

Logika intuicjonistyczna i izomorfizm Curry'ego Howarda

Julia Majkowska

21 Października 2018

1 Logika intuicjonistyczna

- Wstęp
- Dedukcja Naturalna
- Algebraiczna Semantyka
- Fragment implikacyjny

2 Izomorfizm Curry'ego Howarda

- Bezkontekstowa dedukcja naturalna
- Izomorfizm Curry'ego Howarda
- Ćwiczenia

1 Logika intuicjonistyczna

- Wstęp
- Dedukcja Naturalna
- Algebraiczna Semantyka
- Fragment implikacyjny

2 Izomorfizm Curry'ego Howarda

- Bezkontekstowa dedukcja naturalna
- Izomorfizm Curry'ego Howarda
- Ćwiczenia

Wstęp

- Logika oparta na konstrukcji zmiennej
- Koncepcję przypisuje się matematykowi filozofowi Luitzen Egbertus Jan Brouwer (początek XX w)
- Formalna gałąź logiki od 1930r.

Semantyka

Interpretacja BHK zasad tworzenia formuł

- 1 Konstrukcja $\phi_1 \wedge \phi_2$ składa się z konstrukcji ϕ_1 i ϕ_2 .
- 2 Konstrukcja $\phi_1 \vee \phi_2$ składa się z konstrukcji $i \in \{1, 2\}$ i ϕ_i .
- 3 Konstrukcja $\phi_1 \rightarrow \phi_2$ to funkcja zamieniająca konstrukcje ϕ_1 na konstrukcje ϕ_2 .
- 4 \perp oznacza brak konstrukcji.
- 5 $\neg\phi$ to skrócony zapis $\phi \rightarrow \perp$

Example

- 1 $\perp \rightarrow \phi$
- 2 $p \rightarrow \neg\neg p$

Semantyka

Konwencje zapisu formuł

- 1 $\neg p$ to skrót dla $p \rightarrow \perp$
- 2 $p \leftrightarrow q$ to skrót dla $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- 3 \rightarrow wiąże do prawej i ma najniższy priorytet
- 4 \neg ma najwyższy priorytet
- 5 \wedge i \vee wiążą do lewej i mają ten sam priorytet
- 6 Nie piszemy najbardziej zewnętrznych nawiasów

Example

$$\neg p \wedge q \rightarrow r \Leftrightarrow (((\neg p) \wedge q) \rightarrow r)$$

1 Logika intuicjonistyczna

- Wstęp
- Dedukcja Naturalna
- Algebraiczna Semantyka
- Fragment implikacyjny

2 Izomorfizm Curry'ego Howarda

- Bezkontekstowa dedukcja naturalna
- Izomorfizm Curry'ego Howarda
- Ćwiczenia

Dedukcja naturalna logiki intuicjonistycznej

Oznaczenia

- 1 PV - zbiór wszystkich zmiennych
- 2 $\Phi ::= \perp | PV | (\Phi \rightarrow \Phi) | (\Phi \vee \Phi) | (\Phi \wedge \Phi)$ - zbiór formuł
- 3 Kontekst to skończony podzbiór Φ . Będziemy używali Γ i Δ do oznaczania kontekstów
- 4 $\Gamma \vdash p$ intuicyjnie oznacza, że p wynika z założeń Γ .
- 5 Zamiast $\Gamma \cup \Delta$ będziemy pisać Γ, Δ , a zamiast $\{\} \vdash p$ będziemy pisać $\vdash p$.
- 6 Formalnym dowodem $\Gamma \vdash p$ jest drzewo, w którym $\Gamma \vdash p$ jest korzeniem, liśćmi są axiomy, a przejścia od ojca do syna odbywają się zgodnie z niżej podanymi zasadami.
- 7 Jeśli $\vdash p$ to p jest tautologią logiki intuicjonistycznej

