

# Лабораторная работа 3.7.1

## Скин-эффект

Татаурова Юлия Романовна

15 ноября 2024 г.

**Цель работы:** исследовать явление проникновения переменного магнитного поля в медном полем цилиндре.

**Оборудование:** генератор сигналов; соленоид, намотанный на полый цилиндрический каркас; медный экран в виде полого цилиндра; измерительная катушка; амперметр; вольтметр; двухканальный осциллограф; RLC-метр.

### Теоретические сведения

#### Магнитное поле внутри и вне экрана

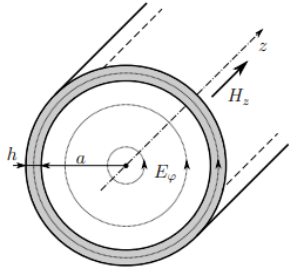


Рис. 1: Поле в тонкостенном цилиндре

Пусть цилиндр достаточно длинный, чтобы в нем можно было пренебречь краевыми эффектами и считать магнитное поле  $H$  внутри однородным, направленным вдоль оси  $OZ$ , а вихривое поле  $E$  будет перпендикулярно радиусу.  $H$  и  $E$  - величины колеблющиеся по гармоническому закону с частотой  $\omega$ , задаваемой частотой колебаний тока в соленоиде:  $H_z = H(r)e^{i\omega t}$ ,  $E_\varphi = E(r)e^{i\omega t}$ .

Пусть полый цилиндр имеет радиус  $a$  и толщину стенок  $h \ll a$ . Тогда поле в цилиндре описывается уравнением:

$$\frac{d^2 H}{dx^2} = i\omega\sigma\mu_0 H \quad (1)$$

Граничные условия для  $H$ :

$$H(0) = H_0, \quad H(h) = H_1 \quad (2)$$

Решение (1) ищем в виде  $H(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$ , где  $\alpha = \sqrt{i\omega\sigma\mu_0} = \frac{1+i}{\delta} = \frac{\sqrt{2}}{\delta}e^{i\pi/4}$ . Решая уравнение (1) при начальных условиях (2) получаем:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu_0}} \quad (3)$$

$$H_1 = \frac{H_0}{\operatorname{ch}(\alpha h) + \frac{1}{2}\alpha a \operatorname{sh}(\alpha h)} \quad (4)$$

Рассмотрим предельные случаи:

**1. При малых частотах  $\delta \gg h$  и тогда**

$$H_1 \approx \frac{H_0}{1 + i \frac{ah}{\delta}} \quad (5)$$

И тогда отношение модулей амплитуд:

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{ah}{\delta^2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}(ah\sigma\mu_0\omega)^2}} \quad (6)$$

А колебания  $H_1$  отстают по фазе от  $H_0$  на угол  $\psi$ :

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{ah}{\delta^2} \quad (7)$$

**2. При достаточно больших частотах  $\delta \ll h$  и отношение амплитуд выражается как:**

$$\frac{H_1}{H_0} = \frac{4}{\alpha a} e^{-\alpha h} = \frac{2\sqrt{2}\delta}{a} e^{-\frac{h}{\delta}} e^{-i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{h}{\delta}\right)} \quad (8)$$

Отсюда видно, что поле внутри цилиндра по модулю в  $\frac{2\sqrt{2}\delta}{a} e^{-\frac{h}{\delta}}$  раз меньше, чем снаружи и запаздывает по фазе на:

$$\psi = \frac{\pi}{4} + \frac{h}{\delta} = \frac{\pi}{4} + h\sqrt{\frac{\omega\sigma\mu_0}{2}} \quad (9)$$

## Влияние скин-эффекта на индуктивность катушки

На высоких частотах магнитное поле не проникает за экран, поэтому суммарный магнитный поток, пронизывающий катушку, уменьшается, и, соответственно, уменьшается и индуктивность. При низких частотах, когда толщина скин-слоя  $\delta$  больше толщины медного экрана  $h$ , магнитное поле проникает внутрь катушки, однако его амплитуда падает (по формуле (6)) и возникает разность фаз между колебаниями поля за экраном и перед ним (по формуле (7)). Из-за чего также изменяется магнитный поток, а следовательно – и индуктивность.

$$\Phi = \Phi_{out} + \Phi_{in} = H_0 S_0 + H_1 S_1 = LI \quad (10)$$

При этом  $L_{min} = \frac{\Phi_{out}}{I}$  и не зависит от частоты. Выразим поток магнитного поля сквозь внутреннюю область  $\Phi_{in}$  через поток сквозь внешнюю  $\Phi_{out}$  при произвольном переменном токе  $I$ :

$$\Phi_{in} = H_1 S_1 = \frac{H_1 S_1}{H_0 S_0} \Phi_{out} = \frac{\Phi_{out}}{n} \frac{S_1}{S_0} \quad (11)$$

