jR_1 \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)} \end{aligned}$$

- b) La función de transferencia es real cuando Y_2 lo es; esto es, cuando

$$\omega = \omega_a \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Para $\omega = \omega_a$ no solamente son máximos $|Z_2|$ y $|H_v|$, sino que $|Z_{en}| = |R_1 + Z_2|$ también es máxima [ya que R_1 es real y positiva (ver el diagrama de localización de impedancias, Figura 12.41)].

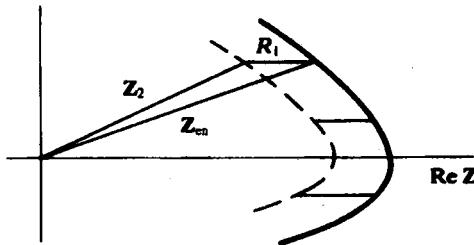


Figura 12.41.

- 12.13. Calcular el ancho de banda β del circuito de la Figura 12.40 y representar β en función del parámetro

$$R_x \equiv \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Las frecuencias de media potencia se determinan por la condición $|\mathbf{H}_v(\omega)| = 0,707|\mathbf{H}_v|_{\max}$ o, según el Problema 12.12(a),

$$R_1 \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) = \pm \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \quad \text{o} \quad R_x \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) = \pm 1$$

Pero ésta (ver Sección 12.13) es exactamente la ecuación de las frecuencias de media potencia de un circuito paralelo RLC . Por tanto,

$$\beta = \frac{\omega_a}{Q_a} = \frac{1}{CR_x}$$

En la Figura 12.42 se ha representado la gráfica, que es de tipo hiperbólico.

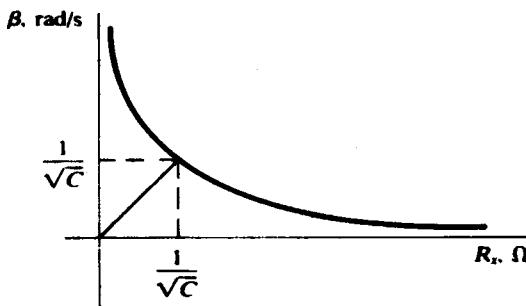


Figura 12.42.

- 12.14.** En el circuito de la Figura 12.40, $R_1 = R_2 = 2 \text{ k}\Omega$, $L = 10 \text{ mH}$ y $C = 40 \text{ nF}$. Determinar la frecuencia de resonancia y el ancho de banda y comparar con los resultados para $R_1 = 0$ (es decir, un circuito paralelo puro).

$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{(10 \cdot 10^{-3})(40 \cdot 10^{-9})}} = 5 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$$

o $f_a = 7958 \text{ Hz}$. Con $R_x = 2^2/4 = 1 \text{ k}\Omega$, el Problema 12.13 da

$$\beta = \frac{1}{(40 \cdot 10^{-9})(1 \cdot 10^3)} = 2,5 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$$

Los resultados de los Problemas 12.12 y 12.13 no se pueden aplicar cuando $R_1 \rightarrow 0$ porque, en el límite, la relación de tensiones es idénticamente igual a la unidad y, por tanto, no se obtiene ninguna información acerca del circuito paralelo R_2LC que queda. (Observad que $\beta \rightarrow \infty$ según $R_x \rightarrow 0$.) En cambio, se puede resolver a partir de la función de la impedancia de entrada, según la Sección 12.13, donde

$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 5 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$$

al igual que anteriormente, y

$$\beta = \frac{1}{CR_2} = 1,25 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$$

- 12.15.** En el circuito de la Figura 12.40, $R_1 = 5 \text{ k}\Omega$ y $C = 10 \text{ nF}$. Si $\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1 = 0,8/0^\circ$ para 15 kHz, calcular R_2 , L y el ancho de banda.

El ángulo de fase 0 en la relación de tensión \mathbf{H}_v indica que el circuito considerado como un todo, y el propio tanque paralelo, está en resonancia (ver Problema 12.14). Entonces,

$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad L = \frac{1}{\omega_a^2 C} = \frac{1}{[2\pi(15 \cdot 10^3)]^2 (10 \cdot 10^{-9})} = 11,26 \text{ mH}$$

Del Problema 12.12,

$$\mathbf{H}_v(\omega_a) = 0,8/0^\circ = \frac{1}{1 + (R_1/R_2)} \quad \text{por tanto} \quad R_2 = \frac{R_1}{0,25} = 20 \text{ k}\Omega$$

Entonces $R_x = (5)(20)/25 = 4 \text{ k}\Omega$, y el Problema 12.3 da

$$\beta = \frac{1}{(10 \cdot 10^{-9})(4 \cdot 10^3)} = 2,5 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$$

- 12.16.** Comparar la frecuencia de resonancia del circuito de la Figura 12.43 para $R = 0$ y para $R = 50 \Omega$.

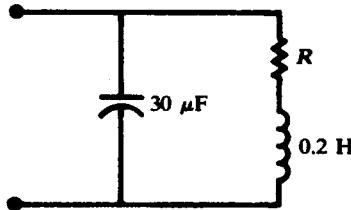


Figura 12.43.

Para $R = 0$, el circuito es como un tanque paralelo LC , con

$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(0,2)(30 \cdot 10^{-6})}} = 408,2 \text{ rad/s} \quad \text{o} \quad f_a = 65 \text{ Hz}$$

Para $R = 50 \Omega$,

$$\mathbf{Y}_{en} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j \left[\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right]$$

En resonancia, $\text{Im } \mathbf{Y}_{en}$ es cero, resultando

$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{L}}$$

Es claro que cuando $R \rightarrow 0$, esta expresión se reduce a la dada para el tanque LC puro. Sustituyendo los valores numéricos se obtiene un resultado para el radical de 0,791; por tanto,

$$\omega_a = 408,2(0,791) = 322,9 \text{ rad/s} \quad \text{o} \quad f_a = 51,4 \text{ Hz}$$

- 12.17. Las medidas sobre una bobina real a 10 MHz dan $L = 8 \mu\text{H}$ y $Q_{\text{bob}} = 40$.
 a) Determinar la capacitancia ideal C en paralelo que produce la resonancia a 10 MHz y calcular el ancho de banda correspondiente β . b) Repetir el cálculo anterior si se usa un condensador real, en vez del ideal, con un *factor de disipación* $D = Q_{\text{con}}^{-1} = 0,005$ a 10 MHz.

a) De la Sección 12.14,

$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{1}{\sqrt{1 + Q_{\text{bob}}^{-2}}}$$

o

$$C = \frac{1}{\omega_a^2 L (1 + Q_{\text{bob}}^{-2})} = \frac{1}{[2\pi(10 \cdot 10^6)]^2 (8 \cdot 10^{-6}) \left(1 + \frac{1}{1600}\right)} = 31,6 \text{ pF}$$

Usando la Sección 12.15 para convertir la rama serie RL de la Figura 12.25 a paralelo para la frecuencia de resonancia,

$$R_p = R(1 + Q_{\text{bob}}^2) = \frac{\omega_a L}{Q_{\text{bob}}} (1 + Q_{\text{bob}}^2)$$

Entonces, según la Sección 12.13,

$$\beta = \frac{\omega_a}{Q_a} = \frac{\omega_a^2 L}{R_p} = \frac{\omega_a Q_{\text{bob}}}{1 + Q_{\text{bob}}^2} = \frac{2\pi(10 \cdot 10^6)(40)}{1 + 1600} \text{ rad/s}$$

o 0,25 MHz.

- b) El circuito es el de la Figura 12.44; del apartado a) se obtiene la resistencia de la bobina real

$$R = \frac{\omega_a L}{Q_{\text{bob}}} = 4\pi \Omega$$

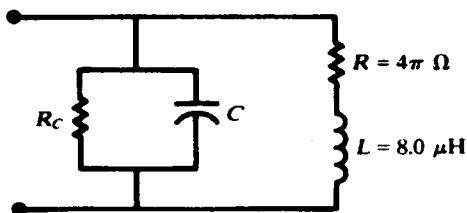


Figura 12.44.

Además del factor de disipación dado, se sabe que

$$\frac{1}{\omega_a C R_C} = 0,005$$

La admitancia de entrada es

$$Y_{en} = \frac{1}{R_C} + j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \left[\frac{1}{R_C} + \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} \right] + j \left[\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right]$$

que difiere de la admitancia de entrada del apartado *a*) solamente en la parte real. Como la parte imaginaria obliga a que L y R sean las mismas, y debe anularse a la misma frecuencia, C debe ser el mismo del apartado *a*); nominalmente, $C = 31,6 \text{ pF}$.

Para un valor de C fijo, el ancho de banda es inversamente proporcional a la resistencia. Con el condensador real, la resistencia neta del paralelo es

$$R' = \frac{R_p R_C}{R_p + R_C}$$

donde R_p es igual a la calculada en el apartado *a*). Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{0,25 \text{ MHz}} &= \frac{R_p}{R'} = 1 + \frac{R_p}{R_C} = 1 + \frac{(\omega_a L / Q_{\text{bob}})(1 + Q_{\text{bob}}^2)}{1/\omega_a C(0,005)} \\ &= 1 + \frac{(1 + Q_{\text{bob}}^2)(0,005)}{Q_{\text{bob}}(1 + Q_{\text{bob}}^{-2})} \\ &= 1 + \frac{(1 + 1600)(0,005)}{40 \left(1 + \frac{1}{1600} \right)} = 1,2 \end{aligned}$$

y, por tanto, $\beta = 0,3 \text{ MHz}$.

Un condensador con pérdidas produce el mismo efecto que cualquier resistencia de carga conectada en paralelo en el tanque; el Q_a se reduce y el ancho de banda se incrementa, para una f_a constante.

- 12.18.** Un condensador con pérdidas, en un circuito serie, contiene una $R = 25 \Omega$ y una $C = 20 \text{ pF}$. Calcular el equivalente en paralelo a 50 kHz.

Según la Sección 12.15, o haciendo $L \rightarrow 0$ en el Problema 12.6(*a*),

$$Q_s = \frac{1}{\omega C_s R_s} = \frac{1}{2\pi(50 \cdot 10^3)(20 \cdot 10^{-12})(25)} = 6370$$

Para este gran valor de Q_s ,

$$R_p \approx R_s Q_s^2 = 1010 \text{ M}\Omega \quad C_p \approx C_s = 20 \text{ pF}$$

- 12.19.** Una fuente de tensión $V = 100/0^\circ \text{ V}$ con frecuencia variable se conecta a un circuito serie RL con $R = 20 \Omega$ y $L = 10 \text{ mH}$. Calcular I para $\omega = 0, 500, 1000, 2000, 5000 \text{ rad/s}$. Representar todas las intensidades en el mismo diagrama fasorial y señalar el diagrama de localización de las intensidades.

$$Z = R + jX_L = R + j\omega L$$

La Tabla 12.2 muestra los cálculos que se requieren. Con el fasor de tensión de fase cero, el diagrama de localización de I según varía ω es el semicírculo de la Figura 12.45. Como $I = VY$, con V constante, la Figura 12.45 es esencialmente la misma que la Figura 12.28(*c*), que corresponde al diagrama de localización de admitancias del circuito serie RL .

Tabla 12.2.

ω rad/s	$X_L \Omega$	$D \Omega$	$Z \Omega$	I_A A
0	0	20	$20/0^\circ$	$5/0^\circ$
500	5	20	$20,6/14,04^\circ$	$4,85/-14,04^\circ$
1000	10	20	$22,4/26,57^\circ$	$4,46/-26,57^\circ$
2000	20	20	$28,3/45^\circ$	$3,54/-45^\circ$
5000	50	20	$53,9/68,2^\circ$	$1,86/-68,2^\circ$

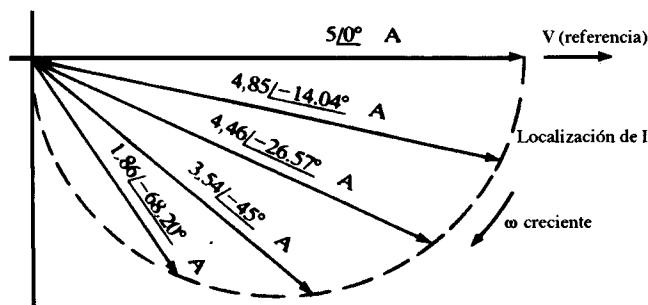


Figura 12.45.

- 12.20. El circuito de la Figura 12.46 está en resonancia para dos valores de C cuando la frecuencia de la tensión de alimentación es 5000 rad/s. Calcular los dos valores de C y representar el diagrama de localización de impedancias que ilustra el resultado.

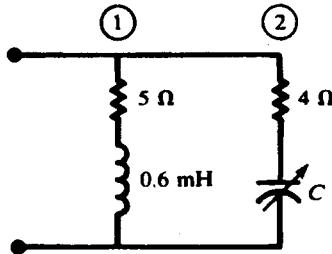


Figura 12.46.

A la frecuencia dada, $X_L = 3 \Omega$. Entonces la admitancia de esta rama fija es

$$Y_1 = \frac{1}{5 + j3} = 0,147 - j0,088 \text{ S}$$

El diagrama semicircular de localización de la admitancia de la rama 2 tiene de radio $r = 1/2R = 0,125$ S. La admitancia total es la suma de la admitancia fija \mathbf{Y}_1 y la admitancia variable \mathbf{Y}_2 . En la Figura 12.47 el diagrama semicircular se suma al número complejo constante \mathbf{Y}_1 . La resonancia del circuito se produce en los puntos a y b , en los que \mathbf{Y}_T es real.

$$\mathbf{Y}_T = 0,147 - j0,088 + \frac{1}{4 - jX_C}$$

que es real si

$$X_C^2 - 11,36X_C + 16 = 0$$

o $X_{C_1} = 9,71 \Omega$, $X_{C_2} = 1,65 \Omega$. Con $\omega = 5000 \text{ rad/s}$,

$$C_1 = 20,6 \mu\text{F} \quad C_2 = 121 \mu\text{F}$$

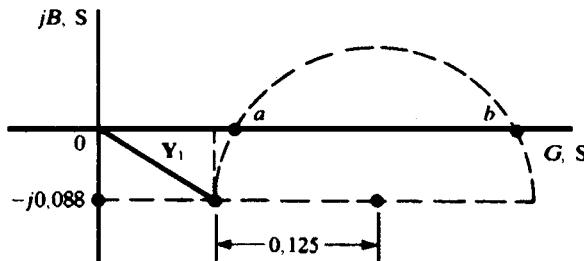


Figura 12.47.

- 12.21.** Demostrar, usando el diagrama de localización, que el módulo de la tensión entre los puntos A y B de la Figura 12.48 es siempre la mitad del módulo de la tensión aplicada \mathbf{V} con L variable.

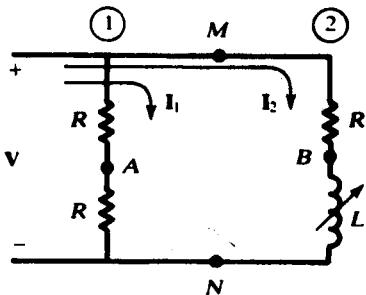


Figura 12.48.

La corriente I_1 por la rama 1 circula a través de dos resistencias iguales R . Por tanto, A es el punto medio del fasor \mathbf{V} , según se ve en la Figura 12.49.

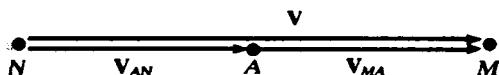


Figura 12.49.

La rama 2 tiene un diagrama de localización de Y semicircular [ver Figura 12.28(c)]. Entonces el diagrama de localización de la corriente es también semicircular, según se ve en la Figura 12.20(a). El diagrama fasorial de la tensión, Figura 12.50(b), consta de la tensión en la inductancia, \mathbf{V}_{BN} , y de la tensión en R_1 , \mathbf{V}_{MB} . Sumando vectorialmente las dos tensiones,

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{MN} = \mathbf{V}_{BN} + \mathbf{V}_{MB}$$

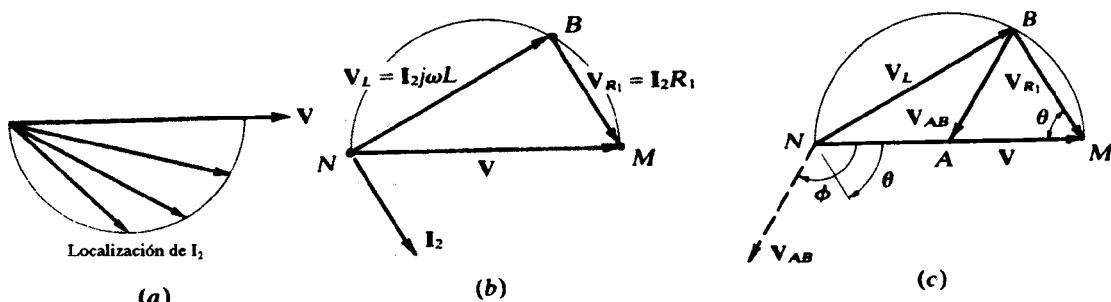


Figura 12.50.

Debido a que I_2 retrasa 90° respecto de \mathbf{V}_{BN} , \mathbf{V}_{BN} y \mathbf{V}_{MB} son perpendiculares para cualquier valor de L , según la Figura 12.50(b). Según L varía desde 0 hasta ∞ , el punto B se desplaza desde N hasta M a lo largo del semicírculo. En la Figura 12.50(c) se han superpuesto las Figuras 12.49 y 12.50(b). Es evidente que \mathbf{V}_{AB} es el radio del semicírculo y, por tanto,

$$|\mathbf{V}_{AB}| = \frac{1}{2} |\mathbf{V}|$$

Además, el ángulo ϕ que \mathbf{V}_{AB} retrasa respecto de \mathbf{V} es igual a 2θ , donde $\theta = \tan^{-1} \omega L / R_1$.

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

- 12.22.** Un circuito pasa-altos RL tiene $R_1 = 50 \text{ k}\Omega$ y $L_2 = 0,2 \text{ mH}$. *a)* Calcular ω para que el módulo de la función de transferencia de la tensión sea $|\mathbf{H}_{r,\infty}| = 0,9$. *b)* Con una carga $R = 1 \text{ M}\Omega$ conectada en paralelo a L_2 , calcular $|\mathbf{H}_r|$ para $\omega = 7,5 \cdot 10^8 \text{ rad/s}$.

Solución: *a)* $5,16 \cdot 10^8 \text{ rad/s}$; *b)* 0,908.

- 12.23.** Determinar $\mathbf{H}_{r,\infty}$ de un circuito pasa-altos RL para $\omega = 2,5 \omega_x$, $R = 2 \text{ k}\Omega$ y $L = 0,05 \text{ H}$.

Solución: 0,928/21,8°.

- 12.24. Un circuito pasa-bajos RC en vacío tiene $R_1 = 5 \text{ k}\Omega$. a) Calcular C_2 si $|H_{v\infty}| = 0,5$ a 10 kHz . b) Calcular H_v a 5 kHz . c) ¿Qué valor de C_2 produce $|H_v| = 0,9$ a 8 kHz ? d) Con la C_2 del apartado a), calcular un nuevo valor de R_1 para que $|H_v| = 0,9$ a 8 kHz .

Solución: a) $5,51 \mu\text{F}$; b) $0,756/-40,89^\circ$; c) $1,93 \mu\text{F}$; d) 1749Ω .

- 12.25. Un divisor de tensión simple consta de R_1 y R_2 . Si hay condensadores C presentes, entonces el divisor sería, en general, dependiente de la frecuencia. Demostrar, sin embargo, que V_2/V_1 es independiente de la frecuencia en el circuito de la Figura 12.51 si la capacidad de compensación C_1 toma un determinado valor.

Solución: $C_1 = (R_2/R_1)C_s$.

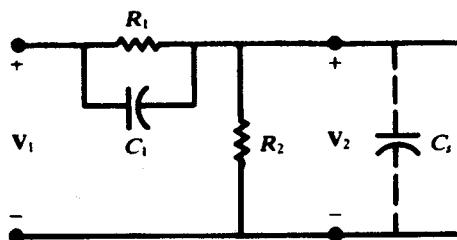


Figura 12.51.

- 12.26. Suponer que una fuente de tensión sinusoidal de frecuencia variable y $V_{\max} = 50 \text{ V}$ se conecta al circuito de la Figura 12.52. a) ¿A qué frecuencia f , $|I|$ es mínimo? b) Calcular dicha corriente mínima. c) ¿Cuánto vale $|I_C|$ a esa frecuencia?

Solución: a) $2,05 \text{ kHz}$; b) $2,78 \text{ mA}$; c) $10,8 \text{ mA}$.

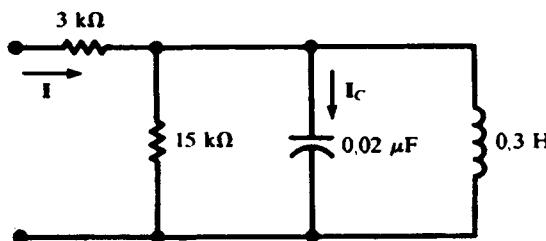


Figura 12.52.

- 12.27. Un condensador de $20 \mu\text{F}$ se conecta en paralelo con una bobina real representada por $L = 1 \text{ mH}$ en serie con $R = 7 \Omega$. Determinar la frecuencia de resonancia en rad/s y en Hz del circuito paralelo.

Solución: $1000 \text{ rad/s}, 159,2 \text{ Hz}$.

- 12.28. ¿Qué relación debe existir entre los valores R_L y R_C del circuito de la Figura 12.53 para que sea resonante a cualquier frecuencia?

Solución: $R_L = R_C = 5 \Omega$.

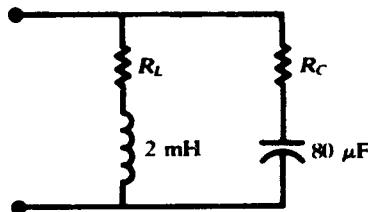


Figura 12.53.

- 12.29. En el circuito paralelo de la Figura 12.54: a) calcular el valor de R para que se produzca la resonancia; b) convertir la rama RC en su equivalente en paralelo.

Solución: a) 6Ω ; b) $R_p = 6,67 \Omega$, $X_{C_p} = 20 \Omega$.

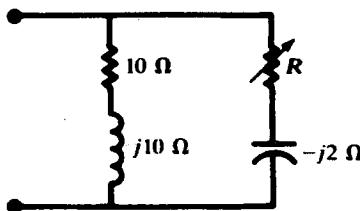


Figura 12.54.

- 12.30. Calcular el valor de R que hace que el circuito de la Figura 12.55(a) esté en resonancia. Obtener los valores de R' , X_L y X_C del circuito paralelo equivalente al de la Figura 12.55(b).

Solución: $R = 12,25 \Omega$, $R' = 7,75 \Omega$, $X_L = 25 \Omega$, $X_C = 25 \Omega$.

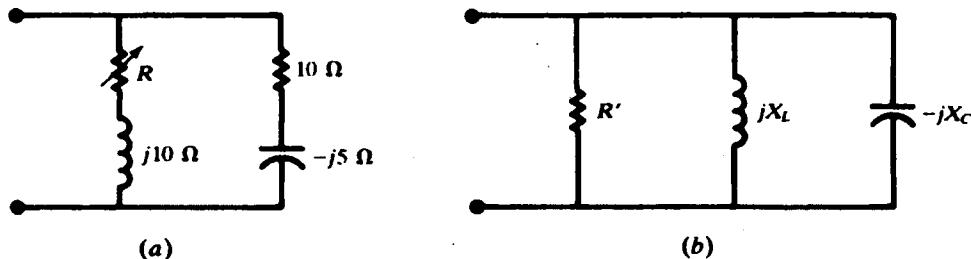


Figura 12.55.

- 12.31. La rama 1 de un circuito paralelo de dos ramas tiene una impedancia $Z_1 = 8 + j6 \Omega$ para $\omega = 5000 \text{ rad/s}$. La rama 2 contiene una $R = 8,34 \Omega$ en serie con una capacidad C variable.
a) Determinar C para que se produzca la resonancia. b) Representar el diagrama de localización de la admitancia.

Solución: (a) $24 \mu\text{F}$. b) Véase la Figura 12.56.

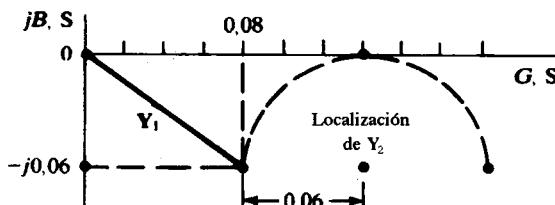


Figura 12.56.

- 12.32. Determinar R para que el circuito de la Figura 12.57 esté en resonancia. Representar el diagrama de localización de la admitancia.

Solución: No se puede obtener la resonancia variando R . Ver la Figura 12.58.

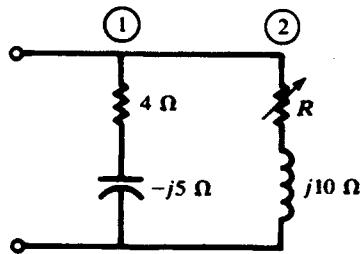


Figura 12.57.

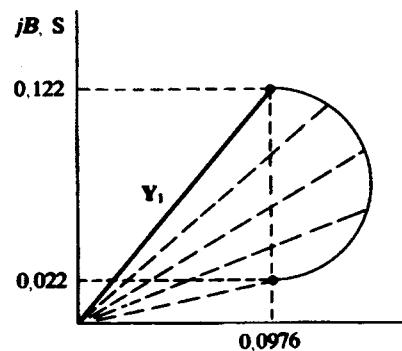


Figura 12.58.

- 12.33. En el Problema 12.32, ¿a qué valores de la reactancia inductiva será posible obtener la resonancia con independencia del valor de la resistencia variable R ?

Solución: $X_L \leq 8,2 \Omega$.

- 12.34. a) Representar el diagrama de localización de admitancias del circuito de la Figura 12.59.
b) ¿A qué valor de resistencia en la rama RL es posible conseguir la resonancia para un único valor de X_L ?

Solución: a) Véase la Figura 12.60. b) $6,25 \Omega$.

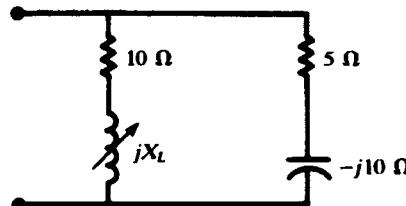


Figura 12.59.

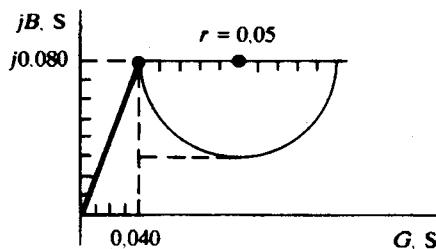


Figura 12.60.

- 12.35. Determinar el(es) valor(es) de L para el que se produce la resonancia en el circuito de la Figura 12.61 a 5000 rad/s.

Solución: 2,43 mH, 66 μ H.

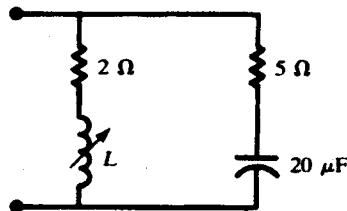


Figura 12.61.

- 12.36. Un circuito con tres ramas en paralelo tiene elementos fijos en dos de sus ramas; en la tercera, un elemento es variable. El diagrama fasorial de tensión e intensidad es el de la Figura 12.62. Identificar todos los elementos si $\omega = 5000$ rad/s.

Solución: Rama 1: $R = 8,05 \Omega$, $L = 0,431$ mH.

Rama 2: $R = 4,16 \Omega$, $C = 27,7 \mu$ F.

Rama 3: $L = 2,74$ mH, R variable.

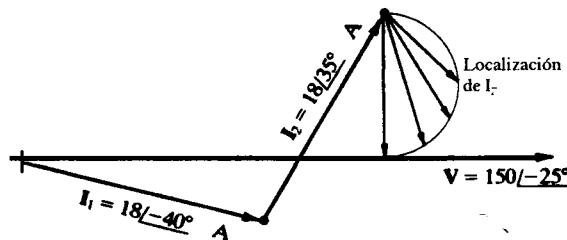


Figura 12.62.

- 12.37. Describir el circuito que corresponde a cada diagrama de localización de la Figura 12.63, si hay un único elemento variable en cada circuito.

- Solución:**
- a) Un circuito paralelo de dos ramas.
Rama 1: R y X_C fijas; rama 2: R fija y X_C variable.
 - b) Un circuito paralelo de tres ramas.
Rama 1: R y X_C fijas; rama 2: X_C fija; rama 3: R fija y X_L variable.
 - c) Un circuito paralelo de dos ramas.
Rama 1: R y X_C fijas; rama 2: X_L fija y R variable.

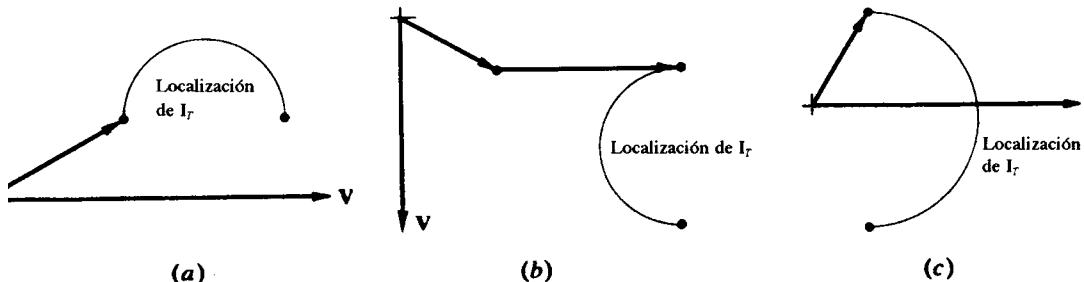


Figura 12.63.

CAPÍTULO 13

Cuadripolos

13.1. TERMINALES Y PUERTAS

En un circuito con dos terminales la tensión aplicada está relacionada con la intensidad de corriente que circula por ellos mediante el valor de impedancia $Z = V/I$. En un circuito de cuatro terminales, si cada par de terminales (o puerta) se conecta separadamente a otro circuito como en la Figura 13.1, las cuatro variables i_1 , i_2 , v_1 y v_2 están relacionadas mediante dos ecuaciones denominadas *características del cuadripolo*. Esas dos ecuaciones, más las características de los circuitos conectados, proporcionan el número necesario y suficiente de ecuaciones para determinar las cuatro variables.

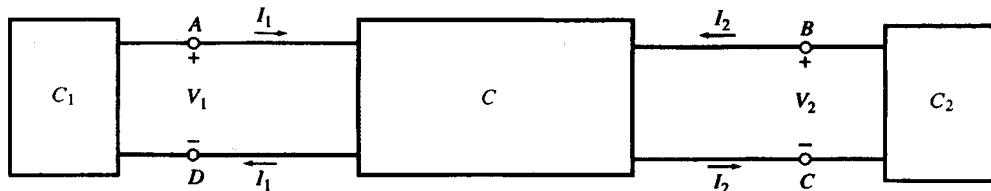


Figura 13.1.

13.2. PARÁMETROS Z

Las ecuaciones características de un cuadripolo, que contenga elementos lineales y fuentes dependientes, se pueden escribir en el dominio s como

$$\begin{aligned}V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2\end{aligned}\quad (1)$$

Los coeficientes Z_{ij} tienen dimensiones de impedancia y se denominan *parámetros Z* del circuito. Los parámetros Z también se denominan *parámetros de impedancia en circuito abierto*, ya que se pueden medir desde un terminal mientras el otro permanece abierto. Se definen como

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} \quad Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} \quad Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} \quad Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} \quad (2)$$

EJEMPLO 13.1. Determinar los parámetros Z del cuadripolo de la Figura 13.2.

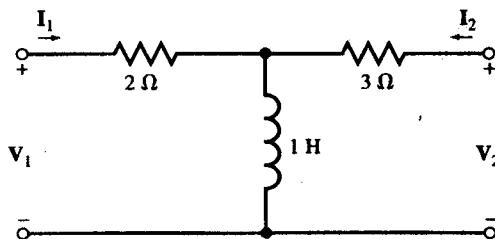


Figura 13.2.

Se aplica la ley de Kirchhoff para las tensiones en los dos bucles de la Figura 13.2, utilizando las intensidades de corriente I_1 e I_2 y se obtiene:

$$\begin{aligned} V_1 &= 2I_1 + s(I_1 + I_2) = (2 + s)I_1 + sI_2 \\ V_2 &= 3I_2 + s(I_1 + I_2) = sI_1 + (3 + s)I_2 \end{aligned} \quad (3)$$

Comparando (1) y (3), los parámetros Z del circuito resultan:

$$\begin{aligned} Z_{11} &= s + 2 \\ Z_{12} &= Z_{21} = s \\ Z_{22} &= s + 3 \end{aligned} \quad (4)$$

Obsérvese que en este ejemplo $Z_{12} = Z_{21}$.

Circuitos recíprocos y no recíprocos

Un cuadripolo se denomina *recíproco* si las impedancias de transferencia en circuito abierto son iguales: $Z_{12} = Z_{21}$. Por consiguiente, en un cuadripolo recíproco, al alimentar desde una puerta con una intensidad de corriente I , la tensión que se mide en la otra puerta en circuito abierto es la misma, independientemente de la puerta desde la que se alimente. La tensión en ambos casos es $V = Z_{12}I = Z_{21}I$. Los circuitos que contienen resistencias, bobinas y condensadores son generalmente recíprocos. Los circuitos que tienen además fuentes dependientes son generalmente no recíprocos (véase el Ejemplo 13.2).

EJEMPLO 13.2. El cuadripolo de la Figura 13.3 contiene una fuente de tensión dependiente de la corriente. Determinar sus parámetros Z .

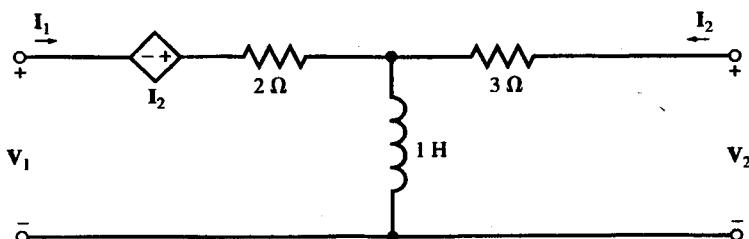


Figura 13.3.

Como en el Ejemplo 13.1, se aplica la ley de Kirchhoff para las tensiones en los dos bucles:

$$\begin{aligned} V_1 &= 2I_1 - I_2 + s(I_1 + I_2) = (2 + s)I_1 + (s - 1)I_2 \\ V_2 &= 3I_2 + s(I_1 + I_2) = sI_1 + (3 + s)I_2 \end{aligned}$$

Los parámetros Z son

$$\begin{aligned} Z_{11} &= s + 2 \\ Z_{12} &= s - 1 \\ Z_{21} &= s \\ Z_{22} &= s + 3 \end{aligned} \tag{5}$$

Con la fuente dependiente en el circuito, $Z_{12} \neq Z_{21}$ y, por tanto, el cuadripolo es no recíproco.

13.3. EQUIVALENTE EN T DE CIRCUITOS RECÍPROCOS

Un circuito recíproco se puede modelizar mediante su equivalente en T como el de la Figura 13.4. Z_a , Z_b y Z_c se obtienen a partir de los parámetros Z de la forma

$$\begin{aligned} Z_a &= Z_{11} - Z_{12} \\ Z_b &= Z_{22} - Z_{21} \\ Z_c &= Z_{12} = Z_{21} \end{aligned} \tag{6}$$

El circuito equivalente en T no tiene por qué ser necesariamente factible.

EJEMPLO 13.3. Calcular los parámetros Z del circuito de la Figura 13.4.

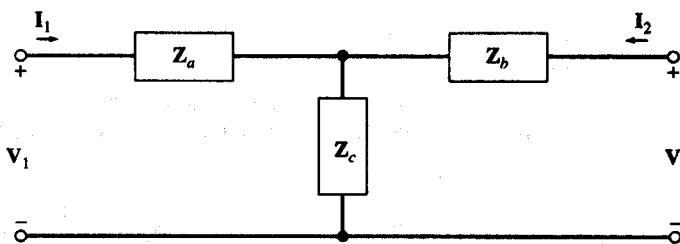


Figura 13.4.

Aplicando de nuevo la ley de Kirchhoff para las tensiones se obtiene

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_a I_1 + Z_c (I_1 + I_2) = (Z_a + Z_c) I_1 + Z_c I_2 \\ V_2 &= Z_b I_2 + Z_c (I_1 + I_2) = Z_c I_1 + (Z_b + Z_c) I_2 \end{aligned} \tag{7}$$

Comparando (1) y (7), los parámetros Z resultan

$$\begin{aligned} Z_{11} &= Z_a + Z_c \\ Z_{12} &= Z_{21} = Z_c \\ Z_{22} &= Z_b + Z_c \end{aligned} \tag{8}$$

13.4. PARÁMETROS Y

Las ecuaciones características del circuito también se pueden escribir como en (9), en las que \mathbf{I}_1 e \mathbf{I}_2 están expresadas en función de \mathbf{V}_1 y \mathbf{V}_2 .

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_1 &= \mathbf{Y}_{11}\mathbf{V}_1 + \mathbf{Y}_{12}\mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}_2 &= \mathbf{Y}_{21}\mathbf{V}_1 + \mathbf{Y}_{22}\mathbf{V}_2\end{aligned}\quad (9)$$

Los coeficientes \mathbf{Y}_{ij} tienen dimensiones de admitancias y se denominan *parámetros Y* o *parámetros de admitancia* en cortocircuito, ya que se pueden medir desde una de las puertas mientras la otra está cortocircuitada. Los parámetros Y son

$$\mathbf{Y}_{11} = \left. \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_1} \right|_{\mathbf{V}_2=0} \quad \mathbf{Y}_{12} = \left. \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_2} \right|_{\mathbf{V}_1=0} \quad \mathbf{Y}_{21} = \left. \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_1} \right|_{\mathbf{V}_2=0} \quad \mathbf{Y}_{22} = \left. \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_2} \right|_{\mathbf{V}_1=0} \quad (10)$$

EJEMPLO 13.4. Determinar los parámetros Y del circuito de la Figura 13.5.

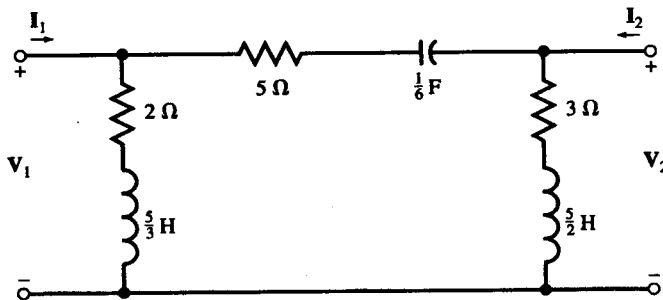


Figura 13.5.

Se aplica la ley de Kirchhoff para las intensidades en los nudos de entrada y de salida (por conveniencia se designa a las admitancias de las tres ramas del circuito como \mathbf{Y}_a , \mathbf{Y}_b e \mathbf{Y}_c según la Figura 13.6). Por tanto,

$$\mathbf{Y}_a = \frac{1}{2 + 5s/3} = \frac{3}{5s + 6} \quad \mathbf{Y}_b = \frac{1}{3 + 5s/2} = \frac{2}{5s + 6} \quad \mathbf{Y}_c = \frac{1}{5 + 6/s} = \frac{s}{5s + 6} \quad (11)$$

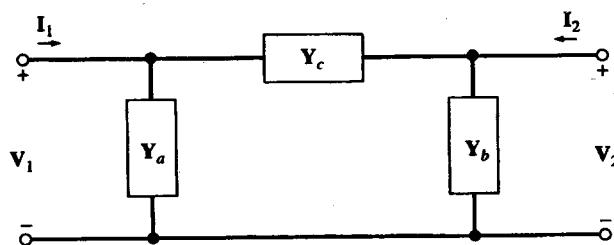


Figura 13.6.

Las ecuaciones de los nudos son:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= \mathbf{V}_1 \mathbf{Y}_a + (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2) \mathbf{Y}_c = (\mathbf{Y}_a + \mathbf{Y}_c) \mathbf{V}_1 - \mathbf{Y}_c \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}_2 &= \mathbf{V}_2 \mathbf{Y}_b + (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) \mathbf{Y}_c = -\mathbf{Y}_c \mathbf{V}_1 + (\mathbf{Y}_b + \mathbf{Y}_c) \mathbf{V}_2 \end{aligned} \quad (12)$$

Comparando (9) con (12) se obtiene:

$$\mathbf{Y}_{11} = \mathbf{Y}_a + \mathbf{Y}_c \quad \mathbf{Y}_{12} = \mathbf{Y}_{21} = -\mathbf{Y}_c \quad \mathbf{Y}_{22} = \mathbf{Y}_b + \mathbf{Y}_c \quad (13)$$

Sustituyendo \mathbf{Y}_a , \mathbf{Y}_b e \mathbf{Y}_c de (11) en (13) se obtiene:

$$\mathbf{Y}_{11} = \frac{s+3}{5s+6} \quad \mathbf{Y}_{12} = \mathbf{Y}_{21} = \frac{-s}{5s+6} \quad \mathbf{Y}_{22} = \frac{s+2}{5s+6} \quad (14)$$

Como $\mathbf{Y}_{12} = \mathbf{Y}_{21}$, el cuadripolo es recíproco.

13.5. EQUIVALENTE EN π DE CIRCUITOS RECÍPROCOS

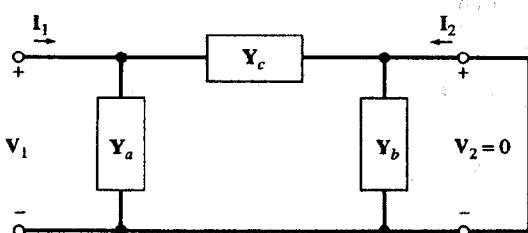
Un circuito recíproco se puede modelizar por su equivalente en π que está representado en la Figura 13.6. Los tres elementos del circuito equivalente en π se pueden determinar por la solución inversa. Primero se determinan los parámetros \mathbf{Y} de la Figura 13.6. De (10) se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{11} &= \mathbf{Y}_a + \mathbf{Y}_c && [\text{Figura 13.7(a)}] \\ \mathbf{Y}_{12} &= -\mathbf{Y}_c && [\text{Figura 13.7(b)}] \\ \mathbf{Y}_{21} &= -\mathbf{Y}_c && [\text{Figura 13.7(a)}] \\ \mathbf{Y}_{22} &= \mathbf{Y}_b + \mathbf{Y}_c && [\text{Figura 13.7(b)}] \end{aligned} \quad (15)$$

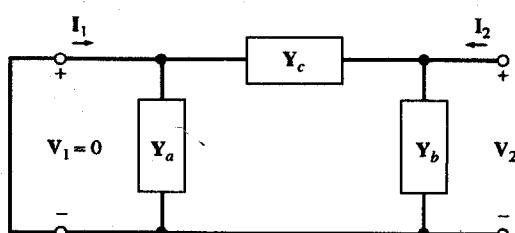
de donde

$$\mathbf{Y}_a = \mathbf{Y}_{11} + \mathbf{Y}_{12} \quad \mathbf{Y}_b = \mathbf{Y}_{22} + \mathbf{Y}_{12} \quad \mathbf{Y}_c = -\mathbf{Y}_{12} = -\mathbf{Y}_{21} \quad (16)$$

El circuito equivalente en π no es necesariamente realizable.



(a)



(b)

Figura 13.7.

13.6. APLICACIÓN DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL CUADRIPOLO

Las variables de las cuatro terminales \mathbf{I}_1 , \mathbf{I}_2 , \mathbf{V}_1 y \mathbf{V}_2 en un cuadripolo están relacionadas por las dos ecuaciones (1) o las (9). Conectando el cuadripolo al exterior, como se ve en la Figura 13.1, se obtienen dos ecuaciones adicionales. Las cuatro ecuaciones permiten entonces determinar \mathbf{I}_1 , \mathbf{I}_2 , \mathbf{V}_1 y \mathbf{V}_2 sin conocer la estructura interna del circuito.

EJEMPLO 13.5. Los parámetros \mathbf{Z} de un cuadripolo son

$$\mathbf{Z}_{11} = 2s + 1/s \quad \mathbf{Z}_{12} = \mathbf{Z}_{21} = 2s \quad \mathbf{Z}_{22} = 2s + 4$$

El circuito se conecta a una fuente y a una carga, como se ve en la Figura 13.8. Determinar \mathbf{I}_1 , \mathbf{I}_2 , \mathbf{V}_1 y \mathbf{V}_2 .

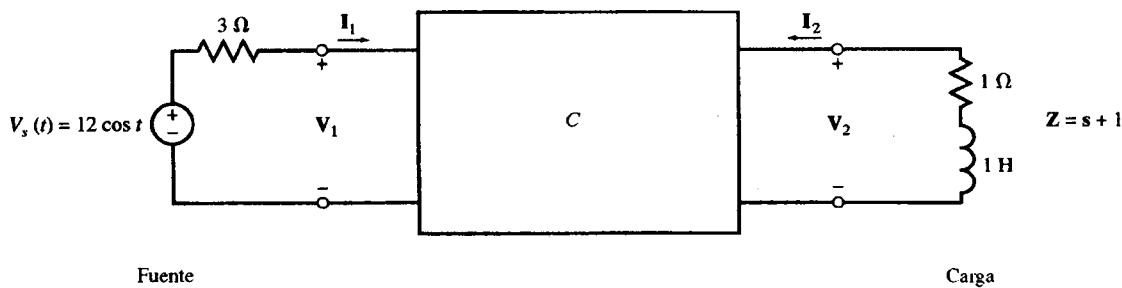


Figura 13.8.

Las ecuaciones características del cuadripolo son

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1 &= (2s + 1/s)\mathbf{I}_1 + 2s\mathbf{I}_2 \\ \mathbf{V}_2 &= 2s\mathbf{I}_1 + (2s + 4)\mathbf{I}_2\end{aligned}\tag{17}$$

La representación fasorial de la tensión $v_s(t)$ es $\mathbf{V}_s = 12 \text{ V}$ con $s = j$. Aplicando la ley de Kirchhoff para las tensiones a los bucles de entrada y de salida se obtienen dos ecuaciones adicionales (18):

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_s &= 3\mathbf{I}_1 + \mathbf{V}_1 \\ 0 &= (1 + s)\mathbf{I}_2 + \mathbf{V}_2\end{aligned}\tag{18}$$

Sustituyendo $s = j$ y $\mathbf{V}_s = 12$ en (17) y en (18) se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1 &= j\mathbf{I}_1 + j2\mathbf{I}_2 \\ \mathbf{V}_2 &= j2\mathbf{I}_1 + (4 + j2)\mathbf{I}_2 \\ 12 &= 3\mathbf{I}_1 + \mathbf{V}_1 \\ 0 &= (1 + j)\mathbf{I}_2 + \mathbf{V}_2\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_1 &= 3,29/-10,2^\circ \text{ A} & \mathbf{I}_2 &= 1,13/-131,2^\circ \text{ A} \\ \mathbf{V}_1 &= 2,88/37,5^\circ \text{ V} & \mathbf{V}_2 &= 1,6/93,8^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

13.7. CONVERSIÓN ENTRE LOS PARÁMETROS Z E Y

Los parámetros \mathbf{Y} se pueden obtener a partir de los parámetros \mathbf{Z} resolviendo (1) para \mathbf{I}_1 e \mathbf{I}_2 . Aplicando la regla de Cramer a (1) se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_1 &= \frac{\mathbf{Z}_{22}}{\mathbf{D}_{ZZ}} \mathbf{V}_1 - \frac{\mathbf{Z}_{12}}{\mathbf{D}_{ZZ}} \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}_2 &= \frac{-\mathbf{Z}_{21}}{\mathbf{D}_{ZZ}} \mathbf{V}_1 + \frac{\mathbf{Z}_{11}}{\mathbf{D}_{ZZ}} \mathbf{V}_2\end{aligned}\quad (19)$$

donde $\mathbf{D}_{ZZ} = \mathbf{Z}_{11}\mathbf{Z}_{22} - \mathbf{Z}_{12}\mathbf{Z}_{21}$ es el determinante de los coeficientes de (1). Comparando (19) con (9) se tiene:

$$\mathbf{Y}_{11} = \frac{\mathbf{Z}_{22}}{\mathbf{D}_{ZZ}} \quad \mathbf{Y}_{12} = \frac{-\mathbf{Z}_{12}}{\mathbf{D}_{ZZ}} \quad \mathbf{Y}_{21} = \frac{-\mathbf{Z}_{21}}{\mathbf{D}_{ZZ}} \quad \mathbf{Y}_{22} = \frac{\mathbf{Z}_{11}}{\mathbf{D}_{ZZ}} \quad (20)$$

Dados los parámetros \mathbf{Z} , el determinante \mathbf{D}_{ZZ} debe ser no nulo para que existan los parámetros \mathbf{Y} . A la inversa, dados los parámetros \mathbf{Y} , los parámetros \mathbf{Z} son:

$$\mathbf{Z}_{11} = \frac{\mathbf{Y}_{22}}{\mathbf{D}_{YY}} \quad \mathbf{Z}_{12} = \frac{-\mathbf{Y}_{12}}{\mathbf{D}_{YY}} \quad \mathbf{Z}_{21} = \frac{-\mathbf{Y}_{21}}{\mathbf{D}_{YY}} \quad \mathbf{Z}_{22} = \frac{\mathbf{Y}_{11}}{\mathbf{D}_{YY}} \quad (21)$$

donde $\mathbf{D}_{YY} = \mathbf{Y}_{11}\mathbf{Y}_{22} - \mathbf{Y}_{12}\mathbf{Y}_{21}$ es el determinante de los coeficientes de (9). Para obtener los parámetros \mathbf{Z} de un cuadripolo a partir de los parámetros \mathbf{Y} , \mathbf{D}_{YY} debe ser no nulo.

EJEMPLO 13.6. En relación con el Ejemplo 13.4, determinar los parámetros \mathbf{Z} del circuito de la Figura 13.5 a partir de sus parámetros \mathbf{Y} .

Se determinó que los parámetros \mathbf{Y} del circuito eran [ver (14)]

$$\mathbf{Y}_{11} = \frac{s+3}{5s+6} \quad \mathbf{Y}_{12} = \mathbf{Y}_{21} = \frac{-s}{5s+6} \quad \mathbf{Y}_{22} = \frac{s+2}{5s+6}$$

Sustituyendo en (21), donde $\mathbf{D}_{YY} = 1/(5s+6)$, se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_{11} &= s+2 \\ \mathbf{Z}_{12} &= \mathbf{Z}_{21} = s \\ \mathbf{Z}_{22} &= s+3\end{aligned}\quad (22)$$

Los parámetros \mathbf{Z} de (22) son idénticos a los parámetros \mathbf{Z} del circuito de la Figura 13.2. Los dos circuitos son equivalentes en lo que se refiere a los terminales. Esto fue por diseño. La Figura 13.2 es el equivalente en T de la Figura 13.5. La equivalencia entre la Figura 13.2 y la Figura 13.5 se puede verificar directamente aplicando (6) a los parámetros \mathbf{Z} dados en (22) para obtener su circuito equivalente en T .

13.8. PARÁMETROS \mathbf{h}

Algunos cuadripolos o sistemas electrónicos se caracterizan mejor por las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= \mathbf{h}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{12}\mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}_2 &= \mathbf{h}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{22}\mathbf{V}_2 \end{aligned} \quad (23)$$

donde los coeficientes \mathbf{h}_{ij} se denominan *parámetros híbridos* o *parámetros \mathbf{h}* .

EJEMPLO 13.7. Determinar los parámetros \mathbf{h} del circuito de la Figura 13.9.

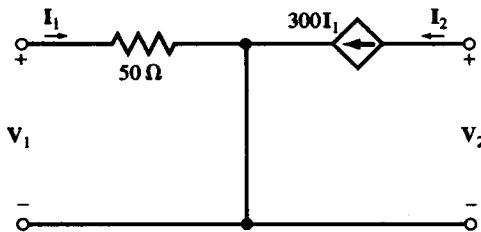


Figura 13.9.

Éste es el modelo sencillo de un transistor bipolar en su región lineal de operación. Se observa que las características del circuito de la Figura 13.9 son

$$\mathbf{V}_1 = 50\mathbf{I}_1 \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_2 = 300\mathbf{I}_1 \quad (24)$$

Comparando (23) y (24) se obtiene

$$\mathbf{h}_{11} = 50 \quad \mathbf{h}_{12} = 0 \quad \mathbf{h}_{21} = 300 \quad \mathbf{h}_{22} = 0 \quad (25)$$

13.9. PARÁMETROS \mathbf{g}

Las ecuaciones características del cuadripolo también se pueden expresar mediante otro grupo de parámetros dados en (26).

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= \mathbf{g}_{11}\mathbf{V}_1 + \mathbf{g}_{12}\mathbf{I}_2 \\ \mathbf{V}_2 &= \mathbf{g}_{21}\mathbf{V}_1 + \mathbf{g}_{22}\mathbf{I}_2 \end{aligned} \quad (26)$$

donde los coeficientes \mathbf{g}_{ij} se denominan *parámetros híbridos inversos* o *parámetros \mathbf{g}* .

EJEMPLO 13.8. Calcular los parámetros \mathbf{g} del circuito de la Figura 13.10.

Éste es el modelo sencillo de un transistor de efecto de campo en su región lineal de operación. Para determinar los parámetros \mathbf{g} , en primer lugar se aplican las leyes de Kirchhoff a los terminales:

En el terminal de entrada: $\mathbf{V}_1 = 10^9\mathbf{I}_1$

En el terminal de salida: $\mathbf{V}_2 = 10(\mathbf{I}_2 - 10^{-3}\mathbf{V}_1)$

$$\mathbf{I}_1 = 10^{-9}\mathbf{V}_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{V}_2 = 10\mathbf{I}_2 - 10^{-2}\mathbf{V}_1 \quad (27)$$

Comparando (27) y (26) se obtiene

$$g_{11} = 10^{-9} \quad g_{12} = 0 \quad g_{21} = -10^{-2} \quad g_{22} = 10 \quad (28)$$

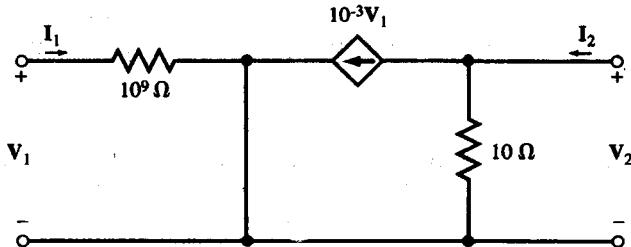


Figura 13.10.

13.10. PARÁMETROS DE TRANSMISIÓN

Los parámetros de transmisión **A**, **B**, **C** y **D** expresan las variables requeridas de la fuente V_1 e I_1 en función de las variables de destino existentes V_2 e I_2 . Se denominan **ABCD** o parámetros T y se definen como

$$\begin{aligned} V_1 &= AV_2 - BI_2 \\ I_1 &= CV_2 - DI_2 \end{aligned} \quad (29)$$

EJEMPLO 13.9. Determinar los parámetros T del circuito de la Figura 13.11, en la que Z_a y Z_b son no nulos.

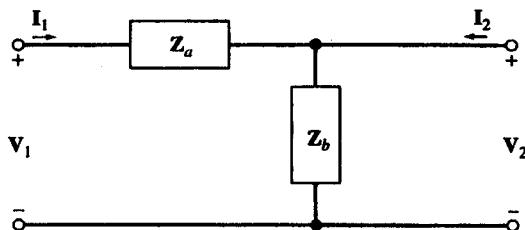


Figura 13.11.

Éste es el modelo simplificado de un tramo de una línea de transmisión. De (29) se tiene

$$\begin{aligned} A &= \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_2=0} = \frac{Z_a + Z_b}{Z_b} = 1 + Z_a Y_b & B &= -\frac{V_1}{I_2} \Big|_{V_2=0} = Z_a \\ C &= \frac{I_1}{V_2} \Big|_{I_2=0} = Y_b & D &= -\frac{I_1}{I_2} \Big|_{V_2=0} = 1 \end{aligned} \quad (30)$$

$$C = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{I_2=0} = Y_b \quad D = -\frac{I_1}{I_2} \Big|_{V_2=0} = 1$$

13.11. INTERCONEXIÓN DE CUADRIPOLOS

Los cuadripolos se pueden conectar entre sí según varias configuraciones, tal como en serie, en paralelo o en cascada, para configurar un nuevo cuadripolo resultante. En cada configuración, algún grupo de parámetros será más útil que otros para describir el circuito.

Conexión serie

La Figura 13.12 muestra una conexión serie de dos cuadripolos **a** y **b** con parámetros de impedancia de circuito abierto Z_a y Z_b , respectivamente. En esta configuración se usan los parámetros Z , ya que se combinan como una conexión serie de dos impedancias. Los parámetros Z de la conexión serie son (ver Problema 13.10):

$$\begin{aligned} Z_{11} &= Z_{11,a} + Z_{11,b} \\ Z_{12} &= Z_{12,a} + Z_{12,b} \\ Z_{21} &= Z_{21,a} + Z_{21,b} \\ Z_{22} &= Z_{22,a} + Z_{22,b} \end{aligned} \quad (31a)$$

o, en forma matricial,

$$[Z] = [Z_a] + [Z_b] \quad (31b)$$

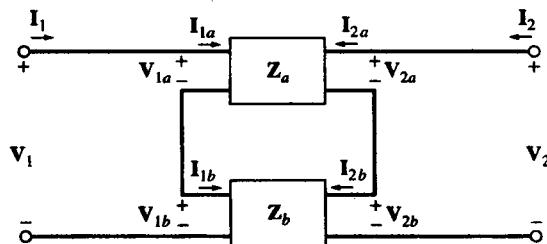


Figura 13.12.

Conexión en paralelo

La Figura 13.13 muestra una conexión en paralelo de dos cuadripolos **a** y **b** con parámetros de admitancia de cortocircuito Y_a e Y_b . En este caso, los parámetros Y son los más convenientes para los cálculos. Los parámetros Y de la conexión paralelo son (véase el Problema 13.11):

$$\begin{aligned} Y_{11} &= Y_{11,a} + Y_{11,b} \\ Y_{12} &= Y_{12,a} + Y_{12,b} \\ Y_{21} &= Y_{21,a} + Y_{21,b} \\ Y_{22} &= Y_{22,a} + Y_{22,b} \end{aligned} \quad (32a)$$

o, en forma matricial,

$$[Y] = [Y_a] + [Y_b] \quad (32b)$$

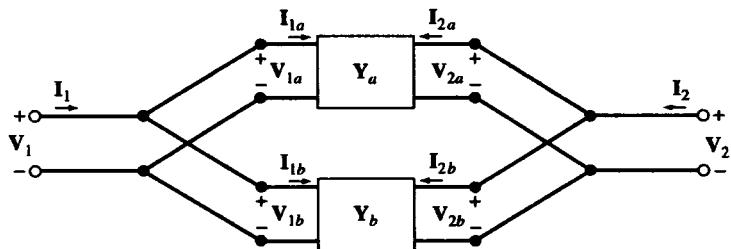


Figura 13.13.

Conexión en cascada

La conexión en cascada de dos cuadripolos **a** y **b** está representada en la Figura 13.14. En este caso los parámetros T son particularmente apropiados. Los parámetros T de la combinación en cascada son:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}_a \mathbf{A}_b + \mathbf{B}_a \mathbf{C}_b \\ \mathbf{B} &= \mathbf{A}_a \mathbf{B}_b + \mathbf{B}_a \mathbf{D}_b \\ \mathbf{C} &= \mathbf{C}_a \mathbf{A}_b + \mathbf{D}_a \mathbf{C}_b \\ \mathbf{D} &= \mathbf{C}_a \mathbf{B}_b + \mathbf{D}_a \mathbf{D}_b \end{aligned} \quad (33a)$$

o, en forma matricial,

$$[\mathbf{T}] = [\mathbf{T}_a] [\mathbf{T}_b] \quad (33b)$$

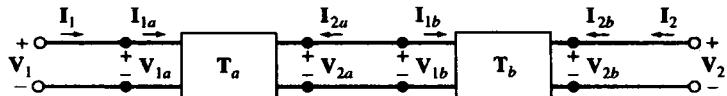


Figura 13.14.

13.12. ELECCIÓN DEL TIPO DE PARÁMETROS

¿Qué tipo de parámetros son apropiados para un cuadripolo o sistema determinado y pueden describirlo mejor? La elección de los parámetros depende de varios factores: 1) Es posible que algunos tipos de parámetros no existan, ya que no pueden ser definidos (ver Ejemplo 13.10). 2) Algunos parámetros son más convenientes para trabajar cuando el circuito está conectado a otros circuitos, según se explicó en la Sección 13.11. Desde este punto de vista, convirtiendo el cuadripolo a su circuito T o π equivalente y aplicando después las técnicas normales de análisis, tales como reducción de elementos y división de corriente, se puede reducir y simplificar enormemente el circuito completo. 3) En algunos circuitos o dispositivos diferentes tipos de parámetros aportan mayor precisión en los cálculos y mejor sensibilidad cuando se usan dentro del circuito interconectado.

EJEMPLO 13.10. Calcular los parámetros **Z** e **Y** del circuito de la Figura 13.15.

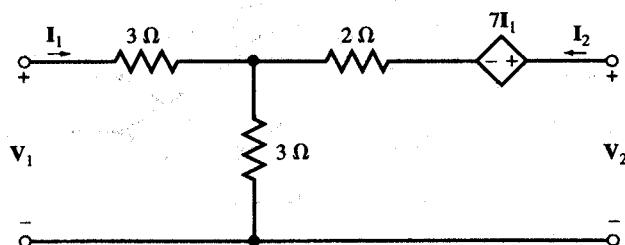


Figura 13.15.

Se aplica la ley de Kirchhoff para las tensiones a los bucles de entrada y de salida. Entonces,

$$\text{Bucle de entrada: } V_1 = 3I_1 + 3(I_1 + I_2)$$

$$\text{Bucle de salida: } V_2 = 7I_1 + 2I_2 + 3(I_1 + I_2)$$

$$V_1 = 6I_1 + 3I_2 \quad \text{y} \quad V_2 = 10I_1 + 5I_2 \quad (34)$$

Comparando (34) con (2) se obtiene

$$Z_{11} = 6 \quad Z_{12} = 3 \quad Z_{21} = 10 \quad Z_{22} = 5$$

Sin embargo, los parámetros **Y** no están definidos, ya que la aplicación del método directo dado por (10) o la conversión a partir de los parámetros **Z** (19) produce $D_{ZZ} = 6(5) - 3(10) = 0$.

13.13. RESUMEN DE RELACIONES ENTRE LOS PARÁMETROS

Los parámetros de los cuadripolos se definen por las siguientes ecuaciones:

Parámetros **Z**

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \\ [V] &= [Z][I] \end{aligned}$$

Parámetros **h**

$$\begin{aligned} V_1 &= h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 &= h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{aligned}$$

Parámetros **T**

$$\begin{aligned} V_1 &= AV_2 - BI_2 \\ I_1 &= CV_2 - DI_2 \end{aligned}$$

Parámetros **Y**

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ I_2 &= Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \\ [I] &= [Y][V] \end{aligned}$$

Parámetros **g**

$$\begin{aligned} I_1 &= g_{11}V_1 + g_{12}I_2 \\ V_2 &= g_{21}V_1 + g_{22}I_2 \end{aligned}$$

La Tabla 13.1 resume la conversión entre los parámetros **Z**, **Y**, **h**, **g** y **T**. Para que la conversión sea posible, el determinante de los parámetros de partida debe ser no nulo.

Tabla 13.1.

Z		Y		h		g		T		
Z	Z ₁₁	Z ₁₂	$\frac{Y_{22}}{D_{YY}}$	$-\frac{Y_{12}}{D_{YY}}$	$\frac{D_{hh}}{h_{22}}$	$\frac{h_{12}}{h_{22}}$	$\frac{1}{g_{11}}$	$-\frac{g_{12}}{g_{11}}$	$\frac{A}{C}$	$\frac{D_{TT}}{C}$
	Z ₂₁	Z ₂₂	$-\frac{Y_{21}}{D_{YY}}$	$\frac{Y_{11}}{D_{YY}}$	$-\frac{h_{21}}{h_{22}}$	$\frac{1}{h_{22}}$	$\frac{g_{21}}{g_{11}}$	$\frac{D_{gg}}{g_{11}}$	$\frac{1}{C}$	$\frac{D}{C}$
Y	$\frac{Z_{22}}{D_{ZZ}}$	$-\frac{Z_{12}}{D_{ZZ}}$	Y ₁₁	Y ₁₂	$\frac{1}{h_{11}}$	$-\frac{h_{12}}{h_{11}}$	$\frac{D_{gg}}{g_{22}}$	$\frac{g_{12}}{g_{22}}$	$\frac{D}{B}$	$-\frac{D_{TT}}{B}$
	$-\frac{Z_{21}}{D_{ZZ}}$	$\frac{Z_{11}}{D_{ZZ}}$	Y ₂₁	Y ₂₂	$\frac{h_{21}}{h_{11}}$	$-\frac{D_{hh}}{h_{11}}$	$-\frac{g_{21}}{g_{22}}$	$\frac{1}{g_{22}}$	$-\frac{1}{B}$	$\frac{A}{B}$
h	$\frac{D_{ZZ}}{Z_{22}}$	$\frac{Z_{12}}{Z_{22}}$	$\frac{1}{Y_{11}}$	$-\frac{Y_{12}}{Y_{11}}$	h ₁₁	h ₁₂	$\frac{g_{22}}{D_{gg}}$	$\frac{g_{12}}{D_{gg}}$	$\frac{B}{D}$	$\frac{D_{TT}}{D}$
	$-\frac{Z_{21}}{Z_{22}}$	$\frac{1}{Z_{22}}$	$\frac{Y_{21}}{Y_{11}}$	$\frac{D_{yy}}{Y_{11}}$	h ₂₁	h ₂₂	$\frac{g_{21}}{D_{gg}}$	$\frac{g_{11}}{D_{gg}}$	$-\frac{1}{D}$	$\frac{C}{D}$
g	$\frac{1}{Z_{11}}$	$-\frac{Z_{12}}{Z_{11}}$	$\frac{D_{YY}}{Y_{22}}$	$\frac{Y_{12}}{Y_{22}}$	$\frac{h_{22}}{D_{hh}}$	$-\frac{h_{12}}{D_{hh}}$	g ₁₁	g ₁₂	$\frac{C}{A}$	$-\frac{D_{TT}}{A}$
	$\frac{Z_{21}}{Z_{11}}$	$\frac{D_{ZZ}}{Z_{11}}$	$-\frac{Y_{21}}{Y_{22}}$	$\frac{1}{Y_{22}}$	$-\frac{h_{21}}{D_{hh}}$	$\frac{h_{11}}{D_{hh}}$	g ₂₁	g ₂₂	$\frac{1}{A}$	$\frac{B}{A}$
T	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}}$	$\frac{D_{ZZ}}{Z_{21}}$	$-\frac{Y_{22}}{Y_{21}}$	$-\frac{1}{Y_{21}}$	$-\frac{D_{hh}}{h_{21}}$	$-\frac{h_{11}}{h_{21}}$	$\frac{1}{g_{21}}$	$\frac{g_{22}}{g_{21}}$	A	B
	$\frac{1}{Z_{21}}$	$\frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$-\frac{D_{YY}}{Y_{21}}$	$-\frac{Y_{11}}{Y_{21}}$	$-\frac{h_{22}}{h_{21}}$	$-\frac{1}{h_{21}}$	$\frac{g_{11}}{g_{21}}$	$\frac{D_{gg}}{g_{21}}$	C	D

$D_{PP} = P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21}$ es el determinante de los parámetros Z, Y, h, g o T.

PROBLEMAS RESUELTOS

13.1. Determinar los parámetros Z del circuito de la Figura 13.16(a).

Z₁₁ y Z₂₁ se obtienen conectando una fuente a la puerta #1 y dejando la puerta #2 abierta [Figura 13.16(b)]. La combinación serie y paralelo de resistencias produce

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} = 8 \quad \text{y} \quad Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} = \frac{1}{3}$$

Análogamente, Z_{22} y Z_{12} se obtienen conectando una fuente a la puerta #2 y dejando la puerta #1 abierta [Figura 13.16(c)].