Dedukcja naturalna logiki intuicjonistycznej

$\Gamma, \varphi \vdash \varphi$ (Ax)

$$\begin{array}{l} \frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi} (\wedge I) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi} (\wedge E) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi} (\wedge E) \\ \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi} (\vee I) \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi} (\vee I) \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \rho \quad \Gamma, \psi \vdash \rho \quad \Gamma \vdash \varphi \vee \psi}{\Gamma \vdash \rho} (\vee E) \\ \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow I) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi} (\rightarrow E) \\ \frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi} (\perp E) \end{array}$$

Przykłady dowodów

(i)

$$\frac{\varphi \vdash \varphi}{\vdash \varphi \rightarrow \varphi} (\rightarrow I)$$

(ii)

$$\frac{\frac{\varphi, \psi \vdash \varphi}{\varphi \vdash \psi \rightarrow \varphi} (\rightarrow I)}{\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)} (\rightarrow I)$$

(iii)

$$\frac{(\rightarrow E) \frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \vartheta) \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi \rightarrow \vartheta} \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi} (\rightarrow E)}{\Gamma \vdash \vartheta} (\rightarrow E)$$

$$\frac{\frac{\frac{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \vartheta), \varphi \rightarrow \psi \vdash \varphi \rightarrow \vartheta}{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \vartheta) \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \vartheta)} (\rightarrow I)}{\vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \vartheta)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \vartheta)} (\rightarrow I)$$

Własności dedukcji

Lemat

Logika intuicjonistyczna jest zamknięta na osłabienie i podstawienie. To znaczy :

$$\Gamma \vdash p \Rightarrow \Gamma, \psi \vdash p$$

$$\Gamma \vdash p \Rightarrow \Gamma[q := \psi] \vdash p[q := \psi]$$

Dowód - indukcja

- 1 Logika intuicjonistyczna
 - Wstęp
 - Dedukcja Naturalna
 - **Algebraiczna Semantyka**
 - Fragment implikacyjny

- 2 Izomorfizm Curry'ego Howarda
 - Bezkontekstowa dedukcja naturalna
 - Izomorfizm Curry'ego Howarda
 - Ćwiczenia

Logika klasyczna

Wartościowanie dla logiki klasycznej

Niech $v : \Phi \rightarrow \{0, 1\}$

Zdefiniujemy funkcję mapującą $[\cdot]_v : \Phi \rightarrow \{0, 1\}$, spełniającą :

$$[p]_v = v(p)$$

$$[\perp]_v = 0$$

$$[\phi \vee \psi]_v = \max\{[\phi]_v, [\psi]_v\}$$

$$[\phi \wedge \psi]_v = \min\{[\phi]_v, [\psi]_v\}$$

$$[\phi \rightarrow \psi]_v = \max\{1 - [\phi]_v, [\psi]_v\}$$

Ciało zbiorów

Definicja

Ciało zbiorów nad X to niepusta rodzina podzbiorów X zamknięta na sumę, przecięcie i dopełnienie zbiorów

Example

- 1 $P(X)$
- 2 $\{\} \cup X$

Algebra zbiorów

Wartościowanie na zbiorach

Niech \mathcal{R} ciało zbiorów nad zbiorem X .

Wartosciowaniem v w \mathcal{R} nazywamy $v : PV \rightarrow \mathcal{R}$

Zdefiniujemy funkcję mapującą $[\cdot]_v : \Phi \rightarrow X$, spełniającą :

$$[p]_v = v(p)$$

$$[\perp]_v = \{\}$$

$$[\phi \vee \psi]_v = [\phi]_v \cup [\psi]_v$$

$$[\phi \wedge \psi]_v = [\phi]_v \cap [\psi]_v$$

$$[\phi \rightarrow \psi]_v = X - [\phi]_v \cup [\psi]_v$$

Twierdzenie

Powyższe dwie semantyki są równoważne.

ϕ jest tautologią $\Leftrightarrow v(\phi) = X$ dla każdego v w \mathcal{R} .