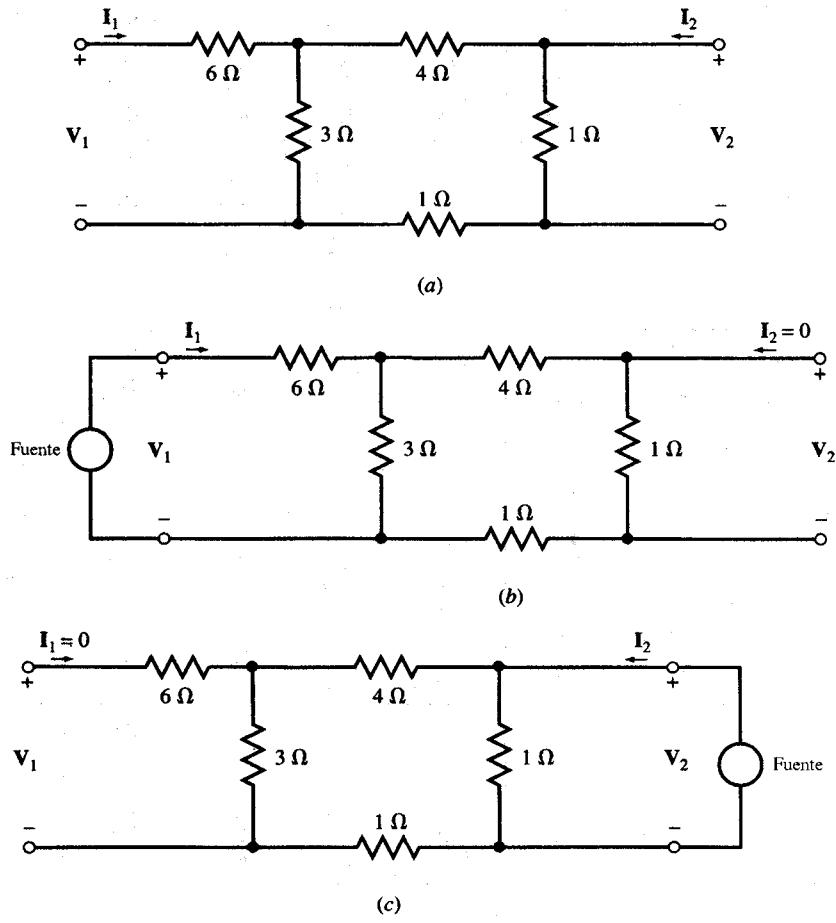


Figura 13.16.

$$Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{8}{9} \quad Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{1}{3}$$

El circuito es recíproco, ya que $Z_{12} = Z_{21}$.

13.2. Los parámetros **Z** de un cuadripolo *C* están definidos por

$$Z_{11} = 2s + 1/s \quad Z_{12} = Z_{21} = 2s \quad Z_{22} = 2s + 4$$

- a) Determinar el circuito equivalente en T de *C*. b) El circuito *C* se conecta a una fuente y a una carga, según se ve en la Figura 13.8. Sustituir *C* por su equivalente en T y después obtener i_1 , i_2 , v_1 y v_2 .

a) Las tres ramas del circuito equivalente en T (Figura 13.4) son

$$\mathbf{Z}_a = \mathbf{Z}_{11} - \mathbf{Z}_{12} = 2s + \frac{1}{s} - 2s = \frac{1}{s}$$

$$\mathbf{Z}_b = \mathbf{Z}_{22} - \mathbf{Z}_{12} = 2s + 4 - 2s = 4$$

$$\mathbf{Z}_c = \mathbf{Z}_{12} = \mathbf{Z}_{21} = 2s$$

b) El equivalente en T de C, junto con sus conexiones de entrada y de salida, se han representado en la Figura 13.17 en el dominio fasorial.

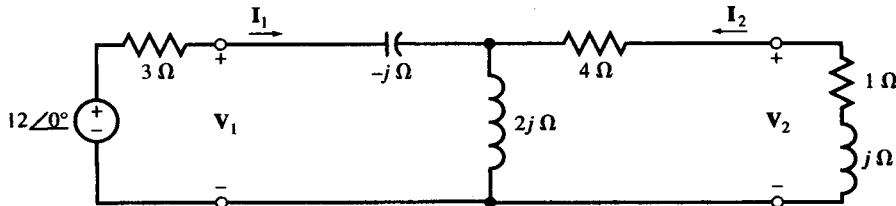


Figura 13.17.

Utilizando las técnicas habituales de análisis, incluyendo la de reducción de elementos y la de división de corriente, para la Figura 13.17, se determinan i_1 , i_2 , v_1 y v_2 .

En el dominio fasorial:

$$\mathbf{I}_1 = 3,29 \angle -10,2^\circ$$

$$\mathbf{I}_2 = 1,13 \angle -131,2^\circ$$

$$\mathbf{V}_1 = 2,88 \angle 37,5^\circ$$

$$\mathbf{V}_2 = 1,6 \angle 93,8^\circ$$

En el dominio del tiempo:

$$i_1 = 3,29 \cos(t - 10,2^\circ)$$

$$i_2 = 1,13 \cos(t - 131,2^\circ)$$

$$v_1 = 2,88 \cos(t + 37,5^\circ)$$

$$v_2 = 1,6 \cos(t + 93,8^\circ)$$

13.3. Determinar los parámetros \mathbf{Z} del cuadripolo de la Figura 13.18.

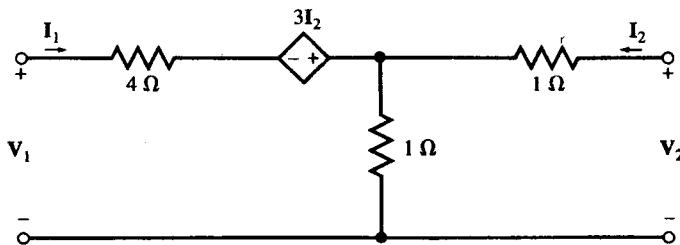


Figura 13.18.

Aplicando la ley de Kirchhoff para las tensiones a las puertas de entrada y de salida se obtiene:

$$\text{Puerta de entrada: } \mathbf{V}_1 = 4\mathbf{I}_1 - 3\mathbf{I}_2 + (\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2) = 5\mathbf{I}_1 - 2\mathbf{I}_2$$

$$\text{Puerta de salida: } \mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_2 + (\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2) = \mathbf{I}_1 + 2\mathbf{I}_2$$

Identificando (2) con estas ecuaciones, $\mathbf{Z}_{11} = 5$, $\mathbf{Z}_{12} = -2$, $\mathbf{Z}_{21} = 1$ y $\mathbf{Z}_{22} = 2$.

- 13.4. Determinar los parámetros **Z** del cuadripolo de la Figura 13.19 y comparar los resultados con los del Problema 13.3.

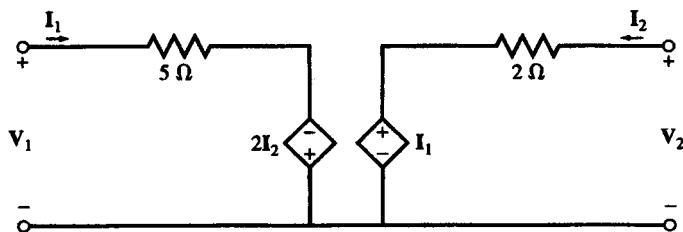


Figura 13.19.

La ley de Kirchhoff para las tensiones da

$$V_1 = 5I_1 - 2I_2 \quad \text{y} \quad V_2 = I_1 + 2I_2$$

Estas ecuaciones son idénticas a las características obtenidas para el circuito de la Figura 13.18. Por tanto, los circuitos son equivalentes.

- 13.5. Determinar los parámetros **Y** de la Figura 13.19 usando sus parámetros **Z**.

Del Problema 13.4,

$$Z_{11} = 5, Z_{12} = -2, Z_{21} = 1, Z_{22} = 2$$

Como $D_{ZZ} = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21} = (5)(2) - (-2)(1) = 12$,

$$Y_{11} = \frac{Z_{22}}{D_{ZZ}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \quad Y_{12} = \frac{-Z_{12}}{D_{ZZ}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$Y_{21} = \frac{-Z_{21}}{D_{ZZ}} = \frac{-1}{12} \quad Y_{22} = \frac{Z_{11}}{D_{ZZ}} = \frac{5}{12}$$

- 13.6. Determinar los parámetros **Y** del cuadripolo de la Figura 13.20 y demostrar que los circuitos de las Figuras 13.19 y 13.20 son equivalentes.

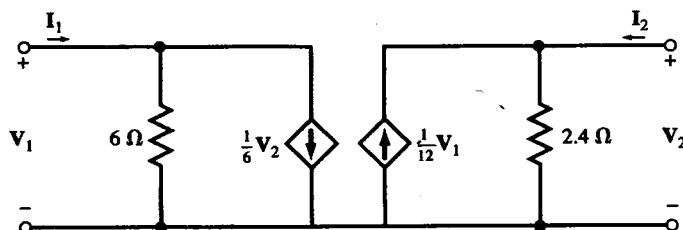


Figura 13.20.

Se aplica la ley de Kirchhoff para las intensidades y así obtener las ecuaciones características del circuito y los parámetros \mathbf{Y} . Por tanto,

Puerta de entrada:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{6} + \frac{\mathbf{V}_2}{6}$$

Puerta de salida:

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}_2}{2,4} - \frac{\mathbf{V}_1}{12}$$

y

$$\mathbf{Y}_{11} = \frac{1}{6}$$

$$\mathbf{Y}_{12} = \frac{1}{6}$$

$$\mathbf{Y}_{21} = -\frac{1}{12}$$

$$\mathbf{Y}_{22} = \frac{1}{2,4} = \frac{5}{12}$$

que son idénticos a los parámetros obtenidos en el Problema 3.5 de la Figura 13.19. Por tanto, los dos circuitos son equivalentes.

- 13.7. Aplicar las ecuaciones de cortocircuito (10) para determinar los parámetros \mathbf{Y} del cuadripolo de la Figura 13.21.

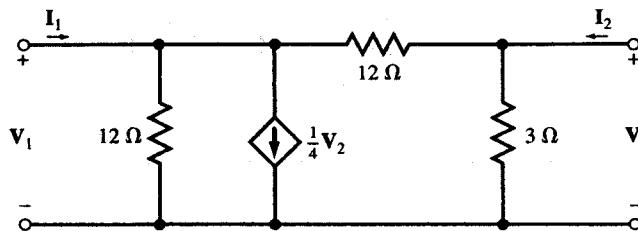


Figura 13.21.

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{Y}_{11} \mathbf{V}_1 \Big|_{\mathbf{V}_2=0} = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12} \right) \mathbf{V}_1 \quad o \quad \mathbf{Y}_{11} = \frac{1}{6}$$

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{Y}_{12} \mathbf{V}_2 \Big|_{\mathbf{V}_1=0} = \frac{\mathbf{V}_2}{4} - \frac{\mathbf{V}_2}{12} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12} \right) \mathbf{V}_2 \quad o \quad \mathbf{Y}_{12} = \frac{1}{6}$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{Y}_{21} \mathbf{V}_1 \Big|_{\mathbf{V}_2=0} = -\frac{\mathbf{V}_1}{12} \quad o \quad \mathbf{Y}_{21} = -\frac{1}{12}$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{Y}_{22} \mathbf{V}_2 \Big|_{\mathbf{V}_1=0} = \frac{\mathbf{V}_2}{3} + \frac{\mathbf{V}_2}{12} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12} \right) \mathbf{V}_2 \quad o \quad \mathbf{Y}_{22} = \frac{5}{12}$$

- 13.8. Aplicar la ley de Kirchhoff para las intensidades a los nudos del circuito de la Figura 13.21 para obtener sus ecuaciones características y sus parámetros \mathbf{Y} . Demostrar que los cuadripolos de las Figuras 13.18 y 13.21 son equivalentes.

Nudo de entrada: $I_1 = \frac{V_1}{12} + \frac{V_1 - V_2}{12} + \frac{V_2}{4}$

Nudo de salida: $I_2 = \frac{V_2}{3} + \frac{V_2 - V_1}{12}$

$$I_1 = \frac{1}{6} V_1 + \frac{1}{6} V_2 \quad I_2 = -\frac{1}{12} V_1 + \frac{5}{12} V_2$$

Los parámetros \mathbf{Y} , según se observa en las ecuaciones características anteriores, son idénticos a los de los circuitos de las Figuras 13.18, 13.19 y 13.20. Por tanto, los cuatro circuitos son equivalentes.

- 13.9.** Los parámetros \mathbf{Z} del cuadripolo C de la Figura 13.22(a) son $Z_{11} = 4s$, $Z_{12} = Z_{21} = 3s$ y $Z_{22} = 9s$. a) Sustituir C por su equivalente en T. b) Usar el apartado a) para determinar la corriente de entrada i_1 cuando $v_s = \cos 1000t$ (V).

- a) El circuito es recíproco. Entonces, su equivalente en T existe. Sus elementos se han determinado mediante (6) y se han representado en el circuito de la Figura 13.22(b).

$$Z_a = Z_{11} - Z_{12} = 4s - 3s = s$$

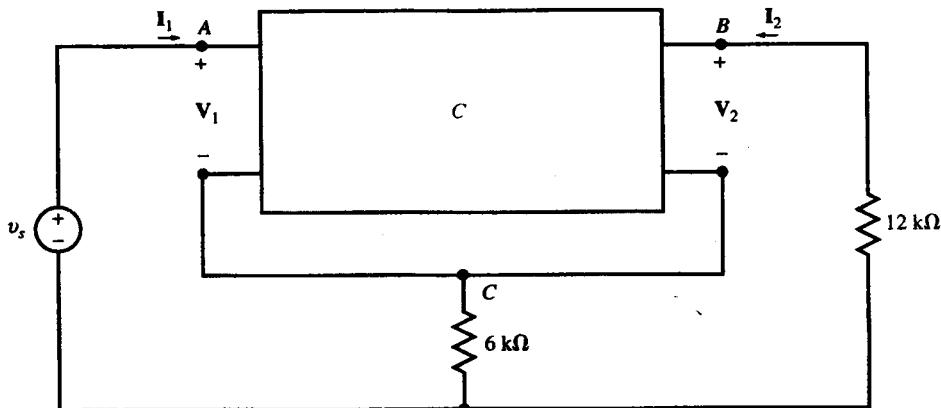
$$Z_b = Z_{22} - Z_{21} = 9s - 3s = 6s$$

$$Z_c = Z_{12} = Z_{21} = 3s$$

- b) Se combinan repetidamente los elementos en serie y en paralelo de la Figura 13.22(b), con las resistencias expresadas en $k\Omega$ y s en $k\text{rad/s}$, para determinar Z_{en} en $k\Omega$, como se explica a continuación.

$$Z_{en}(s) = V_s/I_1 = s + \frac{(3s + 6)(6s + 12)}{9s + 18} = 3s + 4 \quad \text{o} \quad Z_{en}(j) = 3j + 4 = 5\sqrt{36,9^\circ} \text{ k}\Omega$$

e $i_1 = 0,2 \cos(1000t - 36,9^\circ)$ (mA).



(a)

Figura 13.22 (continúa).

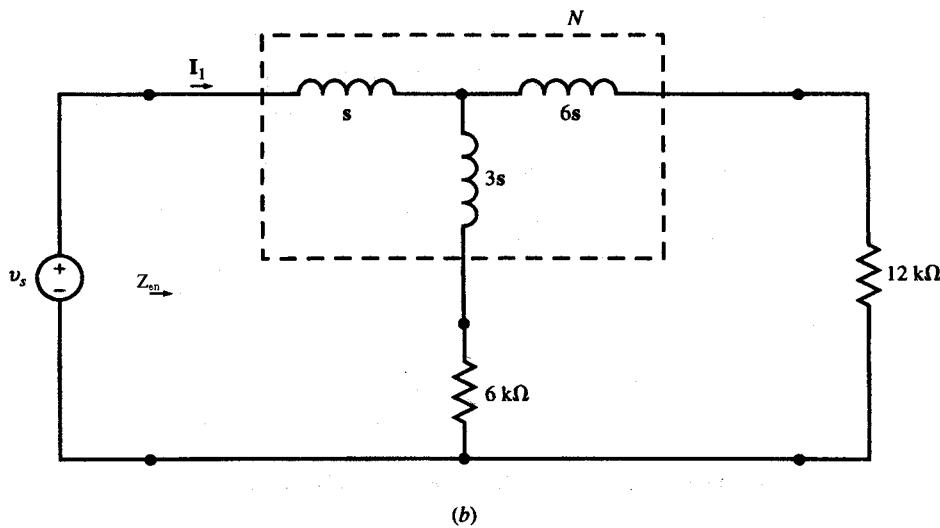


Figura 13.22 (continuación).

- 13.10.** Dos cuadripolos **a** y **b**, con impedancias de circuito abierto Z_a y Z_b , se conectan en serie (ver Figura 13.12). Obtener las ecuaciones (31a) de los parámetros Z .

Del circuito **a** se tiene

$$\begin{aligned} V_{1a} &= Z_{11,a}I_{1a} + Z_{12,a}I_{2a} \\ V_{2a} &= Z_{21,a}I_{1a} + Z_{22,a}I_{2a} \end{aligned}$$

Del circuito **b** se tiene

$$\begin{aligned} V_{1b} &= Z_{11,b}I_{1b} + Z_{12,b}I_{2b} \\ V_{2b} &= Z_{21,b}I_{1b} + Z_{22,b}I_{2b} \end{aligned}$$

De la conexión entre **a** y **b** se tiene

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{1a} = I_{1b} & V_1 &= V_{1a} + V_{1b} \\ I_2 &= I_{2a} = I_{2b} & V_2 &= V_{2a} + V_{2b} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} V_1 &= (Z_{11,a} + Z_{11,b})I_1 + (Z_{12,a} + Z_{12,b})I_2 \\ V_2 &= (Z_{21,a} + Z_{21,b})I_1 + (Z_{22,a} + Z_{22,b})I_2 \end{aligned}$$

de donde se obtienen las ecuaciones (31a) de los parámetros Z .

- 13.11.** Dos cuadripolos **a** y **b**, con admitancias de cortocircuito Y_a e Y_b , se conectan en paralelo (ver Figura 13.13). Obtener las ecuaciones (32a) de los parámetros Y .

Del circuito **a** se tiene

$$\begin{aligned} I_{1a} &= Y_{11,a}V_{1a} + Y_{12,a}V_{2a} \\ I_{2a} &= Y_{21,a}V_{1a} + Y_{22,a}V_{2a} \end{aligned}$$

Del circuito **b** se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{1b} &= \mathbf{Y}_{11,b} \mathbf{V}_{1b} + \mathbf{Y}_{12,b} \mathbf{V}_{2b} \\ \mathbf{I}_{2b} &= \mathbf{Y}_{21,b} \mathbf{V}_{1b} + \mathbf{Y}_{22,b} \mathbf{V}_{2b} \end{aligned}$$

De la conexión entre **a** y **b** se tiene

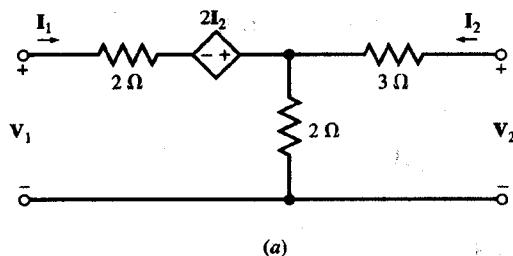
$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= \mathbf{V}_{1a} = \mathbf{V}_{1b} & \mathbf{I}_1 &= \mathbf{I}_{1a} + \mathbf{I}_{1b} \\ \mathbf{V}_2 &= \mathbf{V}_{2a} = \mathbf{V}_{2b} & \mathbf{I}_2 &= \mathbf{I}_{2a} + \mathbf{I}_{2b} \end{aligned}$$

Entonces,

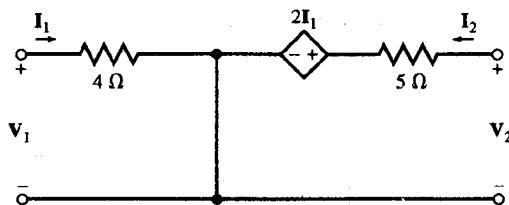
$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= (\mathbf{Y}_{11,a} + \mathbf{Y}_{11,b}) \mathbf{V}_1 + (\mathbf{Y}_{12,a} + \mathbf{Y}_{12,b}) \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}_2 &= (\mathbf{Y}_{21,a} + \mathbf{Y}_{21,b}) \mathbf{V}_1 + (\mathbf{Y}_{22,a} + \mathbf{Y}_{22,b}) \mathbf{V}_2 \end{aligned}$$

de donde se obtienen las ecuaciones (32a) de los parámetros \mathbf{Y} .

- 13.12.** Determinar: *a)* los parámetros \mathbf{Z} del circuito de la Figura 13.23(*a*) y *b)* un modelo equivalente con dos resistencias positivas y una fuente de tensión dependiente.



(a)



(b)

Figura 13.23.

- a)* Aplicando la ley de Kirchhoff de las tensiones alrededor de los bucles de entrada y salida se obtienen, respectivamente,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= 2\mathbf{I}_1 - 2\mathbf{I}_2 + 2(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2) = 4\mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 &= 3\mathbf{I}_2 + 2(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2) = 2\mathbf{I}_1 + 5\mathbf{I}_2 \end{aligned}$$

Los parámetros \mathbf{Z} son $\mathbf{Z}_{11} = 4$, $\mathbf{Z}_{12} = 0$, $\mathbf{Z}_{21} = 2$ y $\mathbf{Z}_{22} = 5$.

- b)* El circuito de la Figura 13.23(*b*), con dos resistencias y una fuente de tensión, tiene los mismos parámetros \mathbf{Z} que el circuito de la Figura 13.23(*a*). Esto se puede verificar aplicando la ley de Kirchhoff para las tensiones a sus bucles de entrada y de salida.

- 13.13.** *a)* Obtener los parámetros \mathbf{Y} del circuito de la Figura 13.23(*a*) a partir de sus parámetros \mathbf{Z} . *b)* Determinar un modelo equivalente con dos resistencias positivas y una fuente de intensidad dependiente.

- a) Del Problema 13.12, $Z_{11} = 4$, $Z_{12} = 0$, $Z_{21} = 2$, $Z_{22} = 5$ y, por tanto, $D_{ZZ} = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21} = 20$. Por tanto,

$$Y_{11} = \frac{Z_{22}}{D_{ZZ}} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \quad Y_{12} = \frac{-Z_{12}}{D_{ZZ}} = 0$$

$$Y_{21} = \frac{-Z_{21}}{D_{ZZ}} = \frac{-2}{20} = -\frac{1}{10} \quad Y_{22} = \frac{Z_{11}}{D_{ZZ}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

- b) El circuito de la Figura 13.24, con dos resistencias y una fuente de intensidad, tiene los mismos parámetros Y que el de la Figura 13.23(a). Esto se puede verificar aplicando la ley de Kirchhoff para las intensidades a los nudos de entrada y de salida.

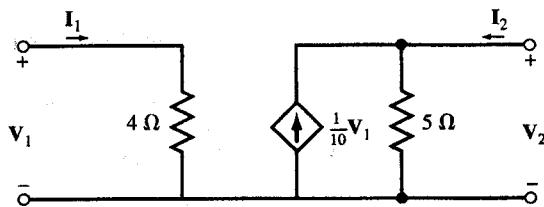


Figura 13.24.

- 13.14. En el circuito de la Figura 13.23(b), convertir la fuente de tensión y sus resistencias en serie a su equivalente Norton y demostrar que el circuito resultante es idéntico al de la Figura 13.24.

La fuente de intensidad del equivalente Norton es $I_N = 2I_1/5 = 0.4I_1$. Pero $I_1 = V_1/4$. Entonces, $I_N = 0.4I_1 = 0.1V_1$. La resistencia de 5Ω se coloca después en paralelo con I_N . El circuito, representado en la Figura 13.25, es el mismo que el de la Figura 13.24.

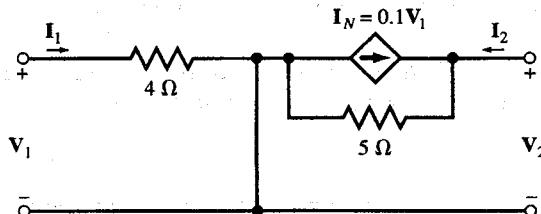


Figura 13.25.

- 13.15. Se conocen los parámetros h de un cuadripolo. Demostrar que el circuito se puede modelizar por el de la Figura 13.26, donde h_{11} es una impedancia, h_{12} es la amplificación de la tensión, h_{21} es la amplificación de la corriente y h_{22} es una admitancia.

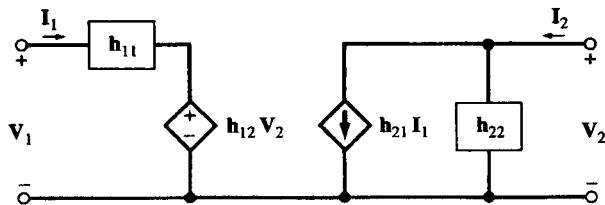


Figura 13.26.

Aplicando la ley de Kirchhoff para las tensiones al bucle de entrada se obtiene

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2$$

Aplicando la ley de Kirchhoff para las intensidades al nudo de salida se obtiene

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2$$

Estos resultados están de acuerdo con la definición de los parámetros **h** dada en (23).

- 13.16.** Determinar los parámetros **h** del circuito de la Figura 13.25.

Comparando el circuito de la Figura 13.25 con el de la Figura 13.26, se obtiene

$$h_{11} = 4 \Omega, \quad h_{12} = 0, \quad h_{21} = -0,4 \quad h_{22} = 1/5 = 0,2 \Omega^{-1}$$

- 13.17.** Determinar los parámetros **h** del circuito de la Figura 13.25 a partir de sus parámetros **Z** y comparar con los resultados del Problema 13.26.

Se toman los valores de los parámetros **Z** y **D_{zz}** del Problema 13.13. Se usa la Tabla 13.1 para convertir los parámetros **Z** en los parámetros **h** del circuito. Entonces,

$$h_{11} = \frac{D_{zz}}{Z_{22}} = \frac{20}{5} = 4 \quad h_{12} = \frac{Z_{12}}{Z_{22}} = 0$$

$$h_{21} = \frac{-Z_{21}}{Z_{22}} = \frac{-2}{5} = -0,4 \quad h_{22} = \frac{1}{Z_{22}} = \frac{1}{5} = 0,2$$

Los resultados anteriores están de acuerdo con los resultados del Problema 13.16.

- 13.18.** En la Figura 13.27 se ha representado el modelo simplificado de un transistor bipolar para pequeñas señales. Determinar sus parámetros **h**.

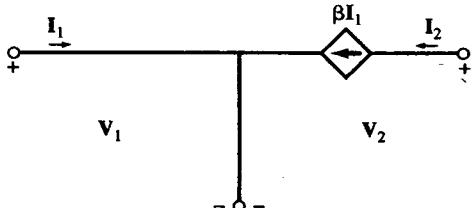


Figura 13.27.

Las ecuaciones de los terminales son $V_1 = 0$ e $I_2 = \beta I_1$. Comparando esas ecuaciones con (23) se concluye que $h_{11} = h_{12} = h_{22} = 0$ y $h_{21} = \beta$.

- 13.19.** Los parámetros h de un cuadripolo H están definidos por

$$h_{11} = 500 \Omega \quad h_{12} = 10^{-4} \quad h_{21} = 100 \quad h_{22} = 2(10^{-6}) \Omega^{-1}$$

Dibujar un circuito que modelice el dispositivo compuesto por dos resistencias y dos fuentes de tensión dependientes, incluyendo los valores de cada elemento.

Por comparación con la Figura 13.26, el modelo es el de la Figura 13.28.

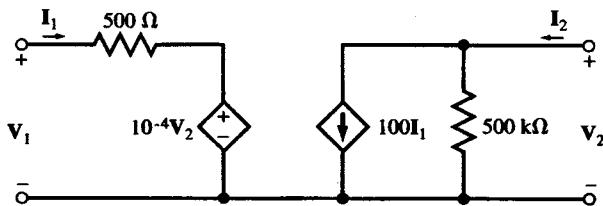


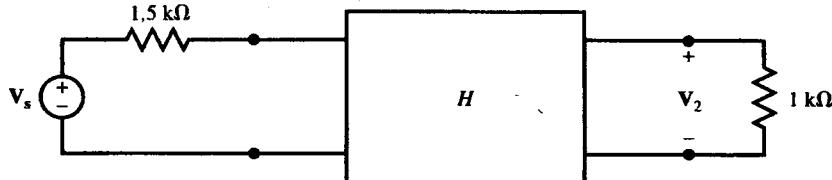
Figura 13.28.

- 13.20.** El dispositivo H del Problema 13.19 está colocado en el circuito de la Figura 13.29(a). Sustituir H por su modelo de la Figura 13.28 y determinar V_2/V_s .

El circuito de la Figura 13.29(b) contiene el modelo. Con una buena aproximación, se puede reducir al de la Figura 13.29(c), de la que

$$I_1 = V_s/2000 \quad V_2 = -1000(100I_1) = -1000(100V_s/2000) = -50V_s$$

Por tanto, $V_2/V_s = -50$.



(a)

Figura 13.29 (continúa).

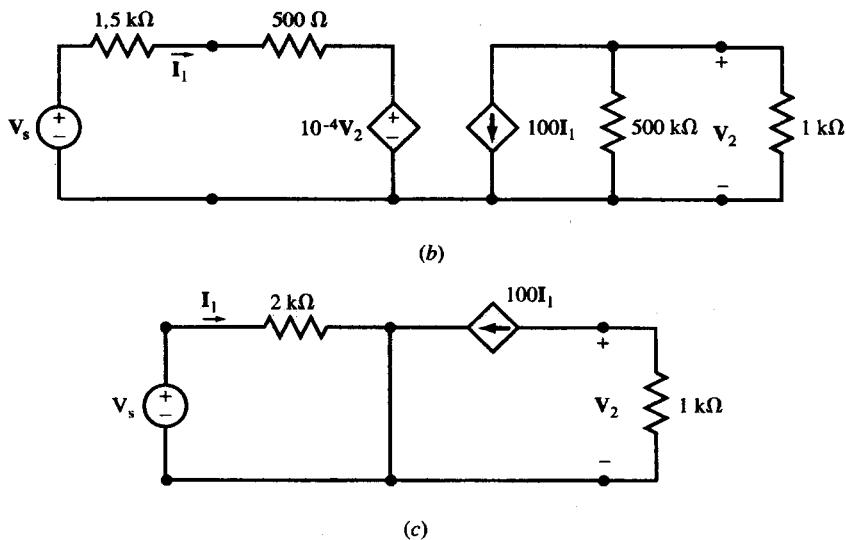


Figura 13.29 (continuación).

- 13.21. Una carga Z_L se conecta a la salida de un cuadripolo C (Figura 13.30), cuyas ecuaciones características están dadas por $V_1 = (1/N)V_2$ e $I_1 = -NI_2$. Determinar:
a) los parámetros T de C y b) la impedancia de entrada $Z_{en} = V_1/I_1$.

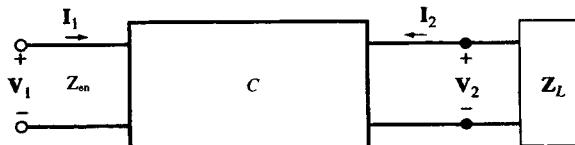


Figura 13.30.

- a) Los parámetros T están definidos por [ver (29)]

$$\begin{aligned} V_1 &= AV_2 - BI_2 \\ I_1 &= CV_2 - DI_2 \end{aligned}$$

Las ecuaciones características del dispositivo son

$$\begin{aligned} V_1 &= (1/C)V_2 \\ I_1 &= -CI_2 \end{aligned}$$

Comparando los dos pares de ecuaciones se obtiene $A = 1/C$, $B = 0$, $C = 0$ y $D = C$.

- b) Se dispone de tres ecuaciones que relacionan V_1 , I_1 , V_2 e I_2 : dos ecuaciones son las características del dispositivo y la tercera proviene de la conexión de la carga

$$V_2 = -Z_L I_2$$

Eliminando V_2 e I_2 en las tres ecuaciones se obtiene:

$$V_1 = Z_L I_1 / C^2 \quad \text{de donde} \quad Z_{en} = V_1 / I_1 = Z_L / C^2$$

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

- 13.22.** Los parámetros Z del cuadripolo C de la Figura 13.22(a) son $Z_{11} = 4s$, $Z_{12} = Z_{21} = 3s$ y $Z_{22} = 9s$. Determinar la corriente de entrada i_1 para $v_s = \cos 1000t$ (V), usando las ecuaciones características con las impedancias en circuito abierto de C , junto con las ecuaciones de la aplicación de la ley de Kirchhoff para las intensidades en los nudos A , B y C .

Solución: $i_1 = 0,2 \cos (1000t - 36,9^\circ)$ (A).

- 13.23.** Expresar el criterio de reciprocidad en función de los parámetros h , g y T .

Solución: $h_{12} + h_{21} = 0$, $g_{12} + g_{21} = 0$ y $AD - BC = 1$.

- 13.24.** Determinar los parámetros T de un cuadripolo cuyos parámetros Z son $Z_{11} = s$, $Z_{12} = Z_{21} = 10s$ y $Z_{22} = 100s$.

Solución: $A = 0,1$, $B = 0$, $C = 10^{-1}/s$ y $D = 10$.

- 13.25.** Determinar los parámetros T de un cuadripolo cuyos parámetros Z son $Z_{11} = 10^6s$, $Z_{12} = Z_{21} = 10^7s$ y $Z_{22} = 10^8s$. Comparar con los resultados del Problema 13.21.

Solución: $A = 0,1$, $B = 0$, $C = 10^{-7}/s$ y $D = 10$. Para altas frecuencias, el dispositivo es similar al del Problema 13.21, con $C = 10$.

- 13.26.** Los parámetros Z de un cuadripolo C son $Z_{11} = ks$, $Z_{12} = Z_{21} = 10ks$ y $Z_{22} = 100ks$. Se conecta en la puerta de salida una resistencia de $1\ \Omega$ (Figura 13.30). a) Calcular la impedancia de entrada $Z_{en} = V_1/I_1$ y construir su circuito equivalente. b) Obtener los valores de los elementos para $k = 1$ y 10^6 .

Solución: a) $Z_{en} = \frac{ks}{1 + 100ks} = \frac{1}{100 + 1/ks}$

El circuito equivalente es un circuito paralelo RL con $R = 10^{-2}\ \Omega$ y $L = 1\ \text{kH}$.

b) Para $k = 1$, $R = \frac{1}{100}\ \Omega$ y $L = 1\ \text{H}$. Para $k = 10^6$, $R = \frac{1}{100}\ \Omega$ y $L = 10^6\ \text{H}$.

- 13.27.** El dispositivo C de la Figura 13.30 está definido por los siguientes parámetros Z : $Z_{22} = C^2 Z_{11}$ y $Z_{12} = Z_{21} = \sqrt{Z_{11}Z_{22}} = CZ_{11}$. Determinar $Z_{en} = V_1/I_1$ cuando se conecta a su terminal de salida una carga Z_L . Demostrar que si $Z_{11} \gg Z_L/C^2$ se obtiene una multiplicación de impedancias tal que $Z_{en} = Z_L/C^2$.

Solución: $Z_{en} = \frac{Z_L}{C^2 + Z_L/Z_{11}}$. Para $Z_L \ll C^2 Z_{11}$, $Z_{en} = Z_L/C^2$.

- 13.28.** Determinar los parámetros Z del circuito de la Figura 13.31. Sug.: Usar la regla de la conexión en serie.

Solución: $Z_{11} = Z_{22} = s + 3 + 1/s$, $Z_{12} = Z_{21} = s + 1$.

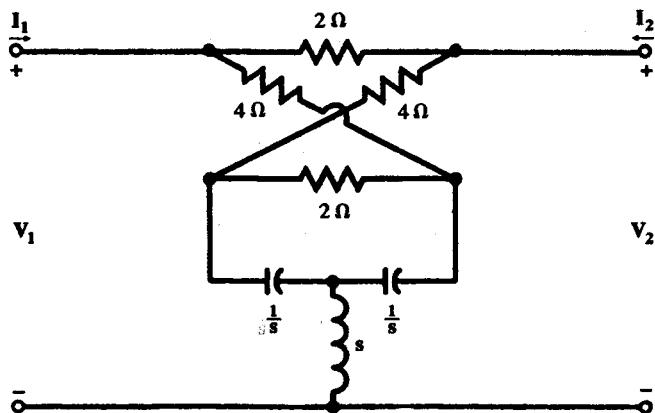
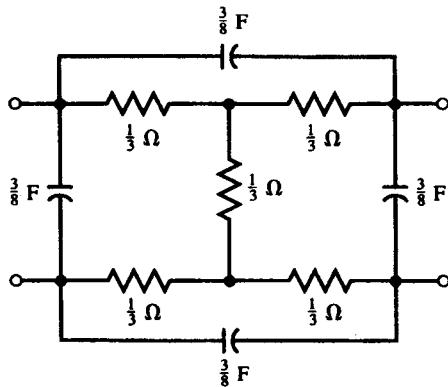


Figura 13.31.

- 13.29. Determinar los parámetros Y del circuito de la Figura 13.32. Sug.: Usar la regla de la conexión en paralelo.

Solución: $Y_{11} = Y_{22} = 9(s+2)/16$, $Y_{12} = Y_{21} = -3(s+2)/16$.



Figurra 13.32.

- 13.30. Dos cuadripolos **a** y **b** con parámetros de transmisión T_a y T_b se conectan en cascada (Figura 13.14). Sabiendo que $I_{2a} = -I_{1b}$ y $V_{2a} = V_{1b}$, determinar los parámetros T del cuadripolo resultante.

Solución: $A = A_a A_b + B_b C_a$, $B = A_a B_b + B_a D_b$, $C = C_a A_b + D_a C_b$, $D = C_a B_b + D_a D_b$.

- 13.31. Determinar los parámetros T y los Z del circuito de la Figura 13.33. Las impedancias de los condensadores son datos. Sug.: Usar la regla de la conexión en cascada.

Solución: $A = j5 - 4$, $B = j4 + 2$, $C = j2 - 4$ y $D = j3$; $Z_{11} = 1,3 - j0,6$, $Z_{22} = 0,3 - j0,6$, $Z_{12} = Z_{21} = -0,2 - j0,1$.

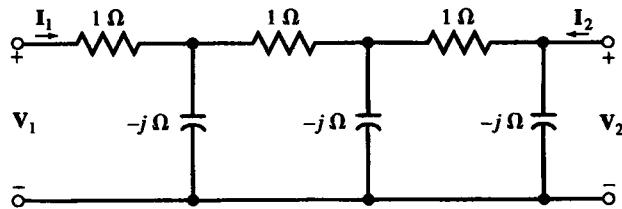


Figura 13.33.

- 13.32. Determinar los parámetros Z del cuadripolo de la Figura 13.34.

Solución: $Z_{11} = Z_{22} = \frac{1}{2}(Z_b + Z_a)$, $Z_{12} = Z_{21} = \frac{1}{2}(Z_b - Z_a)$.

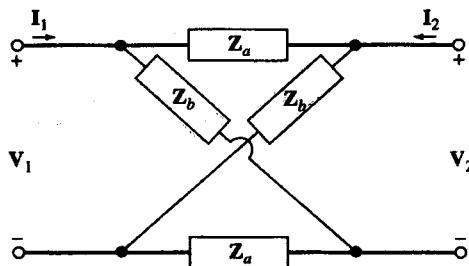


Figura 13.34.

- 13.33. Determinar los parámetros Z del cuadripolo de la Figura 13.35.

Solución: $Z_{11} = Z_{22} = \frac{1}{2} \frac{Z_b(2Z_a + Z_b)}{Z_a + Z_b}$, $Z_{12} = Z_{21} = \frac{1}{2} \frac{Z_b^2}{Z_a + Z_b}$

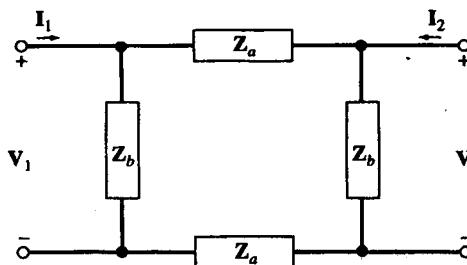


Figura 13.35.

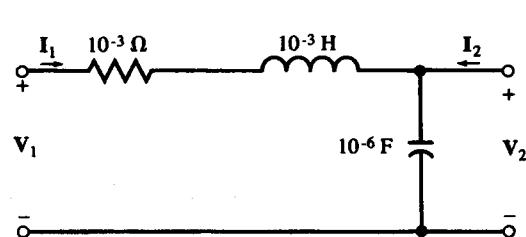


Figura 13.36.

- 13.34. Determinar los parámetros T del cuadripolo de la Figura 13.36, como función de ω , y particularizar sus valores para $\omega = 1, 10^3$ y 10^6 rad/s.

Solución: $A = 1 - 10^{-9}\omega^2 + j10^{-9}\omega$, $B = 10^{-3}(1 + j\omega)$, $C = j10^{-6}\omega$ y $D = 1$. Para $\omega = 1$ rad/s, $A = 1$, $B = 10^{-3}(1 + j)$, $C = j10^{-6}$ y $D = 1$. Para $\omega = 10^3$ rad/s, $A \approx 1$, $B \approx j$, $C = j10^{-3}$ y $D = 1$. Para $\omega = 10^6$ rad/s, $A \approx -10^3$, $B \approx j10^3$, $C = j$ y $D = 1$.

- 13.35. Un cuadripolo contiene solamente resistencias, condensadores y bobinas. Con la puerta #2 abierta [Figura 13.37(a)], una tensión escalón unidad $v_1 = u(t)$ produce $i_1 = e^{-t}u(t)$ (μA) y $v_2 = (1 - e^{-t})u(t)$ (V). Con la puerta #2 cortocircuitada [Figura 13.37(b)], una tensión escalón unidad $v_1 = u(t)$ produce una intensidad $i_1 = 0,5(1 + e^{-2t})u(t)$ (μA). Determinar i_2 y el circuito T equivalente.

Solución: $i_2 = 0,5(-1 + e^{-2t})u(t)$ [ver Figura 13.37(c)].

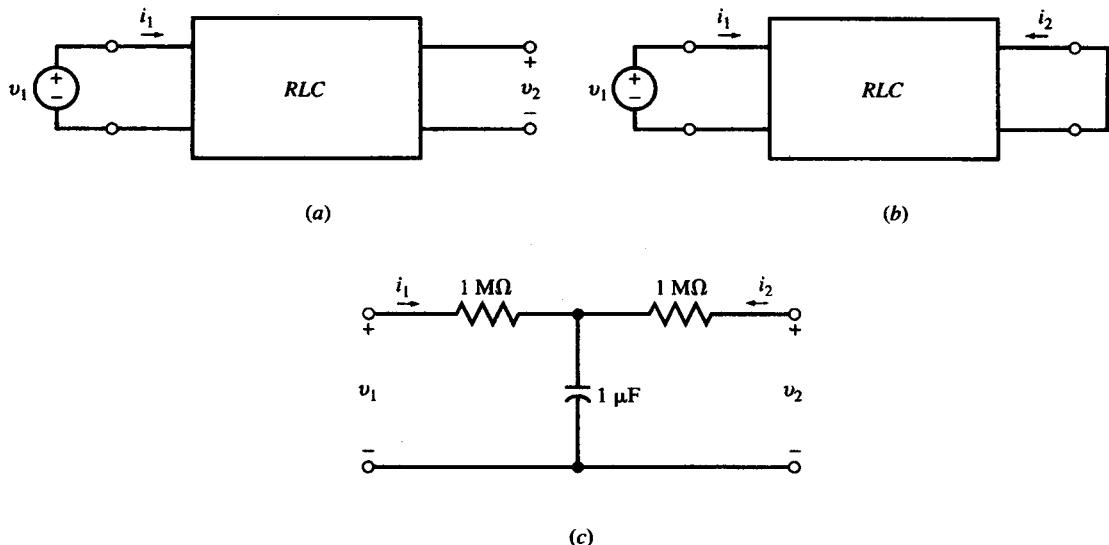


Figura 13.37.

- 13.36. El cuadripolo C de la Figura 13.38 está definido por $Z_{11} = 2$, $Z_{12} = Z_{21} = 1$ y $Z_{22} = 4$. Determinar I_1 , I_2 e I_3 .

Solución: $I_1 = 24 \text{ A}$, $I_2 = 1,5 \text{ A}$ e $I_3 = 6,5 \text{ A}$.

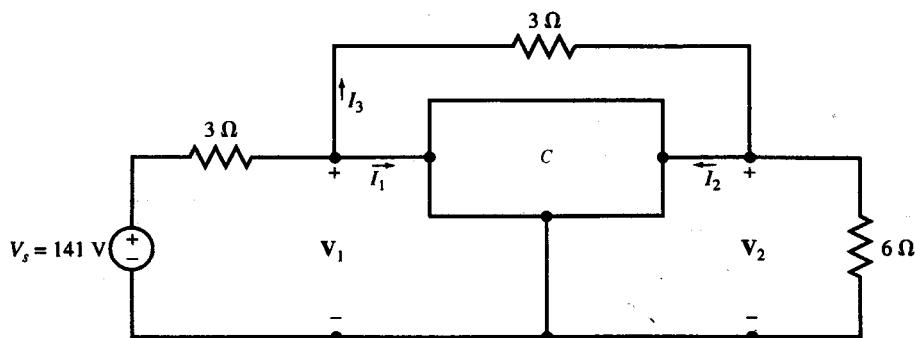


Figura 13.38.

CAPÍTULO 14

Inductancia mutua y transformadores

14.1. INDUCTANCIA MUTUA

El flujo magnético total λ provocado por una bobina en un inductor lineal es proporcional a la corriente que pasa por ella; es decir, $\lambda = Li$ (ver Figura 14.1). Según la ley de Faraday, la tensión entre los extremos del inductor es igual a la derivada respecto al tiempo del flujo total; es decir,

$$v = \frac{d\lambda}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

El coeficiente L , en H (Henrios) se llama *coeficiente de autoinducción* de la bobina.

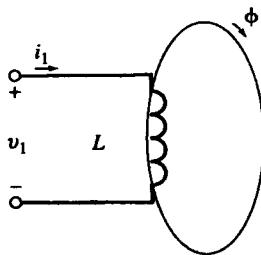


Figura 14.1.

Dos conductores de diferentes circuitos muy próximos uno de otro estarán acoplados magnéticamente dependiendo de su proximidad física y de la relación de las corrientes que los atraviesan. Este acoplamiento se incrementa cuando una bobina está arrollada sobre la otra. Si, además, un núcleo de hierro dulce suministra un camino para el flujo magnético, el acoplamiento se maximiza. (Si bien ha de tenerse en cuenta que la presencia del hierro puede introducir una no linealidad en el circuito.)

Para encontrar la relación entre la tensión y la corriente en los extremos de las dos bobinas acopladas mostradas en la Figura 14.2, se analiza el modo en que las corrientes i_1 e i_2 establecen el flujo magnético mutuo en cada bobina, y se comprueba que el efecto de acoplamiento mutuo entre las dos bobinas es simétrico:

$$\lambda_1 = L_1 i_1 + M i_2 \quad \lambda_2 = M i_1 + L_2 i_2 \quad (1)$$

donde M es la *inductancia mutua* (coeficiente de inducción mutua) (en H).

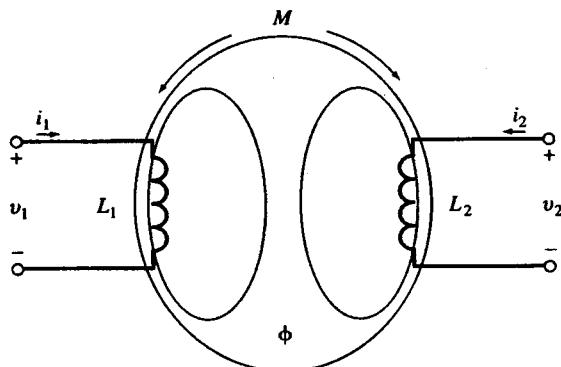


Figura 14.2.

Las tensiones entre los terminales son las derivadas del tiempo de los flujos mutuos.

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \frac{d\lambda_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2(t) &= \frac{d\lambda_2}{dt} = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \quad (2)$$

Las bobinas acopladas forman un tipo especial de circuito con dos entradas, estudiado en el Capítulo 13. Las características del terminal (2) pueden expresarse también en el dominio de la frecuencia o en el dominio s como sigue.

Dominio de la frecuencia

$$\begin{aligned} V_1 &= j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \\ V_2 &= j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 \end{aligned} \quad (3)$$

Dominio s

$$\begin{aligned} V_1 &= L_1 s I_1 + M s I_2 \\ V_2 &= M s I_1 + L_2 s I_2 \end{aligned} \quad (4)$$

El coeficiente de inducción mutua M se verá en la Sección 14.2. Las ecuaciones del dominio de la frecuencia (3) se aplican en estados sinusoidales estacionarios, mientras que las ecuaciones en el dominio s (4) se aplican a fuentes exponenciales de frecuencia compleja s.

EJEMPLO 14.1. Dado $L_1 = 0,1 \text{ H}$, $L_2 = 0,5 \text{ H}$ e $i_1(t) = i_2(t) = \sin \omega t$ en las bobinas acopladas de la Figura 14.2, determinar $v_1(t)$ y $v_2(t)$ para: a) $M = 0,01 \text{ H}$, b) $M = 0,2 \text{ H}$ y c) $M = -0,2 \text{ H}$.

Desde (2),

- a) $v_1(t) = 0,1\omega \cos \omega t + 0,01\omega \cos \omega t = 0,11\omega \cos \omega t \text{ (V)}$
 $v_2(t) = 0,01\omega \cos \omega t + 0,5\omega \cos \omega t = 0,51\omega \cos \omega t \text{ (V)}$
- b) $v_1(t) = 0,1\omega \cos \omega t + 0,2\omega \cos \omega t = 0,3\omega \cos \omega t \text{ (V)}$
 $v_2(t) = 0,2\omega \cos \omega t + 0,5\omega \cos \omega t = 0,7\omega \cos \omega t \text{ (V)}$
- c) $v_1(t) = 0,1\omega \cos \omega t - 0,2\omega \cos \omega t = -0,1\omega \cos \omega t \text{ (V)}$
 $v_2(t) = -0,2\omega \cos \omega t + 0,5\omega \cos \omega t = 0,3\omega \cos \omega t \text{ (V)}$

14.2. COEFICIENTE DE ACOPLAMIENTO

Una bobina de N espiras con un flujo magnético ϕ atravesando cada espira tiene un flujo magnético total $\lambda = N\phi$. Según la ley de Faraday, la *fem* (*fuerza electromotriz*) inducida (tensión) en la bobina es $e = d\lambda/dt = N(d\phi/dt)$. Frecuentemente la ecuación se precede con un signo negativo para significar que la polaridad de la tensión se establece de acuerdo con la ley de Lenz. Por definición de autoinducción esta tensión viene dada también por $L(di/dt)$; por tanto,

$$L \frac{di}{dt} = N \frac{d\phi}{dt} \quad \text{o} \quad L = N \frac{d\phi}{di} \quad (5a)$$

Las unidades de ϕ son los *weber*, donde $1 \text{ Wb} = 1 \text{ V} \cdot \text{s}$, y se obtiene de la relación mostrada arriba, que es $1 \text{ H} = 1 \text{ Wb/A}$. A lo largo de este libro se supone que ϕ e i son proporcionales, de forma que

$$L = N \frac{\phi}{i} = \text{constante} \quad (5b)$$

En la Figura 14.3 el flujo total ϕ_1 resultante de una corriente i_1 a lo largo de N_1 espiras está formado por un *flujo disperso* ϕ_{11} y un *flujo de acoplamiento* o *flujo mutuo*, ϕ_{12} . La *fem* inducida en una bobina acoplada se obtiene de $N_2(d\phi_{12}/dt)$. Esta misma tensión puede reescribirse utilizando el coeficiente de inducción mutua M :

$$e = M \frac{di_1}{dt} = N_2 \frac{d\phi_{12}}{dt} \quad \text{o} \quad M = N_2 \frac{d\phi_{12}}{di_1} \quad (6)$$

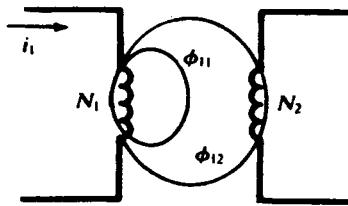


Figura 14.3.

También, como el acoplamiento es bilateral,

$$M = N_1 \frac{d\phi_{21}}{di_2} \quad (7)$$

El *coeficiente de acoplamiento*, k , se define como la relación entre el flujo mutuo y el flujo total:

$$k = \frac{\phi_{12}}{\phi_1} = \frac{\phi_{21}}{\phi_2}$$

donde $0 \leq k \leq 1$. Tomando el producto de (6) y (7), y sabiendo que k depende únicamente de la geometría del sistema,

$$\begin{aligned} M^2 &= \left(N_2 \frac{d\phi_{12}}{di_1} \right) \left(N_1 \frac{d\phi_{21}}{di_2} \right) = \left(N_2 \frac{d(k\phi_1)}{di_1} \right) \left(N_1 \frac{d(k\phi_2)}{di_2} \right) = \\ &= k^2 \left(N_1 \frac{d\phi_1}{di_1} \right) \left(N_2 \frac{d\phi_2}{di_2} \right) = k^2 L_1 L_2 \end{aligned}$$

de lo cual

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} \quad \text{o} \quad X_M = k \sqrt{X_1 X_2} \quad (8)$$

Nótese que (8) implica que $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$, una relación que puede obtenerse de forma independiente mediante el análisis de la energía.

Si todo el flujo de las bobinas es mutuo, es decir, no hay flujo disperso, entonces $k = 1$. Por otra parte, los ejes de las bobinas pueden orientarse de forma que ninguno de sus flujos pueda inducir tensiones recíprocas, lo cual implica que $k = 0$. El término *acoplamiento próximo* se utiliza para describir el caso donde la mayor parte del flujo de las bobinas es mutuo, ya sea a través del flujo ferromagnético del núcleo o entrelazando las espiras de las bobinas directamente unas entre otras. Las bobinas situadas cara a cara sin un núcleo se acoplan débilmente y por ello tienen bajos valores de k .

14.3. ANÁLISIS DE BOBINAS ACOPLADAS

Polaridades en acoplamiento fuerte

En la Figura 14.4 pueden verse dos bobinas con un núcleo común que canaliza el flujo magnético ϕ . Esta configuración produce un *acoplamiento fuerte*, como el mencionado en la Sección 14.2. Para determinar los signos apropiados de las tensiones correspondientes a la inductancia mutua, hay que aplicar la regla de la mano derecha a cada bobina. Utilizando la regla de la mano derecha, si los dedos abrazan en la dirección de la corriente supuesta, el dedo pulgar apunta en la dirección del flujo. Las direcciones positivas resultantes para ϕ_1 y ϕ_2 se muestran en la Figura 14.4. Si los flujos ϕ_1 y ϕ_2 se suman entre sí, entonces los signos de las tensiones debidas a la inductancia mutua son los mismos que los signos de las tensiones debidas a la autoinducción. Por tanto, el signo más debería escribirse en las cuatro ecuaciones correspondientes a (2) y (3). En la Figura 14.4 los flujos ϕ_1 y ϕ_2 se oponen entre sí; consecuentemente, las ecuaciones (2) y (3) deberían escribirse con el signo menos.

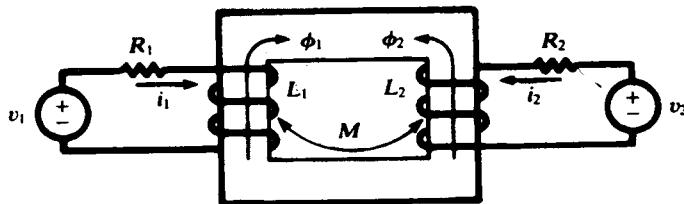


Figura 14.4.

Corriente natural

Para una mejor comprensión de las bobinas acopladas se considera un segundo circuito pasivo, como el mostrado en la Figura 14.5. La fuente v_1 suministra una corriente i_1 , con el correspondiente flujo ϕ_1 . Ahora bien, la ley de Lenz implica que la polaridad de la tensión inducida en el segundo circuito es tal que si el circuito está cerrado pasará corriente a través de la segunda bobina con el sentido correspondiente a la creación de un flujo que se oponga al flujo principal establecido por i_1 . Esto es, cuando el interruptor está cerrado en la Figura 14.5, el flujo ϕ_2 tendrá la dirección mostrada en la misma. La regla de la mano derecha, con el pulgar apuntando en la dirección de ϕ_2 , suministra el sentido de la *corriente natural* i_2 . La tensión inducida es la tensión de alimentación para el segundo circuito, como se muestra en la Figura 14.6; esta tensión eléctrica está presente tanto si el circuito está cerrado como si no. Cuando el interruptor está cerrado se establece la corriente i_2 , tomando el sentido positivo mostrado en las figuras.

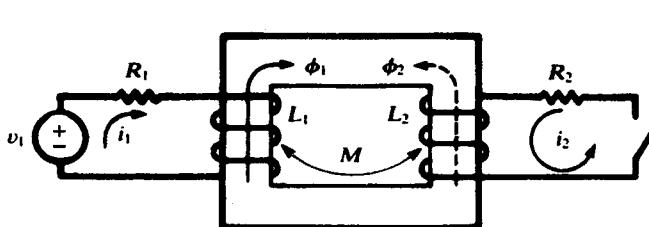


Figura 14.5.

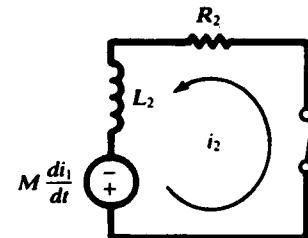


Figura 14.6.

EJEMPLO 14.2. Supóngase que el interruptor del circuito pasivo se cierra en un instante ($t = 0$) en el que $i_1 = 0$. Para $t > 0$, la secuencia en el circuito pasivo (ver Figura 14.6) es

$$R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = 0$$

mientras que en el circuito activo es

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = v_1$$

Reescribiendo las ecuaciones anteriores en el dominio s con las condiciones iniciales $i_1(0^+) = i_2(0^+) = 0$ y eliminando $I_1(s)$ se encuentra que

$$H(s) \equiv \frac{\text{respuesta}}{\text{excitación}} = \frac{I_2(s)}{V_1(s)} = \frac{Ms}{(L_1 L_2 - M^2)s^2 + (R_1 L_2 + R_2 L_1)s + R_1 R_2}$$

y de los polos de $H(s)$ se tienen las frecuencias naturales de i_2 .

14.4. LA REGLA DEL PUNTO

El signo de una tensión eléctrica debida a la inductancia mutua puede determinarse si el sentido del arrollamiento del devanado de la bobina aparece indicado en el diagrama del circuito, como así ocurre en las Figuras 14.4 y 14.5. Para simplificar el problema de obtener el signo correcto, las bobinas se marcan con puntos en los terminales que instantáneamente son de la misma polaridad.

Para asignar los puntos a un par de bobinas acopladas se selecciona una dirección de la corriente en una bobina y se coloca un punto en el terminal donde la corriente *entra* en el devanado. Se determina el flujo correspondiente aplicando la regla de la mano derecha [ver Figura 14.7(a)]. El flujo del otro devanado, de acuerdo con la ley de Lenz, se opone al primer flujo. Se usa la regla de la mano derecha para encontrar el sentido de la corriente natural correspondiente a este segundo flujo [ver Figura 14.7(b)]. Ahora se coloca un punto en el terminal del segundo devanado donde la corriente natural *abandona* el devanado. Este terminal es positivo simultáneamente con el terminal de la primera bobina donde entraba la corriente inicial. Con la polaridad instantánea de las bobinas acopladas dada por los puntos, la representación del núcleo con los sentidos de los arrollamientos ya no es necesaria, y las bobinas acopladas pueden representarse como en la Figura 14.7(c). Por ello, la regla del punto puede usarse del modo siguiente:

- 1) cuando las corrientes supuestas entran o salen de un par de bobinas acopladas por los terminales con punto, los signos de los términos de M serán los mismos signos que los términos de L ; pero
- 2) si una de las intensidades entra por un terminal con punto, mientras que la otra sale por un terminal con punto, los signos de los términos de M serán de signo contrario que los signos de los términos con L .

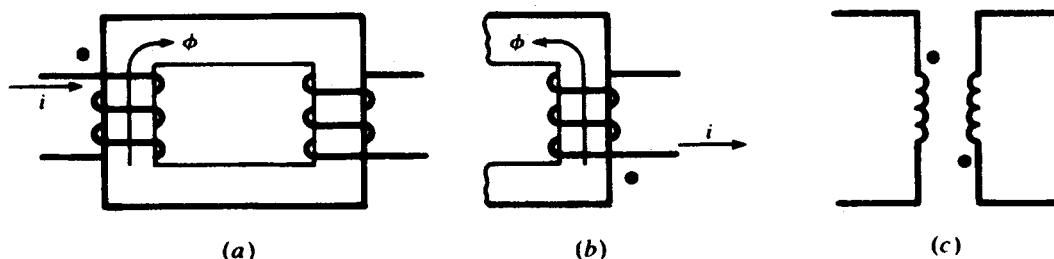


Figura 14.7.

EJEMPLO 14.3. Los sentidos de la corriente elegidos en la Figura 14.8(a) son tales que los signos de los términos de M son contrarios a los signos de los términos de L , y los puntos indican los terminales con la misma polaridad en cada instante. Compárese esto con el circuito con acoplamiento conductivo de la Figura 14.8(b), donde las dos intensidades de malla pasan a través de un elemento común con sentidos opuestos, y en los cuales los sentidos de la polaridad son los mismos que los dados por los puntos en los circuitos acoplados magnéticamente. La similitud se hace más aparente cuando se coloca una zona sombreada que sugiera dos cajas oscuras.

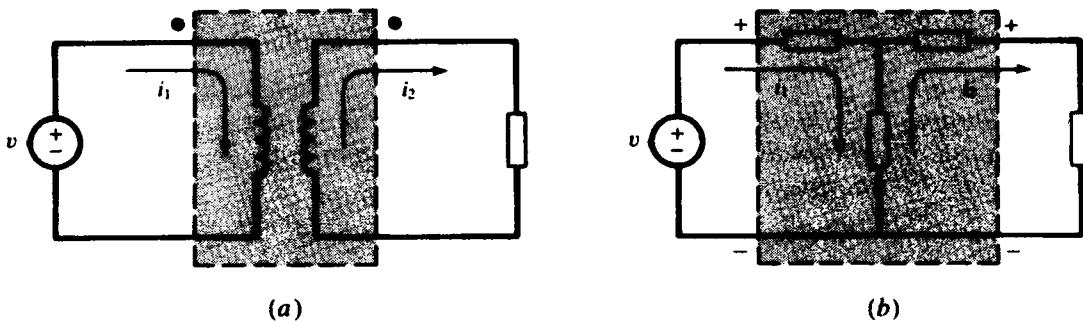


Figura 14.8.

14.5. ENERGÍA EN DOS BOBINAS ACOPLADAS

La energía almacenada en una bobina de coeficiente de autoinducción L por la cual circula una corriente i es $0,5Li^2$ J. La energía almacenada en dos bobinas acopladas magnéticamente viene dada por la expresión

$$W = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \quad (\text{J}) \quad (9)$$

donde L_1 y L_2 son los coeficientes de autoinducción de cada una de las bobinas y M es el coeficiente de inducción mutua. El término Mi_1i_2 en (9) representa la energía debida al efecto de la inducción mutua. El signo de este término es: a) positivo si ambas corrientes i_1 e i_2 entran a los terminales con punto o a los terminales sin punto, o b) negativo si una de las intensidades entra a un terminal con punto y la otra a un terminal sin punto.

EJEMPLO 14.4. En dos bobinas con $L_1 = 0,1 \text{ H}$ y $L_2 = 0,2 \text{ H}$, en un determinado momento $i_1 = 4 \text{ A}$ e $i_2 = 10 \text{ A}$. Determinar la energía total de las bobinas si el coeficiente de inducción mutua M es:
 a) $0,1 \text{ H}$, b) $\sqrt{2}/10 \text{ H}$, c) $-0,1 \text{ H}$ y d) $-\sqrt{2}/10 \text{ H}$.

Desde (9),

$$a) \quad W = (0,5)(0,1)4^2 + (0,5)(0,2)10^2 + (0,1)(10)(4) = 14,8 \text{ J}$$

b) $W = 16,46 \text{ J}$

$$c) \quad W = 6,8 \text{ J}$$

$$d) \quad W = 5,14 \text{ J}$$

El máximo y el mínimo de energía ocurre en conjunción con el acoplamiento perfecto, tanto positivo ($M = \sqrt{2}/10$) como negativo ($M = -\sqrt{2}/10$).

14.6. CIRCUITOS CONDUCTIVOS EQUIVALENTES ACOPLADOS

De las ecuaciones de las corrientes de malla escritas para bobinas acopladas magnéticamente se puede obtener un circuito equivalente con acoplamiento conductivo. Considérese el circuito sinusoidal estacionario de la Figura 14.9(a), con las corrientes de malla mostradas. Las ecuaciones correspondientes en forma matricial son

$$\begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_1 & -j\omega M \\ -j\omega M & R_2 + j\omega L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En la Figura 14.9(b), por la reactancia inductiva $X_M = \omega M$ circulan las dos corrientes de malla con sentidos opuestos, por lo que

$$Z_{12} = Z_{21} = -j\omega M$$

en la matriz de impedancias Z . Si ahora se coloca una inductancia $L_1 - M$ en la primera malla, la ecuación de la corriente de malla para ésta será

$$(R_1 + j\omega L_1)I_1 - j\omega M I_2 = V_1$$

De forma similar, $L_2 - M$ en la segunda malla aparece en la misma ecuación de corriente de malla que para el circuito de las bobinas acopladas. Por tanto, los dos circuitos son equivalentes. La regla del punto no es necesaria en los circuitos conductivos acoplados, y se pueden aplicar técnicas más familiares de circuitos.

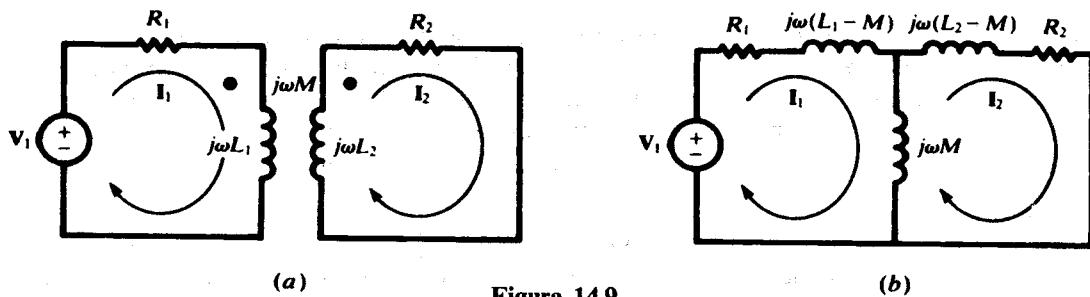


Figura 14.9.

14.7. TRANSFORMADOR LINEAL

Un *transformador* es un elemento para producir un acoplamiento mutuo entre dos o más circuitos eléctricos. El término *transformador de núcleo ferromagnético* identifica las bobinas acopladas que están arrolladas en un núcleo magnético de acero especialmente laminado para confinar el flujo y maximizar el acoplamiento. Los transformadores de *núcleo de aire* se utilizan en aplicaciones electrónicas y de comunicaciones. Un tercer grupo consiste en bobinas arrolladas una sobre otra en un núcleo no metálico, con un dispositivo móvil de material magnético en su interior de forma que sea posible variar el acoplamiento.

Se incidirá en los transformadores de núcleo ferromagnético donde la permeabilidad μ del material ferromagnético se considera constante dentro del rango de operación de las

tensiones e intensidades. El estudio se restringe a transformadores con dos devanados; sin embargo, aquellos con tres o más devanados para el mismo núcleo no son infrecuentes.

En la Figura 14.10, el *devanado del primario*, de N_1 vueltas, se conecta a la fuente de tensión V_1 , y el *devanado del secundario*, de N_2 vueltas, se conecta a la impedancia de la carga Z_L . Las resistencias de las bobinas se representan por los parámetros R_1 y R_2 . La corriente natural I_2 produce un flujo $\phi_2 = \phi_{21} + \phi_{22}$, mientras que I_1 produce $\phi_1 = \phi_{12} + \phi_{11}$. En función del coeficiente de acoplamiento k ,

$$\phi_{11} = (1 - k)\phi_1 \quad \phi_{22} = (1 - k)\phi_2$$

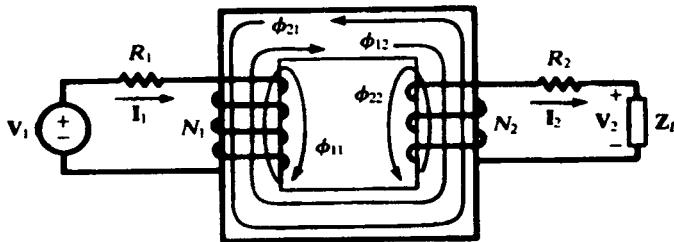


Figura 14.10.

De estas relaciones del flujo, las *inductancias de dispersión* pueden expresarse en función de los coeficientes de autoinducción, del modo siguiente:

$$L_{11} \equiv (1 - k)L_1 \quad L_{22} \equiv (1 - k)L_2$$

Las correspondientes reactancias de dispersión son:

$$X_{11} \equiv (1 - k)X_1 \quad X_{22} \equiv (1 - k)X_2$$

Se demuestra que el coeficiente de autoinducción L de una bobina con N espiras es proporcional a N^2 . Por tanto, para dos devanados con el mismo núcleo,

$$\frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \quad (10)$$

El flujo común a ambos devanados de la Figura 14.10 es el *flujo mutuo*, $\phi_m = \phi_{12} + \phi_{21}$. Este flujo induce una fem en la bobina, según la ley de Faraday,

$$e_1 = N_1 \frac{d\phi_m}{dt} \quad e_2 = N_2 \frac{d\phi_m}{dt}$$

Definiendo la *relación de espiras*, $a \equiv N_1/N_2$ se obtiene de la ecuación básica de un transformador lineal:

$$\frac{e_1}{e_2} = a \quad (11)$$

En el dominio de la frecuencia, $E_1/E_2 = a$.

La relación entre el flujo mutuo y la inducción mutua puede desarrollarse por un análisis de la fem inducida en el secundario, del modo siguiente:

$$e_2 = N_2 \frac{d\phi_m}{dt} = N_2 \frac{d\phi_{12}}{dt} - N_2 \frac{d\phi_{21}}{dt} = N_2 \frac{d\phi_{12}}{dt} - N_2 \frac{d(k\phi_2)}{dt}$$

Utilizando las ecuaciones (6) y (5a), la expresión anterior puede reescribirse del modo siguiente

$$e_2 = M \frac{di_1}{dt} - kL_2 \frac{di_2}{dt} = M \frac{di_1}{dt} - \frac{M}{a} \frac{di_2}{dt}$$

donde el último paso utilizando las ecuaciones (8) y (10) es:

$$M = k \sqrt{(a^2 L_2)(L_2)} = kaL_2$$

Definiendo la *corriente de magnetización* i_ϕ por la ecuación

$$i_1 = \frac{i_2}{a} + i_\phi \quad \text{o} \quad \mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{I}_2}{a} + \mathbf{I}_\phi \quad (12)$$

se tiene que

$$e_2 = M \frac{di_\phi}{dt} \quad \text{o} \quad \mathbf{E}_2 = jX_M \mathbf{I}_\phi \quad (13)$$

De acuerdo con (13), la corriente de magnetización puede considerarse como la necesaria para establecer el flujo mutuo ϕ_m en el núcleo.

En función de las fems de las bobinas y de las reactancias de dispersión se puede dibujar un circuito equivalente al transformador lineal, en el cual el primario y el secundario están efectivamente desacoplados. Esto puede verse en la Figura 14.11(a), y por comparación el circuito equivalente con puntos se muestra en la Figura 14.11(b).

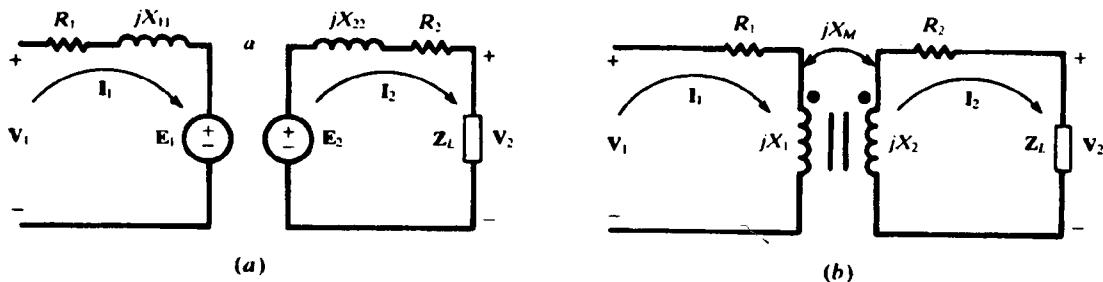


Figura 14.11.

EJEMPLO 14.5. Dibujar el diagrama fasorial de tensiones e intensidades correspondiente a la Figura 14.11(a), y de él obtener la impedancia de entrada del transformador.

El diagrama se muestra en la Figura 14.12, en la cual θ_L muestra el argumento de Z_L . Nótese que, de acuerdo con (13), las fems inducidas E_1 y E_2 adelantan a la corriente de magnetización I_ϕ por 90° . El diagrama comprende las ecuaciones de los tres fasores

$$V_1 = ajX_M I_\phi + (R_1 + jX_{11}) I_1$$

$$jX_M I_\phi = (Z_L + R_2 + jX_{22}) I_2$$

$$I_1 = \frac{1}{a} I_2 + I_\phi$$

Eliminando I_2 e I_ϕ de estas ecuaciones, resulta que

$$\frac{V_1}{I_1} \equiv Z_{en} = (R_1 + jX_{11}) + a^2 \frac{(jX_M/a)(R_2 + jX_{22} + Z_L)}{(jX_M/a) + (R_2 + jX_{22} + Z_L)} \quad (14a)$$

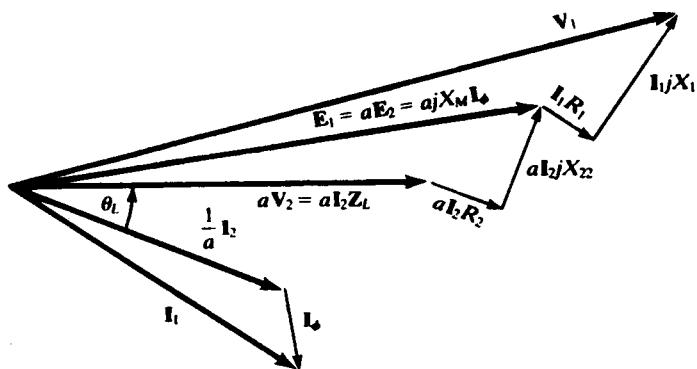


Figura 14.12.

Por otra parte, si las ecuaciones de las corrientes de malla de la Figura 14.11(b) se utilizan para obtener Z_{en} (impedancia de entrada), el resultado es

$$Z_{en} = R_1 + jX_1 + \frac{X_M^2}{R_2 + jX_2 + Z_L} \quad (14b)$$

El lector puede verificar la equivalencia de (14a) y (14b). (Ver problema 14.36.)

14.8. TRANSFORMADOR IDEAL

Un *transformador ideal* es un transformador hipotético en el que no existen pérdidas y cuyo núcleo tiene una permeabilidad infinita, dando como consecuencia un acoplamiento perfecto sin flujo disperso. En los grandes transformadores de potencia las pérdidas son tan pequeñas en relación a la potencia transferida que las relaciones obtenidas del transformador ideal pueden ser muy útiles en las aplicaciones de ingeniería.

De acuerdo con la Figura 14.13, una condición sin pérdidas se expresa por

$$\frac{1}{2} V_1 I_1^* = \frac{1}{2} V_2 I_2^*$$

(Ver sección 10.7). Pero

$$V_1 = E_1 = aE_2 = aV_2$$

y así, siendo a un número real,

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{I_2}{I_1} = a \quad (15)$$

La impedancia de entrada se obtiene con facilidad de las igualdades de (15):

$$Z_{en} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{aV_2}{I_2/a} = a^2 \frac{V_2}{I_2} = a^2 Z_L \quad (16)$$

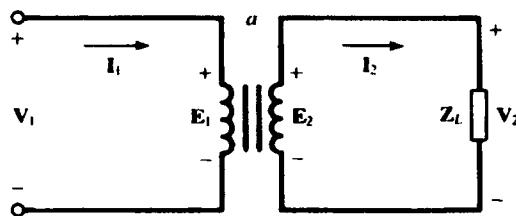


Figura 14.13.

EJEMPLO 14.6. El transformador ideal puede considerarse como el caso límite del transformador de la sección 14.7. Por tanto, en la ecuación (14a) se debe poner que

$$R_1 = R_2 = X_{11} = X_{22} = 0$$

(sin pérdidas) y entonces, haciendo que $X_M \rightarrow \infty$ (permeabilidad infinita del núcleo), se obtiene:

$$Z_{en} = \lim_{X_M \rightarrow \infty} \left[a^2 \frac{(jX_M/a)(Z_L)}{(jX_M/a) + Z_L} \right] = a^2 Z_L$$

de acuerdo con (16).

Regla del punto de las amperivueltas

Como $a = N_1/N_2$ de (15),

$$N_1 I_1 = N_2 I_2$$

es decir, las *amperivueltas* del primario son iguales a las *amperivueltas* del secundario. De ello se obtiene una regla general aplicable a transformadores con más de dos devanados. Si la intensidad entra en el devanado por el terminal con punto, a las amperivueltas se les aplicará un signo positivo; pero si la intensidad sale por el terminal con punto se les aplicará un signo negativo. Por tanto, la *regla del punto de las amperivueltas* establece que en un transformador la suma algebraica de las amperivueltas es cero.

EJEMPLO 14.7. El transformador de tres devanados mostrado en la Figura 14.14 tiene un número de vueltas $N_1 = 20$, $N_2 = N_3 = 10$. Encontrar \mathbf{I}_1 , siendo $\mathbf{I}_2 = 10/-53,13^\circ$ A, $\mathbf{I}_3 = 10/-45^\circ$ A.

De acuerdo con los puntos y los sentidos de la corriente mostrados en el diagrama,

$$N_1 \mathbf{I}_1 - N_2 \mathbf{I}_2 - N_3 \mathbf{I}_3 = 0$$

por tanto,

$$20\mathbf{I}_1 = 10(10/-53,13^\circ) + 10(10/-45^\circ)$$

$$\mathbf{I}_1 = 6,54 - j7,54 = 9,98/-49,06^\circ \text{ A}$$

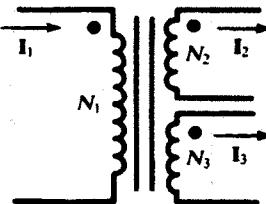


Figura 14.14.

14.9. AUTOTRANSFORMADOR

Un *autotransformador* es un devanado eléctricamente continuo de una o más tomas y un núcleo magnético. Un circuito está formado por los extremos del devanado, mientras que el otro se conecta entre un extremo del devanado y una de las tomas que se encuentra en un punto intermedio del devanado.

De acuerdo con la Figura 14.15(a), la relación de transformación es

$$\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2} = \frac{N_1 + N_2}{N_2} \equiv a + 1$$

la cual excede en una unidad la relación de transformación de un transformador ideal de dos devanados que tengan la misma relación de espiras. La intensidad \mathbf{I}_1 a través de la parte serie o superior del devanado, de N_1 vueltas, produce el flujo ϕ_1 . Por la ley de Lenz, la intensidad natural en la parte inferior del devanado produce un flujo opuesto ϕ_2 . Por tanto, la intensidad \mathbf{I}_n sale del devanado inferior por la toma. Los puntos en el devanado son los que se muestran en la Figura 14.15(b). En un autotransformador ideal, como en un transformador ideal, las potencias aparentes de entrada y salida deben ser iguales.

$$\frac{1}{2}\mathbf{V}_1 \mathbf{I}_1^* = \frac{1}{2}\mathbf{V}_1 \mathbf{I}_{ab}^* = \frac{1}{2}\mathbf{V}_2 \mathbf{I}_L^*$$

por tanto,

$$\frac{\mathbf{I}_L}{\mathbf{I}_{ab}} = a + 1$$

Es decir, las intensidades también cumplen la relación de transformación.

Ya que $\mathbf{I}_L = \mathbf{I}_{ab} + \mathbf{I}_{cb}$, la potencia aparente de salida consta de dos partes:

$$\frac{1}{2} \mathbf{V}_2 \mathbf{I}_L^* = \frac{1}{2} \mathbf{V}_2 \mathbf{I}_{ab}^* + \frac{1}{2} \mathbf{V}_2 \mathbf{I}_{cb}^* = \frac{1}{2} \mathbf{V}_2 \mathbf{I}_{ab}^* + a(\frac{1}{2} \mathbf{V}_2 \mathbf{I}_{ab}^*)$$

El primero de los términos de esta igualdad se refiere a la conducción, mientras que el segundo hace referencia a la inducción. Por tanto, en un autotransformador existe acoplamiento conductivo y magnético entre la fuente y la carga.

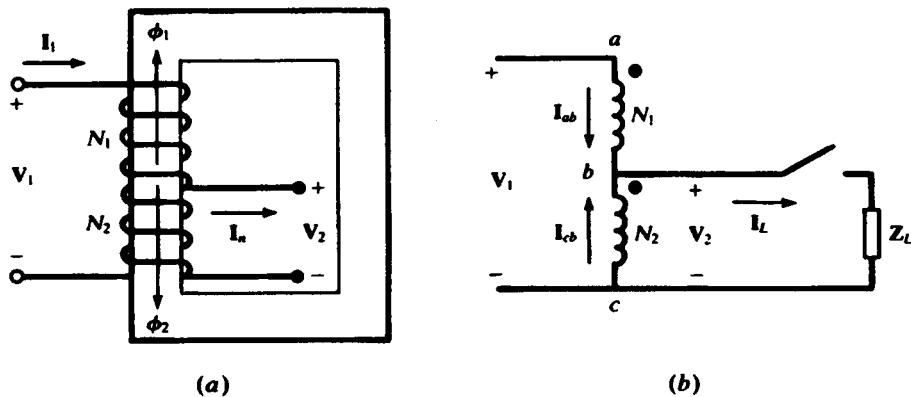


Figura 14.15.

14.10. IMPEDANCIA REFLEJADA

Cuando se conecta una carga Z_2 al secundario de un transformador, como se muestra en la Figura 14.16, su impedancia varía. A dicha variación se le denomina *impedancia reflejada*. Utilizando las características de las bobinas acopladas y aplicando la ley de Kirchhoff para la tensión en el secundario, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= L_1 s \mathbf{I}_1 + M s \mathbf{I}_2 \\ 0 &= M s \mathbf{I}_1 + L_2 s \mathbf{I}_2 + Z_2 \mathbf{I}_2 \end{aligned}$$

Eliminando \mathbf{I}_2 se tiene

$$Z_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = L_1 s - \frac{M^2 s^2}{Z_2 + L_2 s} \quad (17)$$

Para el estado estacionario de corriente alterna, donde $s = j\omega$, se tiene que

$$Z_1 = j\omega L_1 + \frac{M^2 \omega^2}{Z_2 + j\omega L_2} \quad (18)$$

La impedancia reflejada es

$$Z_{\text{reflejada}} = \frac{M^2 \omega^2}{Z_2 + j\omega L_2} \quad (19)$$

La carga Z_2 vista desde la fuente se representa como $M^2 \omega^2 / (Z_2 + j\omega L_2)$. Este método se utiliza a menudo para cambiar una impedancia a un valor determinado; por ejemplo, para igualar una carga con una fuente.

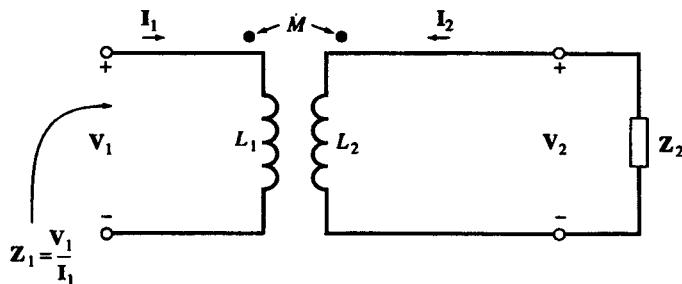


Figura 14.16.

EJEMPLO 14.8. Dado $L_1 = 0,2$ H, $L_2 = 0,1$ H, $M = 0,1$ H y $R = 10$ Ω en el circuito de la Figura 14.17, obtener i_1 para $v_1 = 142,3 \operatorname{sen} 100t$ (V).

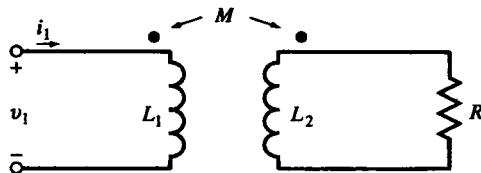


Figura 14.17.

La impedancia de entrada Z_1 para $\omega = 100$ es [ver (18)]:

$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = j\omega L_1 + \frac{M^2 \omega^2}{Z_2 + j\omega L_2} = j20 + \frac{0,01(10000)}{10 + j10} = 5 + j15 = 5\sqrt{10}/71,6^\circ$$

Entonces,

$$I_1 = V_1/Z_1 = 9/-71,6^\circ \text{ A}$$

o

$$i_1 = 9 \operatorname{sen}(100t - 71,6^\circ) \text{ (A)}$$

EJEMPLO 14.9. Si en el Ejemplo 14.8 $v_1 = u(t)$, obtener la respuesta forzada $i_{1,f}$.

La impedancia de entrada es [ver (17)]:

$$Z_1(s) = L_1 s - \frac{M^2 s^2}{R + L_2 s}$$

Sustituyendo los valores dados para los elementos, se tiene que

$$Z_1(s) = \frac{s(s+200)}{10(s+100)} \quad \text{o} \quad Y_1(s) = \frac{10(s+100)}{s(s+200)}$$

Para $t > 0$, la entrada $v_1 = 1$ V es una exponencial e^{st} , cuyo exponente $s = 0$ es un polo de $Y_1(s)$. Por tanto, $i_{1,f} = kt$ con $k = 1/L_1 = 5$. Este resultado puede obtenerse directamente analizando del circuito de la Figura 14.17.

PROBLEMAS RESUELTOS

- 14.1.** Por una bobina de un par acoplado magnéticamente circula una intensidad de 5 A, siendo los flujos resultantes ϕ_{11} y ϕ_{12} , resultando 0,2 mWb y 0,4 mWb, respectivamente. Si el número de espiras es $N_1 = 500$ y $N_2 = 500$, determinar L_1 , L_2 , M y el coeficiente de acoplamiento k .

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12} = 0,6 \text{ mWb} \quad L_1 = \frac{N_1 \phi_1}{I_1} = \frac{500(0,6)}{5} = 60 \text{ mH}$$

$$M = \frac{N_2 \phi_{12}}{I_1} = \frac{1500(0,4)}{5} = 120 \text{ mH} \quad k = \frac{\phi_{12}}{\phi_1} = \frac{0,4}{0,6} = 0,667$$

Entonces, de $M = k\sqrt{L_1 L_2}$, $L_2 = 540 \text{ mH}$.

- 14.2.** Dos bobinas acopladas tienen unos coeficientes de autoinducción $L_1 = 50 \text{ mH}$ y $L_2 = 200 \text{ mH}$, y un coeficiente de acoplamiento $k = 0,5$. Si la bobina 2 tiene 1000 espiras, e $i_1 = 5 \operatorname{sen} 400t$ (A), determinar la tensión eléctrica de la bobina 2 y el flujo ϕ_1 .

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0,50\sqrt{(50)(200)} = 50 \text{ mH}$$

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} = 0,05 \frac{d}{dt} (5 \operatorname{sen} 400t) = 100 \cos 400t \text{ (V)}$$

Suponiendo, como siempre, un circuito magnético lineal,

$$M = \frac{N_2 \phi_{12}}{i_1} = \frac{N_2 (k \phi_1)}{i_1} \quad \text{o} \quad \phi_1 = \left(\frac{M}{N_2 k} \right) i_1 = 5 \cdot 10^{-4} \operatorname{sen} 400t \text{ (Wb)}$$

- 14.3.** Aplicar la ley de Kirchhoff para las tensiones al circuito de la Figura 14.18.

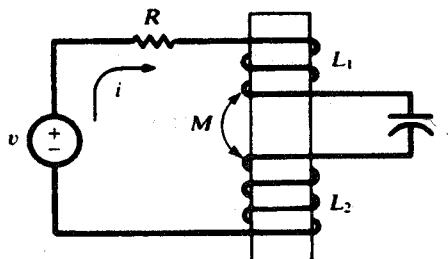


Figura 14.18.

Si observamos el sentido del arrollamiento vemos que los signos de los términos M son contrarios a los signos de los términos L .

$$Ri + L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i \, dt + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} = v$$

$$\text{o} \quad Ri + L' \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i \, dt = v$$

donde $L' \equiv L_1 + L_2 - 2M$. Como

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2} \leq \frac{L_1 + L_2}{2}$$

L' es positivo.

- 14.4.** Dos bobinas acopladas conectadas en serie, y con flujos en el mismo sentido, tienen un coeficiente de autoinducción equivalente L_A . Si los flujos son opuestos, el coeficiente de autoinducción equivalente es L_B . Obtener una expresión para M en función de L_A y L_B .

Según el Problema 14.3,

$$L_1 + L_2 + 2M = L_A \quad L_1 + L_2 - 2M = L_B$$

de lo que resulta

$$M = \frac{1}{4} (L_A - L_B)$$

que es un buen método para poder determinar M experimentalmente.

- 14.5.** a) Escribir las ecuaciones de las intensidades de malla para las bobinas acopladas con las intensidades i_1 e i_2 mostradas en la Figura 14.19. b) Repetir la operación con la intensidad i_2 que se muestra con línea de puntos.

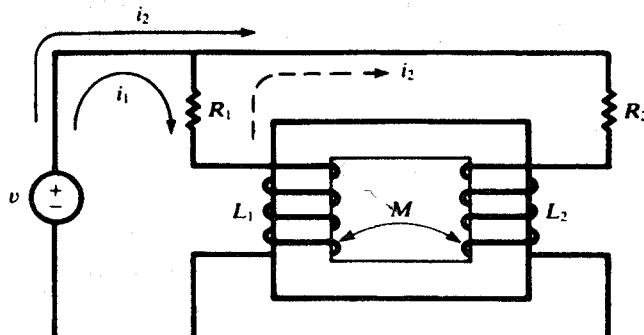


Figura 14.19.

- a) Los signos de los términos en M , según el sentido del devanado y de los sentidos seleccionados, son:

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = v \quad R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = v$$

b)

$$R_1(i_1 - i_2) + L_1 \frac{d}{dt}(i_1 - i_2) + M \frac{di_2}{dt} = v$$

$$R_1(i_2 - i_1) + R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{d}{dt}(i_2 - i_1) + L_1 \frac{d}{dt}(i_2 - i_1) - M \frac{di_2}{dt} = 0$$

- 14.6. Obtener el circuito equivalente con puntos para el circuito acoplado de la Figura 14.20 y utilizarlo para encontrar la tensión eléctrica V entre los extremos de una reactancia capacitiva de 10Ω .

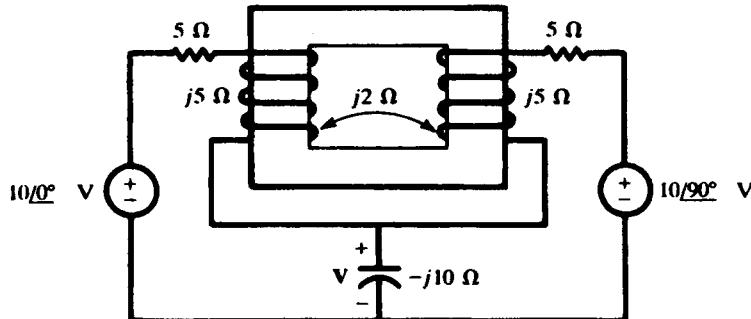


Figura 14.20.

Para colocar los puntos en el circuito sólo han de tenerse en cuenta las bobinas y el sentido de sus devanados. Hacer entrar una intensidad por la parte superior de la bobina de la izquierda y señalar con un punto el terminal de entrada correspondiente. Con ello el flujo apunta hacia arriba. Por la ley de Lenz, el flujo de la bobina derecha debe apuntar entonces hacia arriba y en sentido contrario al primer flujo. Por tanto, la intensidad natural sale de este devanado por el terminal superior, el cual está marcado con un punto. En la Figura 14.21 se muestra un circuito equivalente con todos los puntos y se indican las intensidades I_1 e I_2 elegidas para calcular V .

$$\begin{bmatrix} 5 - j5 & 5 + j3 \\ 5 + j3 & 10 + j6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\angle0^\circ \\ 10 - j10 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 5 + j3 \\ 10 - j10 & 10 + j6 \end{vmatrix}}{\Delta_Z} = 1,015\angle113,96^\circ \text{ A}$$

y $V = I_1(-j10) = 10,15\angle23,96^\circ \text{ V}$.

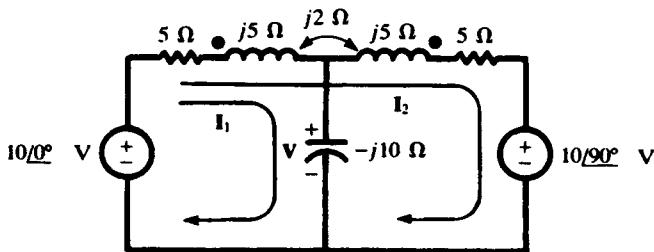


Figura 14.21.

- 14.7. Obtener el circuito equivalente con puntos de la Figura 14.22 para determinar la reactancia inductiva equivalente.

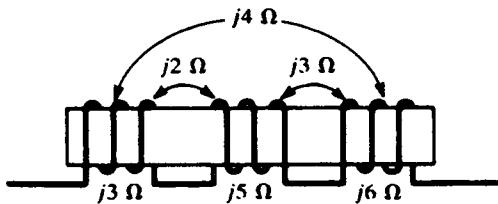


Figura 14.22.

Hacer circular una corriente por la primera bobina y señalar con un punto el lugar por donde entra dicha corriente. La intensidad natural en los otros dos devanados establece un flujo opuesto al causado por la corriente inicial. Se colocan puntos donde la corriente natural sale de los devanados. (Para evitar confusiones se ignoran las conexiones en serie mientras se determina la ubicación de los puntos.) El resultado es la Figura 14.23.

$$Z = j3 + j5 + j6 - 2(j2) + 2(j4) - 2(j3) = j12 \Omega$$

es decir, una reactancia inductiva de 12Ω .

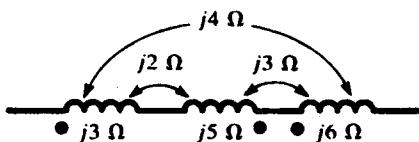


Figura 14.23.

- 14.8. a) Calcular la tensión V para el circuito acoplado de la Figura 14.24. b) Repetir el ejercicio cambiando la polaridad de una de las bobinas.

a) $X_M = (0,8)\sqrt{5(10)} = 5,66 \Omega$, y así, la matriz de impedancias Z es

$$\begin{bmatrix} 3 + j1 & -3 - j1,66 \\ -3 - j1,66 & 8 + j6 \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 + j1 & 50 \\ -3 - j1,66 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_Z} = 8,62/-24,79^\circ \text{ A}$$

y $\mathbf{V} = \mathbf{I}_2(5) = 43,1/-24,79^\circ \text{ V.}$

b)

$$[\mathbf{Z}] = \begin{bmatrix} 3 + j1 & -3 + j9,66 \\ -3 + j9,66 & 8 + j6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 + j1 & 50 \\ -3 + j9,66 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_Z} = 3,82/-112,12^\circ \text{ A}$$

y $\mathbf{V} = \mathbf{I}_2(5) = 19,1/-112,12^\circ \text{ V.}$

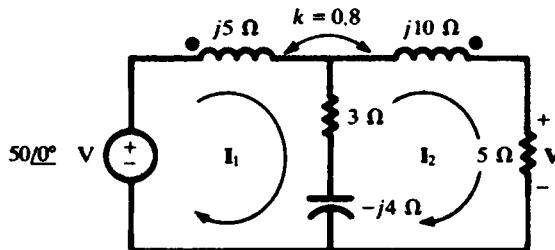


Figura 14.24.

- 14.9. Obtener la inductancia equivalente de las bobinas acopladas, conectadas en paralelo, de la Figura 14.25.

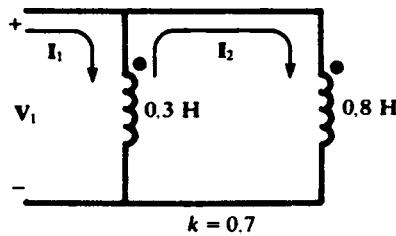


Figura 14.25.

Las intensidades \mathbf{I}_1 e \mathbf{I}_2 se eligen como se ve en el diagrama; siendo entonces $\mathbf{Z}_{en} = \mathbf{V}_1/\mathbf{I}_1$.

$$[\mathbf{Z}] = \begin{bmatrix} j\omega 0,3 & j\omega 0,043 \\ j\omega 0,043 & j\omega 0,414 \end{bmatrix}$$

$$\text{y } Z_{\text{en}} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{11}} = \frac{(j\omega 0,3)(j\omega 0,414) - (j\omega 0,043)^2}{j\omega 0,414} = j\omega 0,296$$

o L_{eq} es 0,296 H.

- 14.10.** Para el circuito acoplado de la Figura 14.26, demostrar que los puntos no son necesarios por ser pasivo el segundo circuito.

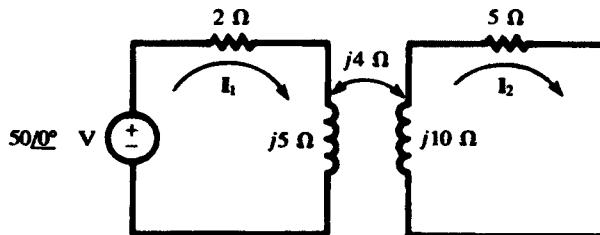


Figura 14.26.

Las intensidades I_1 e I_2 se obtienen de la siguiente forma:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50 & \pm j4 \\ 0 & 5 + j10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 + j5 & \pm j4 \\ \pm j4 & 5 + j10 \end{vmatrix}} = \frac{250 + j500}{-24 + j45} = 10,96/-54,64^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 + j5 & 50 \\ \pm j4 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_Z} = 3,92/-118,07 \mp 90^\circ \text{ A}$$

El valor de la matriz de impedancias Δ_Z no depende del signo de M porque para obtener I_1 el determinante del numerador no incluye la impedancia de acoplamiento. El signo de M tampoco afectará al valor de I_1 . La expresión para obtener I_2 muestra que un cambio en la polaridad del acoplamiento implica una variación en la fase de 180° . Ya que no existe un fasor de tensión en el segundo circuito, este cambio de fase no tiene consecuencias.

- 14.11.** Para el circuito acoplado de la Figura 14.27, hallar la relación de V_2/V_1 que hace que la intensidad I_1 sea cero.

$$I_1 = 0 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & j2 \\ V_2 & 2 + j2 \end{vmatrix}}{\Delta_Z}$$

Entonces, $V_1(2 + j2) - V_2(j2) = 0$, por lo que $V_2/V_1 = 1 - j1$.

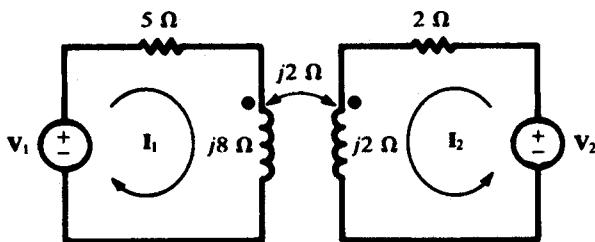


Figura 14.27.

- 14.12. En el circuito de la Figura 14.28, determinar la tensión eléctrica entre los extremos de la reactancia $j5 \Omega$ con la polaridad mostrada en el diagrama.

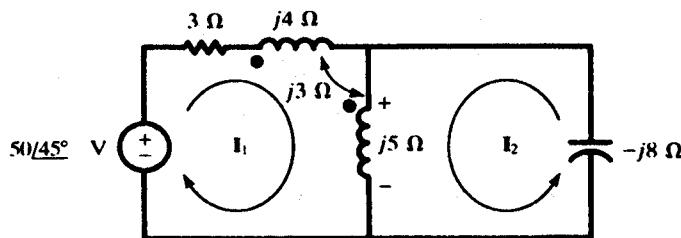


Figura 14.28.

Para la elección de las intensidades de malla mostradas en el diagrama,

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50/45^\circ & j8 \\ 0 & -j3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 + j15 & j8 \\ j8 & -j3 \end{vmatrix}} = \frac{150/45^\circ}{109 - j9} = 1,37/-40,28^\circ \text{ A}$$

Análogamente, $\mathbf{I}_2 = 3,66/-40,28^\circ \text{ A}$.

La tensión eléctrica entre los extremos de $j5 \Omega$ se debe a un efecto conductivo del paso de las intensidades \mathbf{I}_1 e \mathbf{I}_2 y a un efecto de inducción mutua por el paso de la intensidad \mathbf{I}_1 por la reactancia $j4 \Omega$.

$$\mathbf{V} = (\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)(j5) + \mathbf{I}_1(j3) = 29,27/49,72^\circ \text{ V}$$

Por supuesto, debe existir la misma diferencia de potencial entre los extremos del condensador:

$$\mathbf{V} = -\mathbf{I}_2(-j8) = 29,27/49,72^\circ \text{ V}$$

- 14.13. Obtener los circuitos Thévenin y Norton equivalentes entre los terminales ab para el circuito acoplado de la Figura 14.29.

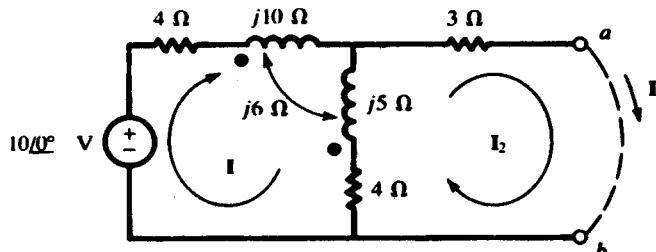


Figura 14.29.

Con el circuito abierto sólo existe una intensidad I debida a la fuente de tensión.

$$I = \frac{10/0^\circ}{8 + j3} = 1,17/-20,56^\circ \text{ A}$$

Por tanto, $V' = I(j5 + 4) - I(j6) = 4,82/-34,60^\circ \text{ V}$.

Para determinar la corriente de cortocircuito I' se suponen dos corrientes de malla en el sentido de las agujas del reloj, tales que $I_2 = I'$.

$$I' = \frac{\begin{vmatrix} 8 + j3 & 10 \\ -4 + j1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 + j3 & -4 + j1 \\ -4 + j1 & 7 + j5 \end{vmatrix}} = 0,559/-83,39^\circ \text{ A}$$

$$\text{y } Z' = \frac{V'}{I'} = \frac{4,82/-34,60^\circ}{0,559/-83,39^\circ} = 8,62/48,79^\circ \Omega$$

Los circuitos equivalentes son los de la Figura 14.30.

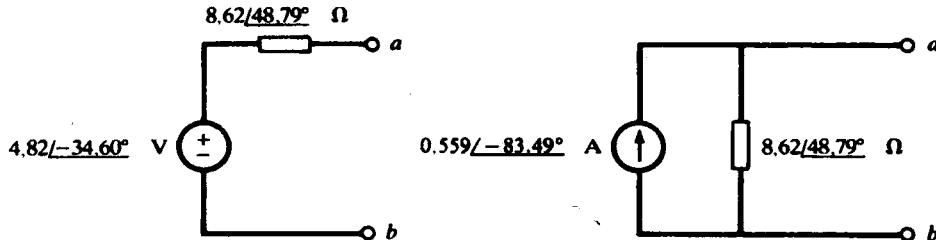


Figura 14.30.

- 14.14. Obtener un circuito con acoplamiento conductivo equivalente al circuito acoplado magnéticamente de la Figura 14.31.

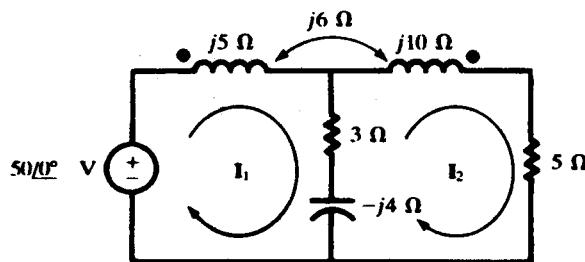


Figura 14.31.

Obtener las corrientes de malla I_1 e I_2 del diagrama y escribir las ecuaciones de la ley de Kirchhoff para la tensión en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} 3 + j1 & -3 - j2 \\ -3 - j2 & 8 + j6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50\angle 0^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

Las impedancias de la Figura 14.32 son tales que dan una matriz de impedancias Z idéntica. Ya que I_1 e I_2 pasan a través de la impedancia común Z_b con sentidos opuestos, el término Z_{12} de la matriz es $-Z_b$. Por tanto, $Z_b = 3 + j2 \Omega$. Como Z_{11} incluye todas las impedancias por las que pasa I_1 ,

$$3 + j1 = Z_a + (3 + j2)$$

de lo cual $Z_a = -j1 \Omega$. Análogamente,

$$Z_{22} = 8 + j6 = Z_b + Z_c$$

y $Z_c = 5 + j4 \Omega$.

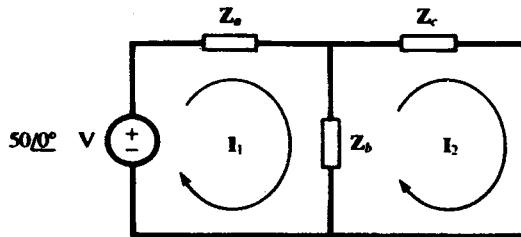


Figura 14.32.

- 14.15. Para el circuito de la Figura 14.11(b), $k = 0,96$, $R_1 = 1,2 \Omega$, $R_2 = 0,3 \Omega$, $X_1 = 20 \Omega$, $X_2 = 5 \Omega$, $Z_L = 5/36,87^\circ \Omega$ y $\mathbf{V}_2 = 100\angle 0^\circ$ V. Obtener las fems de las bobinas E_1 y E_2 , y la corriente de magnetización I_ϕ .

$$X_{11} = (1 - k)X_1 = (1 - 0,96)(20) = 0,8 \Omega \quad X_{22} = (1 - k)X_2 = 0,2 \Omega$$

$$a = \sqrt{\frac{X_1}{X_2}} = 2 \quad X_M = k\sqrt{X_1 X_2} = 9,6 \Omega$$

Por ello puede representarse un circuito de forma similar al de la Figura 14.11(a), comenzando por la relación de los fasores de tensión e intensidad en la carga y volviendo a partir de \mathbf{E}_2 hasta obtener \mathbf{E}_1 .

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{Z}_L} = \frac{100/0^\circ}{5/36,87^\circ} = 20/-36,87^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{I}_2(R_2 + jX_{22}) + \mathbf{V}_2 = (20/-36,87^\circ)(0,3 + j0,2) + 100/0^\circ = 107,2 - j0,4 \text{ V}$$

$$\mathbf{E}_1 = a\mathbf{E}_2 = 214,4 - j0,8 \text{ V}$$

$$\mathbf{I}_\phi = \frac{\mathbf{E}_2}{jX_M} = -0,042 - j11,17 \text{ A}$$

- 14.16.** Para el transformador lineal del Problema 14.15, calcular la impedancia de entrada entre los terminales donde se aplica \mathbf{V}_1 .

Método 1

Completar la representación iniciada en el Problema 14.15,

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_\phi + \frac{1}{a} \mathbf{I}_2 = (-0,042 - j11,17) + 10/-36,87^\circ = 18,93/-65,13^\circ \text{ A}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= \mathbf{I}_1(R_1 + jX_{11}) + \mathbf{E}_1 = (18,93/-65,13^\circ)(1,2 + j0,8) + (214,4 - j0,8) = \\ &= 238,2/-3,62^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathbf{Z}_{en} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = \frac{238,2/-3,62^\circ}{18,93/-65,13^\circ} = 12,58/61,51^\circ \Omega$$

Método 2

De (14a) del Ejemplo 14.5,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{en} &= (1,2 + j0,8) + 2^2 \frac{(j4,8)(0,3 + j0,2 + 5/36,87^\circ)}{0,3 + j5 + 5/36,87^\circ} = \\ &= \frac{114,3/123,25^\circ}{9,082/61,75^\circ} = 12,58/61,50^\circ \Omega \end{aligned}$$

Método 3

De (14b) del Ejemplo 14.5,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{en} &= (1,2 + j20) + \frac{(9,6)^2}{0,3 + j5 + 5/36,87^\circ} \\ &= (1,2 + j20) + (4,80 - j8,94) = 12,58/61,53^\circ \Omega \end{aligned}$$

- 14.17. En la Figura 14.33 hay tres transformadores iguales conectados con los devanados del primario en estrella y los devanados del secundario en triángulo. Una única impedancia consume una intensidad $I_L = 30/0^\circ$ A. Conocidas

$$I_{b2} = 20/0^\circ \text{ A} \quad I_{a2} = I_{c2} = 10/0^\circ \text{ A}$$

y $N_1 = 10$, $N_2 = 100$, determinar las intensidades del primario I_{a1} , I_{b1} e I_{c1} .

La regla del punto de las amperivueltas se aplica a cada uno de los transformadores.

$$N_1 I_{a1} + N_2 I_{a2} = 0 \quad \text{o} \quad I_{a1} = -\frac{10}{100} (10/0^\circ) = -1/0^\circ \text{ A}$$

$$N_1 I_{b1} - N_2 I_{b2} = 0 \quad \text{o} \quad I_{b1} = \frac{10}{100} (20/0^\circ) = 2/0^\circ \text{ A}$$

$$N_1 I_{c1} + N_2 I_{c2} = 0 \quad \text{o} \quad I_{c1} = -\frac{10}{100} (10/0^\circ) = -1/0^\circ \text{ A}$$

Una comprobación consistiría en sumar las intensidades del primario:

$$I_{a1} + I_{b1} + I_{c1} = 0$$

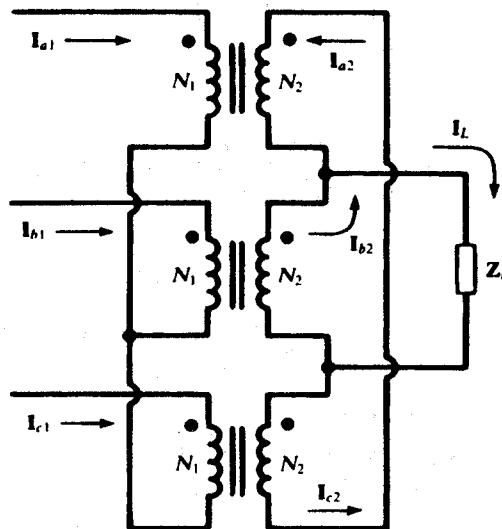


Figura 14.33.

- 14.18. Para el autotransformador ideal de la Figura 14.34, determinar V_2 , I_{cb} y la intensidad de entrada I_1 .

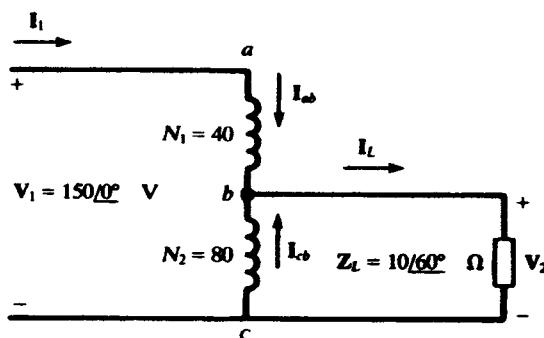


Figura 14.34.

$$a \equiv \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{2}$$

$$V_2 = \frac{V_1}{a+1} = 100/0^\circ \text{ V} \quad I_L = \frac{V_2}{Z_L} = 10/-60^\circ \text{ A}$$

$$I_{cb} = I_L - I_{ab} = 3,33/-60^\circ \text{ A} \quad I_{ab} = \frac{I_L}{a+1} = 6,67/-60^\circ \text{ A}$$

- 14.19. En el Problema 14.18, determinar la potencia aparente suministrada a la carga por efecto transformador y por conducción.

$$\begin{aligned} S_{\text{cond}} &= \frac{1}{2} V_2 I_{ab}^* = \frac{1}{2} (100/0^\circ) (6,67/60^\circ) = 333/60^\circ \text{ VA} \\ S_{\text{trans}} &= a S_{\text{cond}} = 167/60^\circ \text{ VA} \end{aligned}$$

- 14.20. En el circuito acoplado de la Figura 14.35, determinar la admitancia de entrada $Y_1 = I_1/V_1$ y determinar la intensidad $i_1(t)$ para $v_1(t) = 2\sqrt{2} \cos t$.

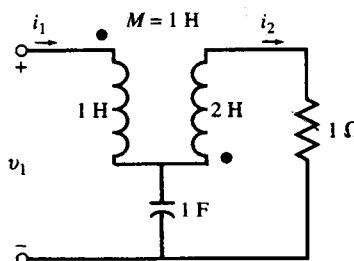


Figura 14.35.

Aplicando la ley de Kirchhoff para las tensiones a las mallas 1 y 2 en el dominio s

$$V_1 = sI_1 + sI_2 + \frac{I_1 - I_2}{s}$$

$$0 = sI_1 + (2s + 1)I_2 + \frac{I_2 - I_1}{s}$$

Eliminando I_2 de estas ecuaciones se obtiene que

$$Y_1 = \frac{I_1}{V_1} = \frac{2s^2 + s + 1}{s^3 + s^2 + 5s + 1}$$

Para $s = j$, la admitancia de entrada es $Y_1 = (1 + j)/4 = \sqrt{2}/4/45^\circ$. Por tanto, $i_1(t) = \cos(t + 45^\circ)$.

- 14.21.** Encontrar la impedancia de entrada $Z_1 = V_1/I_1$ en el circuito acoplado de la Figura 14.36.

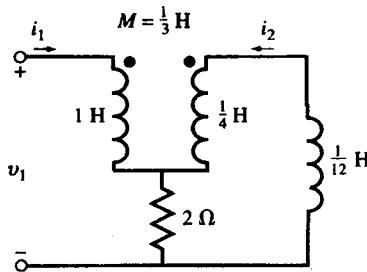


Figura 14.36.

Aplicando la ley de Kirchhoff para las tensiones a las mallas 1 y 2 en el dominio s:

$$\begin{cases} V_1 = sI_1 + \frac{1}{3}sI_2 + 2(I_1 + I_2) \\ 0 = \frac{1}{3}sI_1 + \frac{1}{4}sI_2 + 2(I_1 + I_2) + \frac{1}{12}sI_2 \end{cases}$$

$$\text{o } \begin{cases} V_1 = (2 + s)I_1 + (2 + \frac{1}{3}s)I_2 \\ 0 = (2 + \frac{1}{3}s)I_1 + (2 + \frac{1}{3}s)I_2 \end{cases}$$

El resultado es

$$I_2 = -I_1 \quad \text{y} \quad Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{2}{3} s$$

La corriente a través de la resistencia es $I_1 + I_2 = 0$ y la resistencia no influye en Z_1 . La impedancia de entrada es puramente inductiva.

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

- 14.22.** Dos bobinas acopladas, $L_1 = 0,8 \text{ H}$ y $L_2 = 0,2 \text{ H}$, tienen un coeficiente de acoplamiento $k = 0,9$. Determinar el coeficiente de inducción mutua M y la relación de espiras N_1/N_2 .

Solución: $0,36 \text{ H}$, 2.

- 14.23.** Dos bobinas acopladas, con $N_1 = 100$ y $N_2 = 800$, tienen un coeficiente de acoplamiento $k = 0,85$. Con la bobina 1 abierta y una intensidad de 5 A en la bobina 2, el flujo es $\phi_2 = 0,35 \text{ mWb}$. Determinar L_1 , L_2 y M .

Solución: $0,875 \text{ mH}$, 56 mH , $5,95 \text{ mH}$.

- 14.24.** Dos bobinas idénticas acopladas tienen una inductancia equivalente de 80 mH cuando se conectan en serie con flujos en el mismo sentido y 35 mH si se conectan en serie, pero con flujos opuestos. Determinar L_1 , L_2 , M y k .

Solución: $28,8 \text{ mH}$, $28,8 \text{ mH}$, $11,25 \text{ mH}$, $0,392$.

- 14.25.** Dos bobinas acopladas con $L_1 = 20 \text{ mH}$, $L_2 = 10 \text{ mH}$ y $k = 0,5$ se conectan de cuatro formas distintas: en serie con flujos en el mismo sentido; en serie con flujos opuestos, y en paralelo con flujos en el mismo sentido y en sentidos opuestos. Obtener las inductancias equivalentes de las cuatro conexiones.

Solución: $44,1 \text{ mH}$, $15,9 \text{ mH}$, $9,47 \text{ mH}$, $3,39 \text{ mH}$.

- 14.26.** Escribir las ecuaciones de las corrientes de malla para el circuito acoplado de la Figura 14.37. Obtener el circuito equivalente con puntos y escribir las mismas ecuaciones.

$$\text{Solución: } (R_1 + R_3)i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + R_3 i_2 = M \frac{di_2}{dt} = v$$

$$(R_2 + R_3)i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + R_3 i_1 + M \frac{di_1}{dt} = v$$

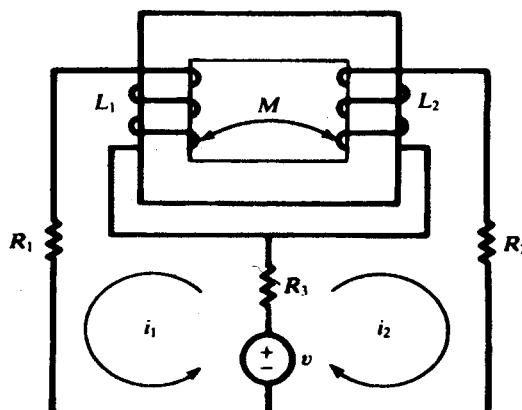


Figura 14.37.

- 14.27.** Escribir la ecuación de los fasores del circuito acoplado de una sola malla, de la Figura 14.38.

Solución: $(j5 + j3 - j5,03 - j8 + 10)\mathbf{I} = 50/0^\circ$.

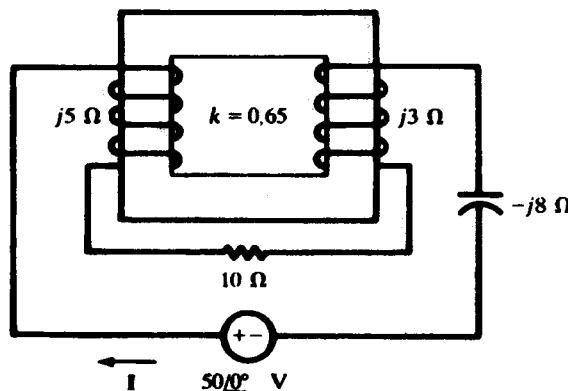


Figura 14.38.

- 14.28.** Obtener el circuito equivalente con puntos para el circuito acoplado de la Figura 14.38.

Solución: Ver Figura 14.39.

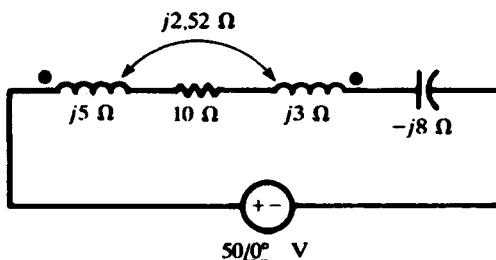


Figura 14.39.

- 14.29.** Las tres bobinas acopladas de la Figura 14.40 tienen coeficientes de acoplamiento de 0,5. Obtener la inductancia equivalente entre los extremos AB .

Solución: 239 mH.

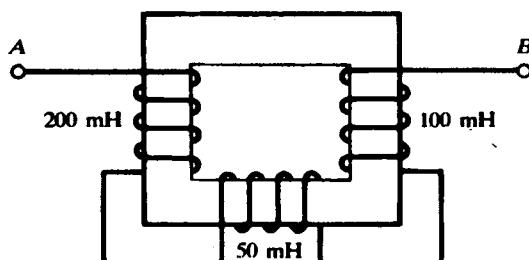


Figura 14.40.

- 14.30. Obtener dos formas del circuito equivalente con puntos para las bobinas acopladas de la Figura 14.40.

Solución: Ver Figura 14.41.

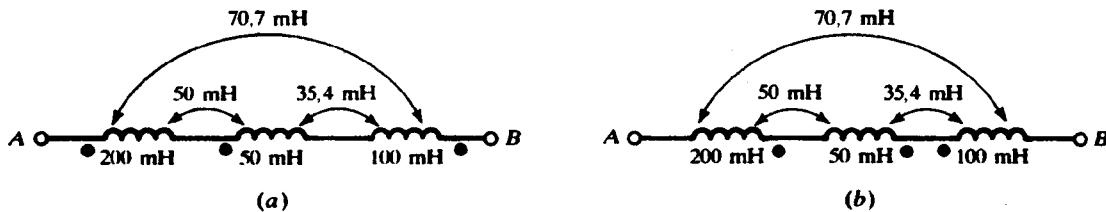


Figura 14.41.

- 14.31. a) Obtener la impedancia equivalente entre los extremos AB del circuito acoplado de la Figura 14.42. b) Cambiar el sentido del devanado de una de las bobinas y repetir la operación.

Solución: a) $3,40/41,66^\circ \Omega$; b) $2,54/5,37^\circ \Omega$.

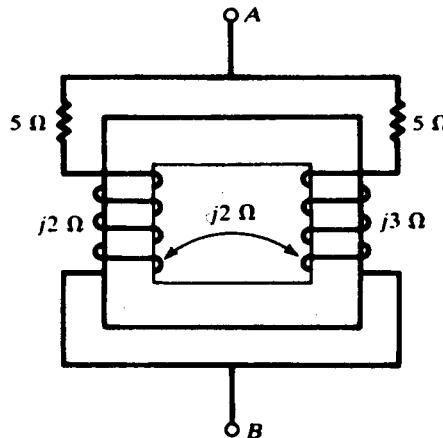


Figura 14.42.

- 14.32. En el circuito acoplado de la Figura 14.43, determinar \mathbf{V}_2 , para la cual $\mathbf{I}_1 = 0$. ¿Qué tensión aparece en la reactancia inductiva de $8\ \Omega$ en estas condiciones?

Solución: $141,4/-45^\circ$ V, $100/0^\circ$ V (+ en el punto).

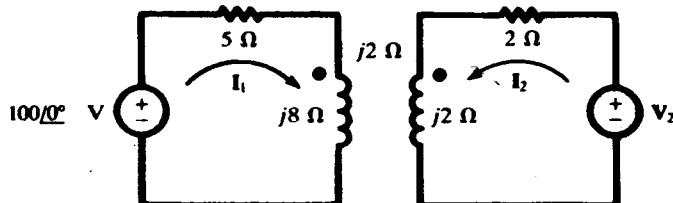


Figura 14.43.

- 14.33. Determinar la reactancia mutua X_M para el circuito acoplado de la Figura 14.44 si la potencia en la resistencia de 5Ω es 45,24 W.

Solución: 4Ω .

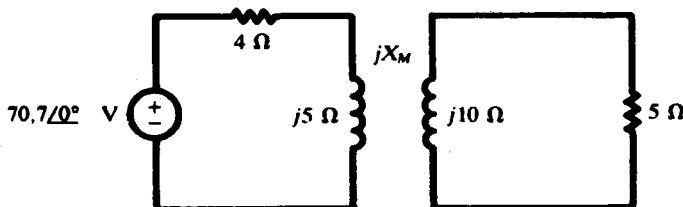


Figura 14.44.

- 14.34. En el circuito acoplado de la Figura 14.45, determinar las componentes de la intensidad I_2 resultantes de cada una de las fuentes V_1 y V_2 .

Solución: $0,77/112,6^\circ$ A, $1,72/86,05^\circ$ A.

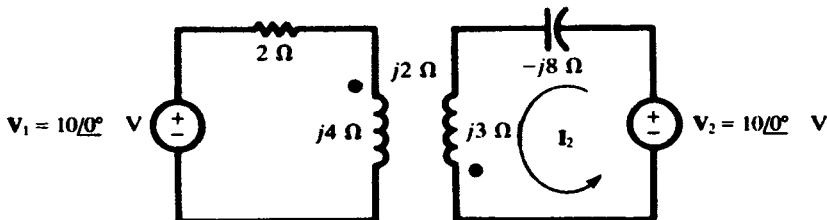


Figura 14.45.

- 14.35. Determinar el coeficiente de acoplamiento k en el circuito de la Figura 14.46, si la potencia consumida en la resistencia de 10Ω es 32 W.

Solución: 0,791.

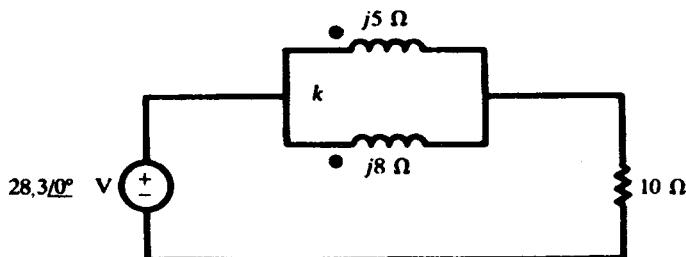


Figura 14.46.

- 14.36. En (14a) reemplazar a , X_{11} , X_{22} y X_M por sus expresiones en función de X_1 , X_2 y k , obteniendo así (14b).

- 14.37. Para el circuito acoplado de la Figura 14.47, determinar la impedancia de entrada en los extremos ab .

Solución: $3 + j36,3 \Omega$.

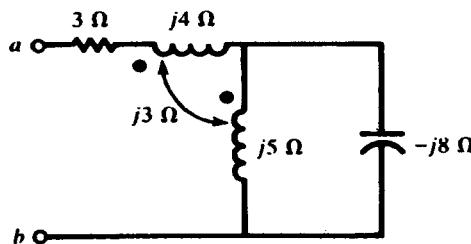


Figura 14.47.

- 14.38.** Determinar la impedancia de entrada entre los extremos ab del circuito acoplado de la Figura 14.48.

Solución: $1 + j1,5 \Omega$.

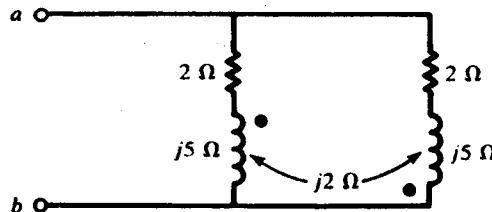


Figura 14.48.

- 14.39.** Determinar la impedancia de entrada entre los extremos ab del circuito acoplado de la Figura 14.49.

Solución: $6,22 + j4,65 \Omega$.

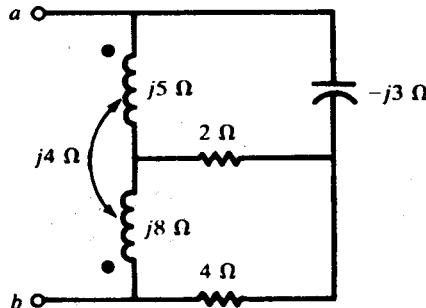


Figura 14.49.

- 14.40.** Obtener los circuitos equivalentes Thévenin y Norton de los terminales ab del circuito acoplado de la Figura 14.50.

Solución: $V' = 7,07/45^\circ$ V, $I' = 1,04/-27,9^\circ$ A, $Z' = 6,80/72,9^\circ \Omega$.

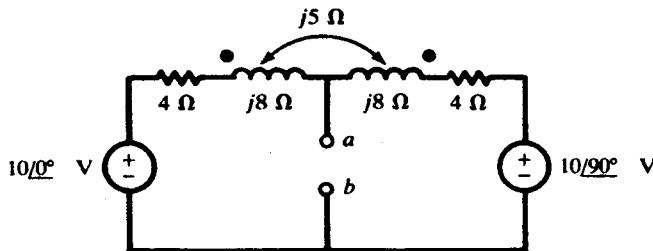


Figura 14.50

- 14.41. Para el transformador ideal de la Figura 14.51, determinar I_1 , dado que

$$I_{L1} = 10/0^\circ \text{ A} \quad I_{L2} = 10/-36,87^\circ \text{ A} \quad I_{L3} = 4,47/-26,57^\circ \text{ A}$$

Solución: $16,5/-14,04^\circ$ A.

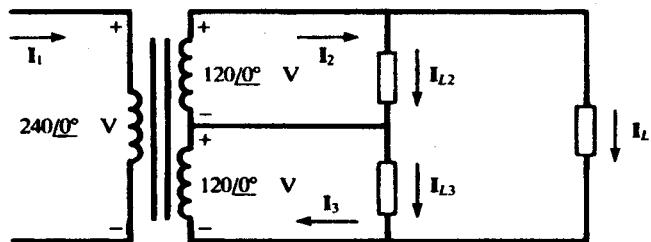


Figura 14.51.

- 14.42. Cuando el secundario del transformador lineal de la Figura 14.52 está abierto, la corriente del primario es $I_1 = 4/-89,69^\circ$ A. Determinar el coeficiente de acoplamiento k .

Solución: 0,983.

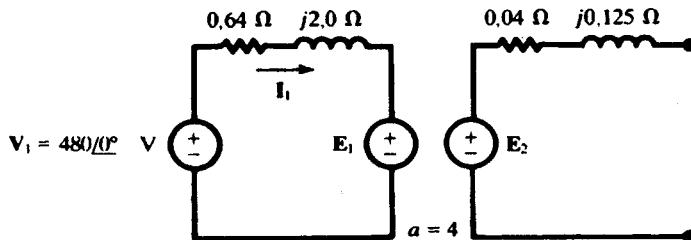


Figura 14.52.

- 14.43. Para el transformador ideal de la Figura 14.53, determinar I_1 , dados $I_2 = 50/-36,87^\circ$ A e $I_3 = 16/0^\circ$ A.

Solución: $26,6/-34,29^\circ$ A.

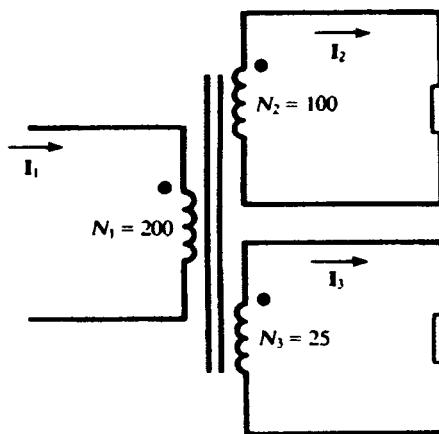


Figura 14.53.

- 14.44. Considerando el autotransformador ideal de la Figura 14.54, obtener las intensidades I_1 , I_{cb} e I_{dc} .

Solución: $3,70/22,5^\circ$ A, $2,12/86,71^\circ$ A, $10,34/11,83^\circ$ A.

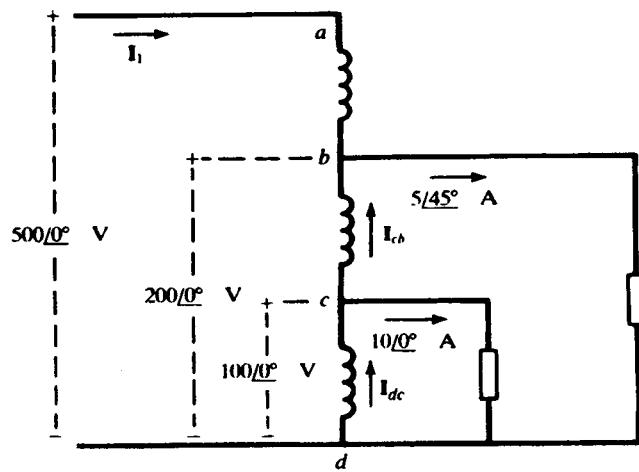


Figura 14.54.

CAPÍTULO 15

Análisis de circuitos usando Spice y PSpice

15.1. SPICE Y PSPICE

Spice (*Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis*, Programa de simulación con énfasis de circuitos integrados) es un programa de ordenador desarrollado en los años setenta por la Universidad de California, en Berkeley, para simular circuitos electrónicos. Se utiliza como una herramienta de análisis, diseño y comprobación de circuitos integrados, así como para una gama muy variada de circuitos eléctricos y electrónicos. Aunque SpiceTM es un programa de dominio público, existen versiones comerciales como la denominada PSpice de MicroSim Corporation, que si bien se basan en sus mismos algoritmos y sintaxis, complementan a Spice con importantes mejoras y el soporte técnico adecuado para aquellos usuarios que usan el programa con fines comerciales.

En este capítulo se presentan los elementos básicos de Spice/PSpice y su modo de aplicación para algunos circuitos sencillos. Los ejemplos se ejecutan en la versión de evaluación de PSpice, la cual se encuentra disponible sin coste alguno.

15.2. DESCRIPCIÓN DE UN CIRCUITO

Para introducir un circuito en el ordenador basta con escribir algunas sentencias en cualquier editor de textos ASCII. Al fichero de texto resultante se le denomina *fichero fuente*. También puede introducirse gráficamente mediante la creación del circuito en el monitor del ordenador con el programa «Schematic Capture» de MicroSim. Al fichero fuente utilizado en este capítulo se le ha dado el nombre genérico SOURCE.CIR. Para obtener la solución de un circuito, se ejecuta el fichero fuente por medio de la herramienta específica para resolución de circuitos contenida en el programa. El resultado de esta operación queda recogido en un fichero denominado SOURCE.OUT.

EJEMPLO 15.1. Utilizar PSpice para encontrar la tensión de continua del estado estacionario del condensador de $5 \mu\text{F}$ de la Figura 15.1(a).

Primero se etiquetan los nudos con los números 0, 1, 2 y los elementos con los símbolos R1, R2, C y Vs [Figura 15.1(b)]. Después se crea en ASCII el fichero fuente y se le da un nombre, por ejemplo, EXMP1.CIR, tal como se muestra a continuación.

Análisis de C.C., Figura 15.1

```

Vs      1  0   DC      9 V
R1      1  2   3 k
R2      0  2   6 k
C       0  2   5 μF
.END

```

Ejecutando la orden PSPICE EXMP1, el ordenador resuelve el circuito y escribe los resultados en el fichero EXMP1.OUT.

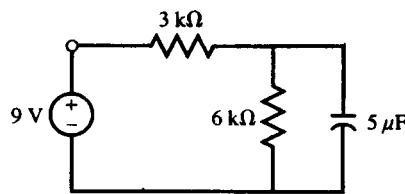
NODO	TENSIÓN	NODO	TENSIÓN
(1)	9,0000	(2)	6,0000

INTENSIDAD DE FUENTE DE TENSIÓN

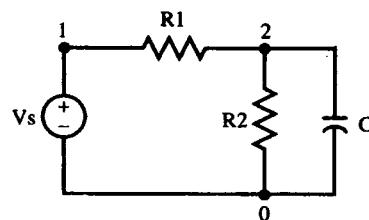
NOMBRE	INTENSIDAD
Vs	- 1,000E - 03

DISIPACIÓN TOTAL DE POTENCIA 9,00E - 03 WATTS

Los resultados obtenidos nos muestran que la tensión en el nodo 2, con referencia al nodo 0, es de 6 V, mientras que la intensidad que sale de la fuente de tensión V_s es -10^{-3} A, y que la potencia total disipada en el circuito es $9 \cdot 10^{-3}$ W.



(a)



(b)

Figura 15.1.

15.3. PARTES DE UN FICHERO FUENTE DE SPICE

El fichero fuente del Ejemplo 15.1 es muy simple y contiene las sentencias necesarias para resolver el circuito de la Figura 15.1 mediante Spice. Cada línea en el fichero fuente es una sentencia. En general, si una línea es demasiado larga (más de 80 caracteres), puede continuarse en las líneas subsiguientes. Las líneas de continuación deben empezar con un signo (+) en la primera columna.

PSpice no diferencia las mayúsculas de las minúsculas y, mientras no se diga lo contrario, las unidades se corresponden con las del Sistema Internacional de Unidades (S.I.)

Sentencia título

La primera línea del fichero fuente del Ejemplo 15.1 se denomina *sentencia título*. Spice utiliza esta línea como una etiqueta del fichero de salida, y no se considera en el análisis. Por tanto, es *obligatorio* usar la primera línea para el título o, en ausencia de éste, dejarla en blanco.

Sentencia .END

La sentencia .END es *obligatoria* al final del fichero fuente. Cualquier sentencia que siga a la sentencia .END se considerará como un fichero fuente distinto.