Dowód

\Rightarrow

Założmy nie wprost, że istnieje a takie, że $a \notin v(\phi)$. Wtedy tworzymy wartościowanie zmiennych w PV takie, że $w(p) = 1$ wtw. gdy $a \in v(p)$. Indukcyjnie można udowodnić że $w(\phi) \neq 1$.

\Leftarrow

Wartościowanie 0/1 kowe to interpretacja $v(\phi) \in \{\{\}, X\}$.

Algebra boolowska

Definicja

Algebrą boolowską nazywamy $\mathcal{B} = \langle B, \cup, \cap, -, 0, 1 \rangle$, gdzie:

- ① \cup, \cap są łączne, przemienne i rozdzielne jedno względem drugiego.
- ② $a \cup 0 = a$ i $a \cap 1 = a$
- ③ $-a \cup a = 1$ i $-a \cap a = 0$

Relacja $a \leq b \Leftrightarrow a \cup b = b$ jest częściowym porządkiem dla wszystkich algebr boolowskich. \cup \cap są odpowiednio kresami dolnym (glb) i górnym (lub) na tym porządku.

Algebra Lindenbauma

Definicja

Niech Φ - zbiór wszystkich formuł i $\Gamma \in \Phi$

Zdefiniujmy relację $\phi \sim \psi \Leftrightarrow (\Gamma, \phi \vdash \psi) \wedge (\Gamma, \psi \vdash \phi)$. Relacja jest relacją równoważności ponieważ następujące formuły są dowodliwe:

- 1 $\phi \rightarrow \phi$
- 2 $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \gamma) \rightarrow (\phi \rightarrow \gamma))$

Zbiór Lindenbauma

Niech $\mathcal{L}_\Gamma = \Phi / \sim = \{[\phi]_\sim : \phi \in \Phi\}$.

Zdefiniujmy częściowy porządek $[\phi]_\sim \leq [\psi]_\sim \Leftrightarrow \Gamma, \phi \vdash \psi$

Algebra Lindenbauma

Operatory

Możemy zdefiniować dodatkowe operatory nad \mathcal{L}_Γ

- 1 $[\alpha]_\sim \cup [\beta]_\sim = [\alpha \vee \beta]_\sim$
- 2 $[\alpha]_\sim \cap [\beta]_\sim = [\alpha \wedge \beta]_\sim$
- 3 $-\![\alpha]_\sim = [\neg\alpha]_\sim$

Dowód

Operatory są dobrze zdefiniowane ponieważ następujące fomuły są dowodliwe

- 1 $(\alpha \rightarrow \alpha') \rightarrow ((\beta \rightarrow \beta') \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha' \vee \beta'))))$
- 2 $(\alpha \rightarrow \alpha') \rightarrow ((\beta \rightarrow \beta') \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\alpha' \wedge \beta'))))$
- 3 $(\alpha \rightarrow \alpha') \rightarrow (\neg\alpha' \rightarrow \neg\alpha)$

Algebra Lindenbauma

Twierdzenie

\cup i \cap są łączne, przemienne i rozdzielne oraz są operatorami lub i glb na porządku \leq .

Algebra Heytinga

Definicja

Algebrą Heytinga nazywamy system algebraiczny w postaci $(H) = \langle H, \cup, \cap, \Rightarrow, -, 0, 1 \rangle$ spełniający

- 1 \cup, \cap są łączne, przemienne i rozdzielne jedno względem drugiego.
- 2 $a \cup 0 = a$ i $a \cap 1 = a$
- 3 $a \cup a = a$
- 4 $a \cap c \leq b$ jest równoważne $c \leq a \Rightarrow b$ (gdzie $a \leq b$ to $a \cup b = b$)
- 5 $-a = a \Rightarrow 0$

Algebra Heytinga

Definicja

Niech $\mathcal{H} = \langle H, \cup, \cap, \Rightarrow, -, 0, 1 \rangle$ będzie algebrą Heytinga.