Sentencias de datos

Las cuatro sentencias restantes de datos en el fichero fuente del Ejemplo 15.1 contienen los datos específicos del circuito. En nuestro caso, la segunda línea establece que la fuente de tensión denominada V_s está conectada entre los nodos 1 (borna positiva de la fuente) y el nodo de referencia 0. La fuente es de C.C. (en inglés *dc*) con un valor de 9 V. La tercera línea establece que la resistencia denominada R_1 , con un valor de 3 k Ω , está conectada entre los nodos 1 y 2. De forma similar, las líneas cuarta y quinta especifican que R_2 (6 k Ω) y C (5 μ F) están conectadas entre los nodos 0 y 2, respectivamente. Para cualquier circuito, es conveniente numerar como cero a uno de los nodos, que se utilizará como nodo de referencia. El conjunto de las sentencias de datos que describen la topología del circuito y los valores de sus elementos se denomina «índice de la red» (*netlist*). La sintaxis de las sentencias de datos se describe en la Sección 15.4.

Sentencias de control y salida

En ausencia de cualquier orden adicional, y utilizando solamente el «índice de la red», Spice calcula automáticamente el estado estacionario de C.C. de las siguientes variables:

- i) Tensión de los nodos con respecto al nodo 0.
- ii) Intensidades que circulan por cada fuente de tensión.
- iii) Potencia disipada en el circuito.

Sin embargo, pueden incluirse sentencias adicionales de control y salida en el fichero fuente para especificar otras variables (ver Sección 15.5).

15.4. SENTENCIAS DE DATOS Y ANÁLISIS EN C.C.

Elementos pasivos

Las sentencias de datos para los elementos de R , L y C contienen un mínimo de tres campos. El primer campo lo forma el nombre del elemento con una cadena de caracteres que empiezan con R , L o C para resistencias, bobinas o condensadores, respectivamente. En el segundo campo aparecen los números de los nodos, separados por un espacio, entre los que se conecta el elemento. El tercer campo contiene el valor del elemento en Ohmios (Ω), Henrios (H) y Faradios (F) utilizando opcionalmente los factores de escala de la Tabla 15.1.

En caso de existir posibles condiciones iniciales, éstas pueden introducirse en un cuarto campo, recurriendo a la forma $IC = xx$. La sintaxis de la sentencia de datos será

$\langle\text{nombre}\rangle \quad \langle\text{nodos}\rangle \quad \langle\text{valores}\rangle \quad [\langle\text{condiciones iniciales}\rangle]$

Los campos entre corchetes son opcionales.

Tabla 15.1. Factores de escala y símbolos

Factor de escala	Símbolo	Valor numérico
femto	f	$10^{-15} = 1E-15$
pico	p	$10^{-12} = 1E-12$
nano	n	$10^{-9} = 1E-9$
micro	u	$10^{-6} = 1E-6$
milli	m	$10^{-3} = 1E-3$
kilo	k	$10^3 = 1E3$
mega	meg	$10^6 = 1E6$
giga	g	$10^9 = 1E9$
tera	t	$10^{12} = 1E12$

EJEMPLO 15.2. Escribir las sentencias de datos para R , L y C de la Figura 15.2.

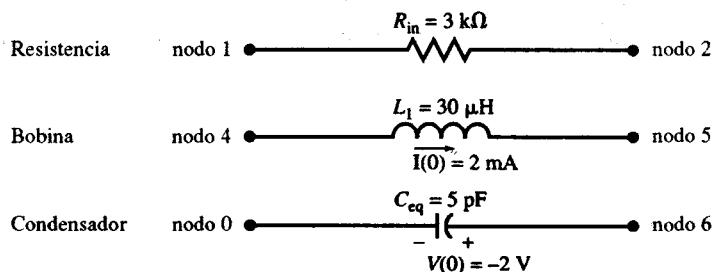


Figura 15.2.

Elemento	<nombre>	<nodos>	<valores>	[<condiciones iniciales>]
Resistencia	Rin	1 2	3 k	
Bobina	L1	5 4	30 uH	$IC = -2 \text{ mA}$
Condensador	Ceq	6	5 pF	$IC = -2 \text{ V}$

La tercera sentencia para la conexión del condensador especifica un nodo únicamente. El nodo que falta se supone que, por defecto, es el nodo de referencia.

Fuentes independientes

Las fuentes independientes se especifican de la siguiente forma:

<nombre> **<nodos>** **<tipo>** **<valores>**

El **<tipo>** para las fuentes de corriente continua y de corriente alterna es DC y AC, respectivamente. En la Sección 15.12 se describirán otros modelos de fuentes dependientes del tiempo. Los nombres de las fuentes de tensión e intensidad comienzan con V e I, respectivamente. Para las fuentes de tensión, el primer nodo indica el terminal positivo (o de mayor tensión). La intensidad en las fuentes de intensidad circula desde el primer nodo al segundo.

EJEMPLO 15.3. Escribir las sentencias de datos para las fuentes de la Figura 15.3.

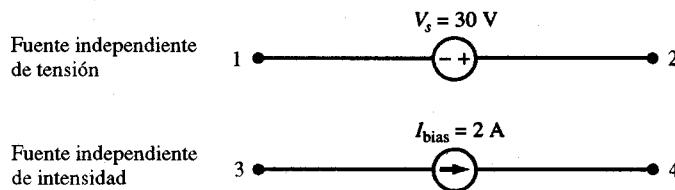


Figura 15.3.

Fuente	$\langle \text{nombre} \rangle$	$\langle \text{nodos} \rangle$	$\langle \text{tipo} \rangle$	$\langle \text{valor} \rangle$
Fuente independiente de tensión	V_s	2 1	DC	30 V
Fuente independiente de intensidad	I_{bias}	3 4	DC	2 A

EJEMPLO 15.4. Escribir el «índice de la red» para el circuito de la Figura 15.4(a) y ejecutar PSpice para el análisis de C.C.

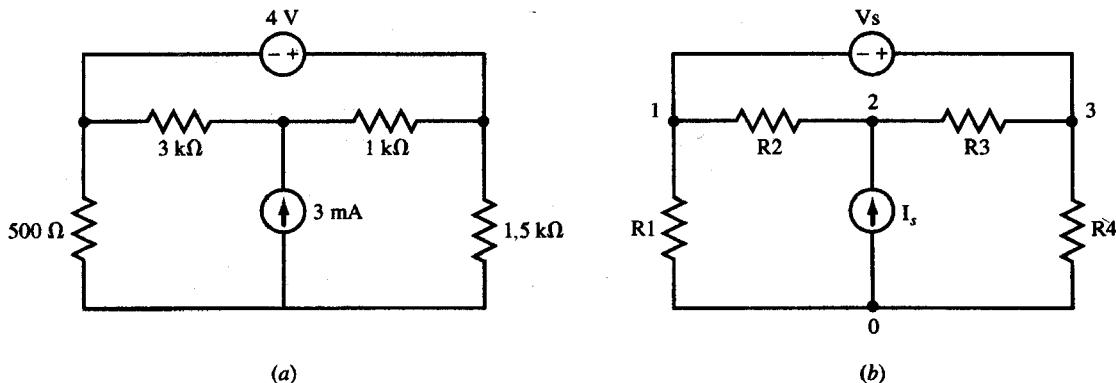


Figura 15.4.

Primero se enumeran los nodos y se asigna un nombre a los elementos como en la Figura 15.4(b). El «índice de la red» es:

Análisis de C.C., Figura 15.4

R1	0	1	500
R2	1	2	3 k
R3	2	3	1 k
R4	0	3	1,5 k
Vs	3	1	DC 4 V
Is	0	2	DC 3 mA
.END			

Los resultados se escriben en el fichero de salida, tal y como se muestra a continuación:

NODO (1)	TENSIÓN 0,1250	NODO (2)	TENSIÓN 5,3750	NODO (3)	TENSIÓN 4,1250
INTENSIDAD DE FUENTE DE TENSIÓN					
NOMBRE Vs	INTENSIDAD - 1,500E - 03				
DISIPACIÓN TOTAL DE POTENCIA			6,00E - 03	WATTS	

Fuentes dependientes

Las fuentes linealmente dependientes se especifican como

⟨nombre⟩ ⟨nodos⟩ ⟨control⟩ ⟨ganancia⟩

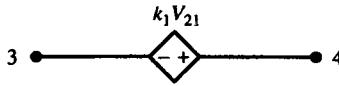
Cada nombre de la fuente debe comenzar con una determinada letra, de acuerdo con la regla siguiente:

Fuente de tensión controlada por tensión	Exx
Fuente de intensidad controlada por intensidad	Fxx
Fuente de intensidad controlada por tensión	Gxx
Fuente de tensión controlada por intensidad	Hxx

El orden de los nodos es similar al de las fuentes independientes. Para las fuentes controladas por tensión, ⟨control⟩ es el par de nodos cuya diferencia de potencial controla la fuente, con el primer nodo indicando el terminal positivo (+). La ⟨ganancia⟩ es el factor de proporcionalidad.

EJEMPLO 15.5. Escribir las sentencias de datos para las fuentes controladas por tensión de la Figura 15.5.

Fuente de tensión controlada por tensión (VCTS)



Fuente de intensidad controlada por tensión (VCCS) V_{21}



Figura 15.5.

Fuente	⟨nombre⟩	⟨nodos⟩	⟨control⟩	⟨ganancia⟩
VCVS	E1	4 3	2 1	k1
VCCS	G1	5 6	2 1	k2

En el caso de las fuentes controladas por intensidad, primero se introduce una fuente de tensión de valor 0 (o *falsa tensión* V_{dmy}), cuyo nombre se usa como variable de control, en el camino de la intensidad que realiza el control.

EJEMPLO 15.6. Escribir las sentencias de datos para las fuentes controladas por intensidad de la Figura 15.6.

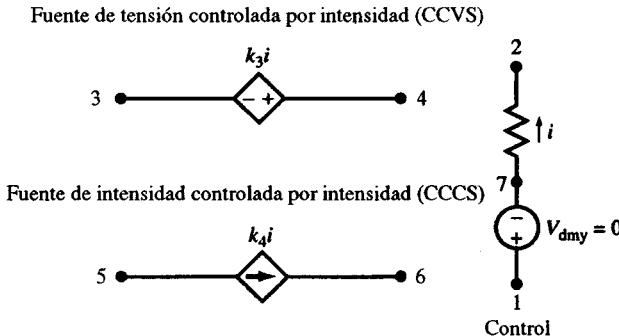


Figura 15.6.

Introducir V_{dmy} (V_{dmy}) con la intensidad i entrando a la fuente por el nodo 1.

V _{dmy}	1	7	DC	0
------------------	---	---	----	---

Las sentencias de datos para la fuentes controladas son:

Fuente	<nombre>	<nodos>	<control>	<ganancia>
CCVS	H1	4 3	V _{dmy}	k3
CCCS	F1	5 6	V _{dmy}	k4

EJEMPLO 15.7. Escribir el «índice de la red» para el circuito de la Figura 15.7(a) y ejecutar PSpice para un análisis de C.C.

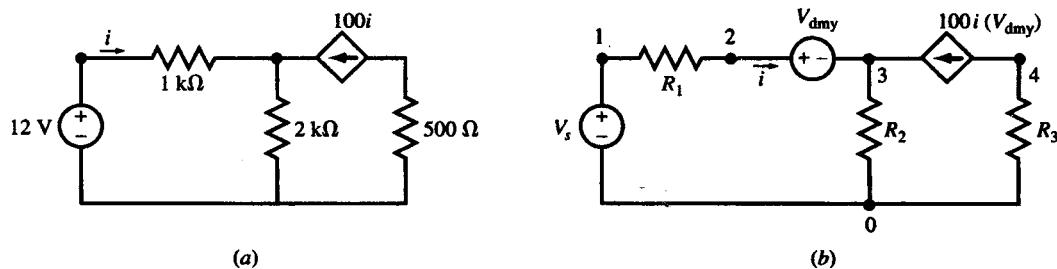


Figura 15.7.

Numerar los nodos y denominar los elementos como en la Figura 15.7(b). Entonces, el «índice de la red» es:

Análisis de C.C. de fuente dependiente, Figura 15.7

```

Vs      1  0          DC      12
R1      1  2          1 k
R2      0  3          2 k
R3      0  4          500
Vdmy    2  3          0
F1      4  3          Vdmy     100
.END

```

Los resultados en el fichero de salida son

NODO	TENSIÓN	NODO	TENSIÓN	NODO	TENSIÓN	NODO	TENSIÓN
(1)	12,0000	(2)	11,9410	(3)	11,9410	(4)	-2,9557

INTENSIDAD DE FUENTE DE TENSIÓN

NOMBRE	INTENSIDAD
Vs	-5,911E-05
Vdmy	5,911E-05

DISIPACIÓN TOTAL DE POTENCIA 7,09E-04 WATTS

15.5. SENTENCIAS DE CONTROL Y DE SALIDA EN ANÁLISIS DE C.C.

Existe un grupo de sentencias para determinar los posibles formatos de salida. Algunos ejemplos son:

.OP imprime el punto de operación de C.C. de todas las fuentes independientes.
.DC hace un barrido del valor de una fuente independiente de C.C. La sintaxis es

.DC <nombre> <valor inicial> <valores finales> <tamaño del intervalo>

.PRINT imprime el valor de las variables. La sintaxis es

.PRINT <tipo> <variables de salida>

<tipo> es C.C., C.A. o TRAN (transitoria).

.PLOT imprime las variables en línea. La sintaxis es

.PLOT <tipo> <variables de salida>

.PROBE genera un fichero de datos *.DAT que puede dibujarse posteriormente al análisis llamando al programa Probe. La sintaxis es

.PROBE [<variables de salida>]

EJEMPLO 15.8. Determinar el valor de V_s en el circuito de la Figura 15.8, tal que la potencia disipada en la resistencia de $1\text{ k}\Omega$ sea cero. Usar el comando .DC para hacer un barrido de VS desde 1 a 6 V en intervalos de 1 V y utilizar .PRINT para mostrar $I(V_s)$, $V(1,2)$ y $V(2)$.

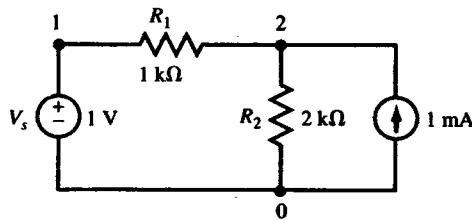


Figura 15.8.

El fichero fuente es

Barrido de C.C., Figura 15.8

```

Vs      1    0    DC      1 V
Is      0    2    DC      1 mA
R1      1    2    1 k
R2      0    2    2 k
.DC    Vs   1    6      1
.PRINT .DC    I(Vs)    V(1,2)    V(2)
.END

```

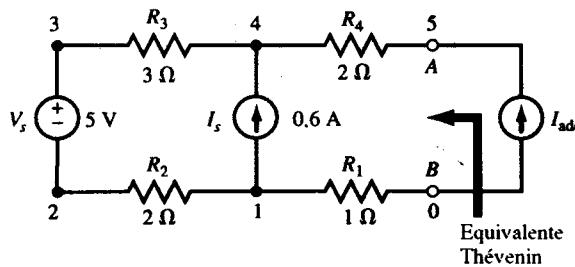
Los resultados en el fichero de salida son

CURVAS DE TRANSFERENCIA DE C.C.

Vs	I(Vs)	V(1,2)	V(2)
1,000E + 00	3,333E - 04	- 3,333E - 01	1,333E + 00
2,000E + 00	- 1,333E - 12	1,333E - 09	2,000E + 00
3,000E + 00	- 3,333E - 04	3,333E - 01	2,667E + 00
4,000E + 00	- 6,667E - 04	6,667E - 01	3,333E + 00
5,000E + 00	- 1,000E - 03	1,000E + 00	4,000E + 00
6,000E + 00	- 1,333E - 03	1,333E + 00	4,667E + 00

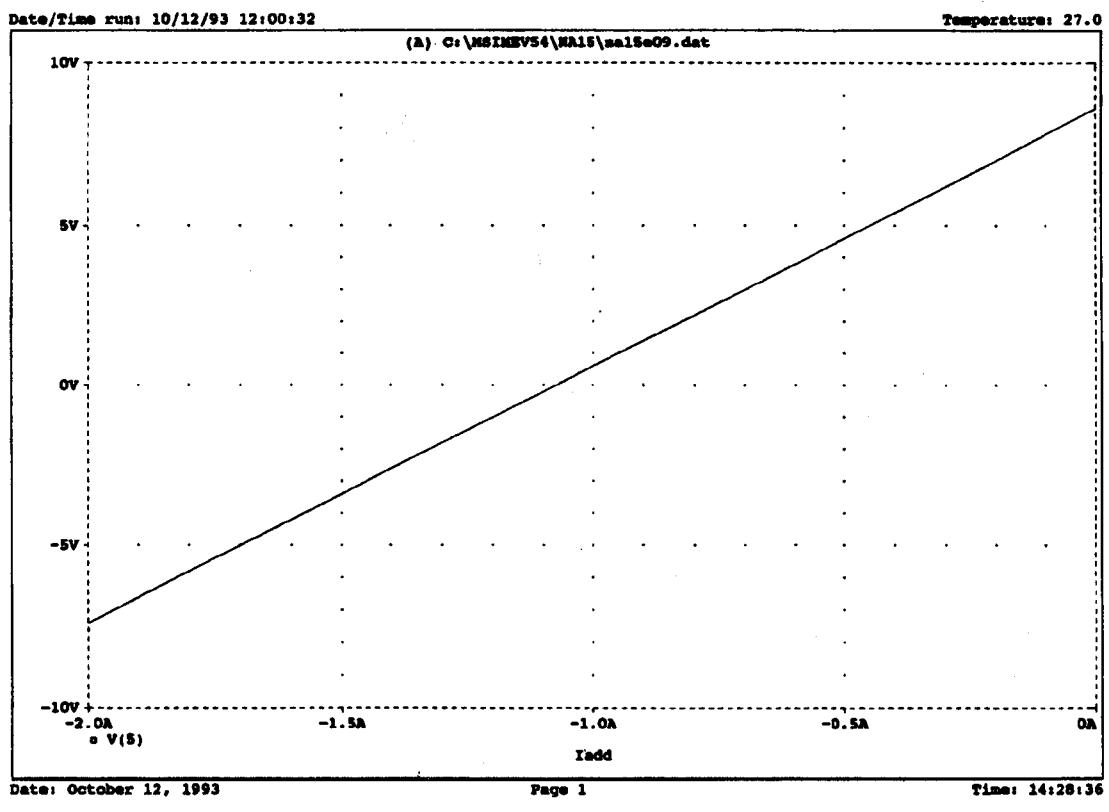
La respuesta es $V_s = 2$ V.

EJEMPLO 15.9. Escribir el fichero fuente para el circuito de la Figura 15.9(a) utilizando los comandos .DC, .PLOT y .PROBE, para encontrar la ecuación característica de I - V con I variando desde 0 a -2 A entre los terminales AB.



(a)

Figura 15.9 (continúa).



(b)

Figura 15.9 (continuación).

En primer lugar se conecta una fuente de intensidad de C.C. I_{add} entre los terminales AB , haciendo un barrido de su valor desde 0 a -2 A utilizando el comando $.DC$, y se dibuja la gráfica de V frente a I . Como el circuito es lineal, es suficiente con sólo dos puntos. Sin embargo, para clarificar la gráfica, en el fichero fuente del ejemplo se han incluido diez intervalos, como se ve a continuación.

Características del terminal, Figura 15.9

Iadd	0	5	DC	0
Is	0	4	DC	0,6 A
Vs	3	2	DC	5 V
R1	0	1		1
R2	1	2		2
R3	3	4		3
R4	4	5		2
.DC	Iadd	0	-2	0,2
.PLOT	DC		V(5)	
.PROBE				
.END				

La salida se muestra en la Figura 15.9(b). La ecuación de $I-V$ es $V = 8I + 8,6$.

15.6. EQUIVALENTE THÉVENIN

Sentencia .TF

El comando .TF obtiene la *función de transferencia* desde una variable de entrada a una variable de salida y da el valor de las resistencias vistas por las dos fuentes. Puede, por tanto, generar el equivalente Thévenin de un circuito resistivo. La sintaxis es

.TF <variable de salida> <variable de entrada>

EJEMPLO 15.10. Utilizar el comando .TF para encontrar el equivalente Thévenin del circuito visto desde los terminales AB de la Figura 15.10.

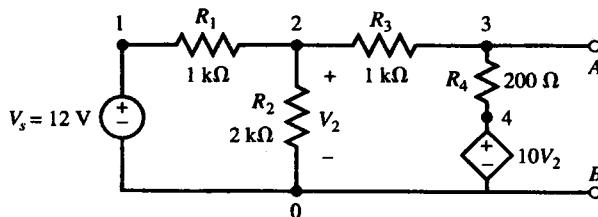


Figura 15.10.

Los números de los nodos y los nombres de los elementos se muestran en la Figura 15.10. El fichero fuente es

Función de transferencia de la Figura 15.10

Vs	1	0	DC	12
E1	4	0	2	0
R1	1	2	1 k	
R2	2	0	2 k	
R3	2	3	1 k	
R4	3	4	200	
.TF	V(3)		Vs	
.END				

El fichero de salida contiene los siguientes resultados:

NODO	TENSIÓN	NODO	TENSIÓN	NODO	TENSIÓN	NODO	TENSIÓN
(1)	12,0000	(2)	-2,0000	(3)	-17,0000	(4)	-20,0000

INTENSIDAD DE FUENTE DE TENSIÓN

NOMBRE INTENSIDAD

Vs -1,400E-02

DISIPACIÓN TOTAL DE POTENCIA 1,68E-01 WATTS

CARACTERÍSTICAS DE LA SEÑAL

V(3)/Vs = -1,417E+00

RESISTENCIA DE ENTRADA PARA Vs = 8.571E+02

RESISTENCIA DE SALIDA PARA V(3) = -6,944E+01

Por tanto, $V_{Th} = -1,417(12) = -17$ V y $R_{Th} = -69,44 \Omega$.

15.7. CIRCUITOS AMPLIFICADORES OPERACIONALES

Los amplificadores operacionales (amp op) pueden modelizarse mediante una elevada impedancia de entrada y fuentes de tensión controladas por tensión con grandes ganancias. El modelo puede usarse repetidamente dentro de un «índice de la red».

EJEMPLO 15.11. Encontrar la función de transferencia V_3/V_s en el circuito operacional amplificador ideal de la Figura 15.11(a).

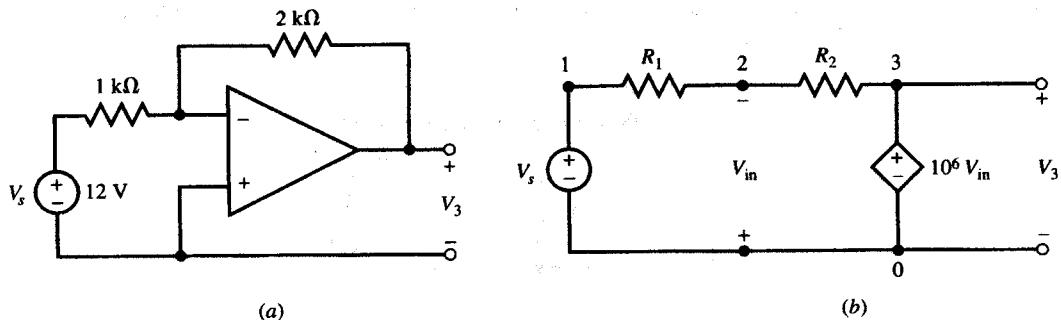


Figura 15.11.

El amp op se sustituye por una fuente de tensión dependiente por tensión con una ganancia de 10^6 [ver Figura 15.11(b)]. El fichero fuente es

Invirtiendo el circuito amp op, Figura 15.11

```

Vs      1  0      DC      12
E1      3  0      0  2      1E6
R1      1  2      1 k
R2      2  3      2 k
.TF    V(3)  Vs
.END

```

La función de transferencia se escribe en el fichero de salida.

NODO	TENSIÓN	NODO	TENSIÓN	NODO	TENSIÓN
(1)	12,0000	(2)	24,00E-06	(3)	-24,0000

INTENSIDAD DE FUENTE DE TENSIÓN

NOMBRE INTENSIDAD

Vs -1,200E-02

DISIPACIÓN TOTAL DE POTENCIA 1,44E-01 WATTS

CARACTERÍSTICAS DE LA SEÑAL

$V(3)/V_s = -2,000E+00$

RESISTENCIA DE ENTRADA PARA $V_s = 1,000E+03$

RESISTENCIA DE SALIDA PARA $V(3) = 0,000E+00$

Sentencia .SUBCKT

Un *subcicuito* se define por un conjunto de sentencias empezando con

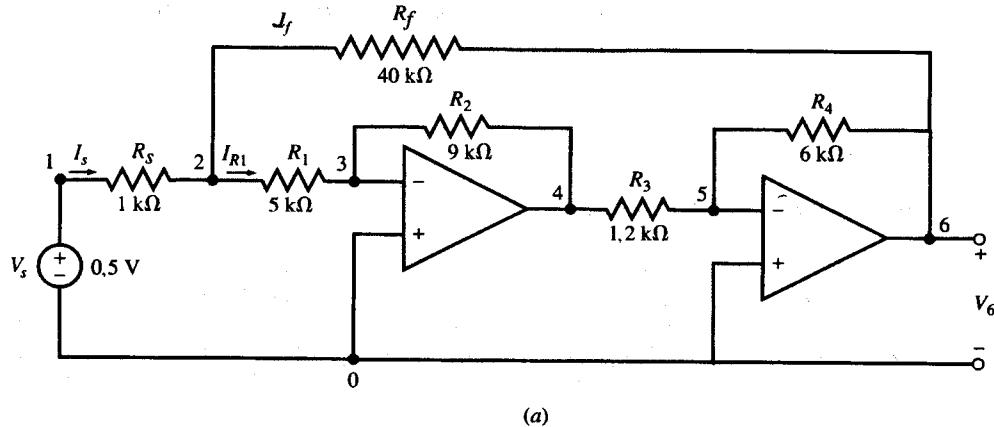
.SUBCKT <nombre> <terminales externos>

y terminando con una sentencia .ENDS. Dentro de un «índice de la red» se hace referencia a un subcicuito mediante

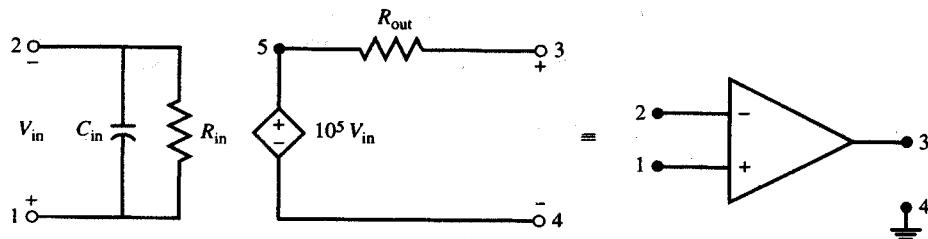
Xaa <nombre> <nodos>

Por tanto, la sentencia .SUBCKT puede asignar un nombre al modelo de un amp op para su uso repetido.

EJEMPLO 15.12. Dado del circuito de la Figura 15.12(a), determinar I_s , I_f , V_2 y V_6 con V_s variando desde 0,5 a 2 V en intervalos de 0,5 V. Suponer un amp op [Figura 15.12(b)] con $R_{in} = 100 \text{ k}\Omega$, $C_{in} = 10 \text{ pF}$, $R_{out} = 10 \text{ k}\Omega$ y una ganancia en circuito abierto de 10^5 .



(a)



(b)

Figura 15.12.

El fichero fuente emplea el subcircuito de la Figura 15.12(b), denominado OPAMP, cuya descripción empieza con .SUBCKT y termina con .ENDS. Las sentencias X1 y X2 describen los dos amp op refiriéndose a un subcircuito OPAMP. Obsérvese la correspondencia entre las conexiones de los nodos en las sentencias X1 y X2 con la de los terminales externos especificados en la sentencia .SUBCKT. El fichero fuente es

Circuito amp op de la Figura 15.12 utilizando .SUBCKT

```
.SUBCKT
Rin      1 2      OPAMP    1 2 3 4
Cin      1 2      10 E5
Rout     3 5      10 pF
Eout     5 4      10 k
.ENDS
Vs       1 0      DC        0,5
Rs       1 2      1 k
R1       2 3      5 k
R2       3 4      9 k
R3       4 5      1,2 k
R4       5 6      6 k
Rf       6 2      40 k
X1       0 3      4 0      OPAMP
X2       0 5      6 0      OPAMP
.DC      Vs       0,5      2 0,5
.PRINT   DC       V(2)     V(6)      I(Vs)      I(R1)      I(Rf)
.TF      V(6)     Vs
.END
```

El fichero de salida es

CURVAS DE TRANSFERENCIA DE C.C.

Vs	V(2)	V(6)	I(Vs)	I(R1)	I(Rf)
5,000E + 01	5,000E - 01	4,500E - 00	- 3,372E - 09	1,000E - 04	9,999E - 0
1,000E + 00	1,000E + 00	9,000E + 00	- 6,745E - 09	2,000E - 04	2,000E - 0
1,500E + 00	1,500E + 00	1,350E + 01	- 1,012E - 08	3,000E - 04	3,000E - 0
2,000E + 00	2,000E + 00	1,800E + 01	- 1,349E - 08	4,000E - 04	4,000E - 0

NODO	TENSIÓN	NODO	TENSIÓN	NODO	TENSIÓN	NODO	TENSIÓN
(1)	0,500	(2)	0,500	(3)	9,400 - 06	(4)	- 0,9000
(5)	- 13,00E - 06	(6)	4.4998	(X1,5)	- 9,3996	(X2,5)	12,9990

INTENSIDAD DE FUENTE DE TENSIÓN

NOMBRE INTENSIDAD

Vs - 3,372E - 09

DISIPACIÓN TOTAL DE POTENCIA 1,69E - 09 WATTS

CARACTERÍSTICAS DE LA SEÑAL

V(6)/Vs = 9,000E + 00

RESISTENCIA DE ENTRADA PARA Vs = 1,483E + 08

RESISTENCIA DE SALIDA PARA V(6) = 7,357E - 02

No hay caída de tensión en R_s . Por tanto, $V(2) = V_s$ y la ganancia total es $V(6)/V_s = V(2)/V_s = 9$. La corriente que circula por R_1 se suministra a través de la resistencia de realimentación R_f .

15.8. ESTADO ESTACIONARIO EN C.A. Y RESPUESTA EN FRECUENCIA

Fuentes de C.A. independientes

Las fuentes independientes de C.A. se describen mediante sentencias que tienen la siguiente sintaxis:

`<nombre> <nodos> AC <módulo> <fase en grados>`

Las fuentes de tensión empiezan con V y las fuentes de intensidad con I. La convención para el sentido del fasor es la misma que la correspondiente a las fuentes de C.C.

EJEMPLO 15.13. Escribir las sentencias de datos para las fuentes de la Figura 15.13.

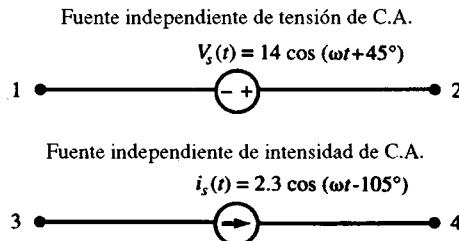


Figura 15.13.

Fuente de C.A.	<code><nombre></code>	<code><nodos></code>	<code><tipo></code>	<code><módulo></code>	<code><fase></code>
Tensión	Vs	2 1	AC	14	45
Intensidad	Is	3 4	AC	2,3	-105

Sentencia .AC

El comando .AC hace un barrido de la frecuencia de todas las fuentes de C.A. del circuito entre un rango de valores deseado o la deja en un valor determinado. La sintaxis es

`.AC <tipo de barrido> <n.º de puntos> <f inicial> <f final>`

Para el estado estacionario de C.A., `<tipo de barrido>` es LIN. Para tener una única frecuencia las frecuencias inicial y final son las del valor deseado y el número de puntos es uno.

Sentencias .PRINT AC y .PLOT AC

La sentencia .PRINT AC imprime los módulos y la fase de la salida estacionaria. La sintaxis es

`.PRINT AC <módulos> <fases>`

Los módulos y fases de las tensiones son V_m (variable) y V_p (variable), respectivamente, y los módulos y fases de las intensidades son I_m (variable) e I_p (variable), respectivamente. La sentencia para .PLOT AC es similar a la de .PRINT AC.

EJEMPLO 15.14. En el circuito serie RLC de la Figura 15.14(a) variar la frecuencia de la fuente desde 40 a 60 kHz en 200 intervalos. Determinar el módulo y la fase de la intensidad I utilizando .PLOT y .PROBE.

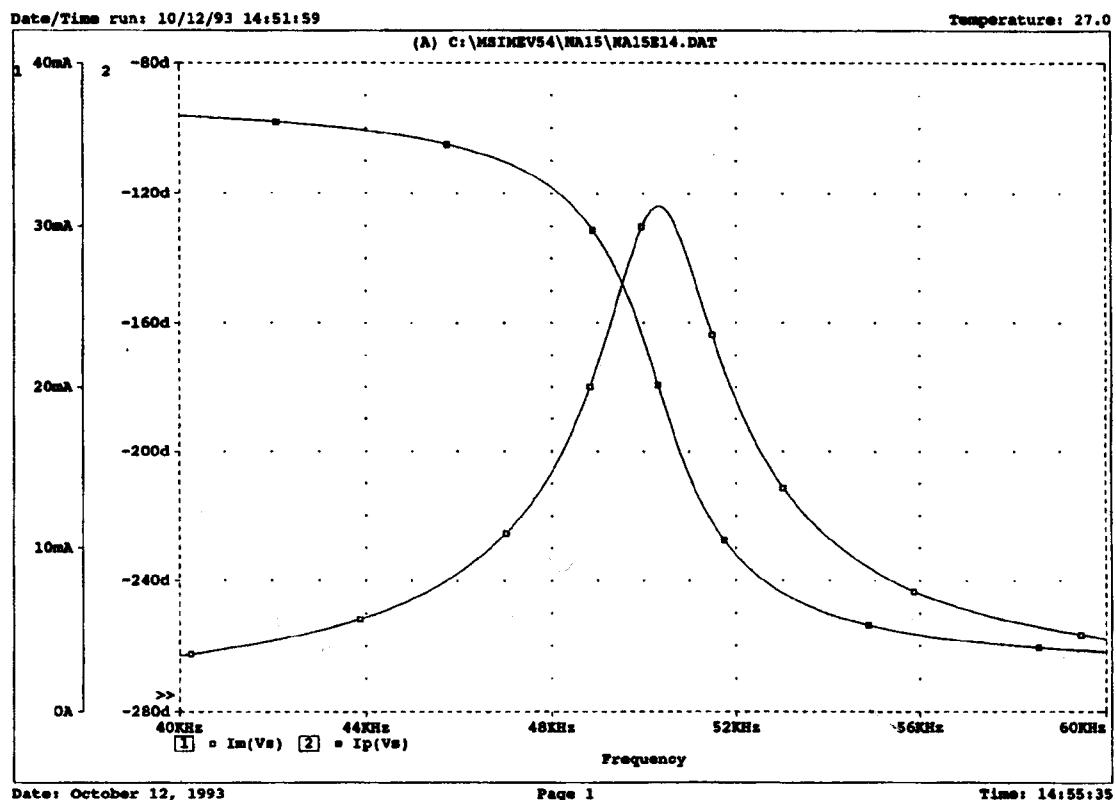
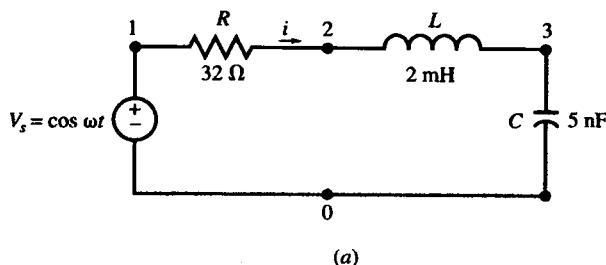


Figura 15.14.

El fichero fuente es

Análisis de C.A. del circuito serie RLC, Figura 15.14

```

Vs      1  0      AC      1  0
R       1  2      32
L       2  3      2 m
C       3  0      5 n
.AC     LIN      200    40 k  60 k
.PLOT   AC       Ip(Vs)  Im(Vs)
.PROBE  Vm(1,2)  Vm(2,3) Vm(3)   Im(Vs)  Ip(Vs)
.END

```

La gráfica de la respuesta en frecuencia, obtenida mediante Probe, se muestra en la Figura 15.14(b).

15.9. INDUCTANCIA MUTUA Y TRANSFORMADORES

La inductancia mutua entre inductores se determina mediante una herramienta cuyo nombre empieza con K. La sintaxis de la sentencia de datos es

`<nombre> <inductor 1> <inductor 2> <coeficiente de acoplamiento>`

Para determinar el signo del término de la inductancia mutua se sigue la regla del punto. Según esta regla, el primer nodo que se introduce en la sentencia de datos ha de coincidir con el extremo con punto de cada inductor.

EJEMPLO 15.15. Escribir las tres sentencias de datos que describen las bobinas acopladas de la Figura 15.15.

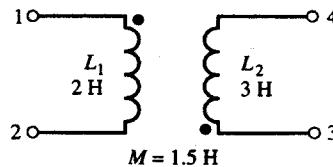


Figura 15.15.

El coeficiente de acoplamiento es $k_{12} = 1,5/\sqrt{2(3)} = 0,61$. El contenido del «índice de la red» es el siguiente:

L1	1	2	2
L2	3	4	3
K12	L1	L2	0,61

EJEMPLO 15.16. Obtener la gráfica de la impedancia $Z_{in} = V_1/I_1$ en el circuito de la Figura 15.16(a) para f variando de 0,01 a 1 Hz.

Para determinar Z_{in} se conecta una fuente de intensidad de 1 A de C.A., en el sentido que va desde el nodo 0 al nodo 1 y se obtiene la gráfica del módulo y fase de la tensión $V(1)$ entre los extremos de la impedancia. El fichero fuentes es

Análisis de C.A. de bobinas acopladas, Figura 15.16

```

IADD      0      1      AC      1      0
C         0      1      1 000 000  $\mu$ F
R         0      2      3
L1        1      2      2 H
L2        3      2      5 H
K12       L1     L2     0,6325 H
L3        0      3      1 H
.AC        LIN    20    0,01   1
.PRINT    AC     Vm(1)   Vp(1)
.PROBE
.END

```

$V_m(1)$ y $V_p(1)$, que son el módulo y fase de Z_{in} , se dibujan utilizando Probe y la gráfica es la que se muestra en la Figura 15.16(b). Nótese que el máximo ocurre cerca de 100 mHz.

15.10. HERRAMIENTAS DE MODELIZACIÓN PARA LA VARIACIÓN DE PARÁMETROS

Sentencia .MODEL

Los parámetros de un elemento pasivo pueden variarse utilizando la sentencia .MODEL. La sintaxis es

```
.MODEL      <nombre>      <tipo>      [(<parámetro> = <valor>)]
```

donde <nombre> es el nombre asignado al elemento. Para los elementos lineales pasivos, <tipo> es

RES para resistencia
 IND para bobina
 CAP para condensador

Se puede hacer un barrido del parámetro del modelo entre un rango deseado, según los intervalos que se quieran, utilizando la sentencia .STEP:

```
.STEP LIN  <nombre>  <valor inicial>  <valor final>  <tamaño del intervalo>
```

Como ejemplo, las siguientes sentencias utilizan los comandos .MODEL y .STEP para definir una resistencia denominada estufa cuyo valor en ohmios varía de 20 a 40 Ω en 5 intervalos, siendo éstos 20, 25, 30, 35 y 40 Ω .

```

.MODEL      estufa      RES(R = 20)
.STEP      RES        estufa(R)      20      40      5

```

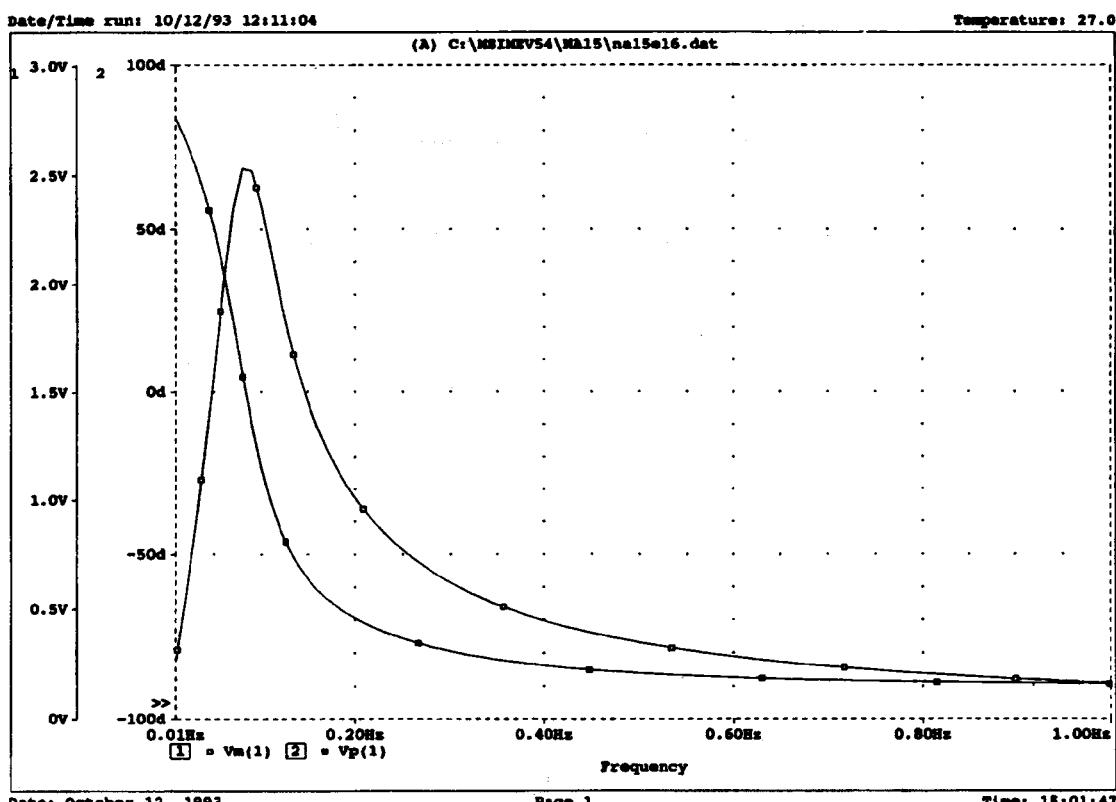
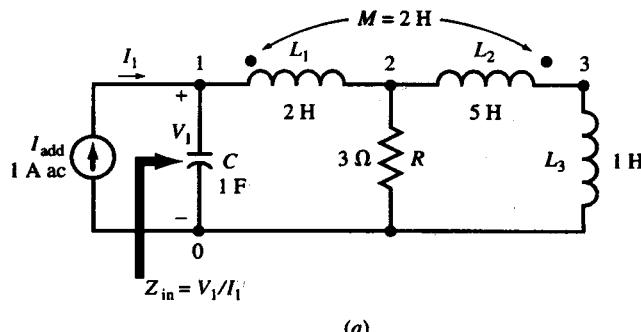


Figura 15.16.

EJEMPLO 15.17. Utilizar Probe para obtener la gráfica de V en el circuito de la Figura 15.17(a) con f variando de 1 a 3 kHz en 100 intervalos. Obtener asimismo la gráfica de R desde 500Ω a $1 \text{ k}\Omega$ en intervalos de 100Ω .

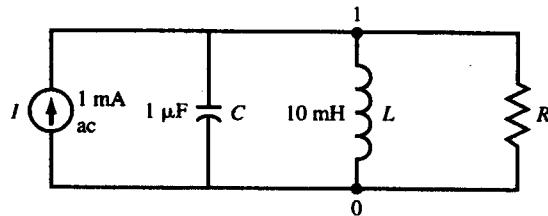
Utilizando el comando .MODEL se crea la resistencia «RLeak», y se varía su valor mediante .STEP en el fichero fuente siguiente. La gráfica de la respuesta en frecuencia de V frente a f se dibuja utilizando Probe y se muestra en la Figura 15.17(b).

Resonancia paralelo con la variable R , Figura 15.17

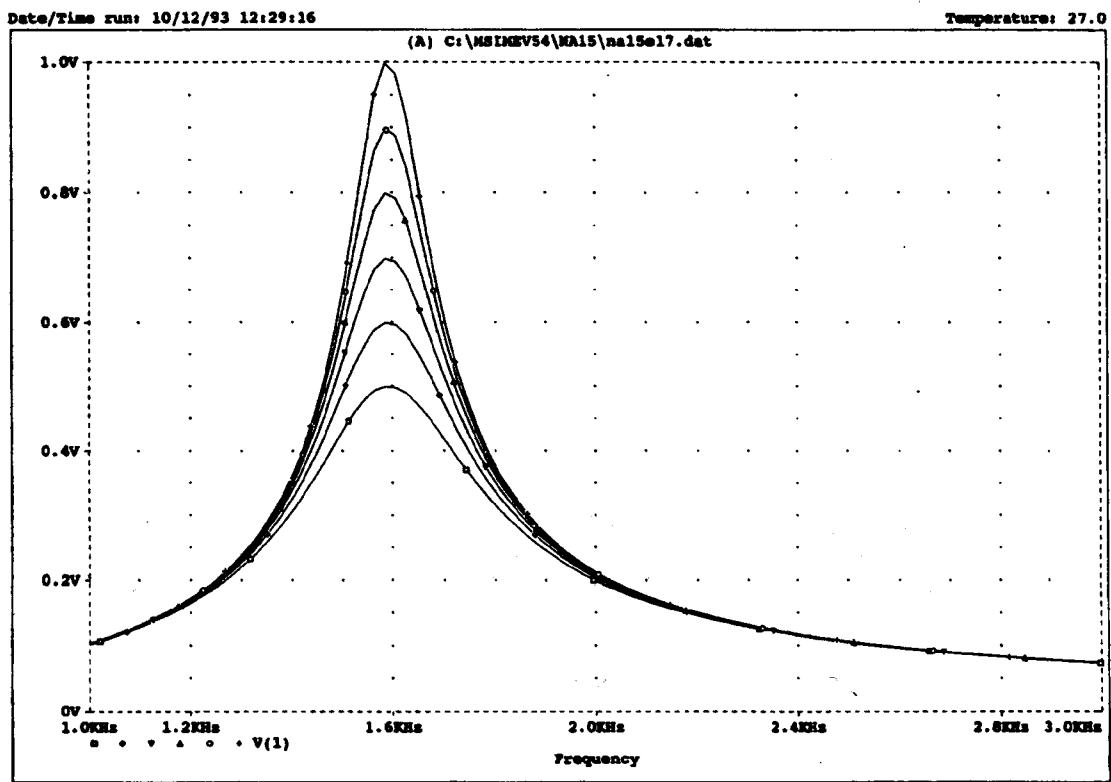
```

I      0   1          AC      1 m   0
R      1   0          RLeak    1
L      1   0          10 m
C      1   0          1 u
.MODEL  RLeak    RES(R = 1)
.STEP   LIN      RES      RLeak(R)  500     1 k     100
.AC     LIN      100     1 k     3 k
.PROBE
.END

```



(a)



(b)

Figura 15.17.

15.11. RESPUESTA EN EL TIEMPO Y ANÁLISIS TRANSITORIO

Sentencia .TRAN

Las respuestas en el tiempo, tales como las respuestas naturales a condiciones iniciales en un circuito sin fuentes, y las respuestas a entradas dependientes del tiempo, como la función escalón, la función pulso, la exponencial y otras, se obtienen mediante la sentencia .TRAN. La respuesta comienza en $t = 0$. Los valores del tamaño del incremento y del instante final se dan mediante la siguiente sentencia:

.TRAN <tamaño del incremento> <valor del instante final>

EJEMPLO 15.18. Utilizar .TRAN y .PROBE para obtener la gráfica de la tensión entre los extremos de la combinación paralelo RLC de la Figura 15.18(a) para $R = 50 \Omega$ y 150Ω con $0 < t < 1,4 \text{ ms}$. Las condiciones iniciales son $I(0) = 0,5 \text{ A}$ y $V(0) = 0$.

El fichero fuente es

Circuito paralelo RLC sin fuentes con R variable

```

R      1  0          LOSS      1
L      0  1          10 m     IC = 0,5
C      1  0          1 u      IC = 0
.MODEL LOSS      RES(R = 6)
.STEP   RES      LOSS(R)    50        150        100
.TRAN   2,0E-6    1,4E - 3   UIC
.PROBE
.END

```

La Figura 15.18(b) muestra la gráfica de la tensión obtenida mediante Probe. Para $R = 50 \Omega$ no hay oscilaciones.

15.12. DEFINICIÓN DE OTROS TIPOS DE FUENTES

Las fuentes variables con el tiempo, que incluyan componentes de C.C., C.A. y transitorias, se expresan por

<nombre> <nodos> <comp. de C.C.> <comp. de C.A.> <comp. transitorio>

El valor por defecto para un componente de C.C. o C.A. es cero. El componente transitorio aparece para $t > 0$. Algunos componentes transitorios se describen más adelante.

Fuente exponencial

La fuente comienza con un valor inicial constante V_0 . En t_0 cambia de forma exponencial desde V_0 hasta un valor final V_1 con una constante de tiempo τ_{u1} . En $t = T$ vuelve de forma exponencial a V_0 con una constante de tiempo τ_{u2} . Su sintaxis es

EXP(V_0 V_1 t_0 τ_{u1} T τ_{u2})

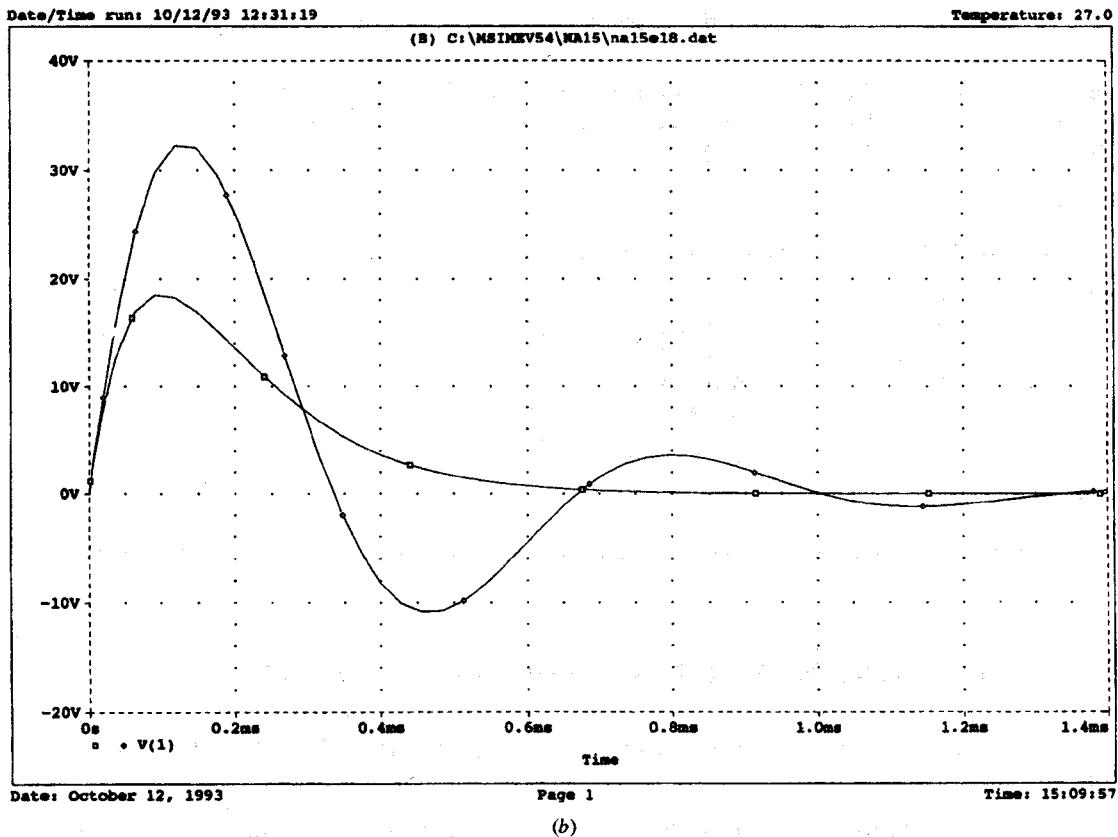
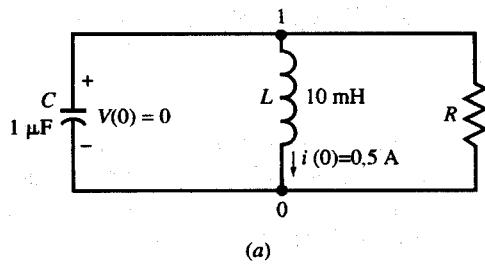


Figura 15.18.

EJEMPLO 15.19. Una fuente de tensión de C.C. de 1 V comienza a incrementar su tensión de forma exponencial en $t = 5 \text{ ms}$, con una constante de tiempo de 5 ms y una asíntota de 3 V. Después de 15 ms disminuye su valor hasta 1 V con una constante de tiempo de 2 ms. Escribir la sentencia de datos para la fuente y utilizar Probe para obtener la gráfica de la forma de onda.

La sentencia de datos es

```
Vs      1  0      EXP(1  2  5 m  5 m  20 m  2 m)
```

La gráfica de la forma de onda es la que se muestra en la Figura 15.19.

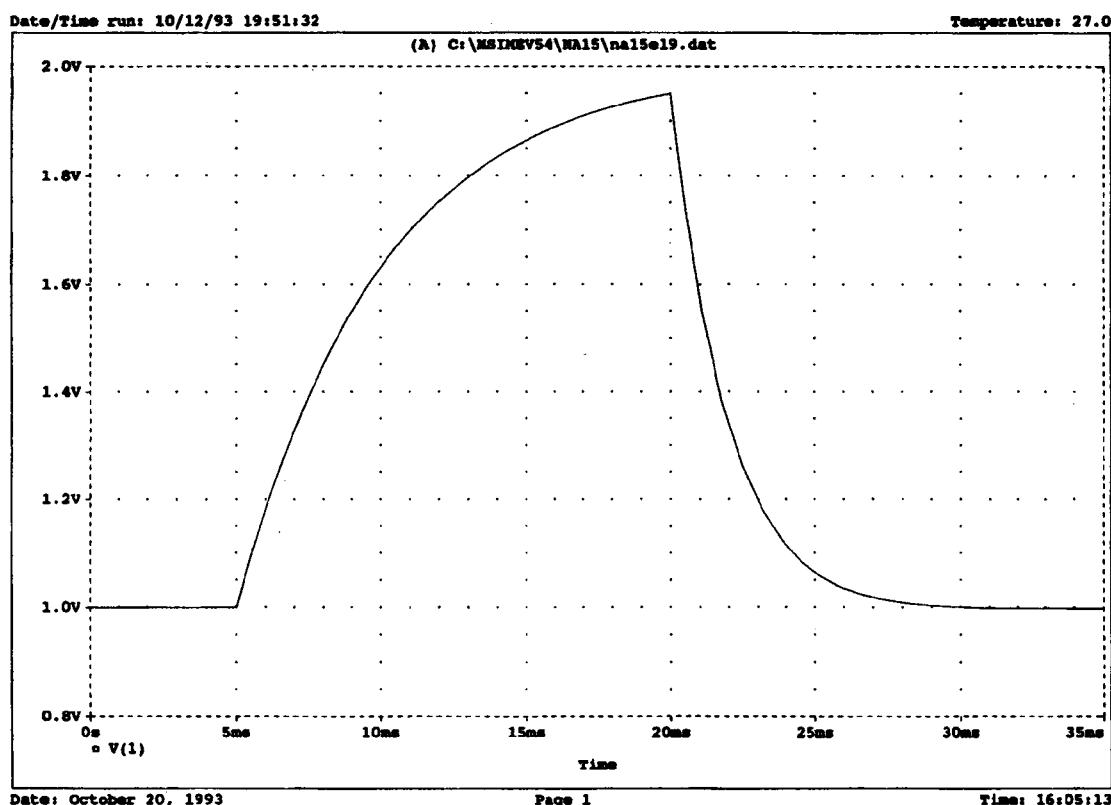


Figura 15.19.

Fuente de pulso

Una forma de onda con un pulso periódico que va de V_0 a V_1 y retorna a V_0 puede representarse por

PULSE(V_0 V_1 retraso tiempo de subida tiempo de caída duración período)

EJEMPLO 15.20. a) Escribir la sentencia de datos para una forma de onda de pulso que cambia 10 veces por segundo entre 1 V y 2 V, con un tiempo de subida y de caída de 2 ms. El pulso permanece en 2 V durante 11 ms. El primer pulso comienza en $t = 5$ ms. b) Utilizando Probe, dibujar la forma de onda de a).

a) La sentencia de datos es

Vs 1 0 PULSE(1 2 5 m 2 m 2 m 11 m 100 m)

b) La forma de onda se muestra en la Figura 15.20.

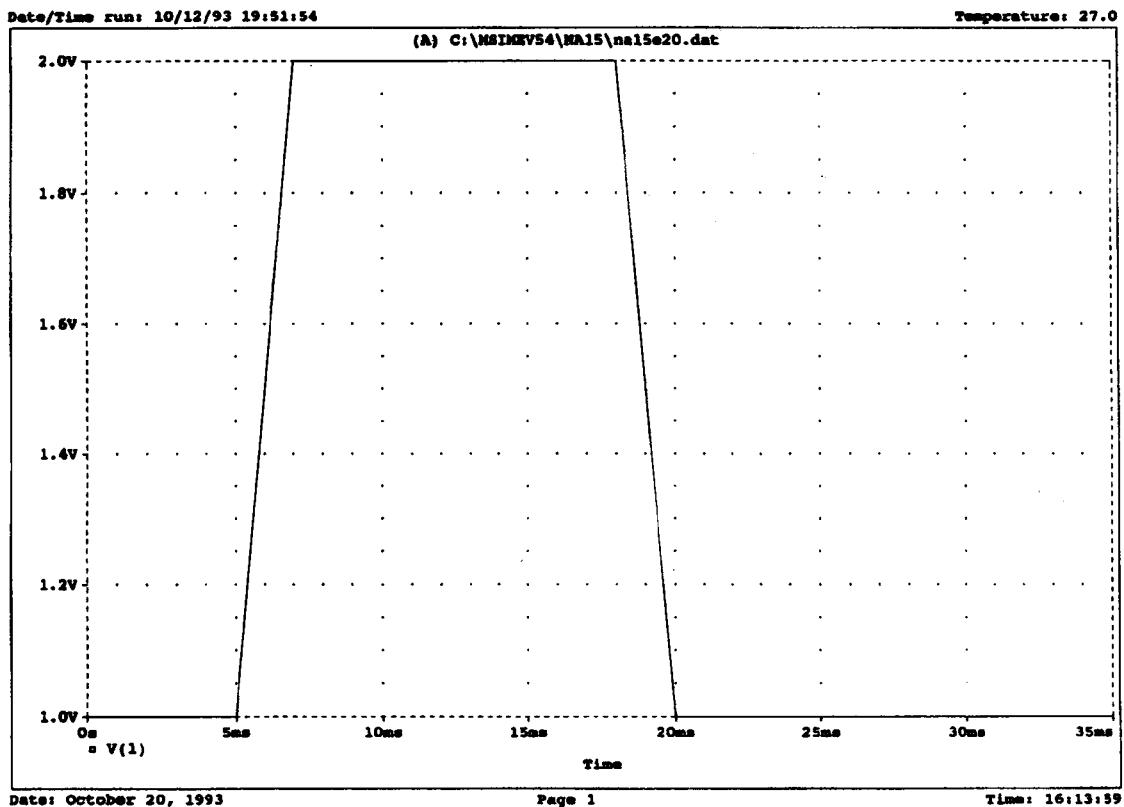


Figura 15.20.

Fuente sinusoidal

La fuente comienza en el instante inicial con un valor constante V_0 . En t_0 se añade una componente exponencial sinusoidal decreciente con frecuencia f , fase, amplitud inicial V_1 y un factor de decrecimiento alfa. La sintaxis para la forma de onda es

$$\text{SIN}(V_0 \quad V_1 \quad f \quad t_0 \quad \text{alfa} \quad \text{fase})$$

EJEMPLO 15.21. a) Escribir la expresión matemática y la sentencia de datos para una fuente de tensión de C.C. de 1 V a la que se añade una onda senoidal de 100 Hz, con fase 0, en $t = 5$ ms. La amplitud de la onda senoidal es 2 V y decrece hasta 0 con una constante de tiempo de 10 ms.
b) Utilizando Probe, obtener la gráfica $V_s(t)$.

- a) El factor de decrecimiento es la inversa de la constante de tiempo y es igual a alfa = $1/0,01 = 100$. Para $t > 0$, la tensión se expresa mediante la función

$$V_s(t) = 1 + 2e^{-100(t - 0.005)} \sin 628,32(t - 0.005)u(t - 0.005)$$

La sentencia de datos es

$$Vs \quad 1 \quad 0 \quad \text{SIN}(1 \quad 2 \quad 100 \quad 5 \text{ m} \quad 100)$$

- b) La forma de onda dibujada se muestra en la Figura 15.21.

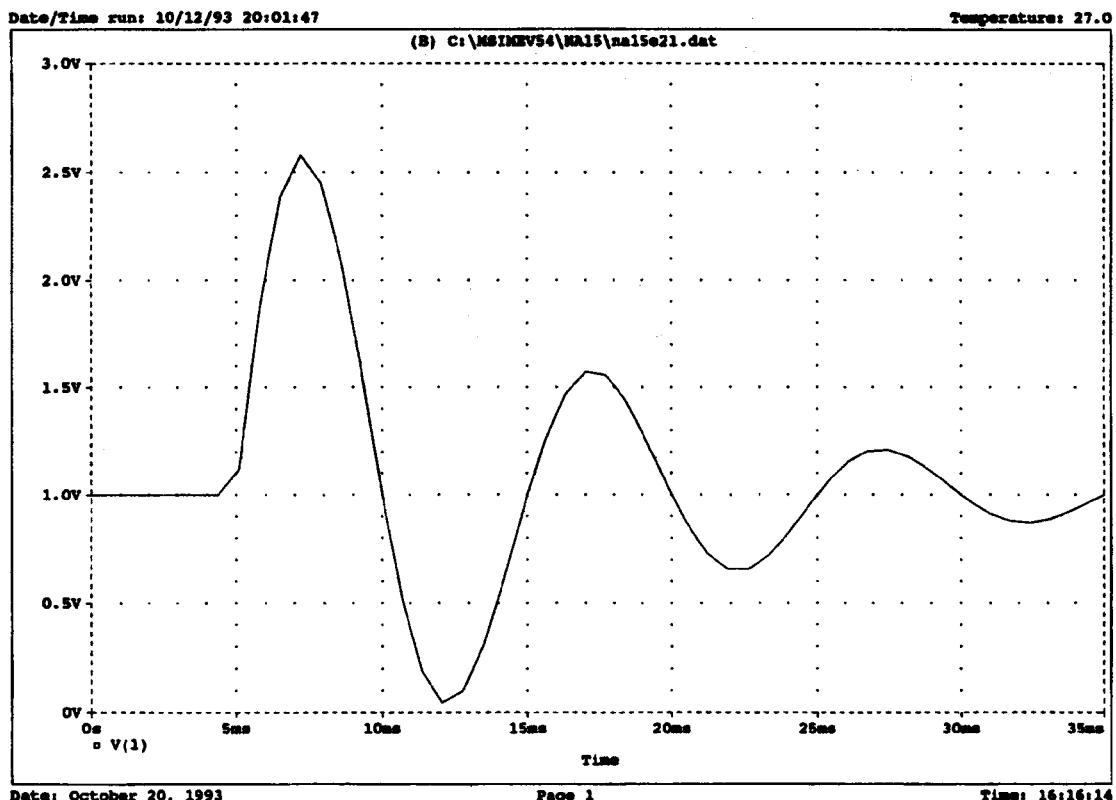


Figura 15.21.

EJEMPLO 15.22. Determinar la caída de tensión entre los extremos de un condensador de $1 \mu\text{F}$, con carga inicial 0, que se conecta a una fuente de tensión a través de una resistencia de $1 \text{k}\Omega$, tal como se muestra en el circuito de la Figura 15.22(a). La fuente de tensión se define mediante

$$V_s = \begin{cases} 15,818 \text{ V} & \text{para } 0 < t < 1 \text{ ms} \\ 10 \text{ V} & \text{para } t > 1 \text{ ms} \end{cases}$$

Se utiliza la forma de onda exponencial para representar V_s . El fichero es

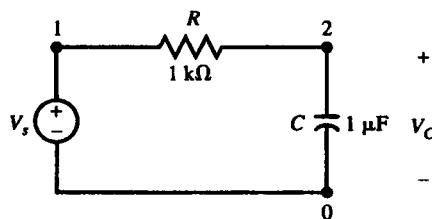
Respuesta de un circuito RC a una función escalón

```

Vs      1  0      EXP(10  15,819  0  1,0E-6  1,0E-3  1,0E-6)
R      1  2      1 k
C      2  0      1 uF
.TRAN  1,0E-6   5,0E-3    UIC
.PROBE
.END
  
```

La gráfica de la tensión entre los extremos del condensador se muestra en la Figura 15.22(b). Mientras se verifica que $0 < t < 1 \text{ ms}$, la respuesta transitoria crece exponencialmente hacia un valor

estacionario de C.C. de 15,819 V. En $t = 1$ ms la respuesta alcanza el valor de 10 V. También en $t = 1$ ms la fuente de tensión cae a 10 mV, ya que al ser iguales las tensiones de la fuente y del condensador, la intensidad en la resistencia se hace 0 y se alcanza el estado estacionario. La respuesta transitoria dura sólo 1 ms.



(a)

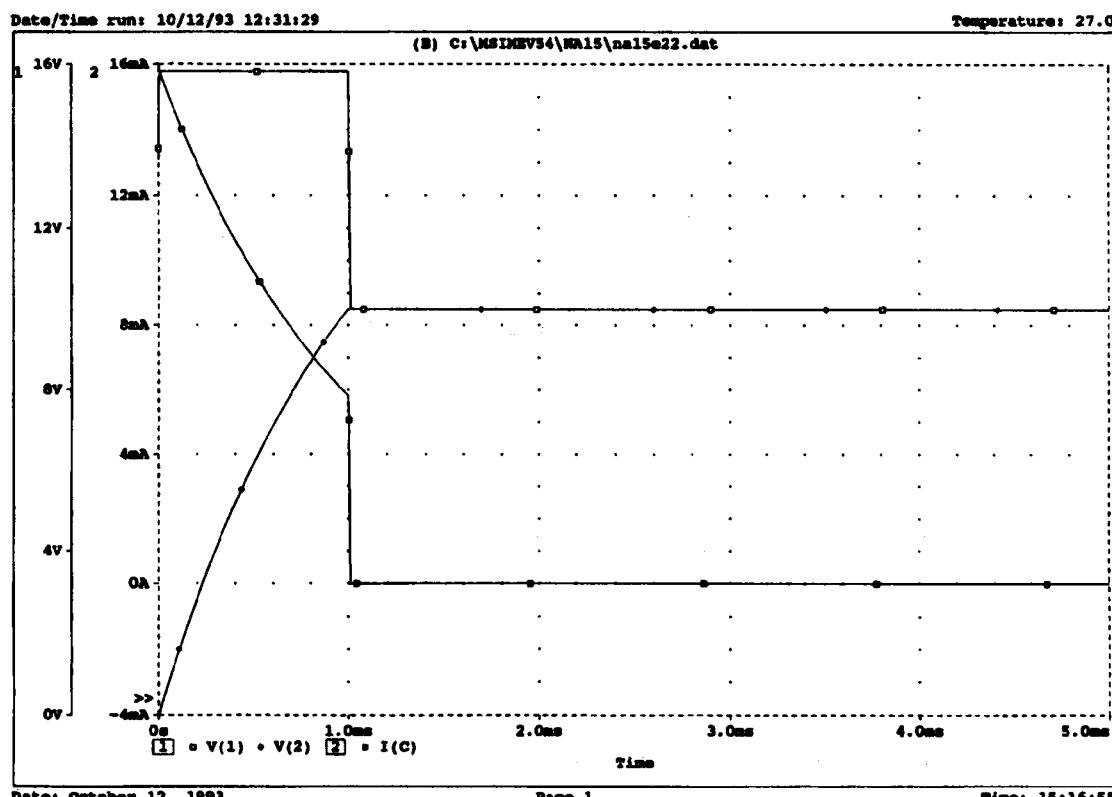


Figura 15.22.

15.13. SUMARIO

Además de los elementos de respuesta lineal y de las fuentes utilizadas en apartados anteriores, pueden incluirse en el «índice de clase» elementos de respuesta no lineal tales como los

diodos (Dxx), transistores de efecto de campo (Jxx), mosfets (Mxx), líneas de transmisión (Txx), interruptores controlados por la tensión (Sxx) e interruptores controlados por la intensidad (Wxx). Para realizar un análisis de sensibilidad se utiliza la sentencia .SENS. Para realizar un análisis de Fourier se utiliza la sentencia .FOUR. Estas sentencias se encuentran en libros o manuales de Spice y PSpice.

Las sentencias utilizadas en este capítulo se resumen a continuación.

Sentencias de datos:

R, L, C	<nombre>	<nodos>	<valor>	[<condiciones iniciales>]
Inductancia mutua	kxx	<ind.a>	<ind.b>	<coeficiente de acoplamiento>
Llamada al subcircuito	Xxx	<nombre>	<nodos de conexión>	
Fuente de tensión de C.C.	Vxx	<nodos>	DC	<valor>
Fuente de intensidad de C.C.	Ixx	<nodos>	DC	<valor>
Fuente de tensión de C.A.	Vxx	<nodos>	AC	<módulo> <fase>
Fuente de intensidad de C.A.	Ixx	<nodos>	AC	<módulo> <fase>
VCVS	Exx	<nodos>	<control>	<ganancia>
CCCS	Fxx	<nodos>	<control>	<ganancia>
VCCS	Gxx	<nodos>	<control>	<ganancia>
CCVS	Hxx	<nodos>	<control>	<ganancia>

Sentencias de control:

.AC	<tipo de barrido>	<número de puntos>	<f. incial>	<f. final>
.DC	<nombre>	<valor incial>	<valor final>	<tamaño del intervalo>
.END				
.ENDS				
.IC <V (nodo) = valor>				
.MODEL <nombre> <tipo> [<parámetro> = <valor>] <tipo> es RES para resistencia <tipo> es IND para inductor <tipo> es CAP para condensador				
.LIB [<nombre del fichero>]				
.OP				
.PRINT DC <variables de salida>				
.PLOT DC <variables de salida>				
.PRINT AC <módulos> <fases>				
.PLOT AC <módulos> <fases>				
.PRINT TRAN <variables de salida>				
.PROBE [<variables de salida>]				
.STEP LIN <tipo> <nombre (param.)> <valor incial> <valor final> <tamaño del intervalo>				
.SUBCKT <nombre> <terminales externos>				
.TF <variable de salida> <fuente de entrada>				
.TRAN <tamaño del incremento> <valor final>				

PROBLEMAS RESUELTOS

- 15.1.** Utilizar PSpice para determinar $V(3, 4)$ en el circuito de la Figura 15.23.

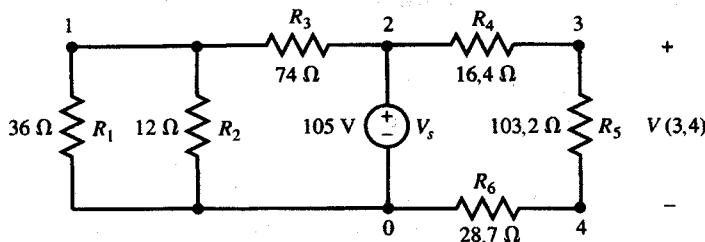


Figura 15.23.

El fichero fuente es

Análisis de C.C., Figura 15.23

```

Vs      2      0      DC      105 V
R1      0      1      36
R2      0      1      12
R3      1      2      74
R4      2      3      16,4
R5      3      4      103,2
R6      4      0      28,7
.DC    Vs    105    105    1
.PRINT  DC  V(1)  V(3,4)
.END

```

El fichero de salida contiene lo siguiente:

CURVAS DE TRANSFERENCIA DE C.C.

Vs	V(1)	V(3,4)
1,050E+02	1,139E+01	7,307+01

Por tanto, $V(3,4) = 73,07$ V.

- 15.2.** Escribir el fichero fuente para el circuito de la Figura 15.24 y determinar I en R_4

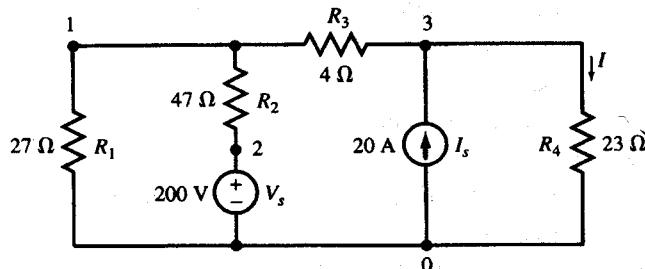


Figura 15.24.

El fichero fuente es

Análisis de C.C., Figura 15.24

```

Vs      2    0      DC      200 V
Is      0    3      DC      20 A
R1      0    1      27
R2      1    2      47
R3      1    3      4
R4      3    0      23
.DC      Vs    200    200      1
.PRINT   DC   I(R4)
.END

```

El fichero de salida contiene lo siguiente:

CURVAS DE TRANSFERENCIA DE C.C.

```

Vs          I(R4)
2,000E+02   1,123E+01

```

La corriente $I(R4) = 11,23$ A circula desde el nodo 3 al 0 según el orden de los nodos determinado para R4.

- 15.3. Determinar las tres corrientes de malla en el circuito de la Figura 15.25 utilizando PSpice y comparar el resultado con la resolución analítica del circuito.

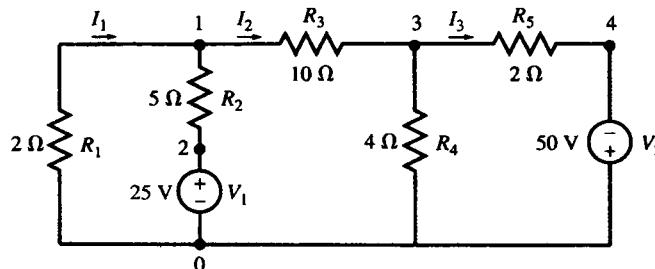


Figura 15.25.

El fichero fuente es

Análisis de C.C., Figura 15.25

```

V1      2    0      DC      25
V2      0    4      DC      50
R1      0    1      2
R2      1    2      5
R3      1    3      10
R4      3    0      4
R5      3    4      2
.DC      V1    25    25      1
.PRINT   DC   I(R1)   I(R3)   I(R5)
.END

```

El fichero de salida contiene lo siguiente:

CURVAS DE TRANSFERENCIA DE C.C.

V1	I(R1)	I(R3)	I(R5)
2,500E + 01	- 1,306E + 00	3,172 + 00	1,045E + 01

La solución analítica requeriría resolver tres ecuaciones.

- 15.4.** Utilizando PSpice, determinar el valor de Vs de la Figura 15.4 de forma que la fuente de tensión no suministre potencia alguna.

Se hace un barrido de Vs de 1 a 10 V. Los ficheros fuente y de salida son

Barrido de C.C. en el circuito de la Figura 15.4

```
R1      0    1    500
R2      1    2    3 k
R3      2    3    1 k
R4      0    3    1,5 k
Vs      3    1    DC    4 V
Is      0    2    DC    3 mA
.DC    Vs      1    10    1
.PRINT DC  I(Vs)
.PROBE
.PLOT   DC  I(Vs)
.END
```

El fichero de salida contiene los resultados siguientes:

CURVAS DE TRANSFERENCIA DE C.C.

Vs	I(Vs)
1,000E + 00	7,500E - 04
2,000E + 00	- 2,188E - 12
3,000E + 00	- 7,500E - 04
4,000E + 00	- 1,500E - 03
5,000E + 00	- 2,250E - 03
6,000E + 00	- 3,000E - 03
7,000E + 00	- 3,750E - 03
8,000E + 00	- 4,500E - 03
9,000E + 00	- 5,250E - 03
1,000E + 01	- 6,000E - 03

La corriente en Vs es cero para Vs = 2 V.

- 15.5.** Realizar un análisis de C.C. en el circuito de la Figura 15.16 y determinar el circuito Thévenin equivalente visto desde los terminales AB.

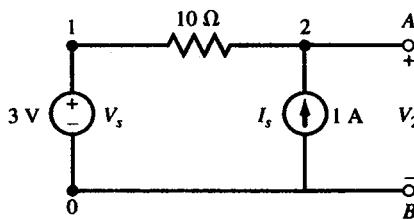


Figura 15.26.

Se incluye una sentencia .TF en el «índice de la red» siguiente:

Equivalente Thévenin de la Figura 15.26
 Vs 1 0 DC 3
 R1 1 2 10
 Is 0 2 DC 1
 .TF V(2) Is
 .END

El fichero de salida incluye los siguientes resultados:

NODO	TENSIÓN	NODO	TENSIÓN
(1)	3,0000	(2)	13,000

INTENSIDAD DE FUENTE DE TENSIÓN

NOMBRE	INTENSIDAD
Vs	1,000E + 00

DISIPACIÓN TOTAL DE POTENCIA -3,00E + 00 WATTS

CARACTERÍSTICAS DE LA SEÑAL

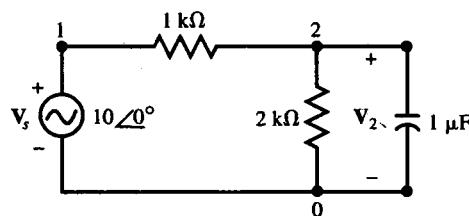
$V(2)/Is = 1,000E + 01$

RESISTENCIA DE ENTRADA PARA $Is = 1,000E + 01$

RESISTENCIA DE SALIDA PARA $V(2) = 1,000E + 01$

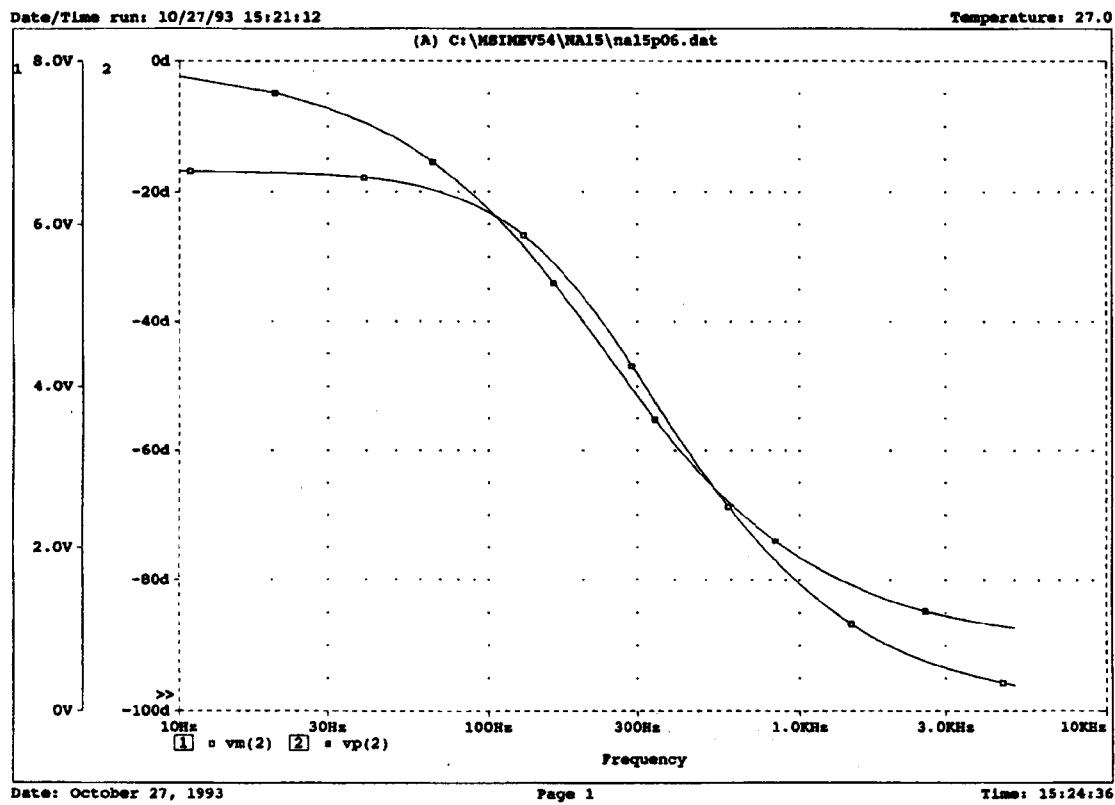
El Thévenin equivalente es $V_{Th} = V_2 = 13$ V, $R_{Th} = 10 \Omega$.

- 15.6. Realizar un análisis de C.A. en el circuito de la Figura 15.27(a). Determinar el número complejo del fasor V_2 para f variando desde 100 Hz a 10 kHz en diez intervalos.



(a)

Figura 15.27 (continúa).



Page 1

Time: 15:24:36

(b)

Figura 15.27 (continuación).

Se añade al «índice de la red» una sentencia .AC para hacer un barrido de la frecuencia, obteniendo V(2) mediante cualquiera de los comandos .PRINT, .PLOT o .PROBE. El fichero fuente es

Análisis de C.A. de la Figura 15.27(a)

Vs	1	0	AC	10	0
R1	1	2		1 k	
R2	2	0		2 k	
C	2	0		1 uF	
.AC	LIN		10	100	10000
.PRINT	AC		Vm(2)	Vp(2)	
.PLOT	AC		Vm(2)	Vp(2)	
.PROBE			Vm(2)	Vp(2)	
.END					

El fichero de salida contiene los siguientes resultados:

ANÁLISIS DE C.A.

FREQ	VM(2)	VP(2)
1,000E + 02	6,149E + 00	-2,273E + 01

1,200E + 03	1,301E + 00	- 7,875E + 01
2,300E + 03	6,883E - 01	- 8,407E + 01
3,400E + 03	4,670E - 01	- 8,598E + 01
4,500E + 03	3,532E - 01	- 8,696E + 01
5,600E + 03	2,839E - 01	- 8,756E + 01
6,700E + 03	2,374E - 01	- 8,796E + 01
7,800E + 03	2,039E - 01	- 8,825E + 01
8,900E + 03	1,788E - 01	- 8,846E + 01
1,000E + 04	1,591E - 01	- 8,863E + 01

La gráfica con el módulo y la fase de V_2 aparece con más detalle en la Figura 15.27(b).

- 15.7. Obtener el análisis de C.C. y C.A. del circuito de la Figura 15.28. Determinar el número complejo de V_2 para f variando desde 100 Hz a 10 kHz en 100 intervalos.

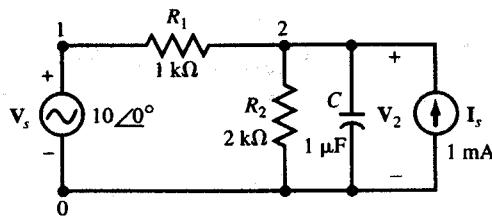


Figura 15.28.

El fichero fuente es

Análisis de C.C. y C.A. de la Figura 15.28

```

Vs      1      0      AC      10      0
Is      0      2      DC      1 mA
R1      1      2      1 k
R2      2      0      2 k
C       2      0      1 uF
.AC    LIN     100     100     10000
.PROBE Vm(2)   Vp(2)
.END

```

El fichero de salida contiene los siguientes resultados:

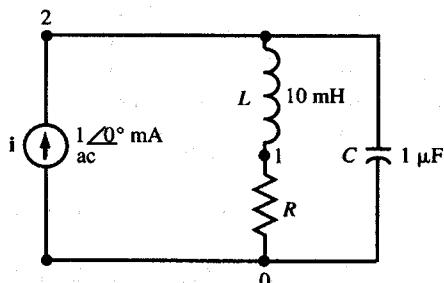
SOLUCIÓN DE POLARIDAD DE LA SEÑAL
 NODO TENSIÓN NODO TENSIÓN
 (1) 0,0000 (2) 0,6667

INTENSIDAD DE FUENTE DE TENSIÓN
 NOMBRE INTENSIDAD
 Vs 6,667E - 04

DISIPACIÓN TOTAL DE POTENCIA - 0,00E + 00 WATTS

La gráfica del componente de C.A. de V_2 es idéntica a la de V_2 del Problema 15.6, que se corresponde con la mostrada en la Figura 15.27(b)

- 15.8. Dibujar las curvas de resonancia para el circuito de la Figura 15.29(a) para $R = 2, 4, 6, 8$ y 10Ω .



(a)

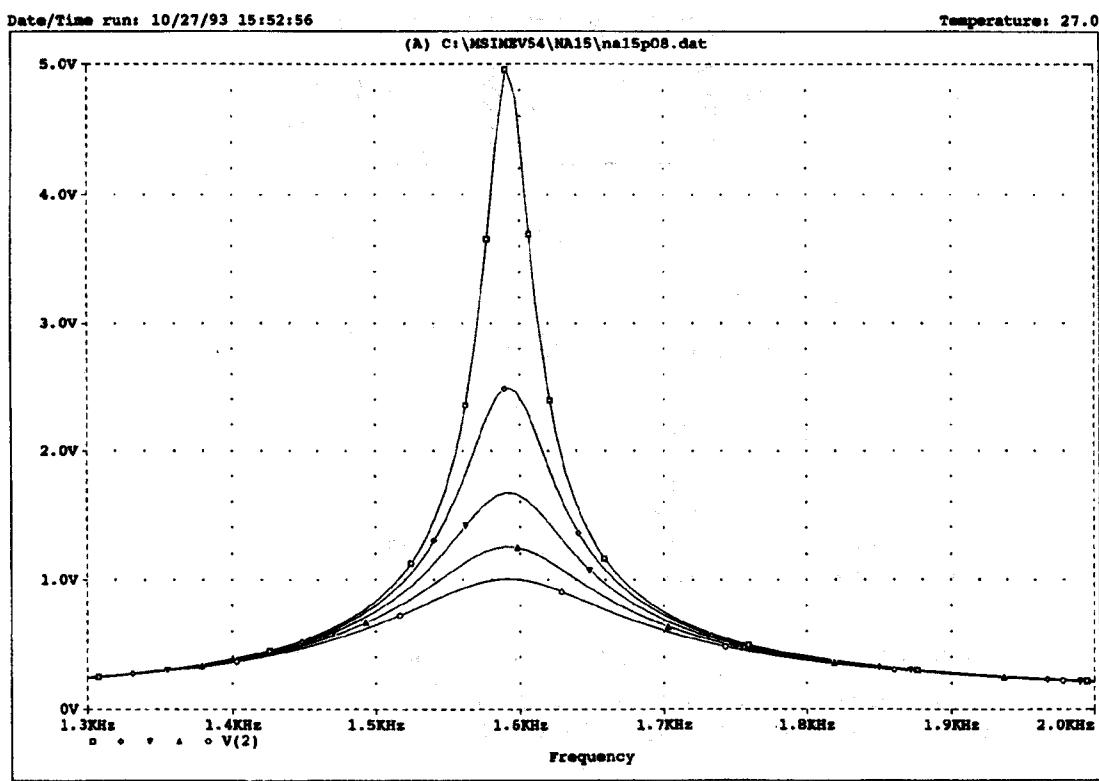


Figura 15.29.

Se modeliza la resistencia mediante un elemento resistivo puro de valor \mathbf{R} , variando dicho valor desde 2 a 10 en intervalos de 2Ω . Se utiliza el comando .AC para hacer un barrido de la frecuencia desde 500 Hz a 3 kHz en 100 intervalos. El fichero fuente es:

Resonancia paralelo de una bobina real, Figura 15.29

```

I      0    2      AC      1 m      0
R      0    1      RLOSS     1
L      1    2      10 m
C      0    2      1 u
.MODEL RLOSS RES(R=1)
.STEP  RES   RLOSS(R)  2    10    2
.AC    LIN    100   500   3000
.PROBE
.END

```

Las curvas de resonancia se muestran con más detalle en la Figura 15.29(b).

- 15.9.** Utilizar .TRAN y .PROBE para obtener la gráfica de V_C entre los extremos de un condensador en el circuito sin fuentes de la Figura 15.30(a) con $R = 100, 600, 1100, 1600$ y 2100Ω . La tensión inicial es $V_C(0) = 10$ V.

Los valores de la resistencia R se cambian utilizando .MODEL y .STEP. El fichero fuente es Respuesta natural de RC, Figura 15.30(a)

```

R      0    1      Rshunt     1
C      1    0      1 uF       IC = 0
.MODEL Rshunt RES(R=1)
.STEP  LIN    RES      Rshunt(R)  100      2,1 k      500
.TRAN  1E-4   50E-4   UIC
.PLOT  TRAN    V(1)
.PROBE
.END

```

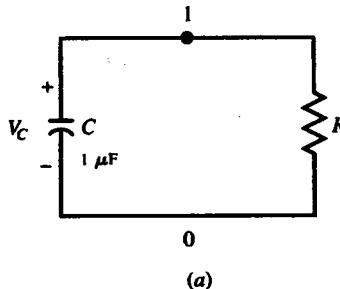


Figura 15.30 (continúa).

La gráfica de la tensión V_C se muestran en la Figura 15.30(b), en la página siguiente.

- 15.10.** Dibujar las tensiones de dos nudos del circuito de la Figura 15.31(a) en respuesta a una fuente de intensidad para $R = 100, 600, 1100, 1600$ y 2100Ω .

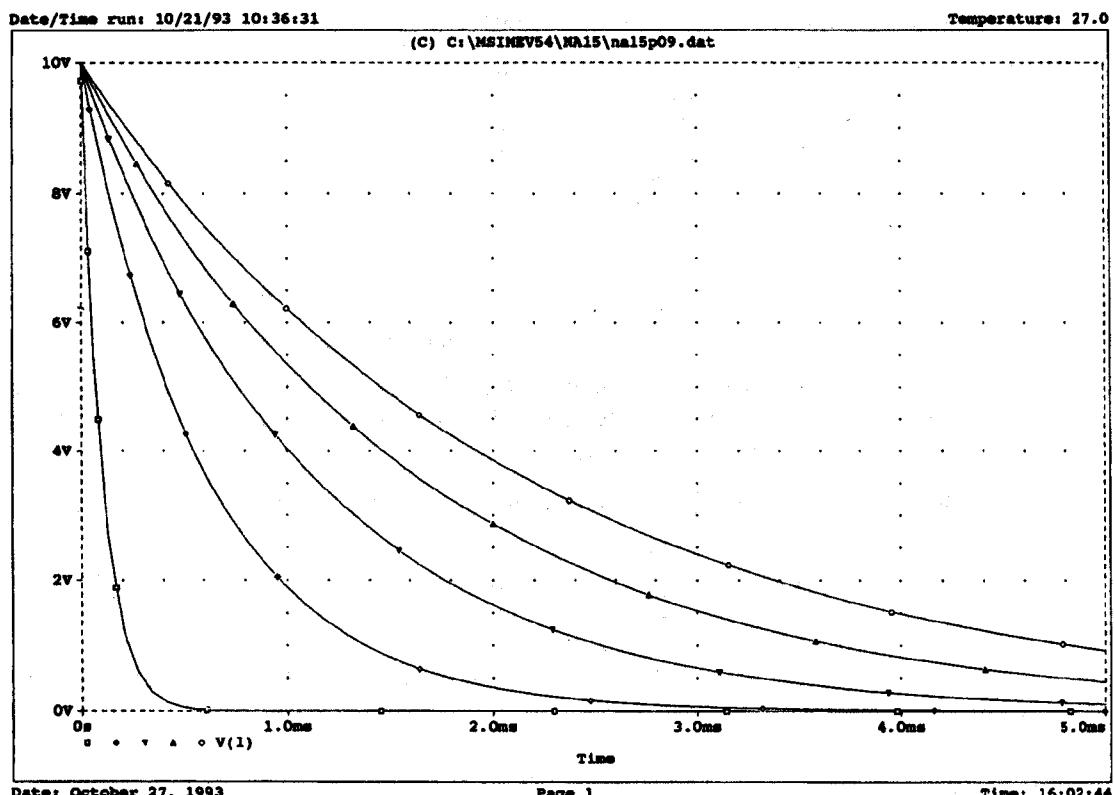
El fichero fuente es

Respuesta escalón de RC, Figura 15.31(a)

```

I      0    1      1 m
R      0    1      Rshunt     1
C      1    0      1 uF

```



(b)

Figura 15.30 (continuación).

```

.MODEL Rshunt RES(R = 1)
.STEP LIN RES
.TRAN 1E-4 Rshunt(R) 100 2,1 k 500
.PLOT TRAN V(1) UIC
.PROBE
.END
  
```

Las curvas de la respuesta escalón se muestran con más detalle en la Figura 15.31(b).

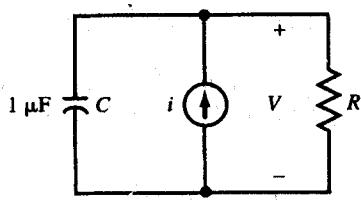


Figura 15.31 (continúa).

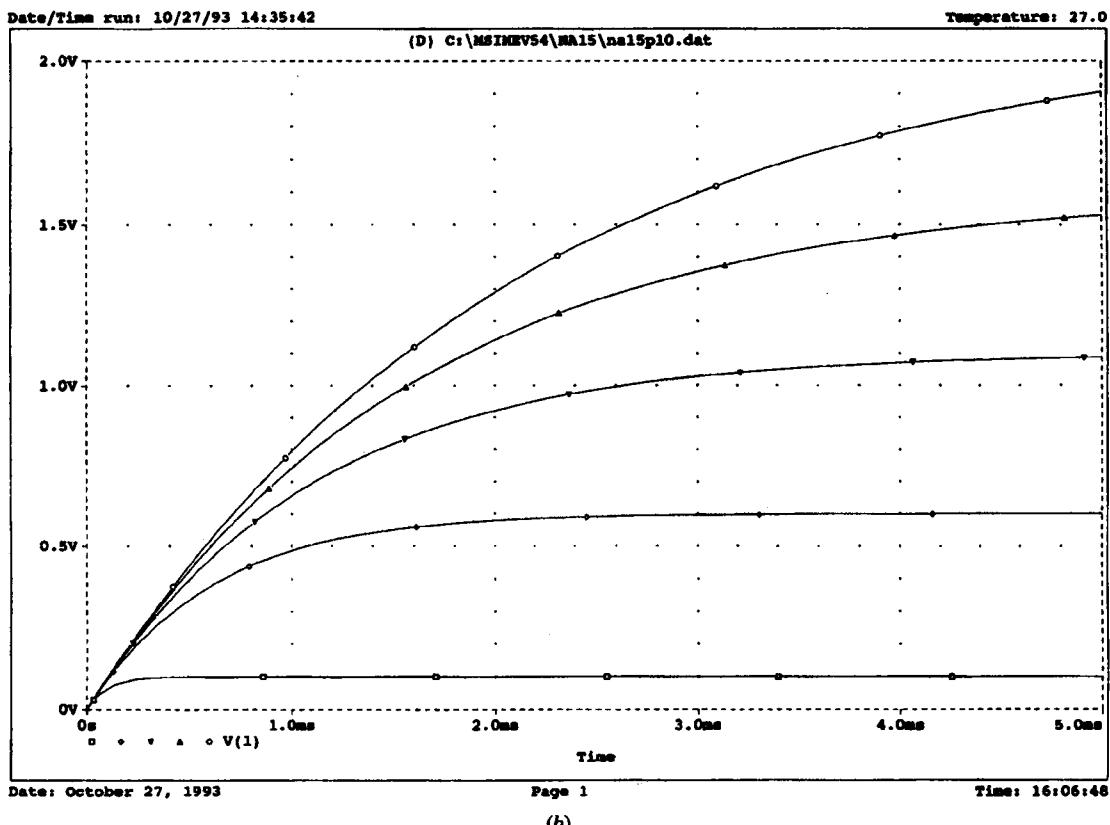


Figura 15.31 (continuación).

15.11. Determinar el Thévenin de la Figura 15.32 desde los terminales AB.

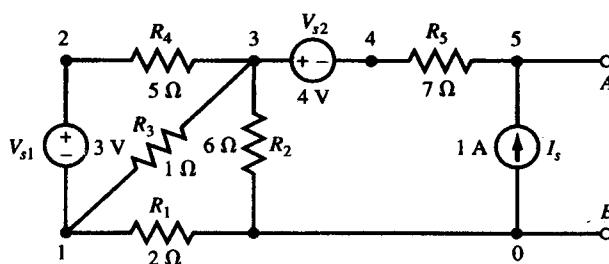


Figura 15.32.

De un análisis de C.C. se determina la tensión de circuito abierto entre AB. También se utiliza .TF para determinar la resistencia vista desde AB. Los ficheros fuente y de salida son

Solución a la Figura 15.32 y al Thévenin entre los extremos AB

R1	0	1	2
R2	0	3	6

```

R3      1      3      1
R4      2      3      5
R5      4      5      7
Vs1     2      1      DC      3
Vs2     3      4      DC      4
Is      0      5      DC      1
.TF    V(5)      Vs1
.END

```

El fichero de salida contiene los siguientes resultados:

NODO	TENSIÓN	NODO	TENSIÓN	NODO	TENSIÓN	NODO	TENSIÓN
(1)	1,2453	(2)	4,2453	(3)	2,2642	(4)	-1,7358
(5)	5,2642						

INTENSIDAD DE FUENTE DE TENSIÓN

NOMBRE	INTENSIDAD
Vs1	-3,962E - 01
Vs2	-1,000E + 00

DISIPACIÓN TOTAL DE POTENCIA 5,19E - 00 WATTS

$$V(5)/Vs1 = 1,132E - 01$$

$$\text{RESISTENCIA DE ENTRADA PARA } Vs1 = 5,889E + 00$$

$$\text{RESISTENCIA DE SALIDA PARA } V(5) = 8,925E + 00$$

El Thévenin es $V_{Th} = V_s = 5,2642 \text{ V}$, $R_{Th} = 8,925 \Omega$.

- 15.12.** Dibujar la respuesta en frecuencia V_{AB}/V_{ac} en el circuito amplificador abierto de la Figura 15.33(a).

El siguiente fichero fuente selecciona 500 puntos dentro del rango de frecuencias que va desde 100 Hz a 10 MHz.

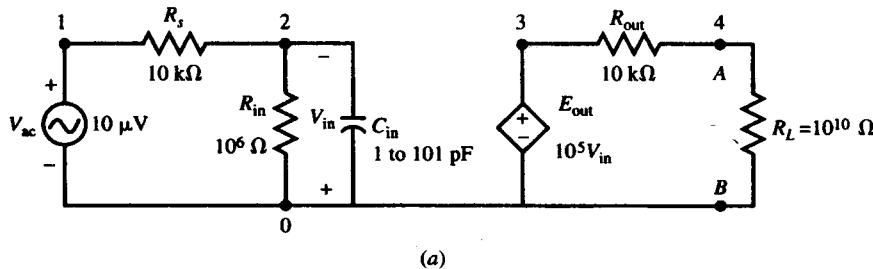
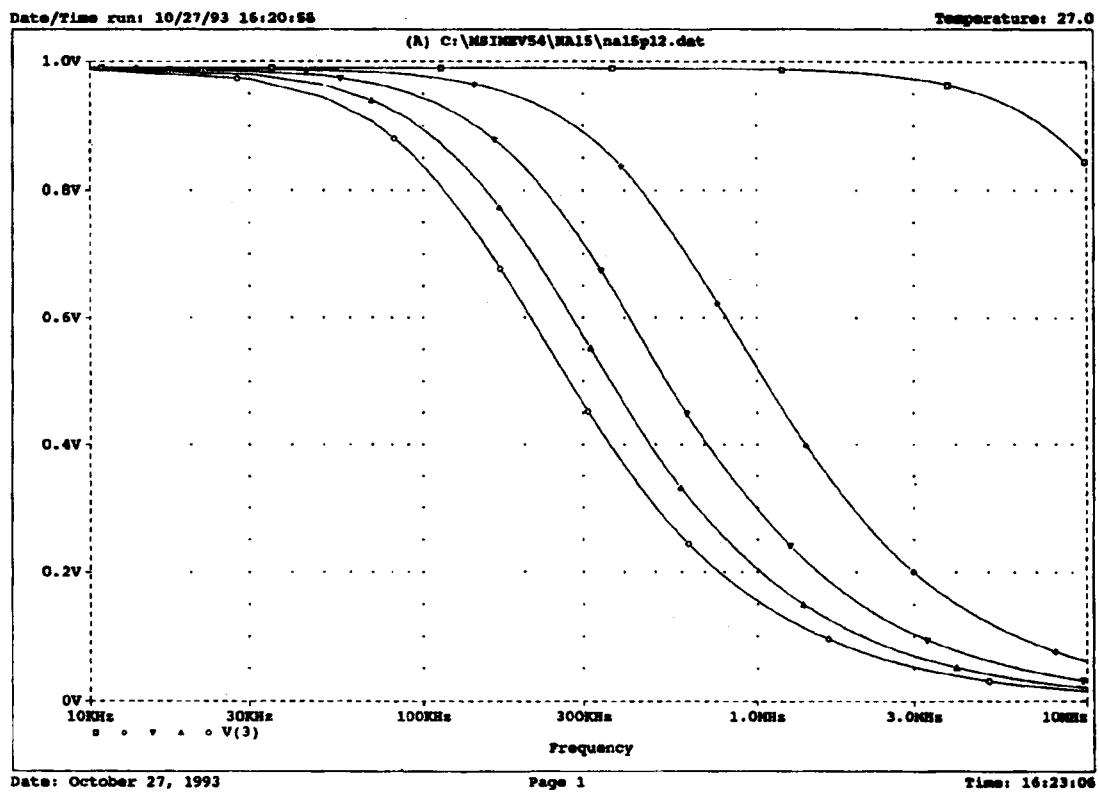


Figura 15.33 (continúa).



(b)

Figura 15.33 (continuación).

Respuesta en frecuencia del amplificador abierto, Figura 15.33

```

Rs      1    2      10 k
Rin     0    2      10 E5
Cin     0    2      short      1
Rout    3    4      10 k
R1      4    0      10 E9
Eout    3    0      0  2      1 E5
Vac     1    0      AC      10 u      0
.MODEL short      CAP(C = 1)
.STEP   LIN      CAP      short(C)      1 pF      101 pF      25 pF
.AC     LIN      500      100      10000 k
.PROBE
.END

```

La gráfica de la respuesta en frecuencia se obtiene mediante Probe variando la frecuencia desde 10 kHz a 10 MHz, tal como se muestra en la Figura 15.33(b).

- 15.13. Modelizar el amp op del la Figura 15.34(a) como un subcircuito y utilizarlo para determinar la respuesta en frecuencia de V_3/V_{ac} en la Figura 15.34(b) variando f entre 1 MHz y 1 GHz.

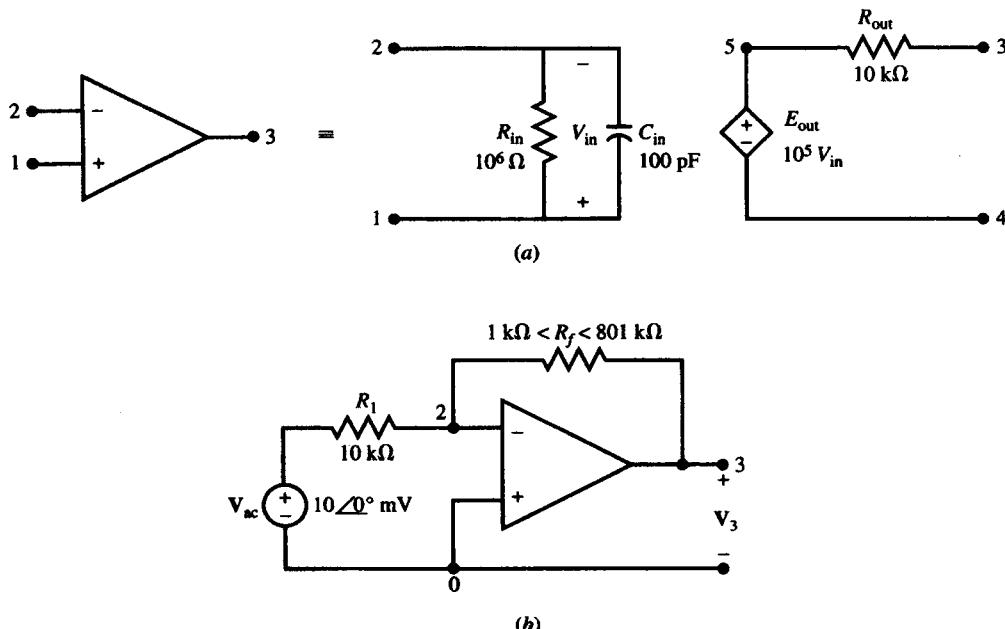


Figura 15.34 (continúa).

El fichero fuente es

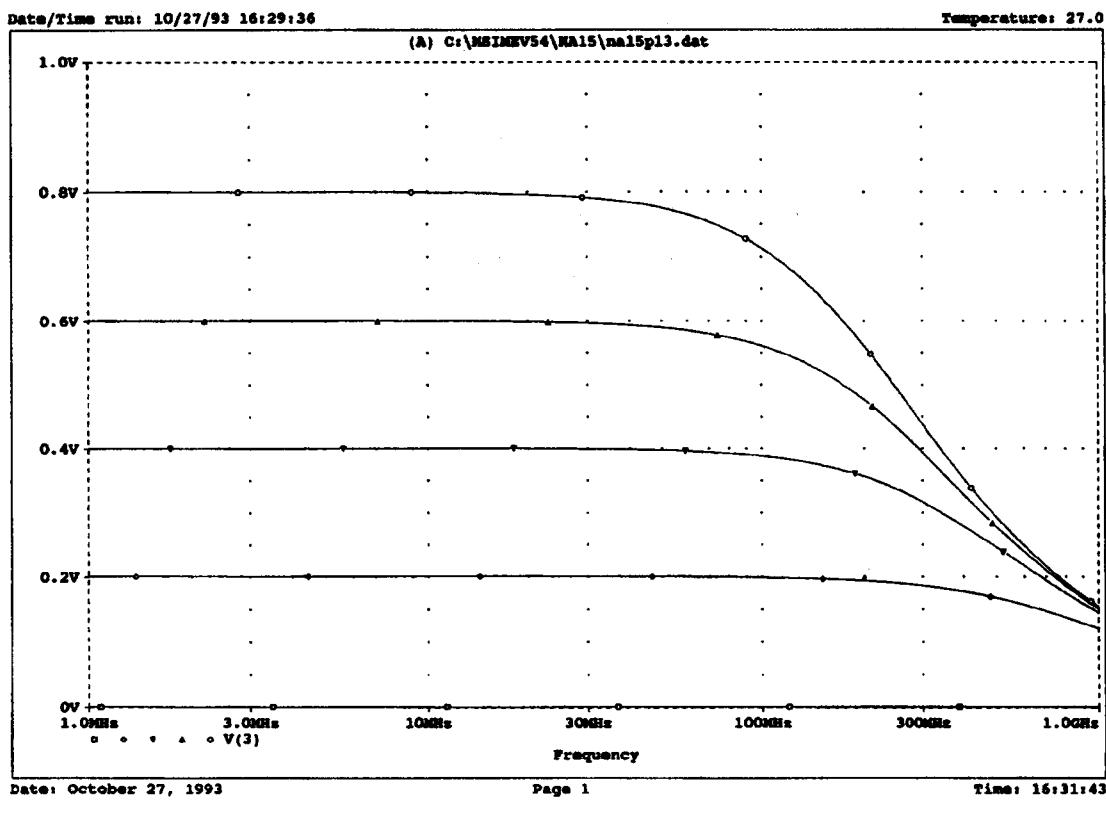
Respuesta en frecuencia del amplificador cerrado, Figura 15.34

```

SUBCKT OPAMP 1 2 3 4
* nodo 1 es la entrada no inversa
* nodo 2 es la entrada inversa
* nodo 3 es la salida
* nodo 4 es la referencia de la salida (terminal negativo de la fuente dependiente)
* nodo 5 es el terminal positivo de la fuente dependiente
Rin 1 2 10E5
Cin 1 2 100 pF
Rout 3 5 10 k
Eout 5 4 1 2 1E5
.ENDS
Vac 1 0 AC 10 m 0
R1 1 2 10 k
Rf 2 3 Rgain 1
X1 0 2 3 0 OPAMP
.MODEL GAIN RES(R = 1)
.STEP LIN RES Rgain(R) 1 k 801.k 200 k
.AC LIN 500 1000 k 1000000 k
.PROBE
.END

```

La gráfica de la respuesta en frecuencia se muestra en al Figura 15.34(c). En comparación con el circuito abierto de la Figura 15.33(a), la ganancia en C.C. se reduce, mientras que el ancho de banda se incrementa.



(c)

Figura 15.34 (continuación).

- 15.14.** Para el circuito *RC* de la Figura 15.22, elegir la altura del pulso inicial de forma que la tensión entre los extremos del condensador sea de 10 V al cabo de 0,5 ms. Verificar la respuesta dibujando V_c para $0 < t < 2$ ms.

La amplitud del pulso A se calcula de

$$A(1 - e^{-1/2}) = 10 \quad \text{de lo cual} \quad A = 25,415 \text{ V}$$

La fuente de tensión se describe utilizando la sintaxis de PULSE. El fichero fuente es
Respuesta a un pulso de RC, durante $RC/2$ segundos

VS	1	0	PULSE(10	25,415	1,0E-6	1,0E-6	0,5 m	3 m)
R	1	2	1 k					
C	2	0	1 u					

```
.TRAN 1,0E-6 2,0E-3 UIC
.PROBE
.END
```

La respuesta es similar a la gráfica de la Figura 15.22(b). Durante el período transitorio de $0 < t < 0,5$ ms, la tensión aumenta exponencialmente hacia un valor estacionario de C.C. de 25,415 V. Sin embargo, en $t = 0,5$ ms, cuando la tensión entre los extremos del condensador alcanza 10 V, la fuente también tiene 10 V entre sus extremos. La intensidad que circula por la resistencia se hace cero y, por tanto, se alcanza el estado estacionario.

- 15.15.** Obtener la gráfica de la tensión entre los extremos del condensador del circuito de la Figura 15.35(a) con $R = 0,01 \Omega$ y $4,01 \Omega$. La fuente de intensidad es un pulso cuadrado de 1 mA que dura 1256,64 μ s, como se ve en la gráfica de $i - t$.

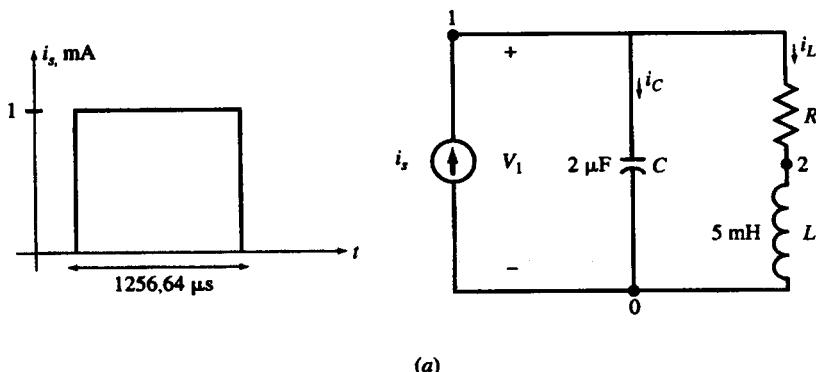


Figura 15.35 (continúa).

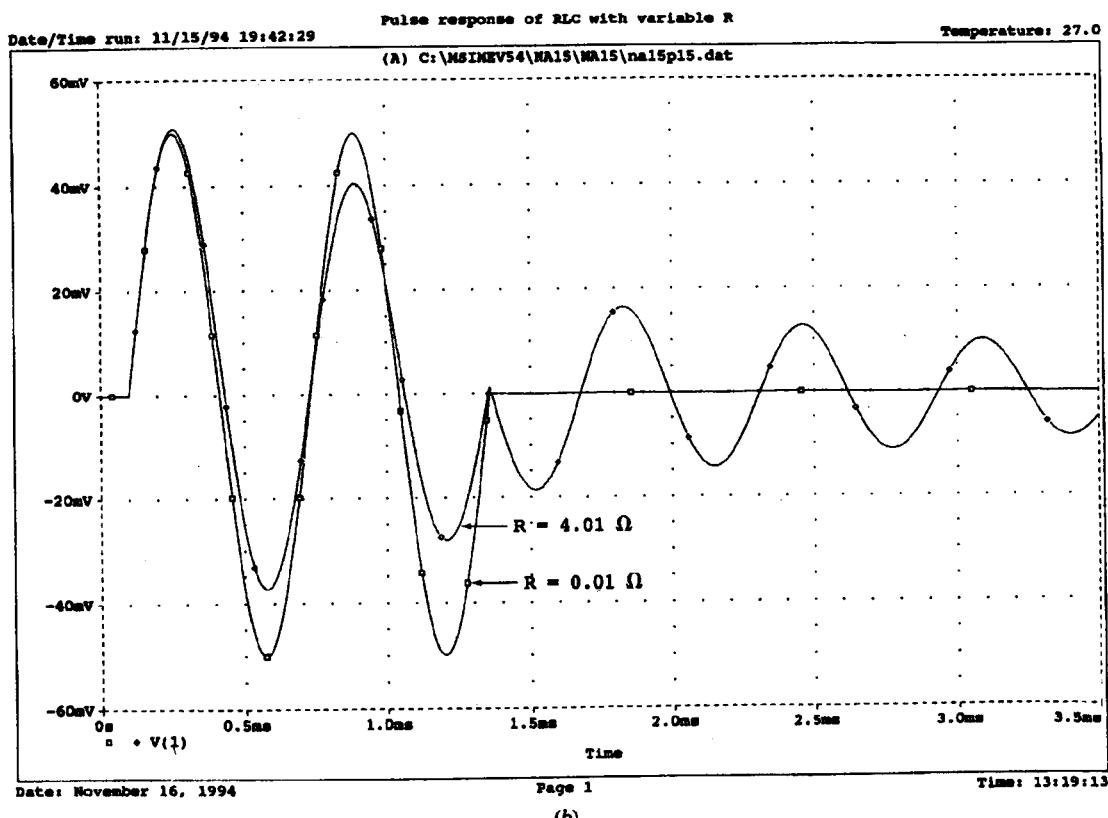
Modelizar la resistencia como una resistencia pura de valor R , cambiando su valor desde 0,01 a 4,01 con un solo intervalo de valor 4Ω . Se utiliza el comando .AC para barrer la frecuencia desde 500 Hz a 3 kHz en 100 intervalos. El fichero fuente es

Respuesta a un pulso de RLC con R variable

```
Is      0  1      Pulse(0    1m  100 u  0,01 u  0,01 u  1256,64 u  5000 u)
R      1  2      LOSS      1
C      1  0      2000 n    IC = 0
L      2  0      5 m       IC = 0
.MODEL  LOSS    RES(R = 1)
.STEP   RES    LOSS(R)    0,01    4,01    4
.TRAN   10 u    3500 u    0  1 u      UIC
.PROBE
.END
```

El resultado se muestra en la Figura 15.35(b).

La respuesta transitoria es casi cero para $R = 0,01 \Omega$. Esto se debe a que el ancho del pulso es múltiplo del período de la oscilación natural del circuito.



(b)

Figura 15.35 (continuación).

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

- En los siguientes problemas, utilizar PSpice para repetir los problemas indicados y los ejemplos.
- 15.16. Resolver Ejemplo 5.9 (Figura 5.12).
 - 15.17. Resolver Ejemplo 5.11 (Figura 5.16).
 - 15.18. Resolver Ejemplo 5.14 (Figura 5.20).
 - 15.19. Resolver Ejemplo 5.15 (Figura 5.21).
 - 15.20. Resolver Ejemplo 5.20 (Figura 5.28) para $x(t) = 1 \text{ V}$.
 - 15.21. Resolver Problema 5.12 (Figura 5.37).
 - 15.22. Resolver Problema 5.16 (Figura 5.39).

- 15.23.** Resolver Problema 5.25 (Figura 5.48).
 - 15.24.** Resolver Problema 5.26 (Figura 5.49).
 - 15.25.** Resolver Problema 5.48 (Figura 5.55) para $v_{s1} = v_{s2} = 1$ V.
 - 15.26.** Resolver Ejemplo 7.3.
 - 15.27.** Resolver Ejemplo 7.6 (Figura 7.12).
 - 15.28.** Resolver Ejemplo 7.7 [Figura 7.13(a)].
 - 15.29.** Resolver Ejemplo 7.11 [Figura 7.17(a)].
 - 15.30.** Resolver Problema 8.27 (Figura 8.31).
 - 15.31.** Resolver Problema 9.11 (Figura 9.20).
 - 15.32.** Resolver Problema 9.18 (Figura 9.28).
 - 15.33.** Resolver Problema 9.19 (Figura 9.29).
 - 15.34.** Resolver Ejemplo 11.5 [Figura 11.15(a)].
 - 15.35.** Resolver Ejemplo 11.6 [Figura 11.16(a)].
 - 15.36.** Resolver Ejemplo 11.7 (Figura 11.17).
 - 15.37.** Resolver Problema 12.7.
 - 15.38.** Resolver Problema 12.14 (Figura 12.40).
 - 15.39.** Resolver Problema 12.16 (Figura 12.43).
 - 15.40.** Resolver Problema 13.28 (Figura 13.31) para $s = j$.
 - 15.41.** Resolver Problema 13.31 (Figura 13.33).
 - 15.42.** Resolver Problema 14.8 (Figura 14.24).
 - 15.43.** Resolver Problema 14.12 (Figura 14.28).
 - 15.44.** Resolver Problema 14.13 (Figura 14.29).
 - 15.45.** Resolver Problema 14.20 (Figura 14.35).
 - 15.46.** Resolver Problema 14.21 (Figura 14.36) para $s = j$.
-

CAPÍTULO 16

Método de la transformada de Laplace

16.1. INTRODUCCIÓN

En los circuitos *RLC* la relación entre la respuesta $y(t)$ y la excitación $x(t)$ es una ecuación diferencial lineal de la forma

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_j y^{(j)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_m x^{(m)} + \cdots + b_i x^{(i)} + \cdots + b_1 x^{(1)} + b_0 x \quad (1)$$

donde $y^{(j)}$ y $x^{(i)}$ son la j -ésima y la i -ésima derivada de $y(t)$ y $x(t)$, respectivamente. Si los valores de los elementos del circuito son constantes, los correspondientes coeficientes a_j y b_j de la ecuación diferencial también son constantes. En los Capítulos 7 y 8 se resolvió la ecuación diferencial con sus respuestas naturales y forzadas. Se utilizó la función exponencial compleja $x(t) = Xe^{st}$ para obtener la solución en el dominio s de la frecuencia compleja.

El método de la transformada de Laplace que se describe en este capítulo es una generalización del concepto del dominio s a una formulación matemática que abarcaría, además de la excitación exponencial, otra amplia gama de formas de excitación. La transformada de Laplace permite representar un gran número de excitaciones como un conjunto infinito de exponenciales complejas. Para obtener la respuesta total se utiliza el concepto de superposición.

16.2. TRANSFORMADA DE LAPLACE

Sea $f(t)$ una función del tiempo con valor cero para $t \leq 0$ y que (en función de algunas condiciones) se define arbitrariamente para $t > 0$. Entonces la *transformada directa de Laplace* de $f(t)$, simbolizada por $\mathcal{L}[f(t)]$, vendrá expresada por

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathbf{F}(s) = \int_{0^+}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2)$$

Por tanto, la operación $\mathcal{L}[\cdot]$ transforma $f(t)$, que pertenece al *dominio del tiempo*, en $\mathbf{F}(s)$, que está en el *dominio de la frecuencia compleja*, o simplemente el dominio s , donde s es la variable compleja $\sigma + j\omega$. Aunque esta integración podría parecer difícil, se puede recurrir a las tablas que desarrollan la transformada de Laplace para las funciones más frecuentes de la teoría elemental de circuitos.

Es una transformación biunívoca; es decir, si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ tienen la misma imagen $F(s)$ del dominio s , entonces $f_1(t) = f_2(t)$. Esta cualidad permite la transformación inversa, desde el dominio s al dominio del tiempo. A este proceso se le denomina *transformada inversa de Laplace*, $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$. La transformada inversa de Laplace puede expresarse también como una integral, a la que se denomina *integral de la inversión compleja*:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (3)$$

En (3) el camino de integración es una línea recta paralela al eje $j\omega$, de modo que todos los polos de $F(s)$ están a la izquierda de la línea. De nuevo puede eludirse la integración, a menos que el resultado no aparezca en las tablas de las funciones transformadas.

Sin embargo, se ha de tener en cuenta que realizar la transformada de Laplace de una cantidad física introduce en el resultado una unidad extra del tiempo (s). Por ejemplo, si $i(t)$ es una intensidad en amperios, entonces $I(s)$ tiene como unidades $A \cdot s$ (o C). Debido a que esta unidad extra de s se eliminará al realizar la transformada inversa de Laplace, generalmente se omitirá citar las unidades en el dominio s , tratando en cualquier caso a $I(s)$ como una «intensidad» que se indicará sobre los circuitos mediante una flecha, etc.

16.3. ALGUNAS TRANSFORMADAS DE LAPLACE

La transformada de Laplace en la función escalón unidad se obtiene fácilmente:

$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_0^\infty (1)e^{-st} dt = -\frac{1}{s} [e^{-st}]_0^\infty = \frac{1}{s}$$

Por la linealidad de la transformada de Laplace, se verifica que $v(t) = Vu(t)$ en el dominio del tiempo tiene la imagen $V(s) = V/s$ en el dominio s .

La función exponencial decreciente, que aparecía a menudo en los transitorios del Capítulo 7, es otra función del tiempo de fácil transformación.

$$\mathcal{L}[Ae^{-at}] = \int_0^\infty Ae^{-at} e^{-st} dt = \frac{-A}{a+s} [e^{-(a+s)t}]_0^\infty = \frac{A}{s+a}$$

o, inversamente,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s+a}\right] = Ae^{-at}$$

La transformada de la función seno también se obtiene fácilmente:

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \int_0^\infty (\sin \omega t)e^{-st} dt = \left[\frac{-s(\sin \omega t)e^{-st} - e^{-st}\omega \cos \omega t}{s^2 + \omega^2} \right]_0^\infty = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Ahora hay que obtener la transformada de una derivada $df(t)/dt$.

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt$$

Integrando por partes,

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = [e^{-st}f(t)]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)(-se^{-st}) dt = -f(0^+) + s \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = -f(0^+) + sF(s)$$

En la Tabla 16.1 se muestra un pequeño número de funciones con sus transformadas, incluyendo las obtenidas anteriormente. Las cinco últimas filas de la tabla resumen algunas propiedades generales de la transformada de Laplace.

EJEMPLO 16.1. Considerar un circuito serie RL , con $R = 5 \Omega$ y $L = 2,5 \text{ mH}$. En $t = 0$, cuando la intensidad del circuito es 2 A, se aplica una fuente de 50 V. El circuito en el dominio del tiempo se muestra en la Figura 16.1.

Dominio del tiempo	Dominio s
i) $Ri + L \frac{di}{dt} = v$	ii) $R\mathbf{I}(s) + L[-i(0^+) + s\mathbf{I}(s)] = \mathbf{V}(s)$
↓	↓
(métodos clásicos)	iii) $5\mathbf{I}(s) + (2,5 \cdot 10^{-3})[-2 + s\mathbf{I}(s)] = \frac{50}{s}$
↓	↓
	iv) $\mathbf{I}(s) = \frac{10}{s} + \frac{-8}{s + 2000}$
vii) $i(t) = 10 - 8e^{-2000t}$ (A)	v) $10\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 10$
	vi) $(-8)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s + 2000}\right] = -8e^{-2000t}$

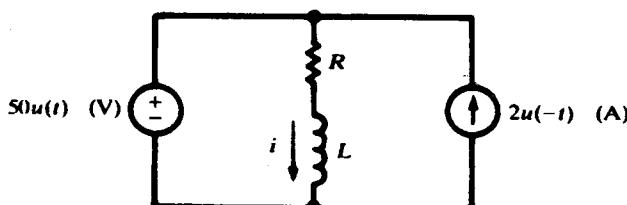


Figura 16.1.

Tabla 16.1. Pares de transformadas de Laplace.

	$f(t)$	$F(s)$
1.	1	$\frac{1}{s}$
2.	t	$\frac{1}{s^2}$
3.	e^{-at}	$\frac{1}{s + a}$
4.	te^{-at}	$\frac{1}{(s + a)^2}$
5.	$\operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
6.	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
7.	$\operatorname{sen}(\omega t + \theta)$	$\frac{s \operatorname{sen} \theta + \omega \cos \theta}{s^2 + \omega^2}$
8.	$\cos(\omega t + \theta)$	$\frac{s \cos \theta - \omega \operatorname{sen} \theta}{s^2 + \omega^2}$
9.	$e^{-at} \operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$
10.	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$
11.	$\operatorname{senh} \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
12.	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
13.	$\frac{df}{dt}$	$sF(s) - f(0^+)$
14.	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
15.	$f(t - t_1)$	$e^{-t_1 s} F(s)$
16.	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$	$c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$
17.	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$	$F_1(s) F_2(s)$

Aplicando la ley de Kirchhoff de las tensiones al circuito para $t > 0$ se obtiene la ecuación diferencial tradicional del circuito i). Esta ecuación se transforma, término a término, en una ecuación en el dominio s ii). La intensidad incógnita $i(t)$ se transforma en $I(s)$, mientras que la tensión conocida $v = 50u(t)$ se transforma en $50/s$. También di/dt se transforma en $-i(0^+) + sI(s)$, en la que $i(0^+)$ es 2 A. La ecuación iii) se resuelve para $I(s)$, y la solución se ordena iv) mediante las técnicas de la Sección 16.6. Llegados a este punto, se aplican las filas 1, 3 y 16 de la Tabla 16.1 para obtener la transformada inversa de Laplace de $I(s)$, que es $i(t)$.

Se puede dibujar un circuito en el dominio s como el de la Figura 16.2. La intensidad inicial aparece en el circuito como una fuente de tensión, $Li(0^+)$. La intensidad en el dominio s establece los términos de tensión $RI(s)$ y $sLI(s)$ en ii) como si un fasor de intensidad I y una impedancia Z crearan un fasor de tensión IZ .

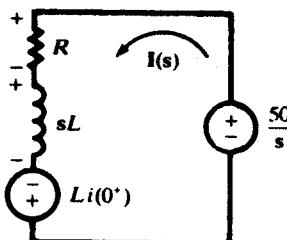


Figura 16.2.

16.4. CONVERGENCIA DE LA INTEGRAL

Para que la transformada de Laplace exista, la integral (2) ha de converger. Esto limita la variable $s = \sigma + j\omega$ a una parte del plano complejo denominada *región de convergencia*. Como ejemplo, la transformada de $x(t) = e^{-at}u(t)$ es $1/(s + a)$, siempre que $\text{Re}[s] > -a$, lo que define su región de convergencia.

EJEMPLO 16.2. Determinar la transformada de Laplace de $x(t) = 3e^{2t}u(t)$ y definir su región de convergencia.

$$X(s) = \int_0^\infty 3e^{2t}e^{-st} dt = \int_0^\infty 3e^{-(s-2)t} dt = \frac{3}{s-2} [e^{-(s-2)t}]_0^\infty = \frac{3}{s-2}, \quad \text{Re}[s] > 2$$

La región de convergencia de $X(s)$ es la mitad del plano derecho, para $\sigma > 2$, mostrada mediante un sombreado en la Figura 16.3.

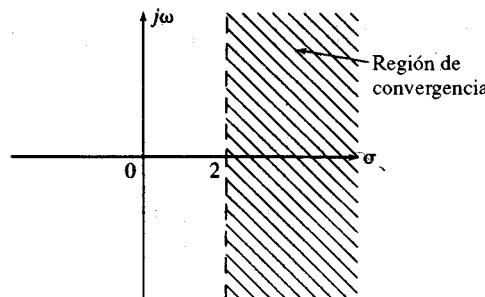


Figura 16.3.

16.5. TEOREMAS DEL VALOR INICIAL Y FINAL

Tomando el límite cuando $s \rightarrow \infty$ (para valores reales) de la transformada directa de Laplace de la derivada, $df(t)/dt$,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} \{sF(s) - f(0^+)\}$$

Pero el integrando e^{-st} tiende a cero cuando $s \rightarrow \infty$. Por tanto,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \{sF(s) - f(0^+)\} = 0$$

Como $f(0^+)$ es una constante, se puede escribir

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \{sF(s)\}$$

que es la definición del teorema del valor inicial.

EJEMPLO 16.3. En el Ejemplo 16.1,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \{sI(s)\} = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(10 - \frac{8s}{s + 2000} \right) = 10 - 8 = 2$$

que es la intensidad inicial, $i(0^+) = 2$ A.

El teorema del valor final se obtiene también de la transformada directa de Laplace de la derivada, pero ahora se toma el límite $s \rightarrow 0$ (para valores reales).

$$\lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} \{sF(s) - f(0^+)\}$$

Pero

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} df(t) = f(\infty) - f(0^+)$$

y $f(0^+)$ es una constante. Por tanto,

$$f(\infty) - f(0^+) = -f(0^+) + \lim_{s \rightarrow 0} \{sF(s)\}$$

o

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \{sF(s)\}$$

Que es la definición del teorema del valor final. Este teorema puede aplicarse únicamente cuando todos los polos de $sF(s)$ tienen parte real negativa, lo cual excluye las transformadas de funciones como e^t y $\cos t$, que se hacen infinitas o indeterminadas cuando $t \rightarrow \infty$.

16.6. DESARROLLO EN FRACCIONES SIMPLES

En un problema de análisis de circuitos, la magnitud desconocida puede ser, indistintamente, la intensidad $i(t)$ o la tensión $v(t)$. En el dominio s esta magnitud se representa por $I(s)$ o $V(s)$, según el caso. Para los circuitos estudiados en este libro, estas variables son una función racional de la forma

$$R(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

donde el polinomino $Q(s)$ es de mayor grado que $P(s)$. Además, $R(s)$ es real para s real, de tal modo que ningún polo no real de $R(s)$, es decir, raíces no reales de $Q(s) = 0$, sea un par de números complejos conjugados.

En un *desarrollo en fracciones simples* la función $R(s)$ se subdivide en una suma de funciones racionales más sencillas, llamadas *fracciones principales*, en las que cada polo de $R(s)$ forma una parte principal.

Caso 1: $s = a$ es un polo simple. Cuando $s = a$ es una raíz no repetida de $Q(s) = 0$, la correspondiente parte principal de $R(s)$ es

$$\frac{A}{s - a} \quad \text{donde} \quad A = \lim_{s \rightarrow a} \{(s - a)R(s)\}$$

Si a es real, A también lo será; si a es un complejo, entonces a^* es también un polo simple y el numerador de su fracción principal es A^* . Nótese que si $a = 0$, A es el valor final de $r(t)$.

Caso 2: $s = b$ es un polo doble. Cuando $s = b$ es una raíz doble de $Q(s) = 0$, la correspondiente fracción principal de $R(s)$ es

$$\frac{B_1}{s - b} + \frac{B_2}{(s - b)^2}$$

donde las constantes B_2 y B_1 se determinan con

$$B_2 = \lim_{s \rightarrow b} \{(s - b)^2 R(s)\} \quad \text{y} \quad B_1 = \lim_{s \rightarrow b} \left\{ (s - b) \left[R(s) - \frac{B_2}{(s - b)^2} \right] \right\}$$

B_1 puede ser cero. Análogamente al Caso 1, B_1 y B_2 son reales si b es real, y estas constantes para el polo doble b^* son los conjugados de los correspondientes para b .

La fracción principal de un polo de mayor orden puede obtenerse por analogía al Caso 2; se supondrá, sin embargo, que $\mathbf{R}(s)$ no tiene tales polos. Una vez que se conoce el desarrollo en fracciones simples de $\mathbf{R}(s)$ se puede recurrir a la Tabla 16.1 para invertir cada término y así obtener la función del tiempo $r(t)$.

EJEMPLO 16.4. Determinar la intensidad $i(t)$ en el dominio del tiempo si su transformada de Laplace es

$$\mathbf{I}(s) = \frac{s - 10}{s^4 + s^2}$$

Colocando el denominador en función de sus raíces,

$$\mathbf{I}(s) = \frac{s - 10}{s^2(s - j)(s + j)}$$

se ve que los polos de $\mathbf{I}(s)$ son $s = 0$ (polo doble) y $s = \pm j$ (polos simples).

La fracción principal de $s = 0$ es

$$\frac{B_1}{s} + \frac{B_2}{s^2} = \frac{1}{s} - \frac{10}{s^2}$$

Como

$$B_2 = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{s - 10}{(s - j)(s + j)} \right] = -10$$

$$B_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ s \left[\frac{s - 10}{s^2(s^2 + 1)} + \frac{10}{s^2} \right] \right\} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{10s + 1}{s^2 + 1} \right) = 1$$

La fracción principal de $s = +j$ es

$$\frac{\mathbf{A}}{s - j} = -\frac{0.5 + j5}{s - j}$$

como

$$\mathbf{A} = \lim_{s \rightarrow j} \left[\frac{s - 10}{s^2(s + j)} \right] = -(0.5 + j5)$$

Se obtiene fácilmente que la fracción principal de $s = -j$ es

$$-\frac{0.5 - j5}{s + j}$$

El desarrollo en fracciones simples de $\mathbf{I}(s)$ es, por tanto,

$$\mathbf{I}(s) = \frac{1}{s} - 10 \frac{1}{s^2} - (0.5 + j5) \frac{1}{s - j} - (0.5 - j5) \frac{1}{s + j}$$

y término a término la inversión utilizando la Tabla 16.1 da

$$i(t) = 1 - 10t - (0,5 + j5)e^{jt} - (0,5 - j5)e^{-jt} = 1 - 10t - (\cos t - 10 \operatorname{sen} t)$$

Desarrollo de Heaviside

Si todos los polos de $\mathbf{R}(s)$ son simples, el desarrollo en fracciones simples y la inversión de dichos términos puede realizarse en un solo paso:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathbf{P}(s)}{\mathbf{Q}(s)}\right] = \sum_{k=1}^n \frac{\mathbf{P}(\mathbf{a}_k)}{\mathbf{Q}'(\mathbf{a}_k)} e^{\mathbf{a}_k t} \quad (4)$$

donde $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ son los polos y $\mathbf{Q}'(\mathbf{a}_k)$ es $d\mathbf{Q}(s)/ds$ para $s = \mathbf{a}_k$.

16.7. CIRCUITOS EN EL DOMINIO s

En el Capítulo 8 se introdujeron y utilizaron los conceptos de impedancia, admitancias y funciones de transferencia como funciones de la frecuencia compleja s . En esta sección se extiende el uso de la frecuencia compleja a la transformación de un circuito RLC , con sus consiguientes fuentes y condiciones iniciales, desde el dominio del tiempo al dominio s .

La Tabla 16.2 muestra los elementos necesarios para construir la imagen en el dominio s de un circuito dado en el dominio del tiempo. Las tres primeras filas ya fueron desarrolladas en el Ejemplo 16.1. Para el condensador se tiene que, para $t > 0$,

$$v_C(t) = V_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

por lo que, de la Tabla 16.1,

$$V_C(s) = \frac{V_0}{s} + \frac{I(s)}{Cs}$$

EJEMPLO 16.5. En el circuito de la Figura 16.4(a) se establece una corriente inicial i_1 , donde el interruptor está en la posición 1. En $t = 0$ el interruptor pasa a la posición 2 y conecta al condensador, con una carga inicial Q_0 a una fuente de tensión constante V_2 .

El circuito en el dominio s es el de la Figura 16.4(b). La ecuación en el dominio s es

$$RI(s) + sLI(s) - Li(0^+) + \frac{I(s)}{sC} + \frac{V_0}{sC} = \frac{V_2}{s}$$

en la cual $V_0 = Q_0/C$ e $i(0^+) = i_1 = V_1/R$.

Tabla 16.2.

Dominio del tiempo	Dominio s	Términos de tensión en el dominio s
$i \rightarrow R$	$I(s) \rightarrow R$	$R I(s)$
$i \rightarrow L \rightarrow i(0^+)$	$I(s) \rightarrow sL \quad - +$ $L i(0^+)$	$sL I(s) \cancel{+} L i(0^+)$
$i \rightarrow L \leftarrow i(0^+)$	$I(s) \rightarrow sL \quad + -$ $L i(0^+)$	$sL I(s) + L i(0^+)$
$i \rightarrow C \pm V_0$	$I(s) \rightarrow \frac{1}{sC} \quad + -$ $\frac{V_0}{s}$	$\frac{I(s)}{sC} + \frac{V_0}{s}$
$i \rightarrow C - V_0$	$I(s) \rightarrow \frac{1}{sC} \quad - +$ $\frac{V_0}{s}$	$\frac{I(s)}{sC} - \frac{V_0}{s}$

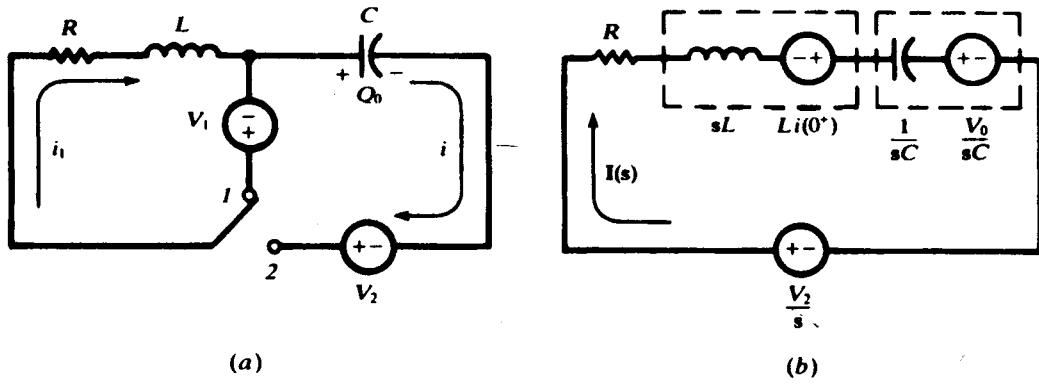


Figura 16.4.