Wartosciowaniem v w \mathcal{H} nazywamy $v : PV \rightarrow H$

Zdefiniujmy funkcję mapującą $[\cdot]_v : \Phi \rightarrow H$, spełniającą :

$$[p]_v = v(p)$$

$$[\perp]_v = 0$$

$$[\phi \vee \psi]_v = [\phi]_v \cup [\psi]_v$$

$$[\phi \wedge \psi]_v = [\phi]_v \cap [\psi]_v$$

$$[\phi \rightarrow \psi]_v = [\phi]_v \Rightarrow [\psi]_v$$

Dowodliwość a algebra Heytinga

Twierdzenie

Następujące zdania sa równoważne

- 1 $\Gamma \vdash \phi$
- 2 $\Gamma \models \phi$

Twierdzenie

- 1 Formuła ϕ o długości n jest prawdziwa jeśli jest prawdziwa we wszystkich algebrach Heytinga o liczności zbioru wartości nie większej niż 2^{2^n}
- 2 Niech \mathcal{H} będzie algebrą wszystkich podzbiorów gęstej przestrzeni metrycznej. $\mathcal{H} \models \phi$ wtw. gdy ϕ jest prawdziwe.

Model Kripkego

Definicja

Jeśli $\mathcal{C} = \langle C, \leq, \Vdash \rangle$ jest **modelem Kripkego** wtedy :

- ① $c \Vdash \phi \vee \psi \Leftrightarrow c \Vdash \phi \text{ lub } c \Vdash \psi$
- ② $c \Vdash \phi \wedge \psi \Leftrightarrow c \Vdash \phi \text{ i } c \Vdash \psi$
- ③ $c \Vdash \phi \rightarrow \psi \Leftrightarrow c \Vdash \psi$ dla każdego c' , takiego że $c \leq c' \Rightarrow c' \Vdash \psi$
- ④ $c \Vdash \perp$ nie jest prawdą

Wnioski

- ① $c \Vdash \neg \phi \Leftrightarrow c' \not\Vdash \phi$ dla każdego $c' \geq c$.
- ② $c \leq c' \wedge c \Vdash \phi \Rightarrow c' \Vdash \phi$

Zupełność

Twierdzenie

Poniższe zdanie są równoważne

- 1 $\Gamma \vdash \phi$
- 2 $\mathcal{C} \Vdash \Gamma \Rightarrow \mathcal{C} \Vdash \phi$

1 Logika intuicjonistyczna

- Wstęp
- Dedukcja Naturalna
- Algebraiczna Semantyka
- **Fragment implikacyjny**

2 Izomorfizm Curry'ego Howarda

- Bezkontekstowa dedukcja naturalna
- Izomorfizm Curry'ego Howarda
- Ćwiczenia

Logika intuicjonistyczna z samą implikacją

Twierdzenie

Rachunek zdań z samą implikacją jest zupełny w kontekście modelu Kripkego. :

- 1 $\Gamma \vdash \phi$
- 2 $\mathcal{C} \Vdash \Gamma \Rightarrow \mathcal{C} \Vdash \phi$

są równoważne.

Twierdzenie

Niech ϕ zdanie implikacyjne, a Γ zbiór formuł implikacyjnych. Jeśli $\Gamma \vdash \phi$ jest prawdą w rachunku intuicjonistycznym to jest też prawdą w rachunku z samym implikacjami.

- 1 Logika intuicjonistyczna
 - Wstęp
 - Dedukcja Naturalna
 - Algebraiczna Semantyka
 - Fragment implikacyjny

- 2 Izomorfizm Curry'ego Howarda
 - Bezkontekstowa dedukcja naturalna
 - Izomorfizm Curry'ego Howarda
 - Ćwiczenia

Dedukcja bez kontekstu

Założenia są umieszczane w liściu drzewa i uwalniane w momencie kiedy stosujemy w dowodzie wprowadzenie implikacji.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\varphi] \quad \frac{(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \rho)}{\varphi \rightarrow \psi}}{\psi} \quad \frac{[\varphi] \quad \frac{(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \rho)}{\varphi \rightarrow \rho}}{\rho} \\
 \hline
 \frac{\psi \wedge \rho}{\varphi \rightarrow \psi \wedge \rho}
 \end{array}$$