PROBLEMAS RESUELTOS

- 16.1.** Determinar la transformada de Laplace de $e^{-at} \cos \omega t$, donde a es una constante.

Aplicando la definición de la ecuación $\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$ a la ecuación dada se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{-at} \cos \omega t] &= \int_0^\infty \cos \omega t e^{-(s+a)t} dt \\ &= \left[\frac{-(s+a) \cos \omega t e^{-(s+a)t} + e^{-(s+a)t} \omega \sin \omega t}{(s+a)^2 + \omega^2} \right]_0^\infty \\ &= \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

- 16.2.** Si $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, demostrar que $\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$. Aplicar este resultado al Problema 16.1.

Por definición, $\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = F(s)$. Entonces,

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = \int_0^\infty [e^{-at}f(t)]e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s+a)t} dt = F(s+a) \quad (5)$$

Aplicando (5) a la fila 6 de la Tabla 16.1, se obtiene

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cos \omega t] = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

como se determinó en el Problema 16.1.

- 16.3.** Determinar la transformada de Laplace de $f(t) = 1 - e^{-at}$, donde a es una constante.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[1 - e^{-at}] &= \int_0^\infty (1 - e^{-at})e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-st} dt - \int_0^\infty e^{-(s+a)t} dt \\ &= \left[-\frac{1}{s} e^{-st} + \frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \right]_0^\infty = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} = \frac{a}{s(s+a)}\end{aligned}$$

Otro método

$$\mathcal{L}\left[a \int_0^t e^{-a\tau} d\tau\right] = a \frac{1/(s+a)}{s} = \frac{a}{s(s+a)}$$

16.4. Determinar

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2 - a^2)}\right]$$

Utilizando el método de las fracciones simples,

$$\frac{1}{s(s^2 - a^2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+a} + \frac{C}{s-a}$$

y los coeficientes son

$$A = \frac{1}{s^2 - a^2} \Big|_{s=0} = -\frac{1}{a^2} \quad B = \frac{1}{s(s-a)} \Big|_{s=-0} = \frac{1}{2a^2} \quad C = \frac{1}{s(s+a)} \Big|_{s=a} = \frac{1}{2a^2}$$

Por tanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2 - a^2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1/a^2}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/2a^2}{s+a}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/2a^2}{s-a}\right]$$

Las correspondientes funciones en el tiempo se encuentran en la Tabla 16.1:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2 - a^2)}\right] &= -\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} e^{-at} + \frac{1}{2a^2} e^{at} \\ &= -\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{e^{at} + e^{-at}}{2} \right) = \frac{1}{a^2} (\cosh at - 1) \end{aligned}$$

Otro método

Por las filas 11 y 14 de la Tabla 16.1,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/(s^2 - a^2)}{s}\right] = \int_0^t \frac{\operatorname{senh} a\tau}{a} d\tau = \left[\frac{\cosh a\tau}{a^2} \right]_0^t = \frac{1}{a^2} (\cosh at - 1)$$

16.5. Determinar

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s(s^2 + 4s + 4)}\right]$$

Utilizando el método del desarrollo en fracciones simples se tiene

$$\frac{s+1}{s(s+2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B_1}{s+2} + \frac{B_2}{(s+2)^2}$$

Entonces,

$$A = \frac{s+1}{(s+2)^2} \Big|_{s=0} = \frac{1}{4} \quad B_2 = \frac{s+1}{s} \Big|_{s=-2} = \frac{1}{2}$$

y

$$B_1 = (s+2) \frac{s+2}{2s(s+2)^2} \Big|_{s=-2} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Por tanto, } \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s(s^2+4s+4)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{4}}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-\frac{1}{4}}{s+2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{2}}{(s+2)^2}\right]$$

Las correspondientes funciones en el tiempo se encuentran en la Tabla 16-1:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s(s^2+4s+4)}\right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} e^{-2t} + \frac{1}{2} te^{-2t}$$

- 16.6.** En el circuito serie RC de la Figura 16.5 el condensador tiene una carga inicial de 2,5 mC. En $t = 0$ el interruptor se cierra y se aplica una fuente de tensión constante $V = 100$ V. Utilizar el método de la transformada de Laplace para determinar la intensidad.

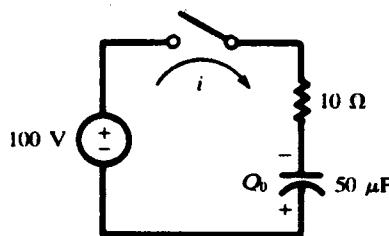


Figura 16.5.

La ecuación en el dominio del tiempo para el circuito dado, después de cerrar el interruptor, es

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \left[Q_0 + \int_0^t i(\tau) d\tau \right] = V$$

$$\text{o} \quad 10i(t) + \frac{1}{50 \cdot 10^{-6}} \left[(-2,5 \cdot 10^{-3}) + \int_0^t i(\tau) d\tau \right] = V \quad (6)$$

Q_0 tiene una polaridad contraria a la carga que la fuente depositará en el condensador. Haciendo la transformada de Laplace de los términos de (6) se obtiene la ecuación en el dominio s

$$10I(s) - \frac{2,5 \cdot 10^{-3}}{50 \cdot 10^{-6}s} + \frac{I(s)}{50 \cdot 10^{-6}s} = \frac{100}{s}$$

$$o \quad I(s) = \frac{15}{s + (2 \cdot 10^3)} \quad (7)$$

La función del tiempo se obtiene haciendo la transformada inversa de Laplace de (7):

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{15}{s + (2 \cdot 10^3)} \right] = 15e^{-2 \cdot 10^3 t} \text{ (A)} \quad (8)$$

- 16.7. En el circuito RL de la Figura 16.6 el interruptor está en la posición 1 el tiempo suficiente como para que se establezcan condiciones estacionarias. En $t = 0$ el interruptor cambia a la posición 2. Determinar la intensidad resultante.

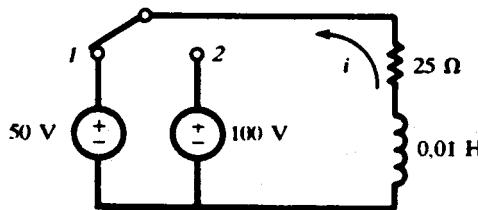


Figura 16.6.

El sentido de la intensidad se muestra en el diagrama. La intensidad inicial es $i_0 = -50/25 = -2 \text{ A}$.

La ecuación en el dominio del tiempo es

$$25i + 0,01 \frac{di}{dt} = 100 \quad (9)$$

Haciendo la transformada de Laplace de (9),

$$25I(s) + 0,01 sI(s) - 0,01 i(0^+) = 100/s \quad (10)$$

Sustituyendo para $i(0^+)$,

$$25I(s) + 0,01 sI(s) + 0,01(2) = 100/s \quad (11)$$

$$y \quad I(s) = \frac{100}{s(0,01s + 25)} - \frac{0,02}{0,01s + 25} = \frac{10^4}{s(s + 2500)} - \frac{2}{s + 2500} \quad (12)$$

Aplicando el método del desarrollo en fracciones simples,

$$\frac{10^4}{s(s + 2500)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 2500} \quad (13)$$

$$\text{con} \quad A = \frac{10^4}{s + 2500} \Big|_{s=0} = 4 \quad y \quad B = \frac{10^4}{s} \Big|_{s=-2500} = -4$$

Entonces,

$$I(s) = \frac{4}{s} - \frac{4}{s + 2500} - \frac{2}{s + 2500} = \frac{4}{s} - \frac{6}{s + 2500} \quad (14)$$

Haciendo la transformada inversa de Laplace se obtiene $i = 4 - 6e^{-2500t}$ (A).

- 16.8.** En el circuito serie RL de la Figura 16.7 se aplica un potencial exponencial $v = 50e^{-100t}$ (V) cuando se cierra el interruptor en $t = 0$. Determinar la intensidad resultante.

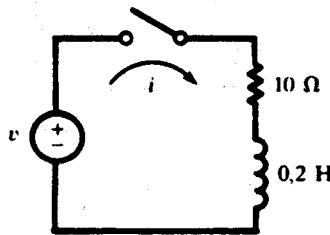


Figura 16.7.

La ecuación en el dominio del tiempo para el circuito dado es

$$RI + L \frac{di}{dt} = v \quad (15)$$

En el dominio s , (15) tiene la forma

$$RI(s) + sLI(s) - Li(0^+) = V(s) \quad (16)$$

Sustituyendo las constantes del circuito y la transformada de la fuente, $V(s) = 50/(s + 100)$, en (16),

$$10I(s) + s(0,2)I(s) = \frac{50}{s + 100} \quad o \quad I(s) = \frac{250}{(s + 100)(s + 50)} \quad (17)$$

Por la fórmula del desarrollo de Heaviside,

$$\mathcal{L}^{-1}[I(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right] = \sum_{n=1,2} \frac{P(a_n)}{Q'(a_n)} e^{a_n t}$$

Por tanto, $P(s) = 250$, $Q(s) = s^2 + 150s + 5000$, $Q'(s) = 2s + 150$, $a_1 = -100$ y $a_2 = -50$. Entonces,

$$i = \mathcal{L}^{-1}[I(s)] = \frac{250}{-50} e^{-100t} + \frac{250}{50} e^{-50t} = -5e^{-100t} + 5e^{-50t} (A)$$

- 16.9. El circuito serie RC de la Figura 16.8 tiene una fuente de tensión sinusoidal $v = 180 \operatorname{sen}(2000 + \phi) \text{ V}$ y una carga inicial en el condensador $Q_0 = 1,25 \text{ mC}$ con la polaridad representada en la figura. Determinar la intensidad si el interruptor se cierra en el instante correspondiente a $\phi = 90^\circ$.

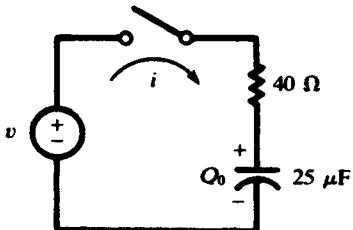


Figura 16.8.

La ecuación en el dominio del tiempo del circuito es

$$40i(t) + \frac{1}{25 \cdot 10^{-6}} \left[(1,25 \cdot 10^{-3}) + \int_0^t i(\tau) d\tau \right] = 180 \cos 2000t \quad (18)$$

La transformada de Laplace de (18) da la ecuación en el dominio s

$$40I(s) + \frac{1,25 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-6}s} + \frac{4 \cdot 10^4}{s} I(s) = \frac{180s}{s^2 + 4 \cdot 10^6} \quad (19)$$

$$\text{o} \quad I(s) = \frac{4,5s^2}{(s^2 + 4 \cdot 10^6)(s + 10^3)} - \frac{1,25}{s + 10^3} \quad (20)$$

Aplicando la fórmula del desarrollo de Heaviside al primer término del segundo miembro de la igualdad (20) se tiene $P(s) = 4,5s^2$, $Q(s) = s^3 + 10^3s^2 + 4 \cdot 10^6s + 4 \cdot 10^9$, $Q'(s) = 3s^2 + 2 \cdot 10^3s + 4 \cdot 10^6$, $a_1 = -j2 \cdot 10^3$, $a_2 = j2 \cdot 10^3$ y $a_3 = -10^3$. Entonces,

$$\begin{aligned} i &= \frac{P(-j2 \cdot 10^3)}{Q'(-j2 \cdot 10^3)} e^{-j2 \cdot 10^3 t} + \frac{P(j2 \cdot 10^3)}{Q'(j2 \cdot 10^3)} e^{j2 \cdot 10^3 t} + \frac{P(-10^3)}{Q'(-10^3)} e^{-10^3 t} - 1,25 e^{-10^3 t} \\ &= (1,8 - j0,9)e^{-j2 \cdot 10^3 t} + (1,8 + j0,9)e^{j2 \cdot 10^3 t} - 0,35 e^{-10^3 t} \\ &= -1,8 \operatorname{sen} 2000t + 3,6 \cos 2000t - 0,35 e^{-10^3 t} \\ &= 4,02 \operatorname{sen}(2000t + 116,6^\circ) - 0,35 e^{-10^3 t} \text{ (A)} \end{aligned} \quad (21)$$

En $t = 0$ la intensidad viene dada por la tensión instantánea, consistente en la fuente de tensión y la tensión del condensador cargado, divididas por la resistencia. Por tanto,

$$i_0 = \left(180 \operatorname{sen} 90^\circ - \frac{1,25 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-6}} \right) / 40 = 3,25 \text{ A}$$

El mismo resultado se obtiene si se impone $t = 0$ en (21).

- 16.10.** En el circuito RL de la Figura 16.9, la fuente es $v = 100 \operatorname{sen}(500t + \phi)$ (V). Determinar la intensidad resultante si el interruptor se cierra en el instante $\phi = 0$.

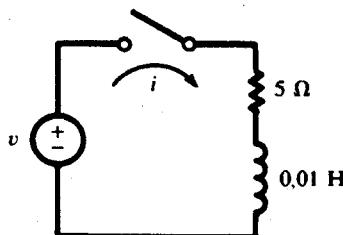


Figura 16.9.

La ecuación en el dominio s de un circuito serie RL es

$$RI(s) + sLI(s) - Li(0^+) = V(s) \quad (22)$$

La transformada de la fuente con $\phi = 0$ es

$$V(s) = \frac{(100)(500)}{s^2 + (500)^2}$$

Ya que no hay intensidad inicial en la inductancia, $Li(0^+) = 0$. Sustituyendo las constantes del circuito en (22),

$$5I(s) + 0.01sI(s) = \frac{5 \cdot 10^4}{s^2 + 25 \cdot 10^4} \quad \text{o} \quad I(s) = \frac{5 \cdot 10^6}{(s^2 + 25 \cdot 10^4)(s + 500)} \quad (23)$$

Haciendo el desarrollo en fracciones simples de (23),

$$I(s) = 5 \left(\frac{-1 + j}{s + j500} \right) + 5 \left(\frac{-1 - j}{s - j500} \right) + \frac{10}{s + 500} \quad (24)$$

La transformada inversa de Laplace de (24) es

$$i = 10 \operatorname{sen} 500t - 10 \cos 500t + 10e^{-500t} = 10e^{-500t} + 14.14 \operatorname{sen}(500t - 45^\circ) \text{ (A)}$$

- 16.11.** Resolver el Problema 16.10 con la función de tensión siguiente:

$$v = 100e^{j500t} \text{ (V)} \quad (25)$$

Ahora $V(s) = 100/(s - j500)$ y la ecuación en el dominio s es

$$5I(s) + 0.01sI(s) = \frac{100}{s - j500} \quad \text{o} \quad I(s) = \frac{10^4}{(s - j500)(s + 500)}$$

Utilizando fracciones simples,

$$\mathbf{I}(\mathbf{s}) = \frac{10 - j10}{\mathbf{s} - j500} + \frac{-10 + j10}{\mathbf{s} + 500}$$

y haciendo la transformada inversa de Laplace,

$$\begin{aligned} i &= (10 - j10)e^{j500t} + (-10 + j10)e^{-500t} \\ &= 14,14e^{j(500t - \pi/4)} + (-10 + j10)e^{-500t} \quad (\text{A}) \end{aligned} \quad (26)$$

La tensión real es la parte imaginaria de (25); por tanto, la intensidad real es la parte imaginaria de (26).

$$i = 14,14 \operatorname{sen}(500t - \pi/4) + 10e^{-500t} \quad (\text{A})$$

- 16.12.** En el circuito serie RLC de la Figura 16.10 no hay carga inicial en el condensador. Si el interruptor se cierra en $t = 0$, determinar la intensidad resultante.

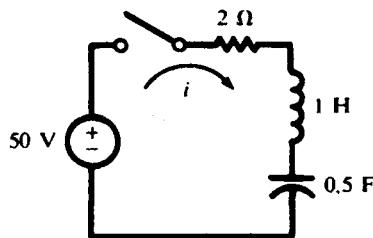


Figura 16.10.

La ecuación en el dominio del tiempo en el circuito dado es

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = V \quad (27)$$

Como $i(0^+) = 0$, la transformada de Laplace de (27) es

$$RI(\mathbf{s}) + sLI(\mathbf{s}) + \frac{1}{sC} I(\mathbf{s}) = \frac{V}{s} \quad (28)$$

$$0 \quad 2I(\mathbf{s}) + sLI(\mathbf{s}) + \frac{1}{0,5s} I(\mathbf{s}) = \frac{50}{s} \quad (29)$$

Por tanto,

$$\mathbf{I}(\mathbf{s}) = \frac{50}{s^2 + 2s + 2} = \frac{50}{(s + 1 + j)(s + 1 - j)} \quad (30)$$

Desarrollando en fracciones simples (30),

$$\mathbf{I}(\mathbf{s}) = \frac{j25}{(\mathbf{s} + 1 + j)} - \frac{j25}{(\mathbf{s} + 1 - j)} \quad (31)$$

y la transformada inversa de Laplace de (31) da

$$i = j25\{e^{(-1-j)t} - e^{(-1+j)t}\} = 50e^{-t} \sin t \text{ (A)}$$

- 16.13.** En el circuito de dos mallas de la Figura 16.11 las dos corrientes de malla seleccionadas son las mostradas en la figura. Escribir las ecuaciones en el dominio \mathbf{s} en forma matricial y dibujar el circuito correspondiente.

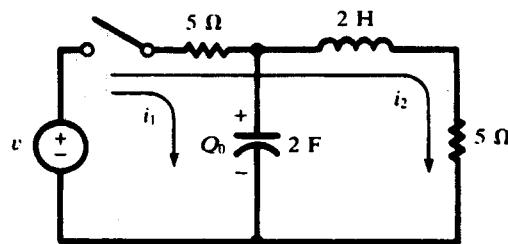


Figura 16.11.

Escribiendo el conjunto de ecuaciones en el dominio del tiempo,

$$5i_1 + \frac{1}{2} \left[Q_0 + \int_0^t i_1(\tau) d\tau \right] + 5i_2 = v \quad \text{y} \quad 10i_2 + 2 \frac{di_2}{dt} + 5i_1 = v \quad (32)$$

Haciendo la transformada de Laplace de (32) para obtener las ecuaciones correspondientes al dominio \mathbf{s} ,

$$5\mathbf{I}_1(\mathbf{s}) + \frac{Q_0}{2\mathbf{s}} + \frac{1}{2\mathbf{s}} \mathbf{I}_1(\mathbf{s}) + 5\mathbf{I}_2(\mathbf{s}) = \mathbf{V}(\mathbf{s}) \quad 10\mathbf{I}_2(\mathbf{s}) + 2\mathbf{s}\mathbf{I}_2(\mathbf{s}) - 2i_2(0^+) + 5\mathbf{I}_1(\mathbf{s}) = \mathbf{V}(\mathbf{s}) \quad (33)$$

Cuando este conjunto de ecuaciones se escribe en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 5 + (1/2\mathbf{s}) & 5 \\ 5 & 10 + 2\mathbf{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1(\mathbf{s}) \\ \mathbf{I}_2(\mathbf{s}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}(\mathbf{s}) - (Q_0/2\mathbf{s}) \\ \mathbf{V}(\mathbf{s}) + 2i_2(0^+) \end{bmatrix}$$

el circuito requerido en el dominio \mathbf{s} puede determinarse mediante el análisis de las matrices de $\mathbf{Z}(\mathbf{s})$, $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$ y $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ (ver Figura 16.12).

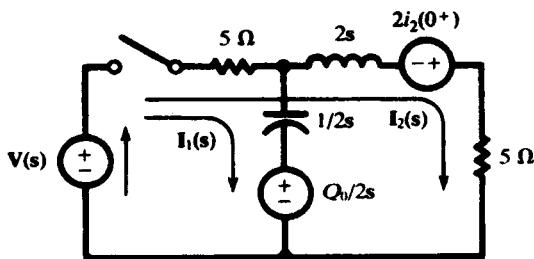


Figura 16.12.

- 16.14.** En el circuito de dos mallas de la Figura 16.13, determinar las intensidades resultantes cuando se cierra el interruptor.

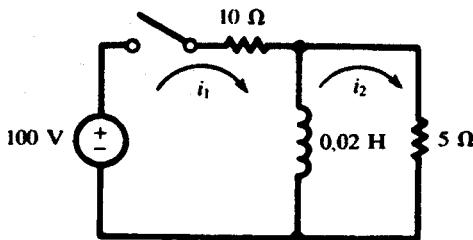


Figura 16.13.

Las ecuaciones del dominio del tiempo del circuito son

$$\begin{aligned} 10i_1 + 0,02 \frac{di_1}{dt} - 0,02 \frac{di_2}{dt} &= 100 \\ 0,02 \frac{di_2}{dt} + 5i_2 - 0,02 \frac{di_1}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

Haciendo la transformada de Laplace del conjunto (34),

$$(10 + 0,02s)I_1(s) - 0,02sI_2(s) = 100/s \quad (5 + 0,02s)I_2(s) - 0,02sI_1(s) = 0 \quad (35)$$

De la segunda ecuación del conjunto (35) se determina que

$$I_2(s) = I_1(s) \left(\frac{s}{s + 250} \right) \quad (36)$$

Lo que sustituido en la primera ecuación da

$$I_1(s) = 6,67 \left[\frac{s + 2500}{s(s + 166,7)} \right] = \frac{10}{s} - \frac{3,33}{s + 166,7} \quad (37)$$

Haciendo la transformada inversa a (37),

$$i_1 = 10 - 3,33 e^{-166,7t} \text{ (A)}$$

Finalmente, sustituyendo (37) en (36) se obtiene

$$I_2(s) = 6,67 \left(\frac{1}{s + 166,7} \right) \quad \text{por lo que} \quad i_2 = 6,67 e^{-166,7t} \text{ (A)}$$

16.15. Aplicar los teoremas de valor inicial y valor final en el Problema 16.14.

El valor inicial de i_1 se obtiene de

$$i_1(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s I_1(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[6,67 \left(\frac{s + 250}{s + 166,7} \right) \right] = 6,67 \text{ A}$$

y el valor final es

$$i_1(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s I_1(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[6,67 \left(\frac{s + 250}{s + 166,7} \right) \right] = 10 \text{ A}$$

El valor inicial de i_2 se obtiene de

$$i_2(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s I_2(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[6,67 \left(\frac{s}{s + 166,7} \right) \right] = 6,67 \text{ A}$$

y el valor final es

$$i_2(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s I_2(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[6,67 \left(\frac{s}{s + 166,7} \right) \right] = 0$$

Los valores inicial y final anteriores se verifican mediante el examen de la Figura 16.13. En el instante de cierre, la inductancia presenta una impedancia infinita y las intensidades son $i_1 = i_2 = 100/(10 + 5) = 6,67$ A. En estado estacionario la inductancia se comporta como un cortocircuito; por tanto, $i_1 = 10$ A, $i_2 = 0$.

16.16. Obtener i_1 del Problema 16.4 mediante un circuito equivalente en el dominio s.

En el dominio s la bobina de 0,02 H tiene una impedancia $Z(s) = 0,02s$. Por tanto, la impedancia equivalente del circuito, vista desde la fuente, es

$$Z(s) = 10 + \frac{(0,02s)(5)}{0,02s + 5} = 15 \left(\frac{s + 166,7}{s + 250} \right)$$

cuyo circuito equivalente en el dominio s se muestra en la Figura 16.14. La intensidad será

$$I_1(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{100}{s} \left[\frac{s + 250}{15(s + 166,7)} \right] = 6,67 \left[\frac{s + 250}{s(s + 166,7)} \right]$$

Esta expresión es idéntica a (37) en el Problema 16.14, y así se obtiene la misma función del tiempo de i_1 .

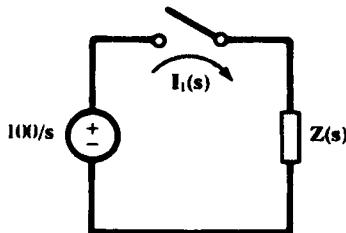


Figura 16.14.

- 16.17.** En el circuito de dos mallas de la Figura 16.15 el condensador está inicialmente descargado. Determinar las intensidades de malla i_1 e i_2 que aparecen cuando el interruptor se cierra en $t = 0$.

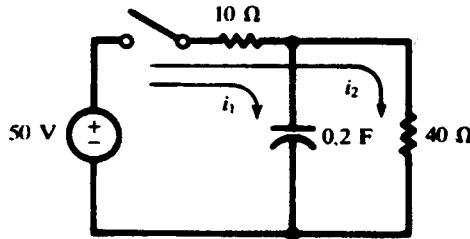


Figura 16.15.

Las ecuaciones en el dominio del tiempo para el circuito son

$$10i_1 + \frac{1}{0,2} \int_0^t i_1 d\tau + 10i_2 = 50 \quad 50i_2 + 10i_1 = 50$$

Las ecuaciones correspondientes al dominio s serán

$$10I_1(s) + \frac{1}{0,2s} I_1(s) + 10I_2(s) = \frac{50}{s} \quad 50I_2(s) + 10I_1(s) = \frac{50}{s}$$

$$\text{Resolviendo,} \quad I_1(s) = \frac{5}{s + 0,625} \quad I_2(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 0,625}$$

y haciendo la inversa se obtiene

$$i_1 = 5e^{-0,625t} \text{ (A)} \quad i_2 = 1 - e^{-0,625t} \text{ (A)}$$

- 16.18.** En el Problema 16.17, obtener la impedancia equivalente del circuito en el dominio s y determinar la intensidad total y las intensidades de rama utilizando la división de intensidades.

La impedancia vista por la fuente de tensión en el dominio s es

$$Z(s) = 10 + \frac{40(1/0,2s)}{40 + 1/0,2s} = \frac{80s + 50}{8s + 1} = 10 \left(\frac{s + 5/8}{s + 1/8} \right) \quad (38)$$

El circuito equivalente es el de la Figura 16.16, y la intensidad resultante

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = 5 \frac{s + 1/8}{s(s + 5/8)} \quad (39)$$

Desarrollando I(s) en fracciones simples

$$I(s) = \frac{1}{s} + \frac{4}{s + 5/8} \quad \text{por lo que} \quad i = 1 + 4e^{-5t/8} \quad (\text{A})$$

Las intensidades de rama $I_1(s)$ e $I_2(s)$ pueden obtenerse mediante la división de intensidades. De acuerdo con la Figura 16.17, se tiene

$$I_1(s) = I(s) \left(\frac{40}{40 + 1/0,2s} \right) = \frac{5}{s + 5/8} \quad \text{e} \quad i_1 = 5e^{-0,625t} \quad (\text{A})$$

$$I_2(s) = I(s) \left(\frac{1/0,2s}{40 + 1/0,2s} \right) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 5/8} \quad \text{e} \quad i_2 = 1 - e^{-0,625t} \quad (\text{A})$$

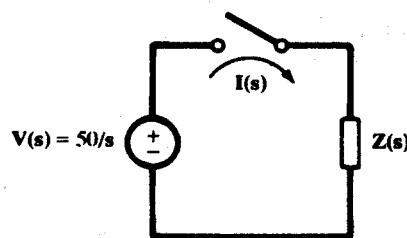


Figura 16.16.

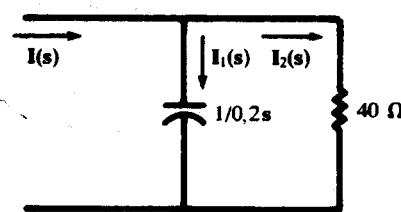


Figura 16.17.

- 16.19.** En el circuito de la Figura 16.18 el interruptor se cierra en $t = 0$, estando ambos condensadores descargados. Determinar la intensidad resultante i .

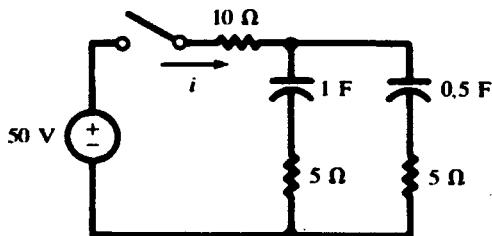


Figura 16.18.

El circuito tiene una impedancia equivalente en el dominio s

$$Z(s) = 10 + \frac{(5 + 1/s)(5 + 1/0.5s)}{10 + 1/s + 1/0.5s} = \frac{125s^2 + 45s + 2}{s(10s + 3)}$$

Por tanto, la corriente es

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{50}{s} \frac{s(10s + 3)}{(125s^2 + 45s + 2)} = \frac{4(s + 0.3)}{(s + 0.308)(s + 0.052)}$$

Desarrollando $I(s)$ en fracciones simples,

$$I(s) = \frac{1/8}{s + 0.308} + \frac{31/8}{s + 0.052} \quad \text{y} \quad i = \frac{1}{8} e^{-0.308t} + \frac{31}{8} e^{-0.052t} \quad (\text{A})$$

- 16.20.** Aplicar los teoremas del valor final y del valor inicial a la intensidad del dominio s del Problema 16.19.

$$i(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sI(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{8} \left(\frac{s}{s + 0.308} \right) + \frac{31}{8} \left(\frac{s}{s + 0.052} \right) \right] = 4 \text{ A}$$

$$i(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [sI(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{1}{8} \left(\frac{s}{s + 0.308} \right) + \frac{31}{8} \left(\frac{s}{s + 0.052} \right) \right] = 0$$

El análisis de la Figura 16.18 muestra que inicialmente la resistencia total del circuito es $R = 10 + 5(5)/10 = 12.5 \Omega$ y, por tanto, $i(0^+) = 50/12.5 = 4 \text{ A}$. Después, en el estado estacionario, ambos condensadores se cargan hasta 50 V y la intensidad es cero.

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

- 16.21.** Determinar la transformada de Laplace de cada una de las funciones siguientes:

$$\begin{array}{lll} a) \quad f(t) = At & c) \quad f(t) = e^{-at} \operatorname{sen} \omega t & e) \quad f(t) = \cosh \omega t \\ b) \quad f(t) = te^{-at} & d) \quad f(t) = \operatorname{senh} \omega t & f) \quad f(t) = e^{-at} \operatorname{senh} \omega t \end{array}$$

Solución: a) – e). Ver Tabla 16.1.

$$f) \frac{\omega}{(s + a)^2 - \omega^2}$$

- 16.22.** Determinar la transformada de Laplace de cada una de las funciones siguientes:

$$\begin{array}{lll} a) \quad F(s) = \frac{s}{(s + 2)(s + 1)} & d) \quad F(s) = \frac{3}{s(s^2 + 6s + 9)} & g) \quad F(s) = \frac{2s}{(s^2 + 4)(s + 5)} \\ b) \quad F(s) = \frac{1}{s^2 + 7s + 12} & e) \quad F(s) = \frac{s + 5}{s^2 + 2s + 5} & \\ c) \quad F(s) = \frac{5s}{s^2 + 3s + 2} & f) \quad F(s) = \frac{2s + 4}{s^2 + 4s + 13} & \end{array}$$

Solución: a) $2e^{-2t} - e^{-t}$ d) $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t} - te^{-3t}$ g) $\frac{10}{29} \cos 2t + \frac{4}{29} \operatorname{sen} 2t - \frac{10}{29}e^{-5t}$
 b) $e^{-3t} - e^{-4t}$ e) $e^{-t}(\cos 2t + 2 \operatorname{sen} 2t)$
 c) $10e^{-2t} - 5e^{-t}$ f) $2e^{-2t} \cos 3t$

- 16.23.** Un circuito serie RL , con $R = 10 \Omega$ y $L = 0,2 \text{ H}$, tiene una tensión constante $V = 50 \text{ V}$ aplicada en $t = 0$. Determinar la intensidad resultante utilizando el método de la transformada de Laplace.

Solución: $i = 5 - 5e^{-50t} \text{ (A)}$.

- 16.24.** En el circuito serie RL de la Figura 16.19 el interruptor está en la posición 1 el tiempo suficiente como para alcanzar el estadio estacionario y se cambia, posteriormente, a la posición 2 en $t = 0$. Determinar la intensidad.

Solución: $i = 5e^{-50t} \text{ (A)}$.

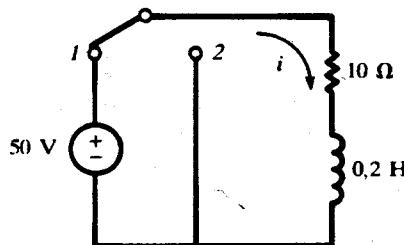


Figura 16.19.

- 16.25.** En el circuito de la Figura 16.20 el interruptor 1 se cierra en $t = 0$ y después, en $t = t' = 4 \text{ ms}$, el interruptor 2 se abre. Determinar la intensidad en los intervalos $0 < t < t'$ y $t > t'$.

Solución: $i = 2(1 - e^{-\frac{t}{2}}) \text{ (A)}$, $i = 1,06e^{-1500(t-t')} + 0,667 \text{ (A)}$.

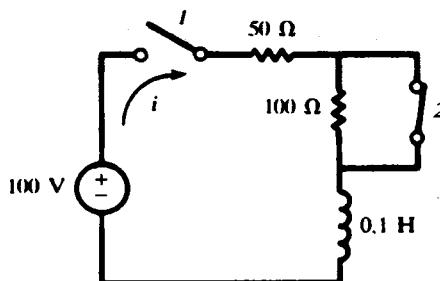


Figura 16.20.

- 16.26. En el circuito serie RL de la Figura 16.21 el interruptor se cierra a la posición 1 en $t = 0$ y después, en $t = t' = 50 \mu\text{s}$, se cambia a la posición 2. Determinar la intensidad en los intervalos $0 < t < t'$ y $t > t'$.

Solución: $i = 0,1(1 - e^{-2000t})$ (A), $i = 0,06e^{-2000(t-t')} - 0,05$ (A).

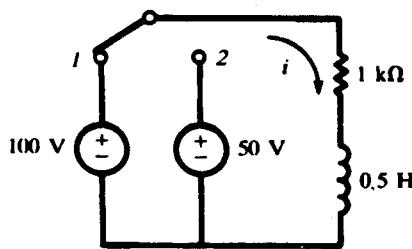


Figura 16.21.

- 16.27. En un circuito serie RC , con $R = 10 \Omega$ y $C = 4 \mu\text{F}$, el condensador tiene una carga inicial $Q_0 = 800 \mu\text{C}$ en el instante en que se cierra el interruptor, aplicándose entonces una fuente de tensión constante $V = 100 \text{ V}$. Determinar la intensidad transitoria resultante si la carga es: a) de la misma polaridad que la suministrada por la fuente, y b) de polaridad opuesta.

Solución: a) $i = -10e^{-25 \cdot 10^3 t}$ (A); b) $i = 30e^{-25 \cdot 10^3 t}$ (A).

- 16.28. En un circuito serie RC , con $R = 1 \text{ k}\Omega$ y $C = 20 \mu\text{F}$, el condensador tiene una carga inicial Q_0 en el instante en que se cierra el interruptor, aplicándose entonces una fuente de tensión constante $V = 50 \text{ V}$. Determinar la carga Q_0 y su polaridad si la intensidad resultante es $i = 0,075e^{-50t}$ (A).

Solución: $500 \mu\text{C}$, de polaridad opuesta a la fuente.

- 16.29. En el circuito serie RC de la Figura 16.22 el interruptor se cierra a la posición 1 en $t = 0$ y después, en $t = t' = \tau$ (la constante de tiempo), se cambia a la posición 2. Determinar la intensidad transitoria en los intervalos $0 < t < t'$ y $t > t'$.

Solución: $i = 0,5e^{-200t}$ (A), $i = -0,516e^{-200(t-t')}$ (A).

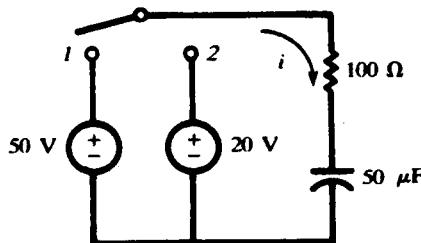


Figura 16.22.

- 16.30. En el circuito de la Figura 16.23, $Q_0 = 300 \mu\text{C}$ en el instante en que se cierra el interruptor. Determinar la intensidad transitoria resultante.

Solución: $i = 2,5e^{-25 \cdot 10^4 t}$ (A).

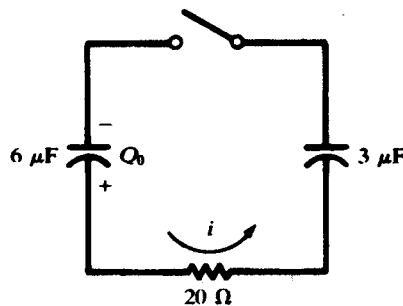


Figura 16.23.

- 16.31. En el circuito de la Figura 16.24 el condensador está cargado inicialmente con $Q_0 = 25 \mu\text{C}$ y la fuente de tensión senoidal es $v = 100 \operatorname{sen}(1000t + \phi)$ (V). Determinar la intensidad resultante si el interruptor se cierra en el instante $\phi = 30^\circ$.

Solución: $i = 0,1535e^{-4000t} + 0,0484 \operatorname{sen}(1000t + 106^\circ)$ (A).

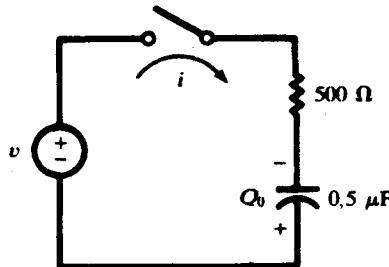


Figura 16.24.

- 16.32. Un circuito serie RLC con $R = 5 \Omega$, $L = 0,1 \text{ H}$ y $C = 500 \mu\text{F}$ tiene una tensión constante de $V = 10 \text{ V}$ aplicada en un instante $t = 0$. Determinar la intensidad resultante.

Solución: $i = 0,72e^{-25t} \operatorname{sen} 139t$ (A).

- 16.33. En el circuito serie *RLC* de la Figura 16.25 la carga inicial del condensador es $Q_0 = 1 \text{ mC}$ y el interruptor está en la posición 1 el tiempo suficiente para establecer un estado estacionario. Determinar la intensidad transitoria resultante cuando el interruptor se cambia de la posición 1 a la posición 2 en $t = 0$.

Solución: $i = e^{-25t}(2 \cos 222t - 0,45 \operatorname{sen} 222t)$ (A).

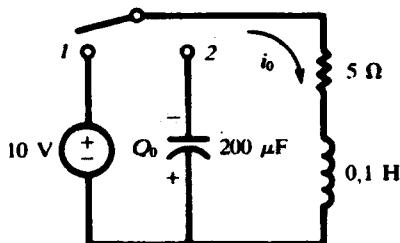


Figura 16.25.

- 16.34. Un circuito serie *RLC* con $R = 5 \Omega$, $L = 0,2 \text{ H}$ y $C = 1 \text{ F}$ tiene una fuente de tensión $v = 10e^{-100t}$ (V) aplicada en $t = 0$. Determinar la intensidad resultante.

Solución: $i = -0,666e^{-100t} + 0,670e^{-24,8t} - 0,004e^{-0,2t}$ (A).

- 16.35. Un circuito serie *RLC*, con $R = 200 \Omega$, $L = 0,5 \text{ H}$ y $C = 100 \mu\text{F}$ tiene una fuente senoidal de tensión $v = 300 \operatorname{sen}(500t + \phi)$ (V). Determinar la intensidad resultante si el interruptor se cierra en el instante correspondiente a $\phi = 30^\circ$.

Solución: $i = 0,517e^{-341,4t} - 0,917e^{-58,6t} + 0,983 \operatorname{sen}(500t - 19^\circ)$ (A).

- 16.36. Un circuito serie *RLC*, con $R = 5 \Omega$, $L = 0,1 \text{ H}$ y $C = 500 \mu\text{F}$ tiene una fuente senoidal de tensión $v = 100 \operatorname{sen} 250t$ (V). Determinar la intensidad resultante si el interruptor se cierra en el instante correspondiente a $t = 0$.

Solución: $i = e^{-25t}(5,42 \cos 139t + 1,89 \operatorname{sen} 139t) + 5,65 \operatorname{sen}(250t - 73,6^\circ)$ (A).

- 16.37. En el circuito de dos mallas de la Figura 16.26 circulan las intensidades mostradas. Escribir las ecuaciones en el dominio del tiempo, transformarlas en las correspondientes ecuaciones en el dominio s y obtener las intensidades de malla i_1 e i_2 .

Solución: $i_1 = 2,5(1 + e^{-10^5 t})$ (A), $i_2 = 5e^{-10^5 t}$ (A).

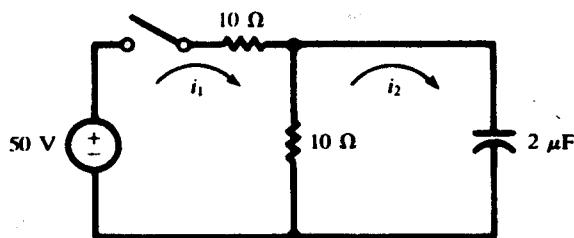


Figura 16.26.

- 16.38. Para el circuito de dos mallas de la Figura 16.27 obtener las intensidades de malla i_1 e i_2 resultantes cuando el interruptor se cierra en $t = 0$.

Solución: $i_1 = 0,101e^{-100t} + 9,899e^{-9950t}$ (A), $i_2 = -5,05e^{-100t} + 5 + 0,05e^{-9950t}$ (A).

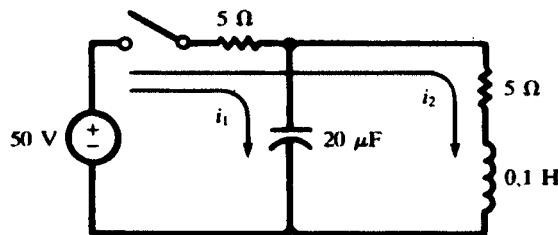


Figura 16.27.

- 16.39. En el circuito de la Figura 16.28 la fuente de 100 V suministra una intensidad continua en la primera malla mientras el interruptor está abierto. Determinar las intensidades después de que el interruptor se cierre en el instante $t = 0$.

Solución: $i_1 = 1,67e^{-6,67t} + 5$ (A), $i_2 = 0,555e^{-6,67t} + 5$ (A).

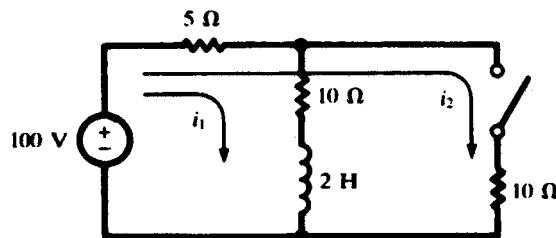


Figura 16.28.

- 16.40. El circuito de dos mallas de la Figura 16.29 tiene una fuente de tensión senoidal $v = 100 \operatorname{sen}(200t + \phi)$ (V). El interruptor se cierra en el instante en el que la tensión tiene su máxima pendiente. Determinar las intensidades de malla resultantes, con los sentidos mostrados en el diagrama.

Solución: $i_1 = 3,01e^{-100t} + 8,96 \operatorname{sen}(200t - 63,4^\circ)$ (A),

$i_2 = 1,505e^{-100t} + 4,48 \operatorname{sen}(200t - 63,4^\circ)$ (A).

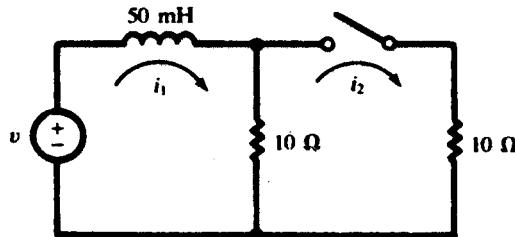


Figura 16.29.

CAPÍTULO 17

Análisis de ondas por el método de Fourier

17.1. INTRODUCCIÓN

En los circuitos analizados hasta ahora la respuesta de un circuito se obtenía para excitaciones con forma constante, senoidal o exponencial. En estos casos existían expresiones sencillas para describir las funciones de respuesta forzada en función del tiempo; por ejemplo, $v = \text{cte}$. o $v = V \sen \omega t$, como se muestra en la Figura 17.1(a) y (b).

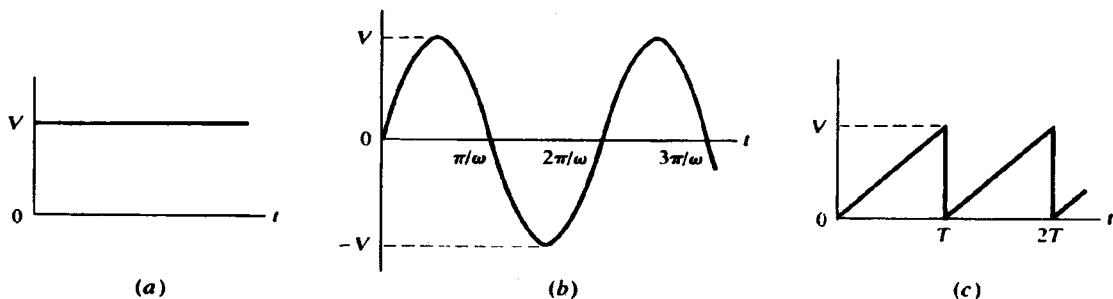


Figura 17.1.

Algunas formas de onda periódicas, como por ejemplo la función de dientes de sierra de la Figura 17.1(c), sólo pueden definirse mediante funciones sencillas localmente. Por tanto, los dientes de sierra se expresan por la función $f(t) = (V/T)t$ en el intervalo $0 < t < T$ y por $f(t) = (V/T)(t - T)$ en el intervalo $T < t < 2T$. Tales expresiones describen la forma de onda satisfactoriamente, pero no permiten determinar la respuesta del circuito. Ahora bien, si una función periódica puede expresarse como la suma de un número finito o infinito de funciones senoidales, las respuestas de los circuitos lineales a excitaciones no senoidales pueden obtenerse aplicando el teorema de superposición. Con el método de Fourier pueden resolverse este tipo de problemas.

En este capítulo se analizan diferentes herramientas y condiciones para la aplicación del método de Fourier. Las ondas periódicas se expresan como series de Fourier, mientras que las no periódicas se expresan por sus correspondientes transformadas de Fourier. Sin embargo, una parte de una onda no periódica especificada en un período de tiempo finito puede expresarse mediante una serie de Fourier válida para dicho período de tiempo. Este conjunto de posibilidades hace que el análisis de las series de Fourier sea el principal objetivo de este capítulo.

17.2. SERIES DE FOURIER TRIGONOMÉTRICAS

Cualquier onda periódica, es decir, que cumpla $f(t) = f(t + T)$, podrá expresarse en una serie de Fourier siempre que

- 1) siendo discontinua, tenga un número finito de discontinuidades en el período T ;
- 2) tenga un valor medio finito en el período T ;
- 3) incluya un número finito de máximos positivos y negativos en el período T .

Cuando se cumplan estas *condiciones de Dirichlet*, la serie de Fourier existe y puede escribirse en forma trigonométrica:

$$\begin{aligned} f(t) = & \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + \dots \\ & + b_1 \operatorname{sen} \omega t + b_2 \operatorname{sen} 2\omega t + b_3 \operatorname{sen} 3\omega t + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Los coeficientes de Fourier, a_i y b_i , para una onda concreta, se determinan mediante integrales. Se obtienen los coeficientes de los términos en coseno mediante la integral de ambos miembros de la igualdad de (1) multiplicándolos por $\cos n\omega t$ a lo largo de un período completo. El período de la frecuencia fundamental, $2\pi/\omega$, es el período para realizar las integrales, ya que cada término de la serie tiene una frecuencia múltiplo entero de la fundamental.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/\omega} f(t) \cos n\omega t \, dt = & \int_0^{2\pi/\omega} \frac{1}{2}a_0 \cos n\omega t \, dt + \int_0^{2\pi/\omega} a_1 \cos \omega t \cos n\omega t \, dt + \dots \\ & + \int_0^{2\pi/\omega} a_n \cos^2 n\omega t \, dt + \dots + \int_0^{2\pi/\omega} b_1 \operatorname{sen} \omega t \cos n\omega t \, dt \\ & + \int_0^{2\pi/\omega} b_2 \operatorname{sen} 2\omega t \cos n\omega t \, dt + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Las integrales definidas del segundo miembro de la igualdad de (2) son cero excepto aquellas que tengan un término de la forma $\cos^2 n\omega t$, cuyo valor es $(\pi/\omega)a_n$. Por tanto,

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(t) \cos n\omega t \, dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2\pi nt}{T} \, dt \quad (3)$$

Multiplicando (1) por $\operatorname{sen} n\omega t$ e integrando como anteriormente, se obtienen los coeficientes de los términos en seno.

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(t) \operatorname{sen} n\omega t \, dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{sen} \frac{2\pi nt}{T} \, dt \quad (4)$$

Un método alternativo para realizar las integrales consiste en utilizar la variable $\psi = \omega t$, siendo el correspondiente período 2π ,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\psi) \cos n\psi \, d\psi \quad (5)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\psi) \sin n\psi \, d\psi \quad (6)$$

donde $F(\psi) = f(\psi/\omega)$. Las integrales pueden realizarse desde $-T/2$ a $T/2$, $-\pi$ a $+\pi$ o sobre cualquier otro período completo que pueda simplificar los cálculos. La constante a_0 se obtiene de (3) o de (5) con $n = 0$; sin embargo, como $\frac{1}{2}a_0$ es el valor medio de la función, es frecuente que dicha constante pueda determinarse mediante un análisis de la forma de onda. La serie de Fourier con los coeficientes obtenidos de las integrales anteriores converge de modo uniforme al valor de la función en todos los puntos donde la función es continua y converge al valor medio en los puntos en los que la función es discontinua.

EJEMPLO 17.1. Determinar la serie de Fourier de la onda de la Figura 17.2.

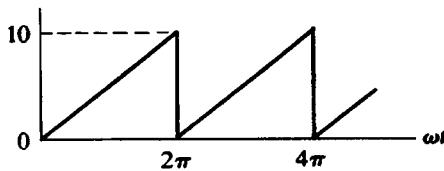


Figura 17.2.

La onda es periódica, con período $2\pi/\omega$ para t o 2π para ωt . Es continua para $0 < \omega t < 2\pi$ y de la forma $f(t) = (10/2\pi)\omega t$, con discontinuidades para $\omega t = n2\pi$ donde $n = 0, 1, 2, \dots$. Se verifican las condiciones de Dirichlet. El valor medio de la función, analizando la forma de onda, es 5, y, por tanto, $\frac{1}{2}a_0 = 5$. Para $n > 0$, (5) da

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{10}{2\pi} \right) \omega t \cos n\omega t \, d(\omega t) = \frac{10}{2\pi^2} \left[\frac{\omega t}{n} \sin n\omega t + \frac{1}{n^2} \cos n\omega t \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{10}{2\pi^2 n^2} (\cos n2\pi - \cos 0) = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, la serie no contiene términos en coseno. De (6) se obtiene:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{10}{2\pi} \right) \omega t \sin n\omega t \, d(\omega t) = \frac{10}{2\pi^2} \left[-\frac{\omega t}{n} \cos n\omega t + \frac{1}{n^2} \sin n\omega t \right]_0^{2\pi} = -\frac{10}{\pi n}$$

Utilizando estos coeficientes de los términos en seno y el término del valor medio, la serie es

$$f(t) = 5 - \frac{10}{\pi} \operatorname{sen} \omega t - \frac{10}{2\pi} \operatorname{sen} 2\omega t - \frac{10}{3\pi} \operatorname{sen} 3\omega t - \dots = 5 - \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\omega t}{n}$$

Los términos en seno y coseno de la misma frecuencia pueden combinarse como un término simple en seno o conseno con un ángulo de fase. Se obtienen dos formas trigonométricas alternativas de la serie

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum c_n \cos(n\omega t - \theta_n) \quad (7)$$

$$\text{y} \quad f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum c_n \operatorname{sen}(n\omega t + \phi_n) \quad (8)$$

donde $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\theta_n = \operatorname{tg}^{-1}(b_n/a_n)$ y $\phi_n = \operatorname{tg}^{-1}(a_n/b_n)$. En (7) y (8), c_n es la amplitud del armónico, mientras que θ_n y ϕ_n son los ángulos de fase del armónico.

17.3. SERIES EXPONENCIALES DE FOURIER

Una onda periódica $f(t)$ que cumpla las condiciones de Dirichlet puede expresarse como una serie de Fourier exponencial que es una variación de la serie trigonométrica. La serie exponencial es

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_n e^{jn\omega t} \quad (9)$$

Para obtener los coeficientes \mathbf{A}_n mediante integración se multiplican ambos miembros de la igualdad (9) por $e^{-jn\omega t}$ y se integra en un período completo:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-jn\omega t} d(\omega t) &= \dots + \int_0^{2\pi} \mathbf{A}_{-2} e^{-j2\omega t} e^{-jn\omega t} d(\omega t) + \int_0^{2\pi} \mathbf{A}_{-1} e^{-j\omega t} e^{-jn\omega t} d(\omega t) \\ &+ \int_0^{2\pi} \mathbf{A}_0 e^{-jn\omega t} d(\omega t) + \int_0^{2\pi} \mathbf{A}_1 e^{j\omega t} e^{-jn\omega t} d(\omega t) + \dots \\ &+ \int_0^{2\pi} \mathbf{A}_n e^{jn\omega t} e^{-jn\omega t} d(\omega t) + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Las integrales definidas del segundo miembro de (10) son cero excepto $\int_0^{2\pi} \mathbf{A}_n d(\omega t)$, que tienen el valor $2\pi\mathbf{A}_n$. Entonces

$$\mathbf{A}_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-jn\omega t} d(\omega t) \quad \text{o} \quad \mathbf{A}_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-j2\pi nt/T} dt \quad (11)$$

Igual que para obtener a_n y b_n , los límites de integración en (11) pueden ser los extremos del período completo que resulte más conveniente, y no necesariamente desde 0 a 2π o desde 0 a T . Nótese que, siendo $f(t)$ real, $A_{-n} = A_n^*$, por lo que en (11) sólo se tienen en cuenta los valores positivos de n . Además,

$$a_n = 2 \operatorname{Re} A_n \quad b_n = -2 \operatorname{Im} A_n \quad (12)$$

EJEMPLO 17.2. Obtener la serie exponencial (9) a partir de la serie trigonométrica (1).

Reemplazar los términos en seno y coseno de (1) por sus equivalentes exponenciales complejas.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} n\omega t &= \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j} \\ \cos n\omega t &= \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} \end{aligned}$$

Agrupando los términos de la serie exponencial en función de n desde $-\infty$ a $+\infty$ se obtiene la suma infinita (9), donde $A_0 = a_0/2$ y

$$A_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \quad A_{-n} = (a_n + jb_n) \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

EJEMPLO 17.3. Determinar la serie exponencial de Fourier para la onda de la Figura 17.2. Utilizando los coeficientes de esta serie exponencial, obtener a_n y b_n de la serie trigonométrica y compararlos con los del Ejemplo 17.1.

En el intervalo $0 < \omega t < 2\pi$ la función es $f(t) = (10/2\pi)\omega t$. Analizando la gráfica de la función, el valor medio es $A_0 = 5$. Sustituyendo $f(t)$ en (11) se obtienen los coeficientes A_n .

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{10}{2\pi}\right) \omega t e^{-jn\omega t} d(\omega t) = \frac{10}{(2\pi)^2} \left[\frac{e^{-jn\omega t}}{(-jn)^2} (-jn\omega t - 1) \right]_0^{2\pi} = j \frac{10}{2\pi n}$$

Introduciendo los coeficientes A_n en (12), la forma exponencial de la serie de Fourier para la onda es

$$f(t) = \dots - j \frac{10}{4\pi} e^{-j2\omega t} - j \frac{10}{2\pi} e^{-j\omega t} + 5 + j \frac{10}{2\pi} e^{j\omega t} + j \frac{10}{4\pi} e^{j2\omega t} + \dots \quad (13)$$

Los coeficientes de la serie trigonométrica son, de (12),

$$a_n = 0 \quad b_n = -\frac{10}{\pi n}$$

y así

$$f(t) = 5 - \frac{10}{\pi} \operatorname{sen} \omega t - \frac{10}{2\pi} \operatorname{sen} 2\omega t - \frac{10}{3\pi} \operatorname{sen} 3\omega t - \dots$$

que es el mismo resultado del Ejemplo 17.1.

17.4. SIMETRÍA DE LAS FORMAS DE ONDA

Las series obtenidas en el Ejemplo 17.1 contenían un solo término constante, además de los términos en seno. Otras formas de onda sólo tendrán los términos en coseno y, en ocasiones, solamente aparecen en las series armónicos antisimétricos, aunque las series contengan términos en seno, coseno o ambos conjuntamente. Lo dicho anteriormente es el resultado de algunos tipos de simetría mostrados por las ondas. El conocimiento de tales simetrías se traduce en una reducción de los cálculos a la hora de determinar la serie de Fourier. Por este motivo son importantes las siguientes definiciones.

1. Una función $f(x)$ se dice que es *par* si $f(x) = f(-x)$.

La función $f(x) = 2 + x^2 + x^4$ es un ejemplo de una función par, ya que los valores que toma la función para x y para $-x$ son iguales. La función coseno es una función par, ya que puede expresarse mediante una suma de términos con potencias pares.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

La suma o el producto de dos o más funciones pares es una función par. La suma de una constante a una función par no altera su naturaleza par.

En la Figura 17.3 las formas de onda mostradas representan funciones pares de x , que son simétricas con respecto al eje vertical, como lo indica la Figura 17.3(a).

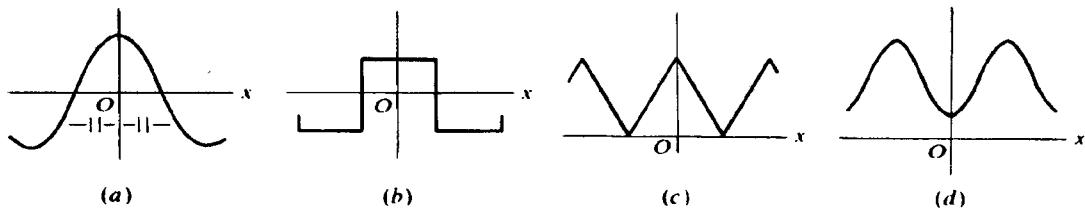


Figura 17.3.

2. Se dice que una función $f(x)$ es *ímpar* si $f(x) = -f(-x)$.

La función $f(x) = x + x^3 + x^5$ es un ejemplo de una función impar, ya que los valores de la función para x y para $-x$ son de signos contrarios. La función seno es una función impar, ya que puede expresarse mediante una suma de términos con potencias impares.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

La suma de dos o más funciones impares es una función impar, pero la suma de una constante elimina la naturaleza impar de la función. El producto de dos funciones impares es una función simétrica o par.

Las formas de onda de la Figura 17.4 representan funciones impares de x . Son simétricas respecto al origen, como se ve en la Figura 17.4(a).

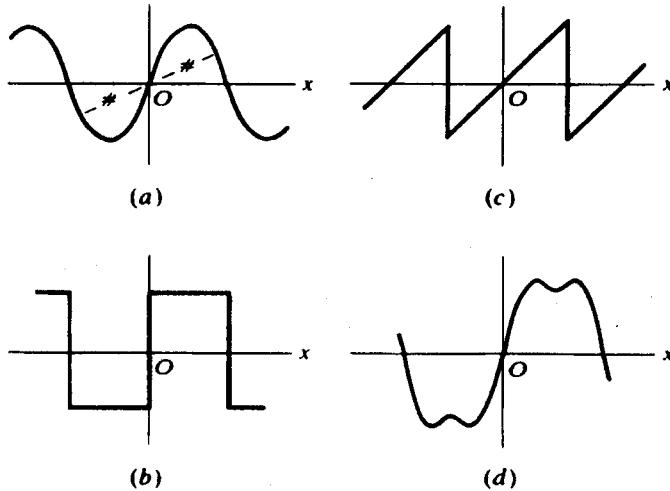


Figura 17.4.

3. Se dice que una función periódica $f(x)$ es inversa de medio ciclo si $f(x) = -f(x + T/2)$, donde T es el período. En la Figura 17.5 se muestran dos ondas inversas de medio ciclo.

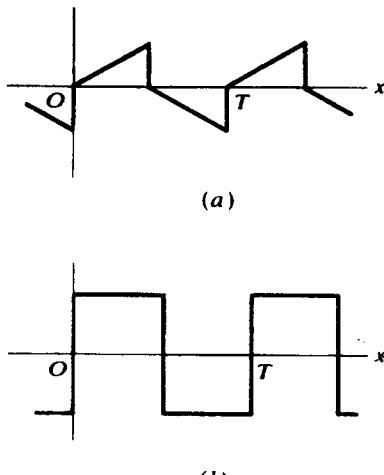


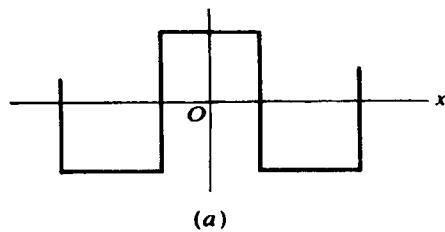
Figura 17.5.

Al establecer el tipo de simetría de una onda pueden obtenerse algunas conclusiones. Si la forma de onda es par, los términos de sus series de Fourier son términos en coseno, incluyendo una constante si el valor medio de la forma de onda es distinto de cero. Por tanto, no es necesario realizar las integrales para obtener b_n , por no estar presente ningún término en seno. La onda puede ser impar únicamente después de restarle su valor medio, en cuyo caso su serie de Fourier contendrá esa constante y una serie de términos en seno. Si la onda es inversa de medio ciclo, en la serie sólo aparecen los armónicos impares. Esta serie contendrá términos en seno y coseno, a menos que la función sea par o impar. En cualquier caso, a_n y b_n son cero para $n = 2, 4, 6, \dots$, para cualquier forma de onda inversa de medio ciclo. Esta última sólo puede darse tras restar el valor medio.

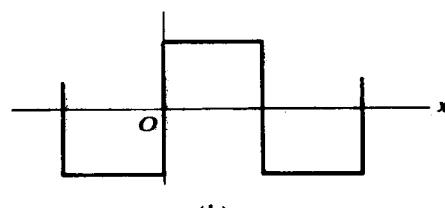
Algunas formas de onda, según la ubicación del eje vertical, pueden ser pares o impares. La onda cuadrada de la Figura 17.6(a) reúne las condiciones de una función par, es decir, $f(x) = f(-x)$. Un desplazamiento del eje vertical a la posición mostrada en la Figura 17.6(b) produce una función impar, es decir, $f(x) = -f(-x)$. Si el eje vertical se coloca en un punto distinto a los mostrados en la Figura 17.6, la onda cuadrada no es ni par ni impar, por lo que su serie contendrá términos en seno y coseno. Así, en el análisis de una función periódica, el eje vertical deberá elegirse cuidadosamente para obtener una función par o impar, siempre que la forma de la onda lo permita.

La variación de la posición del eje horizontal puede simplificar la representación de la serie de la función. Como ejemplo, la onda de la Figura 17.7(a) no reúne los requisitos de una función impar a menos que se le reste el valor medio, tal y como se muestra en la Figura 17.7(b). Por ello su serie contendrá únicamente un término constante y los términos en seno.

Las consideraciones anteriores sobre la simetría pueden usarse para verificar los coeficientes de las series exponenciales de Fourier. Una forma de onda par contendrá solamente los términos en coseno en su serie trigonométrica y, en consecuencia, los coeficientes de la serie exponencial de Fourier deben ser números reales. Análogamente, una función impar cuya serie trigonométrica se expresa en términos en seno tiene coeficientes imaginarios puros en su serie exponencial.

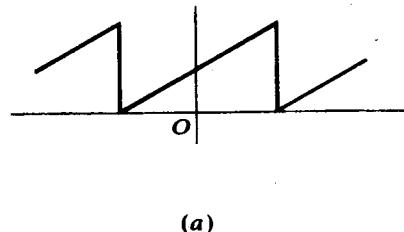


(a)

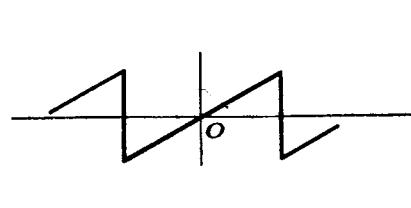


(b)

Figura 17.6.



(a)



(b)

Figura 17.7.

17.5. ESPECTRO DE UNA Onda

El diagrama donde se representan las amplitudes de cada uno de los armónicos que constituyen una onda se denomina *espectro de la onda*. La amplitud de los armónicos decrece rápidamente para ondas con series que convergen rápidamente. Las ondas con discontinuidades, como la onda de dientes de sierra o la onda cuadrada, tienen un espectro cuyas amplitudes decrecen lentamente, ya que sus desarrollos en serie tienen armónicos de elevada amplitud. Los armónicos décimos tendrán a menudo amplitudes de valor significativo comparados con el fundamental. En contraste, los desarrollos en serie para las ondas sin discontinuidades, y con una apariencia generalmente suave, convergen rápidamente, por lo que para generar la onda se requieren muy pocos términos del desarrollo en serie. Tal convergencia rápida se hace evidente en el espectro de la onda, donde las amplitudes de los armónicos decrecen rápidamente, de forma que por encima del quinto o del sexto son insignificantes.

El contenido en armónicos y el espectro de la onda son parte de la propia naturaleza de dicha onda y nunca cambian, sea cual sea el método de análisis. Modificar el origen da a los desarrollos trigonométricos una apariencia completamente distinta, lo que también es aplicable a los desarrollos en serie. Sin embargo, los mismos armónicos siempre aparecen en los desarrollos, y sus amplitudes,

$$c_0 = \left| \frac{1}{2} a_0 \right| \quad \text{y} \quad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (n \geq 1) \quad (14)$$

$$\text{o} \quad c_0 = |A_0| \quad \text{y} \quad c_n = |A_n| + |A_{-n}| = 2|A_n| \quad (n \geq 1) \quad (15)$$

permanecen las mismas. Obsérvese que cuando se utiliza la forma exponencial, la amplitud del n -ésimo armónico combina las contribuciones de las frecuencias $+n\omega$ y $-n\omega$.

EJEMPLO 17.4. En la Figura 17.8 se muestra la onda de dientes de sierra del Ejemplo 17.1, así como su espectro. Como solamente existen términos en seno en el desarrollo trigonométrico, las amplitudes de los armónicos vienen dadas directamente por $\frac{1}{2} a_0$ y $|b_n|$. Se obtiene el mismo espectro a partir del desarrollo en serie exponencial de Fourier, (13).

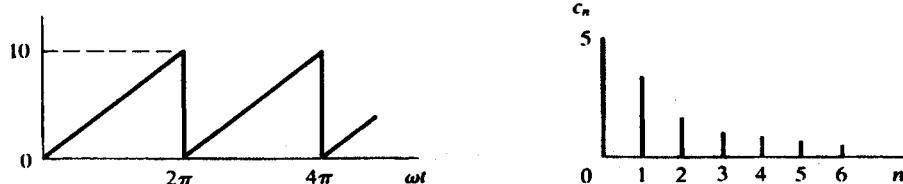


Figura 17.8.

17.6. SÍNTESIS DE ONDAS

Se entiende por «síntesis» la combinación de partes para formar un todo. La síntesis de Fourier es una recombinación de los términos del desarrollo en serie trigonométrico, normalmente los cuatro o cinco primeros, para crear la onda original. A menudo, sólo después de

sintetizar una onda el estudiante se convence de que el desarrollo en serie de Fourier representa de hecho la onda periódica de la que se obtuvo.

La serie trigonométrica para la onda de dientes de sierra de la Figura 17.8 es

$$f(t) = 5 - \frac{10}{\pi} \operatorname{sen} \omega t - \frac{10}{2\pi} \operatorname{sen} 2\omega t - \frac{10}{3\pi} \operatorname{sen} 3\omega t - \dots$$

Estos cuatro términos están dibujados y sumados en la Figura 17.9. A pesar de que el resultado no es una onda de dientes de sierra perfecta, resulta evidente que con más términos del desarrollo de Fourier la gráfica resultante tendría un parecido mayor a la onda original. Como esta onda tiene discontinuidades, su desarrollo en serie no converge rápidamente y, en consecuencia, la síntesis utilizando cuatro términos no produce un resultado satisfactorio. El siguiente término, correspondiente a la frecuencia 4ω , tiene una amplitud de $10/4\pi$, que es significativa comparada con la amplitud del armónico fundamental, $10/\pi$. A medida que se añaden términos en la síntesis, se reducen las irregularidades de la onda resultante y se mejora la aproximación con respecto a la onda original. Fue con tal fin por lo que se dijo que *los desarrollos en serie convergen al valor de la función en todos los puntos de continuidad y al valor medio en los puntos de discontinuidad*. En la Figura 17.9 en 0 y 2π es evidente que el valor de 5 se mantendrá, ya que los términos en seno son cero para estos dos puntos. Estos puntos son de discontinuidad; y el valor de la función cuando la aproximación se realiza desde la izquierda es 10, y desde la derecha 0, con valor medio de 5.

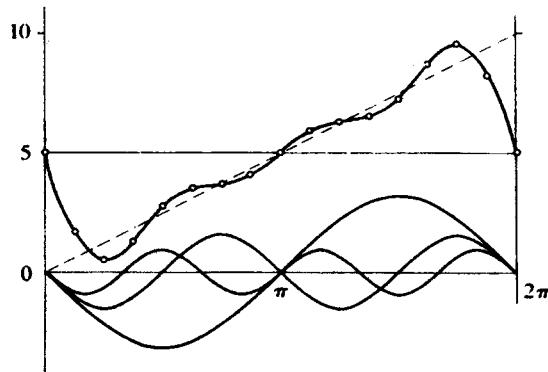


Figura 17.9.

17.7. POTENCIA Y VALOR EFICAZ

El valor eficaz (rms) de la función

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots + b_1 \operatorname{sen} \omega t + b_2 \operatorname{sen} 2\omega t + \dots$$

es

$$\begin{aligned} F_{\text{rms}} &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}a_0\right)^2 + \frac{1}{2}a_1^2 + \frac{1}{2}a_2^2 + \dots + \frac{1}{2}b_1^2 + \frac{1}{2}b_2^2 + \dots} \\ &= \sqrt{c_0^2 + \frac{1}{2}c_1^2 + \frac{1}{2}c_2^2 + \frac{1}{2}c_3^2 + \dots} \end{aligned} \quad (16)$$

donde se ha utilizado (14).

Partiendo de un circuito lineal con una tensión aplicada periódica, debería esperarse que la intensidad resultante contuviera los mismos términos de armónicos que la tensión, aunque con amplitudes de diferente magnitud relativa, ya que la impedancia varía con $n\omega$. Es posible que algunos armónicos no aparezcan en la intensidad; por ejemplo, en un circuito paralelo *LC* puro, una de las frecuencias de los armónicos puede coincidir con la frecuencia de resonancia, haciendo que la impedancia para esa frecuencia sea infinita. En general puede escribirse

$$v = V_0 + \sum V_n \operatorname{sen}(n\omega t + \phi_n) \quad e \quad i = I_0 + \sum I_n \operatorname{sen}(n\omega t + \psi_n) \quad (17)$$

con los correspondientes valores eficaces de

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{V_0^2 + \frac{1}{2}V_1^2 + \frac{1}{2}V_2^2 + \dots} \quad e \quad I_{\text{rms}} = \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{2}I_1^2 + \frac{1}{2}I_2^2 + \dots} \quad (18)$$

La potencia media P se obtiene de la integración de la potencia instantánea, la cual se obtiene del producto de v e i :

$$p = vi = [V_0 + \sum V_n \operatorname{sen}(n\omega t + \phi_n)][I_0 + \sum I_n \operatorname{sen}(n\omega t + \psi_n)] \quad (19)$$

Como v e i tienen un período T , su producto debe tener un número entero de períodos en T . (Recuérdese que para una onda seno simple de tensión aplicada, el producto vi tiene un período la mitad que el correspondiente a la onda de tensión.) El valor medio puede calcularse sobre un período de la onda de tensión:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T [V_0 + \sum V_n \operatorname{sen}(n\omega t + \phi_n)][I_0 + \sum I_n \operatorname{sen}(n\omega t + \psi_n)] dt \quad (20)$$

El análisis de los posibles términos resultantes del producto de dos series infinitas muestra que dichos términos pueden ser de los siguientes tipos: el producto de dos constantes, el producto de una constante y una función seno, el producto de dos funciones seno de diferentes frecuencias, y funciones seno al cuadrado. Después de la integración, el producto de dos constantes sigue siendo $V_0 I_0$ y las funciones seno al cuadrado con los límites aplicados son $(V_n I_n / 2) \cos(\phi_n - \psi_n)$; la integración en el período T de todos los demás productos es cero. Por tanto, la potencia media es

$$P = V_0 I_0 + \frac{1}{2} V_1 I_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2} V_2 I_2 \cos \theta_2 + \frac{1}{2} V_3 I_3 \cos \theta_3 + \dots \quad (21)$$

donde $\theta_n = \phi_n - \psi_n$ es el ángulo de la impedancia equivalente del circuito para la frecuencia $n\omega$, y V_n e I_n son los valores máximos de sus funciones senoidales respectivas.

En el caso especial de una tensión senoidal de una única frecuencia, $V_0 = V_2 = V_3 = \dots = 0$ y (21) se reduce a la expresión conocida

$$P = \frac{1}{2} V_1 I_1 \cos \theta_1 = V_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \cos \theta$$

Compárese este resultado con la Sección 10.2. También, para una tensión de C.C., $V_1 = V_2 = V_3 = \dots = 0$, y (21) pasa a ser

$$P = V_0 I_0 = VI$$

Por tanto, la expresión (21) es bastante general. Nótese que en el segundo miembro no hay término que implique un producto de tensión e intensidad de diferentes frecuencias. Por tanto, en lo que a potencia se refiere, cada armónico actúa de forma independiente, y

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + \dots$$

17.8. APLICACIONES EN EL ANÁLISIS DE CIRCUITOS

Como ya se sugirió anteriormente, se pueden aplicar los términos del desarrollo en serie de una onda de tensión a un circuito lineal y obtener los correspondientes armónicos del desarrollo en serie de la intensidad. Todo lo anterior se obtiene mediante la superposición. Por tanto, se considera que cada término del desarrollo en serie de Fourier representa la tensión de una fuente única, como se muestra en la Figura 17.10. Ahora la impedancia equivalente del circuito para cada armónico de frecuencia $n\omega$ se utiliza para obtener la intensidad correspondiente a ese armónico. La suma de estas respuestas individuales, en forma de desarrollo en serie, es la respuesta total i para la tensión aplicada.

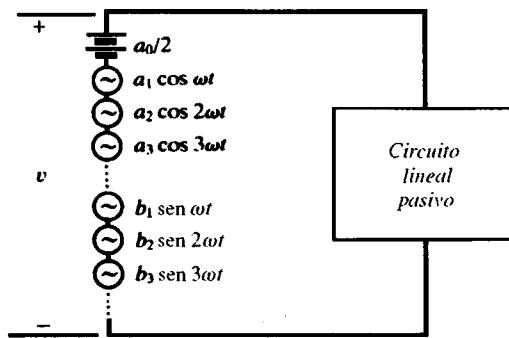


Figura 17.10.

EJEMPLO 17.5. A un circuito serie RL en el cual $R = 5 \Omega$ y $L = 20 \text{ mH}$ (Figura 17.11) se aplica la tensión $v = 100 + 50 \operatorname{sen} \omega t + 25 \operatorname{sen} 3\omega t$ (V), con $\omega = 500 \text{ rad/s}$. Determinar la intensidad y la potencia media.

Calcular la impedancia equivalente del circuito para las distintas frecuencias de tensión para luego obtener la intensidad correspondiente.

Para $\omega = 0$, $Z_0 = R = 5 \Omega$, e

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{100}{5} = 20 \text{ A}$$

Para $\omega = 500$ rad/s, $Z_1 = 5 + j(500)(20 \cdot 10^{-3}) = 5 + j10 = 11,15/63,4^\circ \Omega$, e

$$i_1 = \frac{V_{1,\max}}{Z_1} \operatorname{sen}(\omega t - \theta_1) = \frac{50}{11,15} \operatorname{sen}(\omega t - 63,4^\circ) = 4,48 \operatorname{sen}(\omega t - 63,4^\circ) \text{ (A)}$$

Para $3\omega = 1500$ rad/s, $Z_3 = 5 + j30 = 30,4/80,54^\circ \Omega$, e

$$i_3 = \frac{V_{3,\max}}{Z_3} \operatorname{sen}(3\omega t - \theta_3) = \frac{25}{30,4} \operatorname{sen}(3\omega t - 80,54^\circ) = 0,823 \operatorname{sen}(3\omega t - 80,54^\circ) \text{ (A)}$$

La suma de los armónicos de la intensidad es la respuesta total requerida; es una serie de Fourier del tipo (8):

$$i = 20 + 4,48 \operatorname{sen}(\omega t - 63,4^\circ) + 0,823 \operatorname{sen}(3\omega t - 80,54^\circ) \text{ (A)}$$

Esta intensidad tiene un valor eficaz de

$$I_{\text{ef}} = \sqrt{20^2 + (4,48^2/2) + (0,823^2/2)} = \sqrt{410,6} = 20,25 \text{ A}$$

lo cual da una potencia en la resistencia de 5Ω de

$$P = I_{\text{ef}}^2 R = (410,6)5 = 2053 \text{ W}$$

Como verificación se suma la potencia media total calculando primero la potencia que suministra cada armónico y sumando los resultados.

Para $\omega = 0$:

$$P_0 = V_0 I_0 = 100(20) = 2000 \text{ W}$$

Para $\omega = 500$ rad/s:

$$P_1 = \frac{1}{2} V_1 I_1 \cos \theta_1 = \frac{1}{2}(50)(4,48) \cos 63,4^\circ = 50,1 \text{ W}$$

Para $3\omega = 1500$ rad/s:

$$P_3 = \frac{1}{2} V_3 I_3 \cos \theta_3 = \frac{1}{2}(25)(0,823) \cos 80,54^\circ = 1,69 \text{ W}$$

Entonces,

$$P = 2000 + 50,1 + 1,69 = 2052 \text{ W}$$

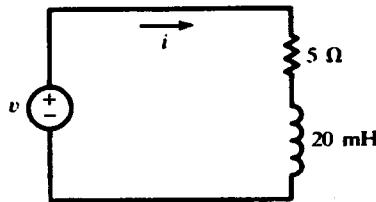


Figura 17.11.

Otro método

El desarrollo en serie de Fourier para la tensión entre los extremos de la resistencia es

$$v_R = Ri = 100 + 22,4 \operatorname{sen}(\omega t - 63,4^\circ) + 4,11 \operatorname{sen}(3\omega t - 80,54^\circ) \text{ (V)}$$

y

$$V_{\text{Ref}} = \sqrt{100^2 + \frac{1}{2}(22,4)^2 + \frac{1}{2}(4,11)^2} = \sqrt{10259} = 101,3 \text{ V}$$

Entonces la potencia suministrada por la fuente es $P = V_{\text{Ref}}^2/R = (10259)/5 = 2052 \text{ W}$.

En el Ejemplo 17.15 la tensión de alimentación se obtuvo mediante un desarrollo en serie de Fourier en t , haciendo los cálculos en el dominio del tiempo. (La impedancia compleja se utilizó únicamente como un cortocircuito; Z_n y θ_n podían obtenerse directamente de R , L y $n\omega$.) Si, por el contrario, la tensión se representa mediante una serie exponencial de Fourier,

$$v(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} V_n e^{j n \omega t}$$

entonces es necesario hacer la superposición de *fasores* V_n (que giran en el sentido contrario de las agujas del reloj si $n > 0$, y en sentido de las agujas del reloj si $n < 0$), que es el mejor procedimiento para los métodos en el dominio de la frecuencia, según se muestra en el Ejemplo 17.6

EJEMPLO 17.6. A un condensador puro de capacidad C se le aplica la tensión representada mediante la onda triangular de la Figura 17.12. Determinar la intensidad resultante.

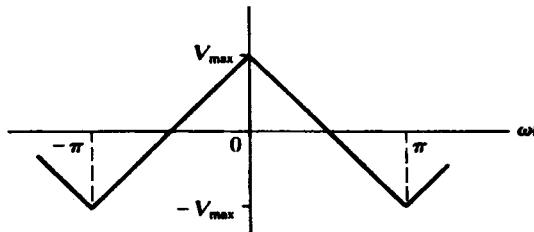


Figura 17.12.

En el intervalo $-\pi < \omega t < 0$ la función que representa la tensión es $v = V_{\max} + (2V_{\max}/\pi)\omega t$; y para $0 < \omega t < \pi$, $v = V_{\max} - (2V_{\max}/\pi)\omega t$. Por tanto, los coeficientes de la serie exponencial pueden determinarse mediante integración

$$V_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 [V_{\max} + (2V_{\max}/\pi)\omega t] e^{-jn\omega t} d(\omega t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [V_{\max} - (2V_{\max}/\pi)\omega t] e^{-jn\omega t} d(\omega t)$$

de lo cual $V_n = 4V_{\max}/\pi^2 n^2$ para n impar, y $V_n = 0$ para n par.

El fasor de intensidad producido por V_n (n impar) es

$$I_n = \frac{V_n}{Z_n} = \frac{4V_{\max}/\pi^2 n^2}{1/jn\omega C} = j \frac{4V_{\max}\omega C}{\pi^2 n}$$

con un factor del tiempo implícito de $e^{jn\omega t}$. La intensidad resultante es, por tanto,

$$i(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} I_n e^{jn\omega t} = j \frac{4V_{\max}\omega C}{\pi^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{jn\omega t}}{n}$$

donde la suma es para n impar únicamente.

La serie podría convertirse en una serie trigonométrica y posteriormente sintetizada para mostrar la forma de onda de la intensidad. Sin embargo, este desarrollo en serie es de la misma forma que el obtenido en el Problema 17.8, donde los coeficientes son $A_n = -j(2V/n\pi)$ para n impar únicamente. El signo aquí es negativo, indicando que la onda de intensidad es el valor negativo de la onda cuadrada del Problema 17.8 y tiene un valor pico de $2V_{\max}\omega C/\pi$.

17.9. TRANSFORMADA DE FOURIER DE ONDAS NO PERIÓDICAS

Una onda no periódica $x(t)$ se dice que satisface las condiciones de Dirichlet si

- $x(t)$ es absolutamente integrable, $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$, y
- el número de máximos y de mínimos y el número de discontinuidades en cualquier intervalo finito es finito.

Para tales ondas, se define la transformada de Fourier $X(f)$ por

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (22a)$$

donde f es la frecuencia. La anterior integral se llama *integral de Fourier*. La función del tiempo $x(t)$ se llama *transformada inversa de Fourier* de $X(f)$ y se obtiene de la forma siguiente:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \quad (22b)$$

donde $x(t)$ y $X(f)$ forman un par transformado de Fourier. En lugar de f , la velocidad angular $\omega = 2\pi f$ puede utilizarse, en cuyo caso (22a) y (22b) se convierten, respectivamente, en

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (23a)$$

$$y \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (23b)$$

EJEMPLO 17.7. Determinar la transformada de Fourier de $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$. Dibujar la gráfica de $X(f)$ para $-\infty < f < +\infty$.

De (22a), la transformada de Fourier de $x(t)$ es

$$X(f) = \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{a + j2\pi f} \quad (24)$$

$X(f)$ es una función compleja con variable real. Su módulo y argumento, $|X(f)|$ y $\angle X(f)$, respectivamente, mostrados en las Figura 17.13(a) y (b), se obtienen de

$$|X(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}} \quad (25a)$$

y $\angle X(f) = -\operatorname{tg}^{-1}(2\pi f/a)$ (25b)

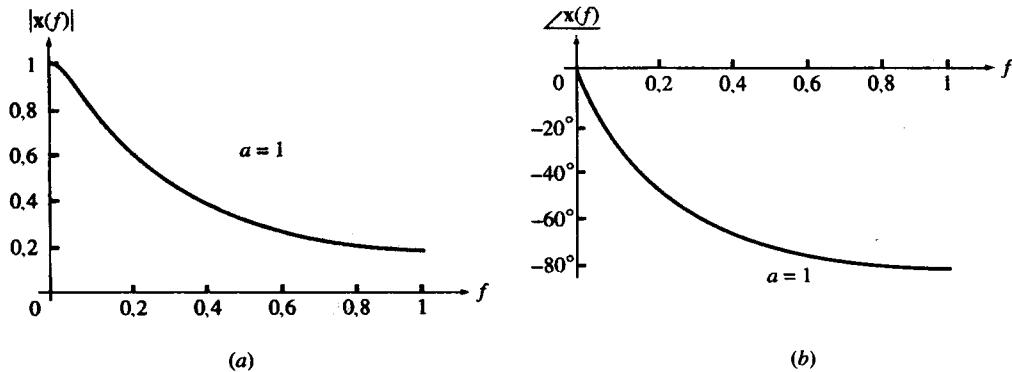


Figura 17.13.

Alternativamente, $X(f)$ puede obtenerse mediante su parte real y su parte imaginaria, $\operatorname{Re}[X(f)]$ e $\operatorname{Im}[X(f)]$, como en las Figura 17.14(a) y (b).

$$\operatorname{Re}[X(f)] = \frac{a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \quad (26a)$$

$$\operatorname{Im}[X(f)] = \frac{-2\pi f}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \quad (26b)$$

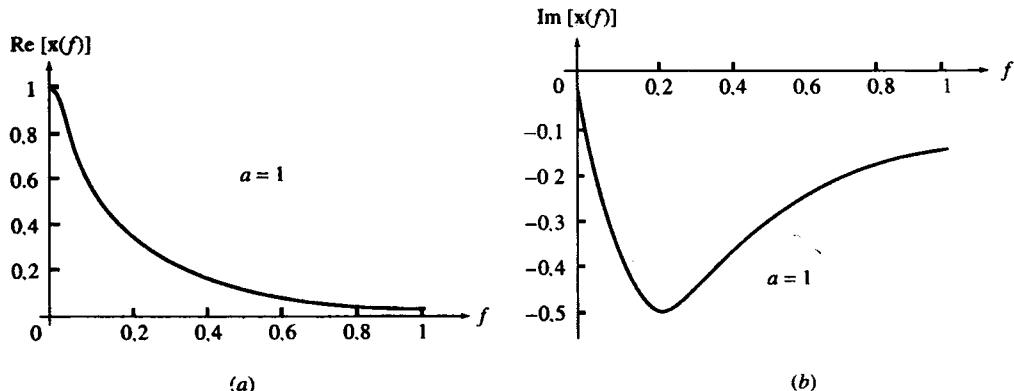


Figura 17.14.

EJEMPLO 17.8. Determinar la transformada de Fourier de la onda cuadrada

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } -T < t < T \\ 0 & \text{para el resto} \end{cases}$$

De (22a),

$$X(f) = \int_{-T}^T e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{-j2\pi f} \left[e^{j2\pi f t} \right]_{-T}^T = \frac{\sin 2\pi f T}{\pi f} \quad (27)$$

Como $x(t)$ es par, $X(f)$ es real. Los pares transformados están dibujados en la Figura 17.15(a) y (b) para $T = \frac{1}{2}$ s.

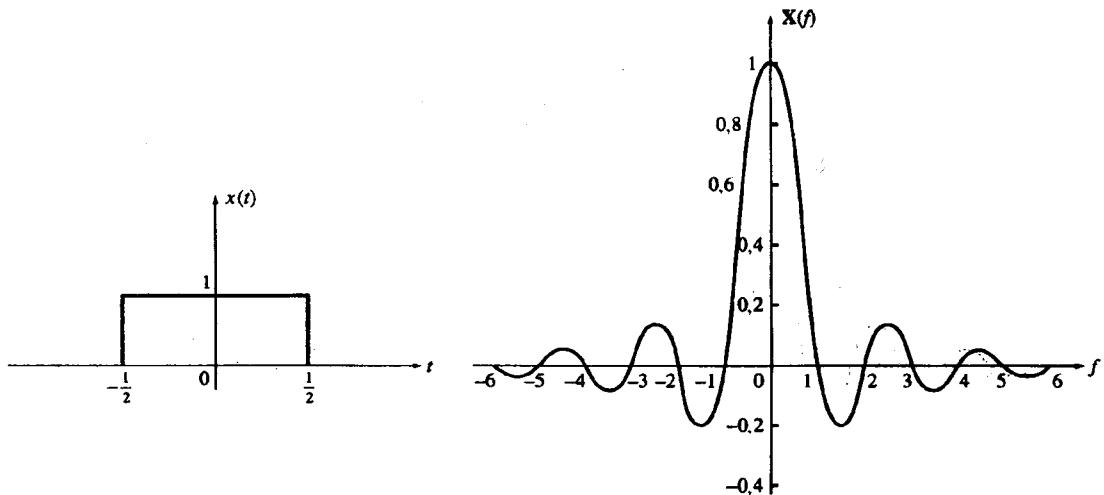


Figura 17.15.

EJEMPLO 17.9. Determinar la transformada de Fourier de $x(t) = e^{at}u(-t)$, $a > 0$.

$$X(f) = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{a - j2\pi f} \quad (28)$$

EJEMPLO 17.10. Determinar la transformada inversa de Fourier de $X(f) = 2a/(a^2 + 4\pi^2 f^2)$, $a > 0$. Mediante el desarrollo en fracciones simples se tiene

$$X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f} + \frac{1}{a - j2\pi f} \quad (29)$$

La inversa de cada término de (29) puede obtenerse de (24) y (28), de forma que

$$x(t) = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t) = e^{-a|t|} \quad \text{para todo } t$$

Ver Figura 17.16.

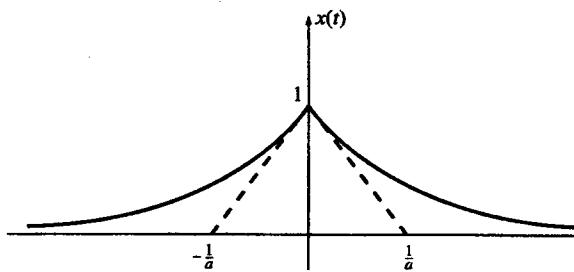


Figura 17.16.

17.10. PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

En la Tabla 17.1 se muestran algunas propiedades de la transformada de Fourier. Algunos pares de transformadas de uso común se dan en la Tabla 17.2.

Tabla 17.1. Propiedades de la transformada de Fourier.

Dominio del tiempo		Dominio de la frecuencia
$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} dt$		$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$
1.	$x(t)$ real	$X(f) = X^*(-f)$
2.	$x(t)$ par, $x(t) = x(-t)$	$X(f) = X(-f)$
3.	$x(t)$ impar, $x(t) = -x(-t)$	$X(f) = -X(-f)$
4.	$X(t)$	$x(-f)$
5.	$x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) df$	$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$
6.	$y(t) = x(at)$	$Y(f) = \frac{1}{ a } X(f/a)$
7.	$y(t) = tx(t)$	$Y(f) = -\frac{1}{j2\pi} \frac{dX(f)}{df}$
8.	$y(t) = x(-t)$	$Y(f) = X(-f)$
9.	$y(t) = x(t - t_0)$	$Y(f) = e^{-j2\pi f t_0} X(f)$

17.11. ESPECTRO CONTINUO

$|\mathbf{X}(f)|^2$, como se definió en la Sección 17.9, se denomina *densidad de energía* o *espectro* de la onda $x(t)$. A diferencia de las funciones periódicas, el contenido de energía de una onda no periódica $x(t)$ para cada frecuencia es cero. Sin embargo, el contenido de energía en un intervalo de frecuencias de f_1 a f_2 es

$$W = 2 \int_{f_1}^{f_2} |\mathbf{X}(f)|^2 df \quad (30)$$

EJEMPLO 17.11. Determinar el espectro de $x(t) = e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)$, $a > 0$, mostrada en la Figura 17.17.

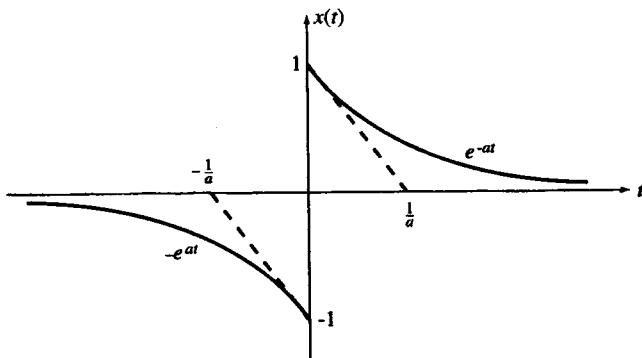


Figura 17.17.

Se tiene que $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$. Como $x_1(t) = e^{-at}u(t)$ y $x_2(t) = e^{at}u(-t)$,

$$\mathbf{X}_1(f) = \frac{1}{a + j2\pi f} \quad \mathbf{X}_2(f) = \frac{1}{a - j2\pi f}$$

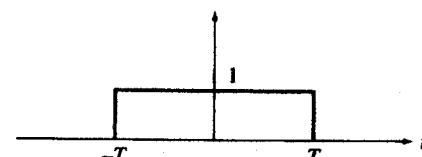
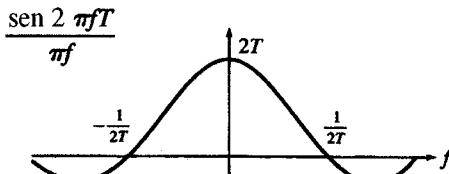
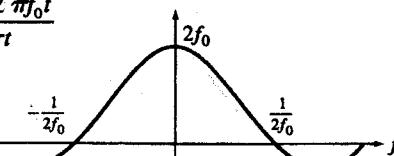
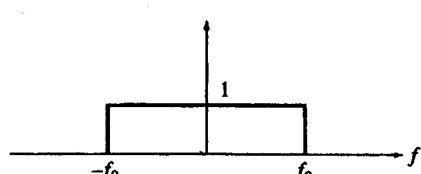
Entonces

$$\mathbf{X}(f) = \mathbf{X}_1(f) - \mathbf{X}_2(f) = \frac{-j4\pi f}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$$

de lo cual

$$|\mathbf{X}(f)|^2 = \frac{16\pi^2 f^2}{(a^2 + 4\pi^2 f^2)^2}$$

Tabla 17.2. Pares de transformadas de Fourier.

	$x(t)$	$X(f)$
1.	$e^{-at}u(t), a > 0$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$
2.	$e^{-a t }, a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
3.	$te^{-at}u(t), a > 0$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)^2}$
4.	$\exp(-\pi t^2/\tau^2)$	$\tau \exp(-\pi f^2 \tau^2)$
5.		
6.		
7.	1	$\delta(f)$
8.	$\delta(t)$	1
9.	$\sin 2\pi f_0 t$	$\frac{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)}{2j}$
10.	$\cos 2\pi f_0 t$	$\frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}$

EJEMPLO 17.12. Determinar y comparar los contenidos de energía W_1 y W_2 de $y_1(t) = e^{-|at|}$ e $y_2(t) = e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)$, $a > 0$, en la banda de 0 a 1 Hz. Particularizar para $a = 200$.

De los Ejemplos 17.10 y 17.11,

$$|\mathbf{Y}_1(f)|^2 = \frac{4a^2}{(a^2 + 4\pi^2 f^2)^2} \quad \text{e} \quad |\mathbf{Y}_2(f)|^2 = \frac{16\pi^2 f^2}{(a^2 + 4\pi^2 f^2)^2}$$

Para $0 < f < 1$ Hz, los espectros y energías pueden aproximarse por

$$\begin{aligned} |\mathbf{Y}_1(f)|^2 &\approx 4/a^2 = 10^{-4} \text{ J/Hz} & \text{y} & \quad W_1 = 2(10^{-4}) \text{ J} = 200 \mu\text{J} \\ |\mathbf{Y}_2(f)|^2 &\approx 10^{-7}f^2 & \text{y} & \quad W_2 \approx 0 \end{aligned}$$

Los resultados anteriores son acordes con la observación de que la mayor parte de la energía de $y_1(t)$ está en la región de bajas frecuencias en contraste con lo que ocurre para $y_2(t)$.

PROBLEMAS RESUELTOS

- 17.1.** Determinar el desarrollo trigonométrico en serie de Fourier para la onda cuadrada de la Figura 17.18 y dibujar el espectro.

El intervalo $0 < \omega t < \pi$, $f(t) = V$; y para $\pi < \omega t < 2\pi$, $f(t) = -V$. El valor medio de la onda es cero; por tanto, $a_0/2 = 0$. Los coeficientes de los términos en coseno se obtienen integrando como sigue:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\pi V \cos n\omega t d(\omega t) + \int_\pi^{2\pi} (-V) \cos n\omega t d(\omega t) \right] = \\ &= \frac{V}{\pi} \left\{ \left[\frac{1}{n} \operatorname{sen} n\omega t \right]_0^\pi - \left[\frac{1}{n} \operatorname{sen} n\omega t \right]_\pi^{2\pi} \right\} = 0 \quad \text{para todo } n \end{aligned}$$

Por tanto, la serie no contiene términos en coseno. Realizando la integral para los términos en seno,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\pi V \operatorname{sen} n\omega t d(\omega t) + \int_\pi^{2\pi} (-V) \operatorname{sen} n\omega t d(\omega t) \right] = \\ &= \frac{V}{\pi} \left\{ \left[-\frac{1}{n} \cos n\omega t \right]_0^\pi + \left[\frac{1}{n} \cos n\omega t \right]_\pi^{2\pi} \right\} \\ &= \frac{V}{\pi n} (-\cos n\pi + \cos 0 + \cos n2\pi - \cos n\pi) = \frac{2V}{\pi n} (1 - \cos n\pi) \end{aligned}$$

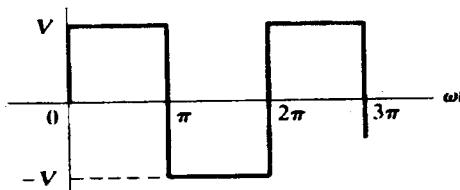


Figura 17.18.

Entonces, $b_n = 4V/\pi n$ para $n = 1, 3, 5, \dots$, y $b_n = 0$ para $n = 2, 4, 6, \dots$ La serie para la onda cuadrada es

$$f(t) = \frac{4V}{\pi} \operatorname{sen} \omega t + \frac{4V}{3\pi} \operatorname{sen} 3\omega t + \frac{4V}{5\pi} \operatorname{sen} 5\omega t + \dots$$

El espectro para esta serie se representa en la Figura 17.19. Contiene los armónicos impares de los términos en seno, como pudo anticiparse del análisis de la simetría de la onda. Ya que la onda de la Figura 17.18 es impar, su desarrollo en serie contiene solamente términos en seno, y como además tiene simetría de media onda, sólo contiene armónicos impares.

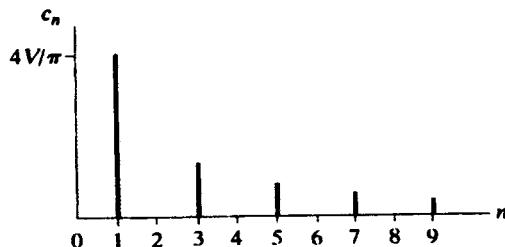


Figura 17.19.

- 17.2. Determinar el desarrollo trigonométrico en serie de Fourier para la onda triangular de la Figura 17.20 y dibujar el espectro.

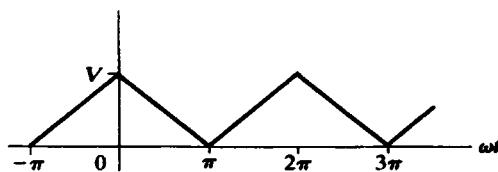


Figura 17.20.

La onda es una función par, ya que $f(t) = f(-t)$, y si se resta su valor medio $V/2$, también tiene simetría de media onda, es decir, $f(t) = -f(t + \pi)$. Para $-\pi < \omega t < 0$, $f(t) = V + (V/\pi)\omega t$, y para $0 < \omega t < \pi$, $f(t) = V - (V/\pi)\omega t$. Como las ondas pares tienen tan sólo términos en coseno, todos los términos $b_n = 0$. Para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 [V + (V/\pi)\omega t] \cos n\omega t d(\omega t) + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [V - (V/\pi)\omega t] \cos n\omega t d(\omega t) \\
 &= \frac{V}{\pi} \left[\int_{-\pi}^\pi \cos n\omega t d(\omega t) + \int_{-\pi}^0 \frac{\omega t}{\pi} \cos n\omega t d(\omega t) - \int_0^\pi \frac{\omega t}{\pi} \cos n\omega t d(\omega t) \right] \\
 &= \frac{V}{\pi^2} \left\{ \left[\frac{1}{n^2} \cos n\omega t + \frac{\omega t}{\pi} \sin n\omega t \right]_{-\pi}^0 - \left[\frac{1}{n^2} \cos n\omega t + \frac{\omega t}{\pi} \sin n\omega t \right]_0^\pi \right\} \\
 &= \frac{V}{\pi^2 n^2} [\cos 0 - \cos(-n\pi) - \cos n\pi + \cos 0] = \frac{2V}{\pi^2 n^2} (1 - \cos n\pi)
 \end{aligned}$$

Como se ha dicho para la simetría de media onda, la serie contiene únicamente los términos impares, ya que $a_n = 0$ para $n = 2, 4, 6, \dots$. Para $n = 1, 3, 5, \dots$, $a_n = 4V/\pi^2 n^2$. Por tanto, la serie de Fourier buscada es

$$f(t) = \frac{V}{2} + \frac{4V}{\pi^2} \cos \omega t + \frac{4V}{(3\pi)^2} \cos 3\omega t + \frac{4V}{(5\pi)^2} \cos 5\omega t + \dots$$

Los coeficientes decrecen a razón de $1/n^2$ y, por tanto, la serie converge con mayor rapidez que la del Problema 17.1. Este hecho resulta evidente al examinar el espectro de la Figura 17.21.

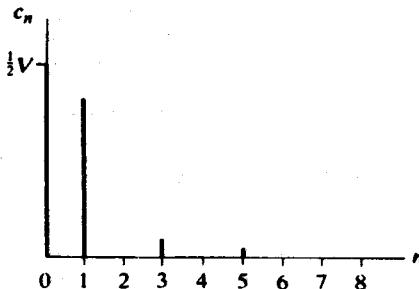


Figura 17.21.

- 17.3. Determinar el desarrollo trigonométrico en serie de Fourier para la onda de dientes de sierra de la Figura 17.22 y dibujar el espectro.

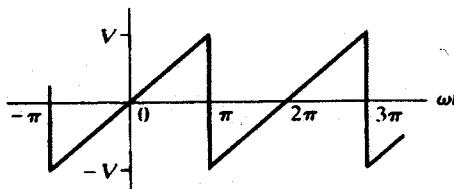


Figura 17.22.

Analizando la gráfica se observa que la onda es impar (y, por tanto, su valor medio es cero). En consecuencia, la serie constará únicamente de los términos en seno. La siguiente expresión, $f(t) = (V/\pi)\omega t$, define la onda en el período comprendido entre $-\pi$ y π , utilizándose estos límites para realizar la integral que define los coeficientes b_n .

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (V/\pi) \omega t \operatorname{sen} n\omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi^2} \left[\frac{1}{n^2} \operatorname{sen} n\omega t - \frac{\omega t}{n} \cos n\omega t \right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{2V}{n\pi} (\cos n\pi)$$

Como $\cos n\pi$ es $+1$ para n par y -1 para n impar, los signos de los coeficientes van alternándose. La serie buscada es

$$f(t) = \frac{2V}{\pi} \left\{ \operatorname{sen} \omega t - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\omega t + -\frac{1}{2} \operatorname{sen} 3\omega t - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4\omega t + \dots \right\}$$

Los coeficientes decrecen a razón de $1/n$ y, por tanto, la serie converge lentamente, como se muestra en el espectro de la Figura 17.23. Excepto por el cambio de origen y el valor medio, esta onda es la misma que la de la Figura 17.8; compárense ambos espectros.

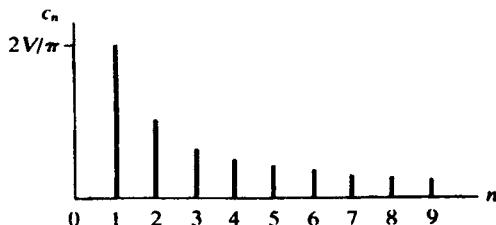


Figura 17.23.

- 17.4. Determinar la serie trigonométrica de Fourier para la onda de la Figura 17.24 y dibujar su espectro.

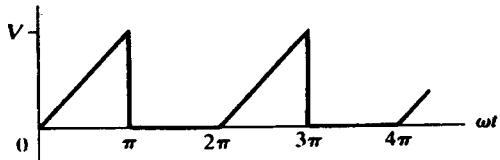


Figura 17.24.

En el intervalo $0 < \omega t < \pi$, $f(t) = (V/\pi)\omega t$; y para $\pi < \omega t < 2\pi$, $f(t) = 0$. Analizando la gráfica se observa que el valor medio de la onda es $V/4$. Como la onda no es par ni impar, la serie contendrá términos en seno y coseno. Para $n > 0$ se tiene que

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (V/\pi) \omega t \cos n\omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi^2} \left[\frac{1}{n^2} \cos n\omega t + \frac{\omega t}{n} \operatorname{sen} n\omega t \right]_0^{\pi} = \frac{V}{\pi^2 n^2} (\cos n\pi - 1)$$

Cuando n es par, $\cos n\pi - 1 = 0$ y $a_n = 0$. Cuando n es impar, $a_n = -2V/(\pi^2 n^2)$. Los coeficientes b_n son

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (V/\pi)\omega t \sin n\omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi^2} \left[\frac{1}{n^2} \sin n\omega t - \frac{\omega t}{n} \cos n\omega t \right]_0^\pi = \\ &= -\frac{V}{\pi n} (\cos n\pi) = (-1)^{n+1} \frac{V}{\pi n} \end{aligned}$$

Por tanto, la serie de Fourier buscada es

$$f(t) = \frac{V}{4} - \frac{2V}{\pi^2} \cos \omega t - \frac{2V}{(3\pi)^2} \cos 3\omega t - \frac{2V}{(5\pi)^2} \cos 5\omega t - \dots$$

$$+ \frac{V}{\pi} \sin \omega t - \frac{V}{2\pi} \sin 2\omega t + \frac{V}{3\pi} \sin 3\omega t - \dots$$

Las amplitudes de los armónicos pares están dadas por $|b_n|$, ya que no existen armónicos pares de los términos en seno. Sin embargo, las amplitudes de los armónicos impares deben calcularse utilizando $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. Por tanto,

$$c_1 = \sqrt{(2V/\pi^2)^2 + (V/\pi)^2} = V(0,377) \quad c_3 = V(0,109) \quad c_5 = V(0,064)$$

El espectro se muestra en la Figura 17.25

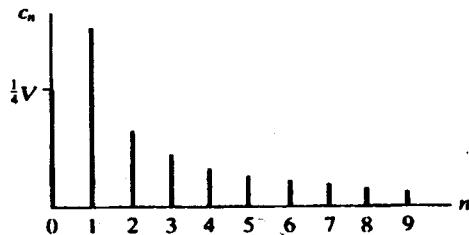


Figura 17.25.

- 17.5. Determinar la serie trigonométrica de Fourier para la onda senoidal con rectificación de media onda de la Figura 17.26 y dibujar su espectro.

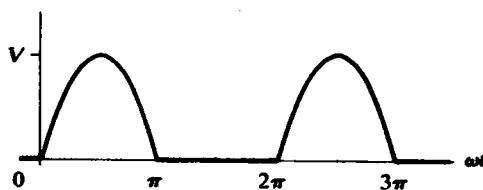


Figura 17.26.

La onda no es simétrica y puede esperarse que la serie contenga términos en seno y coseno. Como el valor medio puede obtenerse fácilmente mediante el análisis de la gráfica, se calcula a_0 para su uso en el término $a_0/2$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi V \sin \omega t \, d(\omega t) = \frac{V}{\pi} [-\cos \omega t]_0^\pi = \frac{2V}{\pi}$$

Después se determina a_n :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi V \sin \omega t \cos n\omega t \, d(\omega t) \\ &= \frac{V}{\pi} \left[\frac{-n \sin \omega t \sin n\omega t - \cos n\omega t \cos \omega t}{-n^2 + 1} \right]_0^\pi = \\ &= \frac{V}{\pi(1 - n^2)} (\cos n\pi + 1) \end{aligned}$$

Con n par, $a_n = 2V/\pi(1 - n^2)$; y con n impar $a_n = 0$. Sin embargo, esta expresión está indeterminada para $n = 1$ y, por tanto, el término a_1 debe integrarse separadamente.

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi V \sin \omega t \cos \omega t \, d(\omega t) = \frac{V}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin 2\omega t \, d(\omega t) = 0$$

Ahora se calcula b_n :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi V \sin \omega t \sin n\omega t \, d(\omega t) = \frac{V}{\pi} \left[\frac{n \sin \omega t \cos n\omega t - \sin n\omega t \cos \omega t}{-n^2 + 1} \right]_0^\pi = 0$$

Nuevamente la expresión está indeterminada para $n = 1$ y, por tanto, el término b_1 debe integrarse separadamente.

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi V \sin^2 \omega t \, d(\omega t) = \frac{V}{\pi} \left[\frac{\omega t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4} \right]_0^\pi = \frac{V}{2}$$

Por tanto, la serie de Fourier buscada es

$$f(t) = \frac{V}{\pi} \left(1 + \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \omega t - \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t - \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \dots \right)$$

El espectro, Figura 17.27, muestra la importancia del término fundamental de la serie y las amplitudes rápidamente decrecientes de los armónicos de orden superior.

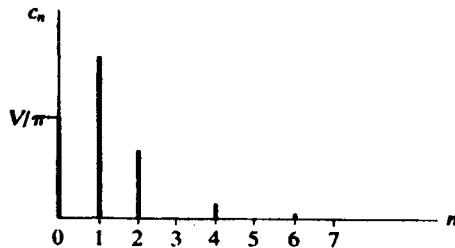


Figura 17.27.

- 17.6. Determinar la serie trigonométrica de Fourier para la onda senoidal con rectificación de media onda de la Figura 17.28, cuando su eje vertical se cambia de su posición en la Figura 17.26.

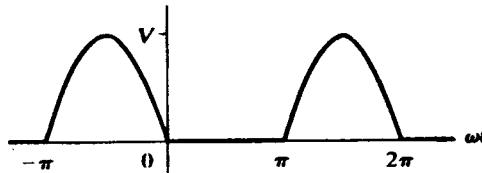


Figura 17.28.

La función se define en el intervalo $-\pi < \omega t < 0$ por $f(t) = -V \operatorname{sen} \omega t$. El valor medio es el mismo que en el Problema 17.5, es decir, $\frac{1}{2}a_0 = V/\pi$. Para los coeficientes a_n se tiene que

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-V \operatorname{sen} \omega t) \cos n\omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi(1 - n^2)} (1 + \cos n\pi)$$

Para n par, $a_n = 2V/\pi(1 - n^2)$; y para n impar, $a_n = 0$, excepto que debe examinarse separadamente el caso $n = 1$.

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-V \operatorname{sen} \omega t) \cos \omega t d(\omega t) = 0$$

Para los coeficientes b_n se obtiene

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-V \operatorname{sen} \omega t) \operatorname{sen} n\omega t d(\omega t) = 0$$

excepto para $n = 1$.

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-V) \operatorname{sen}^2 \omega t d(\omega t) = -\frac{V}{2}$$

Por tanto, la serie es

$$f(t) = \frac{V}{\pi} \left(1 - \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \omega t - \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t - \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \dots \right)$$

Esta serie es idéntica a la del Problema 17.5, excepto para el término fundamental, que tiene un coeficiente negativo en esta serie. El espectro es idéntico al de la Figura 17.27 en el resto de los términos.

Otro método

Cuando la onda senoidal $V \operatorname{sen} \omega t$ se resta de la gráfica de la Figura 17.26, se obtiene la gráfica de la Figura 17.28.

- 17.7.** Obtener la serie trigonométrica de Fourier para el pulso rectangular repetitivo de la Figura 17.29 y dibujar su espectro.

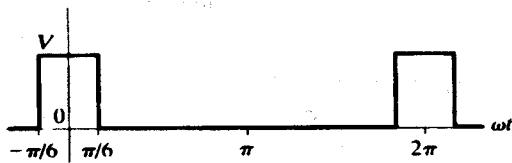


Figura 17.29.

Con el eje vertical situado donde se muestra, la onda es par y la serie constará sólo de los términos en coseno y una constante. En el período $-\pi$ a $+\pi$ utilizado para realizar las integrales, la función es cero excepto en el intervalo $-\pi/6$ a $+\pi/6$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} V d(\omega t) = \frac{V}{3} \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} V \cos n\omega t d(\omega t) = \frac{2V}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{6}$$

Como $\sin n\pi/6 = 1/2, \sqrt{3}/2, 1, \sqrt{3}/2, 1/2, 0, -1/2, \dots$, para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$, respectivamente, la serie es

$$f(t) = \frac{V}{6} + \frac{2V}{\pi} \left[\frac{1}{2} \cos \omega t + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2}\right) \cos 2\omega t + 1\left(\frac{1}{3}\right) \cos 3\omega t + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{4}\right) \cos 4\omega t \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5}\right) \cos 5\omega t - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7}\right) \cos 7\omega t - \dots \right]$$

o

$$f(t) = \frac{V}{6} + \frac{2V}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\pi/6) \cos n\omega t$$

El espectro mostrado en la Figura 17.30 decrece muy lentamente para esta onda, ya que la serie converge a la función muy lentamente. Resulta de particular interés el hecho de que las amplitudes de los armónicos 8.^o, 9.^o y 10.^o son superiores al 7.^o. Con las ondas simples consideradas previamente, se observaba que las amplitudes de los armónicos de orden superior eran progresivamente menores.

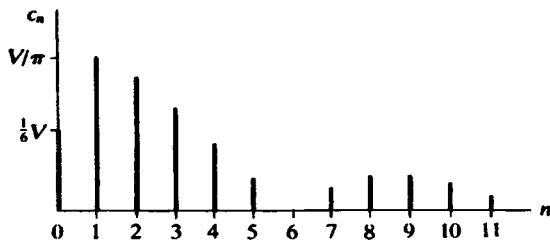


Figura 17.30.

- 17.8. Determinar la serie exponencial de Fourier para la onda cuadrada de las Figuras 17.18 y 17.31 y dibujar su espectro. Obtener los coeficientes de la serie trigonométrica a partir de los coeficientes de la serie exponencial y compararlos con el Problema 17.1.

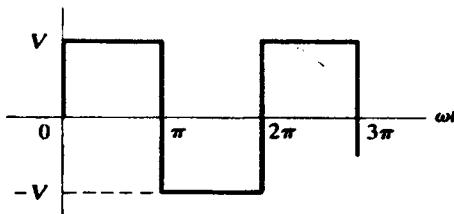


Figura 17.31.

En el intervalo $-\pi < \omega t < 0$, $f(t) = -V$; y para $0 < \omega t < \pi$, $f(t) = V$. La onda es impar; por tanto, $A_0 = 0$ y los coeficientes A_n serán imaginarios puros.

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-V)e^{-jn\omega t} d(\omega t) + \int_0^\pi Ve^{-jn\omega t} d(\omega t) \right] \\ &= \frac{V}{2\pi} \left\{ - \left[\frac{1}{(-jn)} e^{-jn\omega t} \right]_{-\pi}^0 + \left[\frac{1}{(-jn)} e^{-jn\omega t} \right]_0^\pi \right\} \\ &= \frac{V}{-j2\pi n} (-e^0 + e^{jn\pi} + e^{-jn\pi} - e^0) = j \frac{V}{n\pi} (e^{jn\pi} - 1) \end{aligned}$$

Para n par, $e^{jn\pi} = +1$ y $A_n = 0$; para n impar, $e^{jn\pi} = -1$ y $A_n = -j(2V/n\pi)$ (simetría de media onda). La serie de Fourier buscada es

$$f(t) = \dots + j \frac{2V}{3\pi} e^{-j3\omega t} + j \frac{2V}{\pi} e^{-j\omega t} - j \frac{2V}{\pi} e^{j\omega t} - j \frac{2V}{3\pi} e^{j3\omega t} - \dots$$

La gráfica de la Figura 17.32 muestra las amplitudes para las frecuencias positivas y negativas. Combinando los valores para $+n$ y $-n$ se obtiene el mismo espectro que el de la Figura 17.19.

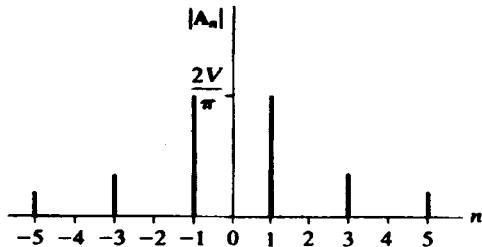


Figura 17.32.

Los coeficientes en coseno de la serie trigonométrica son

$$a_n = 2 \operatorname{Re} A_n = 0$$

y

$$b_n = -2 \operatorname{Im} A_n = \frac{4V}{n\pi} \quad \text{para } n \text{ impar solamente}$$

Lo que concuerda con los coeficientes del Problema 17.1.

- 17.9. Determinar la serie exponencial de Fourier para la onda triangular de las Figuras 17.20 y 17.33 y dibujar el espectro.

En el intervalo $-\pi < \omega t < 0$, $f(t) = V + (V/\pi)\omega t$; y para $0 < \omega t < \pi$, $f(t) = V - (V/\pi)\omega t$. La onda es par y, por tanto, los coeficientes A_n serán reales puros. Analizando la gráfica se obtiene que el valor medio es $V/2$.

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 [V + (V/\pi)\omega t] e^{-j\omega nt} d(\omega t) + \int_0^\pi [V - (V/\pi)\omega t] e^{-j\omega nt} d(\omega t) \right\} \\ &= \frac{V}{2\pi^2} \left[\int_{-\pi}^0 \omega t e^{-j\omega nt} d(\omega t) + \int_0^\pi (-\omega t) e^{-j\omega nt} d(\omega t) + \int_{-\pi}^\pi \pi e^{-j\omega nt} d(\omega t) \right] \\ &= \frac{V}{2\pi^2} \left\{ \left[\frac{e^{-j\omega nt}}{(-jn)^2} (-jn\omega t - 1) \right]_{-\pi}^0 - \left[\frac{e^{-j\omega nt}}{(-jn)^2} (-jn\omega t - 1) \right]_0^\pi \right\} = \frac{V}{\pi^2 n^2} (1 - e^{jn\pi}) \end{aligned}$$

Para n par, $e^{jn\pi} = +1$ y $A_n = 0$; para n impar, $A_n = 2V/\pi^2 n^2$. Por tanto, la serie es

$$f(t) = \dots + \frac{2V}{(-3\pi)^2} e^{-j3\omega t} + \frac{2V}{(-\pi)^2} e^{-j\omega t} + \frac{V}{2} + \frac{2V}{(\pi)^2} e^{j\omega t} + \frac{2V}{(3\pi)^2} e^{j3\omega t} + \dots$$

Las amplitudes de los armónicos

$$c_0 = \frac{V}{2} \quad c_n = 2|A_n| = \begin{cases} 0 & (n = 2, 4, 6, \dots) \\ 4V/\pi^2 n^2 & (n = 1, 3, 5, \dots) \end{cases}$$

son como los dibujados en la Figura 17.21.

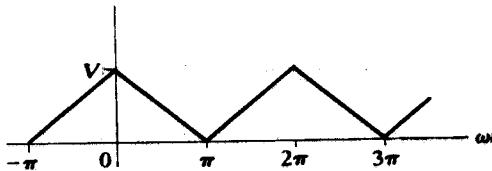


Figura 17.33.

- 17.10. Determinar la serie exponencial de Fourier para la onda senoidal con rectificación de media onda de las Figuras 17.26 y 17.34, y dibujar el espectro.

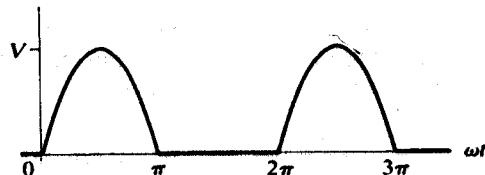


Figura 17.34.

En el intervalo $0 < \omega t < \pi$, $f(t) = V \operatorname{sen} \omega t$; y desde π a 2π , $f(t) = 0$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi V \operatorname{sen} \omega t e^{-j\omega nt} d(\omega t) \\ &= \frac{V}{2\pi} \left[\frac{e^{-j\omega nt}}{(1-n^2)} (-jn \operatorname{sen} \omega t - \cos \omega t) \right]_0^\pi = \frac{V(e^{-j\pi n} + 1)}{2\pi(1-n^2)}\end{aligned}$$

Para n par, $\mathbf{A}_n = V/\pi(1-n^2)$; para n impar, $\mathbf{A}_n = 0$. Sin embargo, para $n = 1$, la expresión para \mathbf{A}_n se vuelve indeterminada. Se puede aplicar la regla de L'Hôpital; es decir, se derivan numerador y denominador separadamente con respecto a n , después de lo cual se hace tender n a 1, con el resultado de que $\mathbf{A}_1 = -j(V/4)$.

El valor medio es

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi V \operatorname{sen} \omega t d(\omega t) = \frac{V}{2\pi} \left[-\cos \omega t \right]_0^\pi = \frac{V}{\pi}$$

Entonces la serie exponencial de Fourier es

$$f(t) = \dots - \frac{V}{15\pi} e^{-j4\omega t} - \frac{V}{3\pi} e^{-j2\omega t} + j \frac{V}{4} e^{-j\omega t} + \frac{V}{\pi} - j \frac{V}{4} e^{j\omega t} - \frac{V}{3\pi} e^{j2\omega t} - \frac{V}{15\pi} e^{j4\omega t} - \dots$$

Las amplitudes de los armónicos,

$$c_0 = A_0 = \frac{V}{\pi} \quad c_n = 2|\mathbf{A}_n| = \begin{cases} 2V/\pi(n^2 - 1) & (n = 2, 4, 6, \dots) \\ V/2 & (n = 1) \\ 0 & (n = 3, 5, 7, \dots) \end{cases}$$

son exactamente como las dibujadas en al Figura 17.27.

- 17.11.** Determinar la potencia media en una resistencia $R = 10 \Omega$, si la intensidad en forma de serie de Fourier es $i = 10 \operatorname{sen} \omega t + 5 \operatorname{sen} 3\omega t + 2 \operatorname{sen} 5\omega t$ (A).

La intensidad tiene un valor eficaz de $I_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{1}{2}(10)^2 + \frac{1}{2}(5)^2 + \frac{1}{2}(2)^2} = \sqrt{64,5} = 8,03$ A. Por tanto, la potencia media es $P = I_{\text{ef}}^2 R = (64,5)10 = 645$ W.

Otro método

La potencia total es la suma de las potencias de los armónicos, que están dadas por $\frac{1}{2}V_{\max}I_{\max} \cos \theta$. Pero la tensión entre los extremos de la resistencia y la intensidad están en fase para todos los armónicos, y $\theta_n = 0$. Entonces,

$$v_R = Ri = 100 \operatorname{sen} \omega t + 50 \operatorname{sen} 3\omega t + 20 \operatorname{sen} 5\omega t$$

$$\text{y } P = \frac{1}{2}(100)(10) = \frac{1}{2}(50)(5) + \frac{1}{2}(20)(2) = 645 \text{ W.}$$

- 17.12.** Determinar la potencia suministrada al circuito si la tensión aplicada y la intensidad resultante son

$$v = 50 + 50 \operatorname{sen} 5 \cdot 10^3 t + 30 \operatorname{sen} 10^4 t + 20 \operatorname{sen} 2 \cdot 10^4 t \text{ (V)}$$

$$i = 11,2 \operatorname{sen}(5 \cdot 10^3 t + 63,4^\circ) + 10,6 \operatorname{sen}(10^4 t + 45^\circ) + 8,97 \operatorname{sen}(2 \cdot 10^4 t + 26,6^\circ) \text{ (A)}$$

La potencia total media es la suma de las potencias de los armónicos:

$$P = (50)(0) + \frac{1}{2}(50)(11,2) \cos 63,4^\circ + \frac{1}{2}(30)(10,6) \cos 45^\circ + \frac{1}{2}(20)(8,97) \cos 26,6^\circ = 317,7 \text{ W}$$

- 17.13.** Obtener los dos valores de los elementos de un circuito serie si la tensión aplicada y la intensidad resultante son las correspondientes al Problema 17.12.

El desarrollo en serie de la tensión contiene un término constante de 50, pero no existe un término correspondiente en el desarrollo en serie de la intensidad, lo que indica que uno de los elementos es un condensador. Como hay potencia suministrada al circuito, el otro elemento deberá ser una resistencia.

$$I_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{1}{2}(11,2)^2 + \frac{1}{2}(10,6)^2 + \frac{1}{2}(8,97)^2} = 12,6 \text{ A}$$

La potencia media es $P = I_{\text{ef}}^2 R$, de lo cual $R = P/I_{\text{ef}}^2 = 317,7/159,2 = 2 \Omega$. Para $\omega = 10^4 \text{ rad/s}$, la intensidad adelanta a la tensión en 45° . Por tanto,

$$1 = \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{1}{\omega CR} \quad \text{o} \quad C = \frac{1}{(\omega)(R)} = \frac{1}{(10^4)(2)} = 50 \mu\text{F}$$

Por tanto, el circuito serie de dos elementos lo forman una resistencia de 2Ω y un condensador de $50 \mu\text{F}$.

- 17.14.** La onda de tensión de la Figura 17.35 se aplica a un circuito serie de $R = 2 \text{ k}\Omega$ y $L = 10 \text{ H}$. Utilizar la serie trigonométrica de Fourier para obtener la tensión entre los extremos de la resistencia. Dibujar el espectro de la tensión aplicada y v_R para mostrar el efecto de la bobina en los armónicos. $\omega = 377 \text{ rad/s}$.

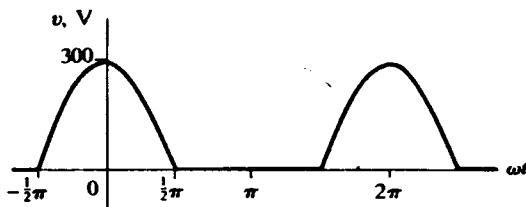


Figura 17.35.

La tensión aplicada tiene como valor medio V_{max}/π , como en el Problema 17.5. La función de la onda es par y, por tanto, la serie contiene sólo términos en coseno con coeficientes obtenidos mediante las siguientes integrales:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 300 \cos \omega t \cos n\omega t d(\omega t) = \frac{600}{\pi(1 - n^2)} \cos n\pi/2 \text{ V}$$

Aquí, $\cos n\pi/2$ vale -1 para $n = 2, 6, 10, \dots$, y $+1$ para $n = 4, 8, 12, \dots$. Para n impar, $\cos n\pi/2 = 0$. Sin embargo, para $n = 1$, la expresión es indeterminada y debe evaluarse separadamente.

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 300 \cos^2 \omega t d(\omega t) = \frac{300}{\pi} \left[\frac{\omega t}{2} + \frac{\sin 2\omega t}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{300}{2} \text{ V}$$

Por tanto,

$$v = \frac{300}{\pi} \left(1 + \frac{\pi}{2} \cos \omega t + \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t + \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \dots \right) (\text{V})$$

n	$n\omega_0$ rad/s	R_n k Ω	mcn k Ω	Z_n k Ω	θ_n
0	0	2	0	2	0°
1	377	2	3,77	4,26	62°
2	754	2	7,54	7,78	$75,1^\circ$
4	1508	2	15,08	15,2	$82,45^\circ$
6	2262	2	22,62	22,6	$84,92^\circ$

En la Tabla 17.3 la impedancia total del circuito serie se calcula para cada armónico correspondiente a la expresión de la tensión. Los coeficientes de Fourier del desarrollo en serie de la intensidad son los coeficientes de la serie de la tensión divididos por Z_n ; los términos de la tensión están retrasados un ángulo de fase θ_n respecto a los correspondientes términos del desarrollo en serie de la tensión.

$$I_0 = \frac{300/\pi}{2} \text{ mA}$$

$$i_1 = -\frac{300/2}{4,26} \cos(\omega t - 62^\circ) \text{ (mA)}$$

$$i_2 = -\frac{600/3\pi}{7,78} \cos(2\omega t - 75,1^\circ) \text{ (mA)}$$

.....

Por tanto, el desarrollo en serie de la intensidad es

$$i = \frac{300}{2\pi} + \frac{300}{(2)(4,26)} \cos(\omega t - 62^\circ) + \frac{600}{3\pi(7,78)} \cos(2\omega t - 75,1^\circ)$$

$$\rightarrow \frac{600}{15\pi(15,2)} \cos(4\omega t - 82,45^\circ) + \frac{600}{35\pi(22,6)} \cos(6\omega t - 84,92^\circ) - \dots \text{ (mA)}$$

y la tensión entre los extremos de la resistencia es

$$v_R = Ri = 95,5 + 70,4 \cos(\omega t - 62^\circ) + 16,4 \cos(2\omega t - 75,1^\circ) \\ - 1,67 \cos(4\omega t - 82,45^\circ) + 0,483 \cos(6\omega t - 84,92^\circ) - \dots \text{ (V)}$$

La Figura 17.36 muestra claramente cómo las amplitudes de los armónicos de la tensión aplicada se reducen por la presencia de la bobina de 10 H en serie.

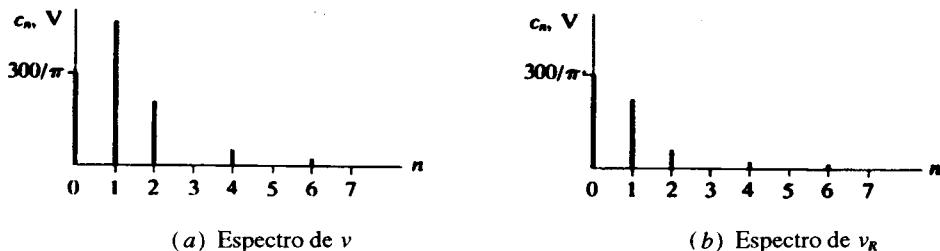


Figura 17.36.

- 17.15. La intensidad que circula por una bobina de 10 mH tiene una forma de onda como la mostrada en la Figura 17.37. Obtener la serie trigonométrica para la tensión entre los extremos de la bobina, sabiendo que $\omega = 500$ rad/s.

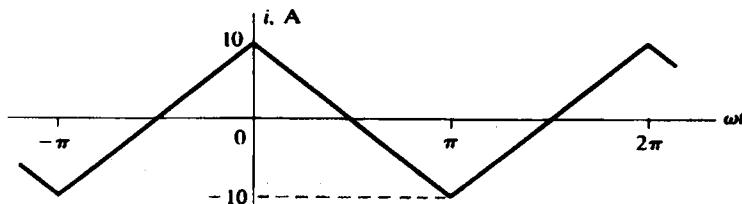


Figura 17.37.

La derivada de la onda de la Figura 17.37 está dibujada en la Figura 17.38. Es igual a la Figura 17.18 con $V = -20/\pi$. Por tanto, del Problema 17.1,

$$\frac{di}{d(\omega t)} = -\frac{80}{\pi^2} (\operatorname{sen} \omega t + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3\omega t + \frac{1}{5} \operatorname{sen} 5\omega t + \dots) \text{ (A)}$$

y así $v_L = L\omega \frac{di}{d(\omega t)} = -\frac{400}{\pi^2} (\operatorname{sen} \omega t + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3\omega t + \frac{1}{5} \operatorname{sen} 5\omega t + \dots)$ (V)

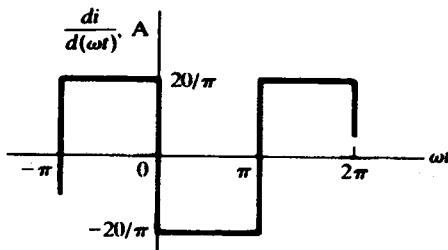


Figura 17.38.

PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

17.16. Obtiener la onda cuya serie trigonométrica de Fourier es

$$f(t) = \frac{8V}{\pi^2} \{\operatorname{sen} \omega t - \frac{1}{9} \operatorname{sen} 3\omega t + \frac{1}{25} \operatorname{sen} 5\omega t - \frac{1}{49} \operatorname{sen} 7\omega t + \dots\}$$

17.17. Obtener la forma de onda si su serie de Fourier es

$$\begin{aligned} f(t) &= 5 - \frac{40}{\pi^2} (\cos \omega t + \frac{1}{9} \cos 3\omega t + \frac{1}{25} \cos 5\omega t + \dots) \\ &+ \frac{20}{\pi} (\operatorname{sen} \omega t - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\omega t + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3\omega t - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4\omega t + \dots) \end{aligned}$$

17.18. Obtener la forma de onda para la serie de Fourier dada

$$\begin{aligned} f(t) &= V \left(\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi} \cos \omega t - \frac{1}{3\pi} \cos 2\omega t + \frac{1}{2\pi} \cos 3\omega t - \frac{1}{15\pi} \cos 4\omega t - \frac{1}{6\pi} \cos 6\omega t + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \operatorname{sen} \omega t - \frac{2}{3\pi} \operatorname{sen} 2\omega t + \frac{4}{15\pi} \operatorname{sen} 4\omega t - \dots \right). \end{aligned}$$

17.19. Obtener la serie trigonométrica de Fourier para la onda de dientes de sierra de la Figura 17.39 y dibujar el espectro. Comparar con el Ejemplo 17.1.

Solución: $f(t) = \frac{V}{2} + \frac{V}{\pi} (\operatorname{sen} \omega t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\omega t + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3\omega t + \dots).$

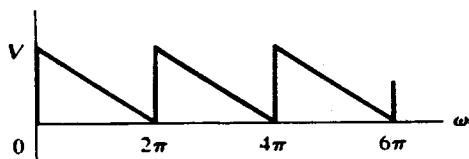


Figura 17.39.

- 17.20. Obtener la serie trigonométrica de Fourier para la onda de dientes de sierra de la Figura 17.40 y dibujar el espectro. Comparar con el Problema 17.3.

Solución: $f(t) = \frac{-2V}{\pi} + \{\sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{4} \sin 4\omega t + \dots\}$.

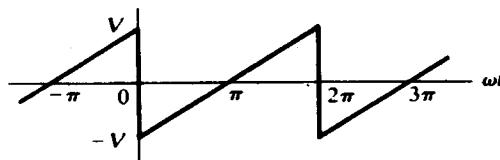


Figura 17.40.

- 17.21. Obtener la serie trigonométrica de Fourier para la onda de la Figura 17.41 y dibujar el espectro.

Solución: $f(t) = \frac{4V}{\pi^2} \{\cos \omega t + \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{25} \cos 5\omega t + \dots\}$

$$- \frac{2V}{\pi} \{\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots\}$$

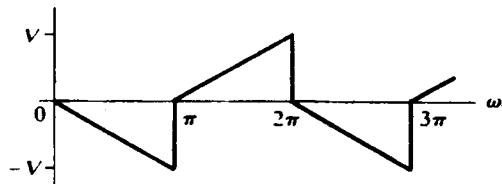


Figura 17.41.

- 17.22. Obtener la serie trigonométrica de Fourier para la onda cuadrada de la Figura 17.42 y dibujar el espectro. Comparar con el Problema 17.1.

Solución: $f(t) = \frac{4V}{\pi} \{\cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t - \frac{1}{7} \cos 7\omega t + \dots\}$.

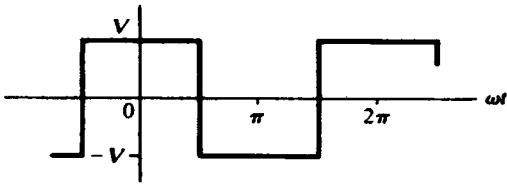


Figura 17.42.

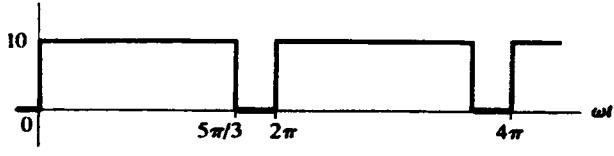
- 17.23. Determinar la serie trigonométrica de Fourier para las ondas mostradas en la Figura 17.43. Obtener el espectro de cada una y compararlos.

Solución: a) $f(t) = \frac{5}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{10}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi}{12} \right) \cos n\omega t + \frac{10}{n\pi} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{12} \right) \sin n\omega t \right]$

b) $f(t) = \frac{50}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{10}{n\pi} \left(\sin \frac{n5\pi}{3} \right) \cos n\omega t + \frac{10}{n\pi} \left(1 - \cos \frac{n5\pi}{3} \right) \sin n\omega t \right]$



(a)



(b)

Figura 17.43.