Normalizacja dowodów

Niektóre dowody wprowadzają nowe spójniki, tylko po to, żeby je wyeliminować później

Example

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\varphi]^{(3)}}{\varphi \rightarrow \varphi^{(3)}} \quad \frac{\frac{[\varphi \rightarrow \varphi]^{(1)}}{\psi \rightarrow \varphi \rightarrow \varphi^{(2)}}}{(\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi \rightarrow \varphi \rightarrow \varphi^{(1)}} \\
 \hline
 \psi \rightarrow \varphi \rightarrow \varphi
 \end{array}
 \quad
 \frac{[\varphi]^{(3)}}{\varphi \rightarrow \varphi^{(3)}}
 \quad
 \frac{}{\psi \rightarrow \varphi \rightarrow \varphi^{(2)}}$$

Normalizacja dowodów

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\Sigma}{\varphi} \quad \frac{\Pi}{\psi}}{\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}} \rightarrow \frac{\Sigma}{\varphi} \\
 \\
 \frac{\frac{\Sigma}{\psi} \quad \frac{\frac{[\psi]^{(i)}}{\Pi}}{\frac{\varphi}{\psi \rightarrow \varphi^{(i)}}}}{\varphi} \rightarrow \frac{\frac{\Sigma}{\psi}}{\frac{\Pi}{\varphi}} \\
 \\
 \frac{\frac{\Theta}{\varphi} \quad \frac{\frac{[\varphi]^{(i)}}{\Sigma}}{\rho} \quad \frac{\frac{[\psi]^{(j)}}{\Pi}}{\rho}}{\rho^{(i,j)}} \rightarrow \frac{\frac{\Theta}{\varphi}}{\frac{\Sigma}{\rho}}
 \end{array}$$

- 1 Logika intuicjonistyczna
 - Wstęp
 - Dedukcja Naturalna
 - Algebraiczna Semantyka
 - Fragment implikacyjny

- 2 Izomorfizm Curry'ego Howarda
 - Bezkontekstowa dedukcja naturalna
 - Izomorfizm Curry'ego Howarda
 - Ćwiczenia

Izomorfizm Currego Howarda

Definicja

Będziemy rozpatrywać część implikacyjną logiki intuicjonistycznej.

- 1 Jeśli $\Gamma \vdash M : \phi$ to $|\Gamma| \vdash \phi$ gdzie $|\cdot|$ oznacza zbiór typów zbioru zmiennych.
- 2 Jeśli $\Gamma \vdash \phi$ to istnieje $M \in \Lambda_\pi$ takie, że $\Delta \vdash M : \phi$ gdzie $\Delta = \{(X_\phi : \phi) | \phi \in \Gamma\}$

Dowód - indukcja po konstrukcji formuły / dowodu.

Izomorfizm Currego Howarda a logika intuicjonistyczna

Aby rozszerzyć izomorfizm do pełnego rachunku zdań logiki intuicjonistycznej należy dołożyć następujące typy do prostego typowego rachunku lambda.

$$\Lambda_{\Pi} ::= \dots \mid \langle \Lambda_{\Pi}, \Lambda_{\Pi} \rangle \mid \pi_1(\Lambda_{\Pi}) \mid \pi_2(\Lambda_{\Pi}) \\ \mid \text{in}_1^{\psi \vee \varphi}(\Lambda_{\Pi}) \mid \text{in}_2^{\psi \vee \varphi}(\Lambda_{\Pi}) \mid \text{case}(\Lambda_{\Pi}; V.\Lambda_{\Pi}; V.\Lambda_{\Pi})$$