- 17.24. Obtener la serie trigonométrica de Fourier para la onda senoidal con rectificación de media onda de la Figura 17.44 y dibujar el espectro. Comparar con los Problemas 17.5 y 17.6.

Solución: $f(t) = \frac{V}{\pi} \left(1 + \frac{\pi}{2} \cos \omega t + \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t + \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \dots \right)$

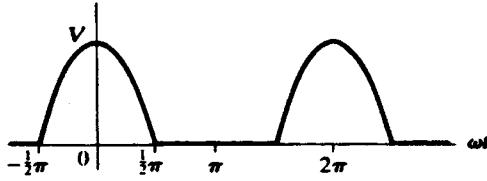


Figura 17.44.

- 17.25. Obtener la serie trigonométrica de Fourier para la onda senoidal con rectificación completa de la Figura 17.45 y dibujar el espectro.

Solución: $f(t) = \frac{2V}{\pi} \left(1 + \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t + \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \dots \right)$

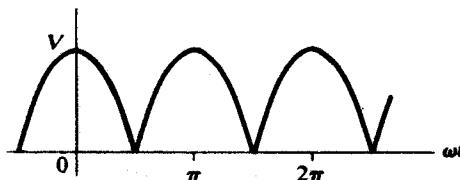


Figura 17.45.

- 17.26. La onda de la Figura 17.46 es la de la Figura 17.45 con su origen desplazado. Determinar las series de Fourier y demostrar que ambos espectros son idénticos.

Solución: $f(t) = \frac{2V}{\pi} \left(1 - \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t - \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \dots \right)$

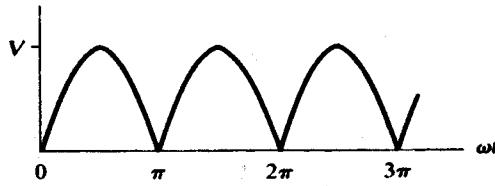


Figura 17.46.

- 17.27. Determinar la serie trigonométrica de Fourier para la onda mostrada en la Figura 17.47.

Solución:
$$\begin{aligned} f(t) = & \frac{V}{2\pi} - \frac{V}{2\pi} \cos \omega t + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{V}{\pi(1-n^2)} (\cos n\pi + n \operatorname{sen} n\pi/2) \cos n\omega t \\ & + \frac{V}{4} \operatorname{sen} \omega t + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{-nV \cos n\pi/2}{\pi(1-n^2)} \right] \operatorname{sen} n\omega t \end{aligned}$$

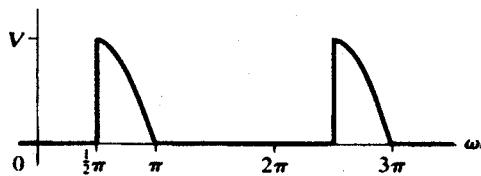


Figura 17.47.

- 17.28. Determinar la serie trigonométrica de Fourier para la onda mostrada en la Figura 17.48. Sumar esta serie término a término con la del Problema 17.27 y comparar la suma con las series obtenidas en el Problema 17.5.

Solución:
$$\begin{aligned} f(t) = & \frac{V}{2\pi} + \frac{V}{2\pi} \cos \omega t + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{V(n \operatorname{sen} n\pi/2 - 1)}{\pi(n^2 - 1)} \cos n\omega t + \frac{V}{4} \operatorname{sen} \omega t + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{nV \cos n\pi/2}{\pi(1-n^2)} \operatorname{sen} n\omega t \end{aligned}$$

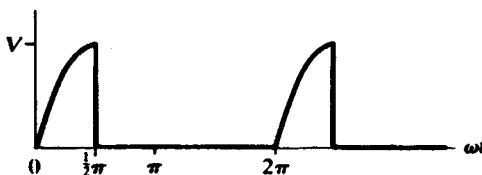


Figura 17.48.

- 17.29. Determinar la serie exponencial de Fourier para la onda mostrada en la Figura 17.49 y dibujar su espectro. Obtener a partir de los coeficientes dados los correspondientes a la serie trigonométrica, escribir ésta y compararla con el resultado del Problema 17.4.

$$\text{Solución: } f(t) = V \left[\dots - \left(\frac{1}{9\pi^2} - j \frac{1}{6\pi} \right) e^{-j3\omega t} - j \frac{1}{4\pi} e^{-j2\omega t} - \left(\frac{1}{\pi^2} - j \frac{1}{2\pi} \right) e^{-j\omega t} + \frac{1}{4} \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{\pi^2} + j \frac{1}{2\pi} \right) e^{j\omega t} + j \frac{1}{4\pi} e^{j2\omega t} - \left(\frac{1}{9\pi^2} + j \frac{1}{6\pi} \right) e^{j3\omega t} - \dots \right]$$

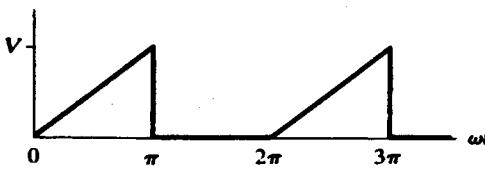


Figura 17.49.

- 17.30. Determinar la serie exponencial de Fourier para la onda mostrada en la Figura 17.50 y dibujar su espectro.

$$\text{Solución: } f(t) = V \left[\dots + \left(\frac{1}{9\pi^2} + j \frac{1}{6\pi} \right) e^{-j3\omega t} + j \frac{1}{4\pi} e^{-j2\omega t} + \left(\frac{1}{\pi^2} + j \frac{1}{2\pi} \right) e^{-j\omega t} + \frac{1}{4} \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{\pi^2} - j \frac{1}{2\pi} \right) e^{j\omega t} - j \frac{1}{4\pi} e^{j2\omega t} + \left(\frac{1}{9\pi^2} - j \frac{1}{6\pi} \right) e^{j3\omega t} + \dots \right]$$

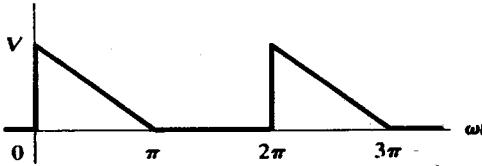


Figura 17.50.

- 17.31. Determinar la serie exponencial de Fourier para la onda cuadrada mostrada en la Figura 17.51 y obtener su espectro. Sumar esta serie término a término con la de los Problemas 17.29 y 17.30 y comparar la suma con la serie obtenida.

Solución: $f(t) = V \left(\dots + j \frac{1}{3\pi} e^{-j3\omega t} + j \frac{1}{\pi} e^{-j\omega t} + \frac{1}{2} - j \frac{1}{\pi} e^{j\omega t} - j \frac{1}{3\pi} e^{j3\omega t} - \dots \right)$

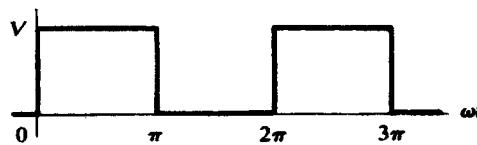


Figura 17.51.

- 17.32. Determinar la serie exponencial de Fourier para la onda de dientes de sierra mostrada en la Figura 17.52 y dibujar su espectro. Obtener a partir de los coeficientes obtenidos los correspondientes a la serie trigonométrica, escribir ésta y compararla con el resultado del Problema 17.19.

Solución: $f(t) = V \left(\dots + j \frac{1}{4\pi} e^{-j2\omega t} + j \frac{1}{2\pi} e^{-j\omega t} + \frac{1}{2} - j \frac{1}{2\pi} e^{j\omega t} - j \frac{1}{4\pi} e^{j2\omega t} - \dots \right)$

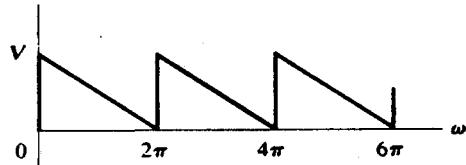


Figura 17.52.

- 17.33. Determinar la serie exponencial de Fourier para la onda de la Figura 17.53 y dibujar su espectro. Convertir los coeficientes de la serie trigonométrica obtenidos en el Problema 17.20 en los coeficientes de la serie exponencial y compararlos con los coeficientes de las series obtenidas aquí.

Solución: $f(t) = V \left(\dots - j \frac{1}{2\pi} e^{-j2\omega t} - j \frac{1}{\pi} e^{-j\omega t} + j \frac{1}{\pi} e^{j\omega t} + j \frac{1}{2\pi} e^{j2\omega t} - \dots \right)$

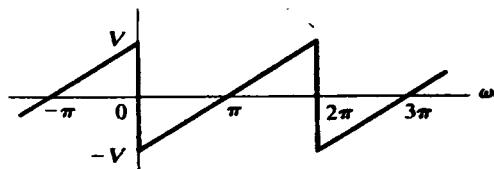


Figura 17.53.

- 17.34. Determinar la serie exponencial de Fourier para la onda mostrada en la Figura 17.54 y dibujar su espectro. Obtener a partir de los coeficientes obtenidos los correspondientes a la serie trigonométrica, escribir ésta y compararla con el resultado del Problema 17.21.

Solución: $f(t) = V \left[\dots + \left(\frac{2}{9\pi^2} - j \frac{1}{3\pi} \right) e^{-j3\omega t} + \left(\frac{2}{\pi^2} - j \frac{1}{\pi} \right) e^{-j\omega t} + \left(\frac{2}{\pi^2} + j \frac{1}{\pi} \right) e^{j\omega t} + \left(\frac{2}{9\pi^2} + j \frac{1}{3\pi} \right) e^{j3\omega t} + \dots \right]$

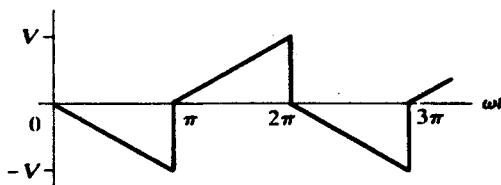


Figura 17.54.

- 17.35. Determinar la serie exponencial de Fourier para la onda cuadrada de la Figura 17.55 y dibujar su espectro. Convertir los coeficientes de la serie trigonométrica del Problema 17.22 en los coeficientes de la serie exponencial y compararlos con los coeficientes de la serie obtenida aquí.

Solución: $f(t) = \frac{2V}{\pi} (\dots + \frac{1}{5} e^{-j5\omega t} - \frac{1}{3} e^{-j3\omega t} + e^{-j\omega t} + e^{j\omega t} - \frac{1}{3} e^{j3\omega t} + \frac{1}{5} e^{j5\omega t} - \dots)$

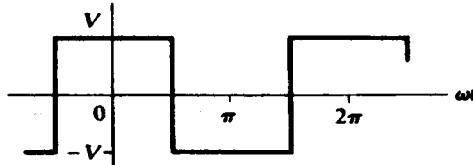


Figura 17.55.

- 17.36. Determinar la serie exponencial de Fourier para la onda de la Figura 17.56 y dibujar su espectro.

Solución: $f(t) = \dots + \frac{V}{2\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{6} \right) e^{-j2\omega t} + \frac{V}{\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} \right) e^{-j\omega t} + \frac{V}{6} + \frac{V}{\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} \right) e^{j\omega t} + \frac{V}{2\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{6} \right) e^{j2\omega t} + \dots$

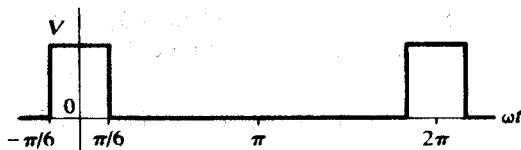


Figura 17.56.

- 17.37.** Determinar la serie exponencial de Fourier para la onda senoidal con rectificación de media onda mostrada en la Figura 17.57. Obtener a partir de los coeficientes obtenidos los correspondientes a la serie trigonométrica, escribir ésta y compararla con el resultado del Problema 17.24.

$$\begin{aligned} \text{Solución: } f(t) = & \cdots - \frac{V}{15\pi} e^{-j4\omega t} + \frac{V}{3\pi} e^{-j2\omega t} + \frac{V}{4} e^{-j\omega t} + \frac{V}{\pi} + \\ & + \frac{V}{4} e^{j\omega t} + \frac{V}{3\pi} e^{j2\omega t} - \frac{V}{15\pi} e^{j4\omega t} + \cdots \end{aligned}$$

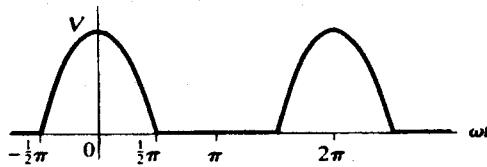


Figura 17.57.

- 17.38.** Determinar la serie exponencial de Fourier para la onda senoidal con rectificación completa mostrada en la Figura 17.58 y dibujar su espectro.

$$\text{Solución: } f(t) = \cdots - \frac{2V}{15\pi} e^{-j4\omega t} + \frac{2V}{3\pi} e^{-j2\omega t} + \frac{2V}{\pi} + \frac{2V}{3\pi} e^{j2\omega t} - \frac{2V}{15\pi} e^{j4\omega t} + \cdots$$

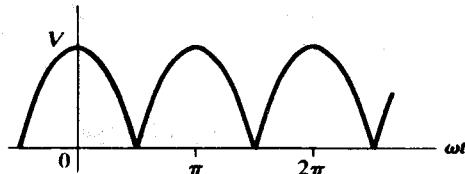


Figura 17.58.

- 17.39.** Determinar la tensión eficaz, la intensidad eficaz y la potencia media suministrada a un circuito pasivo si la tensión aplicada es $v = 200 + 100 \cos(500t + 30^\circ) + 75 \cos(1500t + 60^\circ)$ (V) y la intensidad resultante es $i = 3,53 \cos(500t + 75^\circ) + 3,55 \cos(1500t + 78,45^\circ)$ (A).

$$\text{Solución: } 218,5 \text{ V}, 3,54 \text{ A}, 250,8 \text{ W}.$$

- 17.40.** La tensión $v = 50 + 25 \operatorname{sen} 500t + 10 \operatorname{sen} 1500t + 5 \operatorname{sen} 2500t$ (V) se aplica a los extremos de un circuito pasivo, siendo la intensidad resultante

$$i = 5 + 2,23 \operatorname{sen}(500t - 26,6^\circ) + 0,556 \operatorname{sen}(1500t - 56,3^\circ) + 0,186 \operatorname{sen}(2500t - 68,2^\circ)$$
 (A)

Determinar la tensión eficaz, la intensidad eficaz y la potencia media.

Solución: 53,6 V, 5,25 A, 276,5 W.

- 17.41.** A un circuito serie de tres elementos, con $R = 5 \Omega$, $L = 5 \text{ mH}$ y $C = 50 \mu\text{F}$, se le aplica una tensión $v = 150 \operatorname{sen} 1000t + 100 \operatorname{sen} 2000t + 75 \operatorname{sen} 3000t$ (V). Determinar la intensidad eficaz y la potencia media para el circuito. Dibujar el espectro de la tensión y la intensidad, y advertir el efecto de la resonancia en serie.

Solución: 16,58 A, 1374 W.

- 17.42.** Por un circuito serie de dos elementos, con $R = 10 \Omega$ y $L = 20 \text{ mH}$, circula una intensidad

$$i = 5 \operatorname{sen} 100t + 3 \operatorname{sen} 300t + 2 \operatorname{sen} 500t$$
 (A)

Determinar la tensión eficaz aplicada y la potencia media.

Solución: 48 V, 190 W.

- 17.43.** Por una bobina pura, $L = 10 \text{ mH}$, circula una onda de intensidad triangular, mostrada en la Figura 17.59, donde $\omega = 500 \text{ rad/s}$. Obtener la serie exponencial de Fourier para la tensión entre los extremos de la bobina. Comparar la respuesta con el resultado del Problema 17.8.

Solución: $v_L = \frac{200}{\pi^2} (\dots - j\frac{1}{3}e^{-j3\omega t} - je^{-j\omega t} + je^{j\omega t} + j\frac{1}{3}e^{j3\omega t} + \dots)$ (V)

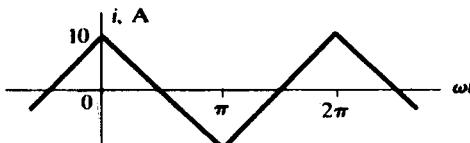


Figura 17.59.

- 17.44.** A una bobina pura, $L = 10 \text{ mH}$, se le aplica una onda de tensión, mostrada en la Figura 17.60, donde $\omega = 200 \text{ rad/s}$. Obtener la serie trigonométrica de Fourier para la intensidad y obtener su forma de onda.

Solución: $i = \frac{20}{\pi} (\operatorname{sen} \omega t - \frac{1}{9} \operatorname{sen} 3\omega t + \frac{1}{25} \operatorname{sen} 5\omega t - \frac{1}{49} \operatorname{sen} 7\omega t + \dots)$ (A); triangular

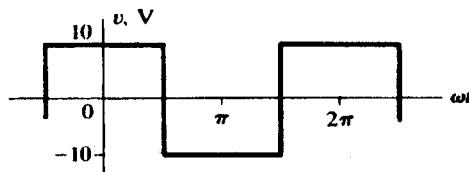


Figura 17.60.

- 17.45. La Figura 17.61 muestra una onda senoidal con rectificación completa que representa la tensión aplicada entre los extremos de un circuito serie LC . Utilizar la serie trigonométrica de Fourier para determinar las tensiones entre los extremos de la bobina y del condensador.

Solución:

$$v_L = \frac{4V_m}{\pi} \left[\frac{2\omega L}{3\left(2\omega L - \frac{1}{2\omega C}\right)} \cos 2\omega t - \frac{4\omega L}{15\left(4\omega L - \frac{1}{4\omega C}\right)} \cos 4\omega t + \dots \right]$$

$$v_C = \frac{4V_m}{\pi} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3(2\omega C)\left(2\omega L - \frac{1}{2\omega C}\right)} \cos 2\omega t + \frac{1}{15(4\omega C)\left(4\omega L - \frac{1}{4\omega C}\right)} \cos 4\omega t - \dots \right]$$

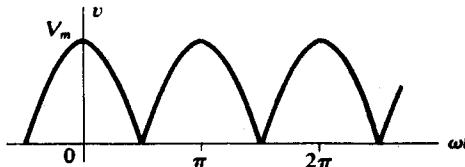


Figura 17.61.

- 17.46. Un circuito de tres elementos está formado por una $R = 5 \Omega$ en serie con una combinación en paralelo de una L y de una C . Para $\omega = 500$ rad/s, $X_L = 2 \Omega$, $X_C = 8 \Omega$. Determinar la intensidad total si la tensión aplicada es $v = 50 + 20 \operatorname{sen} 500t + 10 \operatorname{sen} 1000t$ (V).

Solución: $i = 10 + 3,53 \operatorname{sen}(500t - 28,1^\circ)$ (A).

APÉNDICE A

Sistema de números complejos

A1. NÚMEROS COMPLEJOS

Un *número complejo* z es un número de la forma $x + jy$, donde x e y son números reales y $j = \sqrt{-1}$. Se escribe: $x = \operatorname{Re} z$, la *parte real de* z ; $y = \operatorname{Im} z$, la *parte imaginaria de* z . Dos números complejos son iguales si y sólo si sus partes reales e imaginarias son iguales, respectivamente.

A2. PLANO COMPLEJO

Dos ejes ortogonales, con el eje horizontal mostrando $\operatorname{Re} z$ y el eje vertical $j \operatorname{Im} z$, determinan un plano complejo en el que cada número complejo es un único punto. Si se observa la Figura A1 pueden verse representados seis números complejos. De forma equivalente, cada número complejo está representado por un único vector que va desde el origen del plano complejo hasta el punto que representa el número complejo, como se ve en la Figura A1 para el número complejo z_6 .

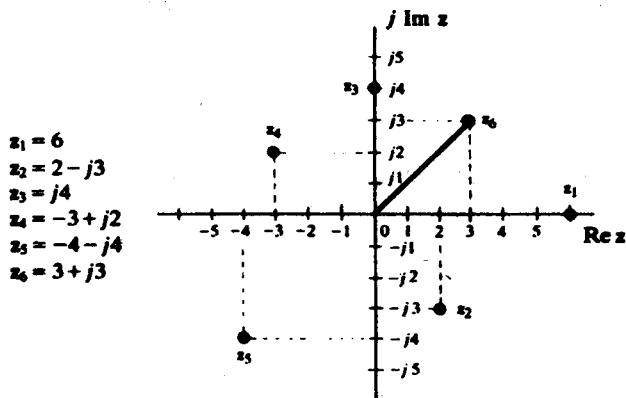


Figura A1.

A3. OPERADOR j

Ampliando la definición de j de la Sección A1 puede verse cómo un operador hace girar cualquier número complejo (vector) A 90° en el sentido contrario a las agujas del reloj. En la Figura A2 se muestra un caso donde A es un número real puro, x . La rotación transforma A en jk , en la parte positiva del eje imaginario. Insistiendo en ello podemos comprobar que, análogamente, j^2 hace girar a 180° , j^3 , 270° , y j^4 , 360° . La Figura A2 muestra también un número complejo B en el primer cuadrante, con un ángulo θ . Obsérvese que jB está en el segundo cuadrante, con un ángulo $\theta + 90^\circ$.

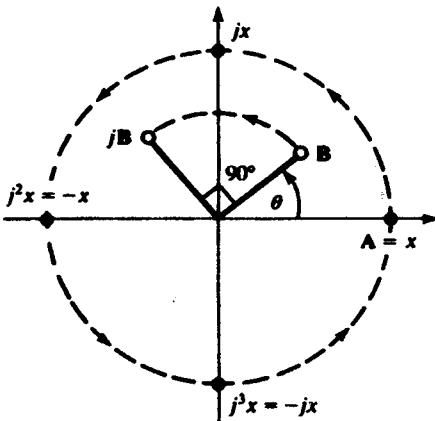


Figura A2.

A4. OTRAS FORMAS DE REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

En la Sección A1 los números complejos se definieron en *forma rectangular*. En la Figura A3, $x = r \cos \theta$, $y = r \sen \theta$, y el número complejo z puede escribirse en *forma trigonométrica* como

$$z = x + jy = r(\cos \theta + j \sen \theta)$$

donde r es el *módulo* o *valor absoluto* (la notación $r = |z|$ es común), dado por $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, y el ángulo $\theta = \operatorname{tg}^{-1}(y/x)$ es el *argumento* de z .

La fórmula de Euler, $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sen \theta$, permite otra representación de un número complejo denominada *forma exponencial*:

$$z = r \cos \theta + jr \sen \theta = re^{j\theta}$$

Una tercera forma, ampliamente usada en el análisis de circuitos, es la *forma polar* o de *Steinmetz*, $z = r/\theta$, donde θ se da normalmente en grados.

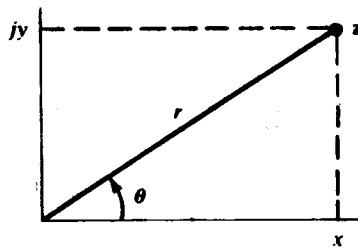


Figura A3.

A5. SUMA Y RESTA DE NÚMEROS COMPLEJOS

Para sumar dos números complejos hay que sumar las partes reales y las partes imaginarias separadamente. Para restar dos números complejos hay que restar las partes reales y las partes imaginarias separadamente. Desde un punto de vista práctico, la suma y la resta de números reales sólo puede realizarse de forma conveniente cuando ambos números están en forma rectangular.

EJEMPLO A1. Dado $\mathbf{z}_1 = 5 - j2$ y $\mathbf{z}_2 = -3 - j8$,

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 &= (5 - 3) + j(-2 - 8) = 2 - j10 \\ \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1 &= (-3 - 5) + j(-8 + 2) = -8 - j6\end{aligned}$$

A6. PRODUCTO DE NÚMEROS COMPLEJOS

El producto de dos números complejos cuando ambos están en forma exponencial se realiza siguiendo las leyes de los números exponentiales.

$$\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2 = (r_1 e^{j\theta_1})(r_2 e^{j\theta_2}) = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

El producto en forma polar o de Steinmetz es evidente a partir de la referencia a la forma exponencial.

$$\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2 = (r_1 / \theta_1)(r_2 / \theta_2) = r_1 r_2 / \theta_1 + \theta_2$$

El producto rectangular puede determinarse tratando los dos números como binomios.

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2 &= (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = x_1 x_2 + jx_1 y_2 + jy_1 x_2 + j^2 y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + y_1 x_2)\end{aligned}$$

EJEMPLO A2. Si $\mathbf{z}_1 = 5e^{j\pi/3}$ y $\mathbf{z}_2 = 2e^{-j\pi/6}$, entonces $\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2 = (5e^{j\pi/3})(2e^{-j\pi/6}) = 10e^{j\pi/6}$.

EJEMPLO A3. Si $\mathbf{z}_1 = 2/30^\circ$ y $\mathbf{z}_2 = 5/-45^\circ$, entonces $\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2 = (2/30^\circ)(5/-45^\circ) = 10/-15^\circ$.

EJEMPLO A4. Si $\mathbf{z}_1 = 2 + j3$ y $\mathbf{z}_2 = -1 - j3$, entonces $\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2 = (2 + j3)(-1 - j3) = 7 - j9$.

A7. DIVISIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

Para dos números complejos en forma exponencial, el cociente se obtiene directamente de las leyes de los números exponenciales.

$$\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \frac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

Nuevamente, la división con la forma polar o de Steinmetz es evidente a partir de la forma exponencial.

$$\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \frac{r_1/\underline{\theta_1}}{r_2/\underline{\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} \underline{\theta_1 - \theta_2}$$

La división de dos números complejos en forma rectangular se realiza multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador (ver Sección A8).

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} &= \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} \left(\frac{x_2 - jy_2}{x_2 - jy_2} \right) = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + j(y_1 x_2 - y_2 x_1)}{x_2^2 + y_2^2} = \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned}$$

EJEMPLO A5. Dado $\mathbf{z}_1 = 4e^{j\pi/3}$ y $\mathbf{z}_2 = 2e^{j\pi/6}$,

$$\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \frac{4e^{j\pi/3}}{2e^{j\pi/6}} = 2e^{j\pi/6}$$

EJEMPLO A6. Dado $\mathbf{z}_1 = 8/-30^\circ$ y $\mathbf{z}_2 = 2/-60^\circ$,

$$\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \frac{8/-30^\circ}{2/-60^\circ} = 4/30^\circ$$

EJEMPLO A7. Dado $\mathbf{z}_1 = 4 - j5$ y $\mathbf{z}_2 = 1 + j2$,

$$\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \frac{4 - j5}{1 + j2} \left(\frac{1 - j2}{1 - j2} \right) = -\frac{6}{5} - j \frac{13}{5}$$

A8. CONJUGADO DE UN NÚMERO COMPLEJO

El *conjugado* del número complejo $\mathbf{z} = x + jy$ es el número complejo $\mathbf{z}^* = x - jy$. Por tanto,

$$\operatorname{Re} \mathbf{z} = \frac{\mathbf{z} + \mathbf{z}^*}{2} \quad \operatorname{Im} \mathbf{z} = \frac{\mathbf{z} - \mathbf{z}^*}{2j} \quad |\mathbf{z}| = \sqrt{\mathbf{z}\mathbf{z}^*}$$

En el plano complejo, los puntos \mathbf{z} y \mathbf{z}^* son simétricos respecto al eje de los números reales.

En forma exponencial: $\mathbf{z} = re^{j\theta}$, $\mathbf{z}^* = re^{-j\theta}$.

En forma polar: $\mathbf{z} = r/\theta$, $\mathbf{z}^* = r/-\theta$.

La forma trigonométrica: $\mathbf{z} = r(\cos \theta + j \operatorname{sen} \theta)$, $\mathbf{z}^* = r(\cos \theta - j \operatorname{sen} \theta)$.

La conjugación tiene las siguientes propiedades útiles:

$$i) \quad (\mathbf{z}^*)^* = \mathbf{z}$$

$$iii) \quad (\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2)^* = \mathbf{z}_1^* \mathbf{z}_2^*$$

$$ii) \quad (\mathbf{z}_1 \pm \mathbf{z}_2)^* = \mathbf{z}_1^* \pm \mathbf{z}_2^*$$

$$iv) \quad \left(\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} \right)^* = \frac{\mathbf{z}_1^*}{\mathbf{z}_2^*}$$

APÉNDICE B

Matrices y determinantes

B1. SISTEMA DE ECUACIONES Y MATRIZ CARACTERÍSTICA

Muchos sistemas en ingeniería pueden describirse mediante un sistema de ecuaciones linealmente independientes de la forma

$$\begin{aligned}y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \\y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \\&\dots \\y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n\end{aligned}$$

donde x_j son las variables independientes, y_i las variables dependientes y a_{ij} los coeficientes de las variables independientes. Los coeficientes a_{ij} pueden ser constantes o funciones de algún parámetro determinado.

Un método más adecuado para expresar las ecuaciones anteriores es utilizar la forma matricial.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

o $\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$, con la adecuada definición del producto \mathbf{AX} (ver Sección B3). La matriz $\mathbf{A} \equiv [a_{ij}]$ se denomina *matriz característica* del sistema; su *orden* o *dimensión* se denota por

$$d(\mathbf{A}) \equiv m \cdot n$$

donde m es el número de filas y n es el número de columnas.

B2. TIPO DE MATRICES

Matriz fila. Una matriz que contiene cualquier número de columnas pero sólo una fila: $d(\mathbf{A}) = 1 \times n$. También llamado *vector fila*.

Matriz columna. Una matriz que contiene cualquier número de filas pero sólo una columna: $d(\mathbf{A}) = m \times 1$. También llamado *vector columna*.

Matriz diagonal. Una matriz cuyos elementos no nulos están todos en la diagonal principal.

Matriz unidad. Una matriz en la que todos los elementos de la diagonal principal son uno.

Matriz nula. Una matriz en la que todos sus elementos son cero.

Matriz cuadrada. Una matriz en la que el número de filas es igual al número de columnas: $d(\mathbf{A}) = n \times n$.

Matriz simétrica. Dada

$$\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad d(\mathbf{A}) = m \times n$$

la traspuesta de \mathbf{A} es

$$\mathbf{A}^T \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{m3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad d(\mathbf{A}^T) = n \times m$$

Por tanto, las filas de \mathbf{A} son las columnas de \mathbf{A}^T , y viceversa. La matriz \mathbf{A} es simétrica si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$; de ello se deduce que una matriz simétrica debe de ser cuadrada.

Matriz hermética: Dada

$$\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

la conjugada de \mathbf{A} es

$$\mathbf{A}^* \equiv \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & a_{13}^* & \cdots & a_{1n}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & a_{23}^* & \cdots & a_{2n}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}^* & a_{m2}^* & a_{m3}^* & \cdots & a_{mn}^* \end{bmatrix}$$

La matriz \mathbf{A} es *hermítica* si $\mathbf{A} = (\mathbf{A}^*)^T$; es decir, una matriz hermética es una matriz cuadrada con los elementos reales en la diagonal principal y los elementos complejos conjugados ocupando las posiciones que son simétricas respecto a la diagonal principal. Obsérvese que $(\mathbf{A}^*)^T = (\mathbf{A}^T)^*$.

Matriz no singular. Una matriz cuadrada \mathbf{A} de $n \times n$ es *no singular* (o *invertible*) si existe una matriz cuadrada \mathbf{B} de $n \times n$ tal que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$$

donde \mathbf{I} es la matriz unidad de $n \times n$. La matriz \mathbf{B} se llama la *inversa* de la matriz no singular \mathbf{A} , y se escribe $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. Si \mathbf{A} es no singular, la ecuación matricial $\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$ de la Sección B1 tiene, para cualquier \mathbf{Y} , la solución única

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Y}$$

B3. ARITMÉTICA DE MATRICES

Suma y resta de matrices

Dos matrices del mismo orden pueden sumarse o restarse; dos matrices de diferentes órdenes no pueden sumarse o restarse.

La suma (resta) de dos matrices de $m \times n$, $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ y $\mathbf{B} = [b_{ij}]$, es la matriz \mathbf{C} de $m \times n$ en la que cada uno de sus elementos es la suma (resta) de los correspondientes elementos de \mathbf{A} y \mathbf{B} . Por tanto, $\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = [a_{ij} \pm b_{ij}]$.

EJEMPLO B1. Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces
$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1+5 & 4+2 & 0+6 \\ 2+0 & 7+1 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

La traspuesta de la suma (resta) de dos matrices es la suma (resta) de las dos respuestas:

$$(\mathbf{A} \pm \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \pm \mathbf{B}^T$$

Producto de matrices

El producto \mathbf{AB} , en este orden, de una matriz \mathbf{A} de $1 \times m$ y una matriz \mathbf{B} de $m \times 1$ es una matriz $\mathbf{C} \equiv [c_{11}]$ de 1×1 , donde

$$\mathbf{C} = [a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ \cdots \ a_{1m}] \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$$

$$= [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1m}b_{m1}] = \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_{1k}b_{k1} \right]$$

Hay que observar que cada elemento de la matriz fila está multiplicado por su correspondiente de la matriz columna, sumándose después todos los productos. Normalmente, se identifica \mathbf{C} con el *escalar* c_{11} ; tratándolo como un número ordinario obtenido según la numeración a la que pertenecen cada uno de los elementos de \mathbf{A} y \mathbf{B} , respectivamente.

El producto \mathbf{AB} , en este orden, de una matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ de $m \times s$ y la matriz $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ de $s \times n$ es la matriz $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ de $m \times n$, donde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj} \quad (i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n)$$

EJEMPLO B2.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & -6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3I_1 + 5I_2 - 8I_3 \\ 2I_1 + 1I_2 + 6I_3 \\ 4I_1 - 6I_2 + 7I_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -2 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(8) + (-3)(7) & 5(-2) + (-3)(0) & 5(6) + (-3)(9) \\ 4(8) + 2(7) & 4(-2) + 2(0) & 4(6) + 2(9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & -10 & 3 \\ 46 & -8 & 42 \end{bmatrix}$$

La matriz \mathbf{A} puede multiplicarse por la matriz \mathbf{B} , es decir, el producto \mathbf{AB} está definido, sólo cuando el número de columnas de \mathbf{A} es igual al número de filas de \mathbf{B} . Por tanto, si \mathbf{A} es una matriz de 3×2 y \mathbf{B} es una matriz de 2×5 , el producto \mathbf{AB} está definido, pero el producto \mathbf{BA} no está definido. Si \mathbf{D} y \mathbf{E} son matrices de 3×3 , los productos \mathbf{DE} y \mathbf{ED} están definidos. Sin embargo, no es necesariamente cierto que $\mathbf{DE} = \mathbf{ED}$.

La traspuesta del producto de dos matrices es el producto de las dos matrices traspuestas cambiando el orden del producto:

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$$

Si \mathbf{A} y \mathbf{B} son matrices no singulares de la misma dimensión, entonces también \mathbf{AB} es no singular, con

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$$

Producto de una matriz por un escalar

El producto de una matriz $\mathbf{A} \equiv [a_{ij}]$ por un escalar k se define por

$$k\mathbf{A} = \mathbf{A}k \equiv [ka_{ij}]$$

es decir, cada elemento de \mathbf{A} está multiplicado por k . Obsérvese las propiedades

$$k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B} \quad k(\mathbf{AB}) = (k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B}) \quad (k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T$$

B4. DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

En correspondencia con cualquier matriz $\mathbf{A} \equiv [a_{ij}]$ de $n \times n$ existe una determinada función escalar de los elementos a_{ij} , denominada *determinante de A*. Este número se expresa por

$$\det \mathbf{A} \quad o \quad |\mathbf{A}| \quad o \quad \Delta_{\mathbf{A}} \quad o \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

donde la última forma pone en evidencia los elementos de \mathbf{A} de los que depende el valor del determinante. Para los determinantes de orden $n = 1$ y $n = 2$ se tiene que

$$|a_{11}| = a_{11} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Para valores de n mayores, las expresiones análogas se hacen más complicadas, y se evitan mediante la utilización del teorema de desarrollo de Laplace (véase más adelante). Lo que resulta importante es que un determinante esté definido de forma que

$$\det \mathbf{AB} = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$$

para cualquier par de matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} de $n \times n$. Otras dos propiedades básicas son:

$$\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A} \quad \det k\mathbf{A} = k^n \det \mathbf{A}$$

Finalmente, $\det \mathbf{A} \neq 0$ si y sólo si \mathbf{A} es no singular.

EJEMPLO B3. Verificar la regla del producto de determinantes para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 9 \\ 1 & \pi \end{bmatrix}$$

Se tiene

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 9 \\ 1 & \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 9 + 4\pi \\ -4 & 27 + 2\pi \end{bmatrix}$$

$$\text{y } \begin{vmatrix} 2 & 9 + 4\pi \\ -4 & 27 + 2\pi \end{vmatrix} = 2(27 + 2\pi) - (9 + 4\pi)(-4) = 90 + 20\pi$$

$$\text{Pero } \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1(2) - 4(3) = -10$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 9 \\ 1 & \pi \end{vmatrix} = -2(\pi) - 9(1) = -9 - 2\pi$$

y efectivamente $90 + 20\pi = (-10)(-9 - 2\pi)$.

Teorema del desarrollo de Laplace

El *menor complementario*, M_{ij} , del elemento a_{ij} de un determinante de orden n es un determinante de orden $n - 1$ obtenido a partir del primero borrando la fila y la columna que contienen el elemento a_{ij} . El *cofactor*, Δ_{ij} , del elemento a_{ij} se define por

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

El teorema de Laplace dice: En un determinante de una matriz cuadrada A , multiplicando cada elemento en la fila p -ésima (columna) por el cofactor del correspondiente elemento en la q -ésima fila (columna), y sumando los productos, el resultado es 0, para $p \neq q$; y $\det A$, para $p = q$.

Rápidamente se deduce, por el teorema de Laplace, que si A tiene dos filas o dos columnas iguales, entonces $\det A = 0$ (y A debe ser una matriz singular).

Inversión de matrices mediante determinantes. Regla de Cramer

El teorema del desarrollo de Laplace puede utilizarse para el producto de matrices, como sigue:

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccccc} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \dots & & & & \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \Delta_{3n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{array} \right] \\
 = & \left[\begin{array}{ccccc} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \dots & & & & \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \Delta_{3n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right] \\
 = & \left[\begin{array}{ccccc} \det A & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \det A \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

o $\mathbf{A}(\text{adj } \mathbf{A}) = (\text{adj } \mathbf{A})\mathbf{A} = (\det \mathbf{A})\mathbf{I}$

donde $\text{adj } \mathbf{A} \equiv [\Delta_{ji}]$ es la matriz traspuesta de los cofactores de a_{ij} en el determinante de \mathbf{A} , e \mathbf{I} es la matriz unidad de $n \times n$.

Si \mathbf{A} es no singular, se puede dividir por el $\det \mathbf{A} \neq 0$, y obtener que

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \text{adj } \mathbf{A}$$

Esto significa que existe una solución única del sistema lineal $\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$, que es

$$\mathbf{X} = \left(\frac{1}{\det \mathbf{A}} \text{adj } \mathbf{A} \right) \mathbf{Y}$$

que resulta la Regla de Cramer en forma matricial. La forma del determinante se obtiene considerando la r -ésima fila ($r = 1, 2, \dots, n$) de la matriz solución. Ya que la r -ésima fila del $\text{adj } \mathbf{A}$ es

$$[\Delta_{1r} \ \Delta_{2r} \ \Delta_{3r} \ \cdots \ \Delta_{nr}]$$

se tiene:

$$\begin{aligned}
 x_r &= \left(\frac{1}{\det A} \right) [\Delta_{1r} \ \Delta_{2r} \ \Delta_{3r} \ \cdots \ \Delta_{nr}] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\
 &= \left(\frac{1}{\det A} \right) (y_1 \Delta_{1r} + y_2 \Delta_{2r} + y_3 \Delta_{3r} + \cdots + y_n \Delta_{nr}) \\
 &= \left(\frac{1}{\det A} \right) \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(r-1)} & y_1 & a_{1(r+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(r-1)} & y_2 & a_{2(r+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(r-1)} & y_n & a_{n(r+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

La última igualdad puede verificarse aplicando el teorema de Laplace a la r -ésima columna del determinante dado.

B5. AUTOVALORES DE UNA MATRIZ CUADRADA

Para un sistema lineal $\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$ con la matriz característica A de $n \times n$ es de particular importancia investigar las «excitaciones» \mathbf{X} que producen una «respuesta» \mathbf{Y} determinada. Por tanto, haciendo que $\mathbf{Y} = \lambda \mathbf{X}$, donde λ es un escalar,

$$\lambda \mathbf{X} = \mathbf{AX} \quad \text{o} \quad (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{0}$$

donde \mathbf{O} es la matriz nula de $n \times 1$. Ahora bien, si la matriz $\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}$ fuera no singular, sólo existiría la solución trivial $\mathbf{X} = \mathbf{Y} = \mathbf{O}$. Por tanto, para una solución no trivial, el valor de λ debe de ser tal que haga que $\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}$ sea una matriz singular; es decir, debe verificarse que

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Las n raíces de la ecuación polinómica en λ son los autovalores de la matriz A ; las correspondientes soluciones no triviales de \mathbf{X} son conocidas como los *autovectores* de A .

Haciendo que $\lambda = 0$ en el primer miembro de la anterior *ecuación característica*, puede observarse que el término constante en la ecuación deberá ser

$$\det(-\mathbf{A}) = \det[(-1)\mathbf{A}] = (-1)^n(\det \mathbf{A})$$

Ya que el coeficiente de λ^n en la ecuación es evidentemente la unidad, el término constante es también igual a $(-1)^n$ veces el producto de todas las raíces. *El determinante de una matriz cuadrada es el producto de todos sus autovalores*, resultando una alternativa, y muy útil, definición de determinante.

Índice

- Acoplamiento de admitancias, 235
- Acoplamiento fuerte, 400
- Admitancia, 229, 240, 289, 364-365
 - acoplamiento, 235
 - auto-, 235
 - combinaciones de, 231
 - de entrada, 236
 - de transferencia, 236, 250
 - diagrama, 231
 - en paralelo, 230
 - en serie, 230-231
- Amortiguamiento, 187-191
 - críticamente amortiguado, 187, 339
 - de circuitos en paralelo, 194
 - de circuitos serie *RLC*, 189-190
 - sobreamortiguado, 187-188, 192, 339
 - de circuitos paralelos *RLC*, 191-192
 - de circuitos serie *RLC*, 188
 - subamortiguado, 187, 339
 - de circuitos paralelos *RLC*, 193
 - de circuitos serie *RLC*, 187, 190
- Amperio, 1, 3
- Amperios-hora, 6
- Amperivueltas, 408
- Amplificadores, 71-115
 - modelo de, 71-73
 - realimentación en, 73-74
 - sumadores-integradores, 89-90
 - sustractores/diferenciadores, 84-85
- Amp Op, 74-78, 107-108
 - análisis con ordenador de circuitos con, 443-446
 - análisis de circuitos de, 78-79
 - circuitos con varios, 85-87
- seguidor de tensión, 83
- Análisis de circuitos, 433-476
 - aplicaciones, 518-521
 - descripción del circuito, 433-434
 - de CC, 435-440
 - usando Spice y PSpice, 433-476
- Análisis en CC, 435-440
 - sentencias de salida, 440-442
- Ancho de banda, 355-359
- Ángulo de fase 1, 207-208, 224-225, 228, 253
- Ángulo plano, 1
- Aplicación de una tensión de CC a una bobina, 155
- Armónicos, 137, 515, 518, 538
- Atenuador, 26
- Autoadmitancia, 235
- Autoinductancia, 397
- Autovalores, 566
- Autotransformadores, 409-410, 422
- Baterías, 6
- Bobinas, 297, 308-309, 354, 412
 - acopladas, 400-401, 412-413
 - energía de dos, 403-404
 - de serie, 241
- Bobinas/inductores/inductancias, 1, 9-10, 13, 18
 - aplicación de una tensión de CC a, 155
 - auto-, 397-398
 - de dispersión, 405
 - en paralelo, 35, 38
 - en serie, 38
 - estado estacionario en CC de, 159-160
 - intercambio de energía entre condensadores y, 270

Bobinas/inductores/inductancias (cont.)
mutua, 397-398

Caballo de vapor, 7
Caída de tensión, 71, 111-112
Carga eléctrica, 1, 2-3
Centi, 2
Círcuito
 derivador, 89
 equivalente en π , 373
 equivalente en T, 371
 integrador, 87-88
 condiciones iniciales de un, 89
 con descarga, 88-89
 inversor, 79
 sumador, 80-81
 tanque, 347

Circuitos
 conceptos, 9-25
 con dos mallas, 194-195, 216, 504-505
 convenios de signos, 10
 conversión entre parámetros Z e Y, 375
 de dos mallas, 194-195, 504-505
 de dos puertas, 369-396
 de dos puertas/dos impedancias, 456
 de orden superior, 187-221
 de primer orden, 149-186
 diagrama de localización, 345-349
 diferenciadores, 89-90
 ecuaciones características, 369, 374
 equivalente de π , 373
 equivalente de T, 371
 elecciones de parámetros, 379
 elementos en paralelo, 30-31
 elementos en serie, 28-30
 esquemas de, 16-17
 integradores, 87-90
 inversores, 79
 leyes de los, 27-39
 métodos de análisis, 41-70
 no-inversores, 81-83
 paralelos LC, 343-344
 parámetros de, 380-381
 parámetros g, 376, 380
 parámetros h, 376, 380, 389-390
 parámetros T, 377, 379, 380
 parámetros Y, 375, 378, 380-381, 384-389.
 394

parámetros Z, 375, 378, 380-384, 386-388,
 390, 393, 395
pasa-altos, 326-331
pasa-bajos, 326-331
pasivos, 188-189
polifásicos, 295-323
recíprocos, 370, 373
RC (véase circuitos RC)
relaciones tensión-intensidad, 9
RL (véase circuitos RL)
RLC (véase circuitos RLC)
sinusoidales (véase Circuitos sinusoidales;
 Circuitos en estado estacionario sinusoidal)
sumadores, 80
tanque, 347
Circuitos de dos puertas (cuadripolos), 331,
 369-396
 conexión en cascada, 378
 conexión en paralelo, 378
 conexión en serie, 378
 conversión entre parámetros Z e Y, 375-376
 equivalente en T de, 371
 interconexión, 378-379
 parámetros g, 376, 380-381, 393
 parámetros h, 376, 380-381, 389-391, 393
 parámetros en T, 377, 379-381, 392-393
 parámetros Y, 372-373, 375, 378, 380-381,
 384-389
 parámetros Z, 369-371, 374-375, 378, 380-384,
 386-388, 390, 393, 395
Circuitos en el dominio s, 485-486
 circuitos pasivos en, 199
 impedancia, 196-197
 impedancia de circuitos RLC, 198
Circuitos polifásicos, 295, 297
 cargas trifásicas, monofásico equivalente de,
 303
 fasores de tensión, 299
 medida de potencia con vatímetros, 308-310
 potencia instantánea, 295
 potencia trifásica, 308-309
 secuencia ABC, 297, 312-313, 317, 321
 secuencia CBA, 297, 313-314, 321
 sistema en estrella, 298-299
 cargas desequilibradas a cuatro hilos,
 304-305
 cargas desequilibradas a tres hilos, 305-306
 cargas equilibradas, 301-302
 conexión equivalente en triángulo y, 301-303

- Circuitos polifásicos (cont.)**
- sistema en triángulo, 298-299
 - cargas desequilibradas, 298
 - cargas equilibradas, 300-301
 - conexión equivalente en estrella y, 301-302
 - sistemas bifásicos, 295-296
 - sistemas trifásicos, 297-298
- Circuitos RC**
- complejos de primer orden, 157-159
 - de dos ramas, 384
 - en paralelo, 142-143, 346
 - en serie, 182, 186, 238-239, 252-253
 - respuesta a escalón de, 166
 - respuesta a excitaciones exponenciales, 166-168
 - respuesta a excitaciones sinusoidales, 168
 - respuesta a un impulso de, 165-166
 - respuesta a un pulso, 162, 164
- Circuitos RL**, 176
- complejos de primer orden, 157-159
 - de dos ramas, 348
 - en serie, 180, 184, 253, 346
 - respuesta a escalón de, 166-167
 - respuesta a excitaciones exponenciales, 166, 168
 - respuesta a excitaciones sinusoidales, 168
 - respuestas a un impulso de, 165-166, 168
 - respuesta a un pulso, 165
 - sin fuentes, 153-154
- Circuitos RLC**
- en paralelo, 191-194, 206
 - críticamente amortiguados, 194, 351
 - sobreamortiguados, 192
 - subamortiguados, 193
 - en serie, 187-191, 204-206, 346-347
 - críticamente amortiguados, 189, 253, 350, 351
 - sobreamortiguados, 188
 - subamortiguados, 190
 - factor de calidad, 354
 - frecuencia natural de resonancia, 216
 - impedancia en el dominio s, 198
 - intensidad transitoria, 216
 - multiplicación de impedancias, 220
 - potencia de CA en, 266-267
 - resonancia
 - paralelo, 342
 - serie, 340-341
- tensión transitoria, 216
- Circuitos recíprocos**, 370
- Circuitos sinusoidales estacionarios**, 223-259
- admitancia, 229, 230-232
 - ángulo de fase, 225
 - división de tensión/intensidad en el dominio de la frecuencia, 232
 - fasores, 226-229
 - impedancia, 229-231
 - método de las intensidades de malla y, 233-235
 - respuesta de los elementos, 223-225
- Coeficiente de acoplamiento**, 399
- Coeficiente de inducción mutua**, 397-398
- análisis de circuitos por ordenador de, 449-450
 - bobinas acopladas y, 400-401
 - circuitos equivalentes acoplados conductivamente y, 404
 - coeficiente de acoplamiento y, 399
 - regla de punto, 402
- Comparadores**, 93
- Computadores**
- análisis de circuitos usando, 433-476
 - analógicos, 90-91
 - programa *Schematic Capture*, 433
 - programa Spice (véase Spice y PSpice)
- Condensadores/capacitadores**, 7, 9, 11, 15, 24, 38, 183, 204-205, 253
- aplicación de una tensión de CC a, 151-154
 - con pérdidas, 358-359
 - descarga a través de una resistencia, 149-151
 - en paralelo, 30, 35, 36
 - en serie, 29, 35, 36
 - estado estacionario en CC, 159
 - intercambio de energía entre bobinas, 270
- Condensadores con pérdidas**, 358-359
- Condiciones de Dirichlet**, 508-509, 510
- Conducción**, 3
- Conductancia**, 1, 254
- Commutación**, 100, 175
- transición en la, 160-164
- Constante de tiempo**, 131, 156
- Corriente de bucle**, 42, 57, 65
- Corriente de magnetización**, 406-407
- Corriente natural**, 401
- Críticamente amortiguado**, 187, 189, 194, 339
- Culombio**, 1, 4

- Densidad
 - de energía, 525
 - de flujo magnético (Inducción magnética), 1
- Desarrollo
 - de Heaviside, 485
 - en fracciones simples, 483-485
- Desfase, 119-122
 - temporal 119-122
- Devanado, 412-415
 - primario, 405
 - secundario, 405
- Diagrama
 - de localización, 345-347
 - de polos y ceros (*véase Diagramas de polos y ceros*)
 - en el plano s, 218
- Diagramas de polos y ceros, 198-199, 212, 218-219
 - respuesta en frecuencia a partir de los, 334-335
- Divisores
 - de corriente, 32-33, 232
 - de tensión, 31, 38, 210-211, 232, 244, 251, 349, 363
- Dominio de
 - la frecuencia, 229, 232
 - la frecuencia compleja, 477
 - tiempo, 229, 477
- Ecuaciones características, 369, 374
- Electrones, 3, 6
- Elementos
 - activos, 9
 - pasivos, 9, 11
- Energía (*véase también Potencia*)
 - cinética, 4
 - intercambio entre bobinas y condensadores, 270
 - potencial, 4
 - trabajo, 2
- Escalar, 562
- Espectro, 515
- Estado estacionario, 149
 - de bobinas/condensadores en CC, 159-160
- Estado estacionario con CC de bobinas/condensadores, 159-160
- Esterorradíán, 1
- Factor de
 - calidad, 341, 354
 - dissipación, 358
 - multiplicación, 203, 214-215
- Factor de potencia, 284-285
 - en sistemas trifásico, 308
 - mejora (corrección), 276-278
- Faradio, 1
- Faradios, 12
- Fasor de
 - intensidad, 520
 - tensión, 299
- Fasores, 326
 - definición, 226
 - diagramas de, 226
 - diferencias de fases de, 226
 - notaciones equivalentes de, 228
 - tensión, 242
- Femto, 436
- Filtros, 335-336
 - activos, 336-337
 - pasa-bajos, 92, 333-334
 - pasa-bandas, 337-338
 - pasivos, 336-337
- Flujo
 - de acoplamiento, 399
 - disperso, 399, 407
 - magnético, 1, 397
 - mutuo, 399, 405
- Formas de onda
 - análisis utilizando el método de Fourier de, 507-551
 - cosenoidales, 139, 508
 - densidad de energía de, 525
 - dientes de sierra, 507, 515-516, 542
 - espectro continuo de las, 525
 - espectro de, 415
 - no periódicas, transformación, 521-523
 - periódicas, 507
 - senoidales, 117, 508, 544
 - simetría de, 512-514, 529
 - síntesis de, 515, 542
 - valores eficaces y potencia, 516
- Fórmula de Euler, 554
- Frecuencia
 - central, 338
 - compleja, 195-196
 - de media potencia, 331
 - de operación, 334

- Frecuencia (*cont.*)
 natural, 220, 339
- Frecuencia compleja, 195-196, 207-208, 216
 diagrama de polos y ceros, 198-200
 función de transferencia y, 198-199
 impedancia de circuitos en el dominio s, 196-198
 multiplicador de, 203
 multiplicador de frecuencia, 203
 respuesta forzada y, 200, 202
 respuesta natural y, 202-203
- Fuente flotante, 84
- Fuentes de tensión
 dependientes, 9
 independientes, 9
- Fuerza, 1, 2^{..}
- Función
 delta unidad, 128
 escalón unidad, 127
 exponencial, 131-133, 156
- Función de transferencia, 198-199
 diagramas de polos y ceros, 198-199
 respuesta en frecuencia y, 332-333
 respuesta forzada, 200-201
 respuesta natural, 202
- Función del tiempo, 207, 488-489
 aleatoria, 117
 no periódica, 117, 126
 periódica, 117-118, 122
- Función impulso
 fuerza de la, 128
 propiedad *sifting*, 131
 unidad, 128
- Funciones periódicas, 117-118, 262
 combinación de, 122
 valores medio/eficaz RMS, 124
- Funciones sinusoidales, 119
- Ganancia en lazo abierto, 72
- Generador de CA, 295, 310
- Generadores
 bifásicos, 295
 de CA, 310
 trifásicos, 297
- Giga, 2, 436
- Henrio, 1, 12, 435
- Hercio, 1
- Identidad de Euler, 228
- Impedancia, 208-210, 238-240, 253, 320-321
 combinaciones de, 230
 de entrada, 234
 de transferencia, 235, 248
 diagrama de, 231
 en circuitos estacionarios estacionales, 229-231
 en el dominio s, 196-198
 en paralelo, 230-231
 en serie, 230-231
 reflejada, 410
- Impulso periódico, 18
- Impulso, respuesta de circuitos de primer orden a un, 162-165
- Inductancia de dispersión, 405
- Intensidad
 de corriente eléctrica, 3
 de fase, 300-301
 de malla/método de las intensidades de malla, 42, 43, 48, 55, 65, 67, 244
 circuitos sinusoidales y, 233-236
 de Norton equivalente, 51-52
 por la carga, 300
- Intensidad o corriente, 23, 24, 34
 constante, 5
 de bucle, 42, 56, 65
 de CC, 155
 de carga, 300
 de fase, 300-301
 de magnetización, 406-407
 de malla, 42, 55, 65, 244, 256
 de rama, 42, 54, 64, 240
 equivalente de Norton, 51-52
 fasor de, 520
 ley de Kirchhoff de la, 28, 41-45
 natural, 401-402
 relación con la tensión, 11
 variable, 5
- Integral de inversión compleja, 478
- Iones, 2
- Julio, 1, 2, 4, 5
- Kilo, 1, 436
- Kilovatio·hora, 6
- Ley de
 Faraday, 399, 405

- Ley de (*cont.*)
 Kirchhoff para las tensiones (LKT), 27, 42-43, 481
 Lenz, 402
 Ohm, 53
 Ley Kirchhoff para las intensidades de corriente (LKC), 28, 41, 45
 Leyes (*véase también Teoremas*)
 de Faraday, 399, 405
 de Kirchhoff para las intensidades, 28, 41, 45
 de Kirchhoff para las tensiones, 27, 42, 481
 de Lenz, 402
 de Ohm, 53
 Longitud, 1
 Magnitudes constantes, 5-7
 Masa, 1
 Matriz (matrices), 559-566
 autovalores de una matriz cuadrada, 566
 características, 559
 columna, 559
 cuadrada, 559, 563-566
 de impedancias, 233-234
 de impedancias Z, 233-234
 diagonal, 560
 escalar, 562
 fila, 559
 hermética, 560
 inversión mediante determinantes, 565
 no singular, 561
 nula, 560
 producto, 561-562
 resta, 561-562
 simétrica, 560
 sistema de ecuaciones, 559
 suma, 561-562
 tipos de, 559-560
 unidad, 560
 Máxima transferencia de potencia, 279-280
 Mega, 2, 436
 Método de Fourier, 508-551
 análisis con ordenador, 458
 análisis de circuitos y, 518-521
 series exponenciales, 510-511, 535-536, 545-548
 series trigonométricas, 508-510, 528-536,
 542-544
 simetría de ondas, 512-515
 valores eficaces y potencia, 516
 Método de la transformada de Laplace, 477-505
 circuitos en el dominio s, 485-487
 convergencia de la integral, 481
 desarrollo de Heaviside, 485-491
 desarrollo en fracciones simples, 483-485
 directa, 477
 inversa, 478
 teorema del valor final, 482-483
 teorema del valor inicial, 482
 transformadas seleccionadas, 478-481
 Método de las corrientes de rama, 41, 54, 64, 240, 361
 Método de los determinantes, 45-46
 Método de tensiones en los nudos, 45-46, 48, 59, 66, 68, 246-247, 248
 circuitos sinusoidales y, 235-236
 Método matricial, 43-45, 56-58
 Métodos, análisis (*véase Métodos de análisis*)
 Métodos de análisis (*véase también Leyes;*
 Teoremas), 41-70
 corriente de rama, 41, 54, 64, 361
 corrientes de malla, 42-43, 48, 55, 65, 67,
 233-234, 244, 256
 determinantes, 43-44
 matriz/matrices, 43-44, 57
 tensiones en los nudos, 45-46, 48, 66, 68,
 235-236, 246-247, 248
 transformada de Laplace, 477-505
 Metro, 1
 Micro, 2, 436
 Mili, 2, 436
 Motor de inducción, 290, 294
 Motores de inducción, 290, 294
 Multiplicación, 203
 de frecuencia, 203
 de módulos, 203, 214
 Multiplicador de frecuencia, 203
 Nano, 2, 436
 Newton, 1, 2
 Newton-metro, 2
 Nudo, 28
 principal, 28
 simple, 28
 Ohm, 1, 12
 Onda

- Onda (*cont.*)
 cosenoideal, 139, 508
 de dientes de sierra, 507, 515, 542
 senoidal, 117, 508, 544
 Operador j, 554
- Parámetros
 características, 379-380
 de la admitancia, cortocircuito (*véase*
 Parámetros de Y)
 de la impedancia, circuito abierto (*véase*
 Parámetros Z)
 híbridos, 376
 inversos, 376
 Parámetros en T, 377, 379-380
 Parámetros h, 376, 380, 389-390
 Parámetros g, 376, 380
 Parámetros Y, 372-373, 375, 378, 380, 384-385,
 394
 conversión entre parámetros Z y, 375
 Parámetros Z, 369-371, 378, 380, 382-386, 393
 circuitos de dos puertas (cuadripolos), 374
 conversión entre parámetros Y y, 375
 Pico, 2, 436
 Plano complejo, 553
 Polaridad, 10, 33, 297
 instantánea, 402
 Potencia (*véase también* Energía)
 absorbida, 49
 activa, 265
 aparente, 270-274, 308
 en un sistema trifásico, 308
 compleja, 270-274, 291, 293, 316
 de CA, 261-293
 en cuadratura, 266
 eléctrica, 4-5
 en estado estacionario sinusoidal, 263-264
 en sistemas trifásicos, 308
 instantánea, 261, 264, 267, 269, 270, 295, 311
 media, 264-266, 270, 311, 517, 538
 reactiva, 266, 270, 289, 308
 en sistemas trifásicos, 308
 trifásica, 308-309
 valores eficaces y, 516
 Potencia en CA, 261-294
 activa, 265
 aparente, 270-274
 circuitos en paralelo, 275, 278
 compleja, 270-274, 291, 293
 en circuito RLC, 266-267
 en cuadratura, 266
 en estado estacionario sinusoidal, 263-264
 instantánea, 261, 264, 267, 269-270
 intercambio de energía entre
 bobina/condensador, 270
 media, 264-266, 270
 mejora del factor de potencia, 276-278
 potencia máxima transferida, 278
 reactiva, 266, 270, 289
 Potencial eléctrico, 1, 4
 Potenciómetro, 36
 PSpice (*véase* Spice y PSpice)
- Radián, 2
 Ráfaga de ondas, 141
 Reactancia, 230
 capacitiva, 230
 inductiva, 405
 Realimentación, en circuitos amplificadores, 73-74
 Región de convergencia, 481
 Regla de Cramer, 44, 565-566
 Regla del punto, 402, 449
 amperivueltas, 408
 Relación de
 amortiguamiento, 339
 de tensión, 348
 de transformación, 290
 Resistencias/resistores, 1, 12, 13, 23, 358-359
 de entrada, 46, 48, 67
 descarga de condensadores en, 149-151
 de transferencia, 47
 distribuidas, 10
 en paralelo, 31, 35, 36
 en serie, 29
 Resonancia, 337-338, 348, 350, 356, 363-365
 en paralelo, 342-344
 en serie, 340-342
 Respuesta
 a un escalón unidad, 165-168
 a un impulso unidad, 164-168
 Respuesta a un impulso
 circuitos RC y, 165-166
 circuitos RL y, 165-166
 Respuesta en el tiempo
 análisis de circuitos con ordenador de la, 453

Respuesta en frecuencia, 92, 325-326
 análisis de circuitos con ordenador de,
 446-449
 circuitos con dos puertas/dos impedancias, 331
 circuitos paralelos *LC*, 343
 circuitos pasa-altos, 326-331
 circuitos pasa-bajos, 326-331
 funciones de transferencia y, 332-333
 localización de polos y ceros, 334-335
 media potencia, 331
 resonancia en serie y, 340
 Respuesta forzada, 151
 función de transferencia y, 201-202
 Respuesta natural, 151
 función de transferencia y, 202
 Resistencia de entrada, 46-47, 67

Saturación, 99, 101
 Secuencia *ABC*, 297, 312-313, 317, 321
 Secuencia *CBA*, 297, 313-314, 321
 Segundo, 1
 Sensibilidad, 111-112
 análisis con ordenador, 458
 Señales
 aleatorias, 134-135
 no periódicas, 126
 periódicas, 117-118, 122, 261
 Siemens, 1
 Simetría
 de media onda, 512, 529
 de ondas, 512-514
 Simplificación de un circuito, 48-49
 Síntesis, formas de onda, 515
 Sinusoidales amortiguadas, 133
 Sistema de números complejos, 553-557
 Sistemas de números, complejos (véase Sistema
 de números complejos)
 conjugado de, 557
 división de, 556
 forma rectangular, 554
 forma trigonométrica, 554
 módulo o valor absoluto, 554
 multiplicación de, 555
 operador j, 554
 plano complejo, 553
 representaciones de, 554
 resta de, 555
 suma de, 555

Sistema en estrella, 297-299
 conexión equivalente en triángulo, 302-303
 de cargas desequilibradas a cuatro hilos,
 304-306
 de cargas desequilibradas a tres hilos, 306-307
 de cargas equilibradas a cuatro hilos, 300-302
 Sistema en triángulo, 298-299
 de cargas desequilibradas, 304
 de cargas equilibradas, 300-302
 equivalente en estrella de un, 302-303
 Sistema Internacional de Unidades (SI), 1-2
 Software (véase Ordenadores, Spice y PSpice)
 Solución
 homogénea, 149, 151
 particular, 149, 151
 Sobreamortiguamiento, 187, 188, 192, 339
 Spice y PSpice, 433-476
 análisis de DC
 sentencias de salida, 440-442
 uso, 435-440
 análisis de circuitos amp op, 444-446
 análisis de Fourier, 458
 análisis de sensibilidad, 459
 análisis transitorio, 453
 definición de otras fuentes, 453-458
 equivalente Thévenin, 443
 estado estacionario en CA, 447-449
 sentencia AC, 447
 sentencia .PLOT AC, 447
 sentencia .PRINT AC, 447
 fichero fuente
 partes de un, 434
 sentencia .END, 435
 sentencia título, 434
 sentencias de control, 435
 sentencias de datos, 435
 sentencias de salida, 435
 fuente exponencial, 453
 fuente pulso, 455
 fuente sinusoidal, 456-458
 inductancia mutua, 449-450
 respuesta en el tiempo, 453
 respuesta en frecuencia, 447-449
 sentencia .SUBCKT, 445
 sentencias de datos
 elementos pasivos, 435
 fuentes controladas, 439
 fuentes controladas por la tensión, 438
 fuentes dependientes, 438

- Spice y PSpice (*cont.*)**
- fuentes independientes, 436
 - fuentes linealmente dependientes, 438
 - símbolos y factores de escala, 436
 - transformadores, 449-450
- Subamortiguamiento**, 187, 190-191, 193, 339
- Superposición**, 49-52, 113-114
- Susceptancias**, 254
- capacitiva, 230
 - inductiva, 230
- Temperatura Kelvin**, 1
- Tensión**, 21
- de desplazamiento del neutro, 306
 - de un nudó, 45-46, 48, 59, 66, 68, 235-236, 246-247, 248
 - equivalente de Thévenin, 51
 - fasor de, 299
 - ley de Kirchhoff para la, 27, 42-43, 481
 - polaridad de la, 297
 - relación con la intensidad de la, 11
 - sinusoidal, 272
- Teorema**
- de transferencia de máxima potencia, 53-54
 - del desarrollo de Laplace, 564
- Teorema de Norton**, 51-53, 69-70, 250-251
- circuitos sinusoidales y, 236
- Teorema de Thévenin**, 51-53, 61, 69-70, 250-251, 258, 443
- circuitos sinusoidales y, 236
- Teoremas (véase también Leyes)**
- de la máxima transferencia de potencia, 53-54
 - de Norton, 51-53, 69-70, 236, 250-251, 258
 - de Thévenin, 51-53, 61, 69-70, 236, 250-251, 258, 443
 - del desarrollo de Laplace, 564
 - del valor final, 482-483
 - del valor inicial, 482
- Tera**, 2, 436
- Tesla**, 1
- Tiempo**, 1
- Trabajo, energía**, 1, 2, 4
- Transductores**, 105
- Transformada**
- directa de Laplace, 477
 - inversa de Fourier, 521, 523
 - inversa de Laplace, 478
- Transformada de Fourier**
- inversa, 521, 523
 - propiedades de, 524
- Transformador de núcleo ferromagnético**, 404
- Transformadores**, 293
- análisis con ordenador de, 449-450
 - auto-, 409-410, 422
 - de núcleo de aire, 404
 - de núcleo ferromagnético, 404
 - ideales, 407
 - impedancia reflejada de, 410-411
 - lineales, 404
- Transitorios**, 149
- análisis con ordenador, 453
- Triángulo de potencias**, 270, 274, 286-287
- Unidades SI**, 1-2
- Unidades eléctricas**, 1-2, 266
- Valor eficaz (RMS)**, 4
- valores medio/eficaz, 124-126
- Vatímetro de CA**, 308, 315
- Vatímetros**, 315
- medida de potencia con, 308-309
- Vatiós**, 1, 2, 4
- Voltamperios reactivos**, 266
- Voltio**, 1, 4
- Weber**, 1

Los textos de la serie Schattauer han convertido los clásicos, por estar a la vanguardia en el estudio y por ser una inestimable ayuda para el alumno a la hora de adquirir un conocimiento y pericia completos en la materia que se aprende.

Este capítulo está estructurado de la siguiente manera:

1.2. Resumen de las definiciones y conceptos pertinentes que sirve al estudiante para el trabajo.

Problemas resueltos: completamente desarrollados y en grado creciente de dificultad.

Problemas propuestos: con la solución indicada
que permita al estudiante afianzar los conocimientos adquiridos.



8 788668 110611

ISBN: 84-450-1400-7