Izomorfizm Currego Howarda a logika intuicjonistyczna

Należy dołożyć także dodatkowe zasady typowanie i redukcji

$$\frac{\Gamma \vdash M : \psi \quad \Gamma \vdash N : \varphi}{\Gamma \vdash \langle M, N \rangle : \psi \wedge \varphi} \quad \frac{\Gamma \vdash M : \psi \wedge \varphi}{\Gamma \vdash \pi_1(M) : \psi} \quad \frac{\Gamma \vdash M : \psi \wedge \varphi}{\Gamma \vdash \pi_2(M) : \varphi}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \psi}{\Gamma \vdash \text{in}_1^{\psi \vee \varphi}(M) : \psi \vee \varphi} \quad \frac{\Gamma \vdash M : \varphi}{\Gamma \vdash \text{in}_2^{\psi \vee \varphi}(M) : \psi \vee \varphi}$$

$$\frac{\Gamma \vdash L : \psi \vee \varphi \quad \Gamma, x : \psi \vdash M : \rho \quad \Gamma, y : \varphi \vdash N : \rho}{\Gamma \vdash \text{case}(L; x.M; y.N) : \rho}$$

$$\pi_1(\langle M_1, M_2 \rangle) \rightarrow M_1$$

$$\pi_2(\langle M_1, M_2 \rangle) \rightarrow M_2$$

$$\text{case}(\text{in}_1^{\varphi}(N); x.K; y.L) \rightarrow K\{x := N\}$$

$$\text{case}(\text{in}_2^{\varphi}(N); x.K; y.L) \rightarrow L\{y := N\}$$

Przedstawienie dowodu jako λ termu

Można zauważyć podobieństwa pomiędzy cechami dowodu a cechami λ -termu.

$\lambda \rightarrow$

IPC(\rightarrow)

term variable

assumption

term

construction (proof)

type variable

propositional variable

type

formula

type constructor

connective

inhabitation

provability

typable term

construction for a proposition

redex

construction representing proof tree with redundancy

reduction

normalization

value

normal construction

Przedstawienie dowodu jako λ termu - redukcja

$$\frac{\frac{y:\psi \vdash y:\psi}{\vdash \lambda y:\psi . y:\psi \rightarrow \psi} \quad \frac{x:\varphi \vdash x:\varphi}{\vdash \lambda x:\varphi . x:\varphi \rightarrow \varphi}}{\vdash \langle \lambda x:\varphi . x, \lambda y:\psi . y \rangle : (\varphi \rightarrow \varphi) \wedge (\psi \rightarrow \psi)} \\ \vdash \pi_1(\langle \lambda x:\varphi . x, \lambda y:\psi . y \rangle) : \varphi \rightarrow \varphi$$

Własność silnej redukcji

Twierdzenie

Każda redukcja termu typowanego rachunku lambda ma skończoną długość.

- 1 Logika intuicjonistyczna
 - Wstęp
 - Dedukcja Naturalna
 - Algebraiczna Semantyka
 - Fragment implikacyjny

- 2 Izomorfizm Curry'ego Howarda
 - Bezkontekstowa dedukcja naturalna
 - Izomorfizm Curry'ego Howarda
 - Ćwiczenia

Własność silnej redukcji

- 1 Udowodnij w systemie dedukcji naturalnej używając termów logiki intuicjonistycznej. Staraj się aby powstały dowód był znormalizowany.

- 1 $\perp \rightarrow p$

- 2 $p \rightarrow \neg\neg p$

- 3 $\neg\neg\neg p \rightarrow \neg p$

- 4 $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

- 5 $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg(q \wedge p)$

- 6 $((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

- 2 Znajdź lambda termy odpowiadające tym dowodom.
- 3 Udowodnij, że $a \leq b \Leftrightarrow a \cup b = b$ zdefiniowana na algebrze boolowskiej jest porządkiem częściowym oraz:

- 1 $a \cap b \leq a$

- 2 $a \leq b$ wtw $a \cap b = a$

- 3 \cap, \cup to odpowiednio infimum i supremum względem porządku \leq

- 4 0 i 1 to odpowiednio najmniejszy i największy element w tym

Sources I



Morten Heine B. Sørensen, Paweł Urzyczyn
Lectures on the Curry-Howard Isomorphism.



Paweł Urzyczyn
Materiały do wykładu Rachunek Lambda.