где  $n$  - коэффициент, характеризующий ослабление поля за экраном:

$$n = \frac{H_0}{H_1} = \frac{|H_0|}{|H_1|} \frac{1}{\cos \psi} \quad (12)$$

Максимальная индуктивность катушки достигается при  $H_0 = H_1$ :

$$\Phi_{max} = H_0(S_0 + S_1) = L_{max} I_m, \text{ где } H_0 S_0 = L_{min} I_m \quad (13)$$

Тогда получаем:

$$\frac{S_1}{S_0} = \frac{L_{max} - L_{min}}{L_{min}} \quad (14)$$

$$L = L_{min} + \frac{L_{max} - L_{min}}{n} \quad (15)$$

$$\frac{L_{max} - L_{min}}{L - L_{min}} = (\pi a h \mu_0 \sigma \nu)^2 \quad (16)$$

## Экспериментальная установка

Переменное магнитное поле создается с помощью соленоида 1, намотанного на цилиндрический каркас 2, который подключается к генератору сигналов. Внутри каркаса расположен медный экран 3 в виде полого цилиндра.

Действующее значение переменного тока в цепи соленоида измеряется цифровым амперметром «А». Действующее значение переменного напряжения на измерительной катушке 4 измеряется цифровым вольтметром «V».

Для измерения сдвига фаз между током в цепи соленоида и напряжением на измерительной катушке используется двухканальный осциллограф. На один канал осциллографа подается напряжение с измерительной катушки, а на другой — напряжение с резистора R, которое пропорционально току в цепи соленоида. С помощью вольтметра V измеряется

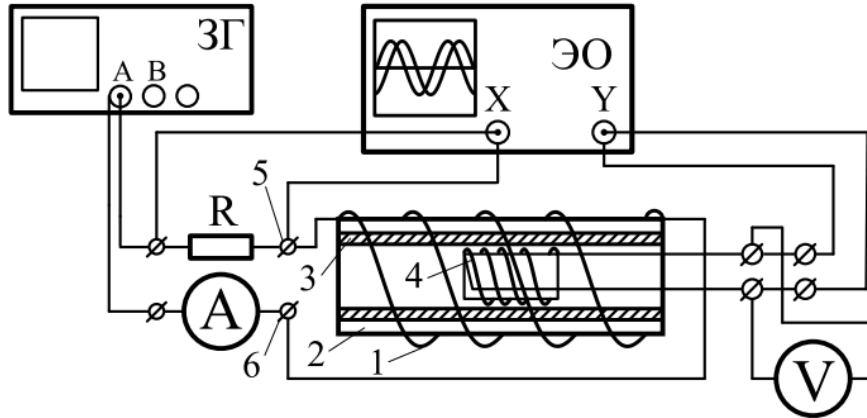


Рис. 2: Схема экспериментальной установки

действующее значение ЭДС индукции, которая возникает в измерительной катушке, находящейся в переменном магнитном поле  $H_1 e^{i\omega t}$ . Комплексная амплитуда ЭДС индукции в измерительной катушке равна:

$$\bar{U} = -SN \frac{dB_1(t)}{dt} = -i\omega \mu_0 SN H_1 e^{i\omega t} \quad (17)$$

Показания вольтметра:

$$U = \frac{SN\omega}{\sqrt{2}} \mu_0 |H_1| \Rightarrow |H_1| \propto \frac{U}{\nu} \quad (18)$$

При этом поле вне экрана  $|H_0|$  пропорционально току в цепи соленоида. Поэтому

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = const \cdot \frac{U}{\nu I} \quad (19)$$

# Экспериментальные данные и обработка результатов

## Измерения при низких частотах

$a$ , мм	$h$ , мм	$\nu_h$ , кГц	$\sigma$ , См/м
45	1.5	2.3	$5 \cdot 10^7$

Таблица 1: Параметры установки

В области низких частот (от  $\sim 0.01\nu_h$  до  $0.05\nu_h$ ) измерили силу тока в цепи и напряжение. Получили зависимость  $\xi = \frac{U}{I\nu}$  от частоты  $\nu$ . Согласно формуле (19) график в координатах  $1/\xi^2 = f(\nu^2)$  должен быть линейным, что можно наблюдать на 3.

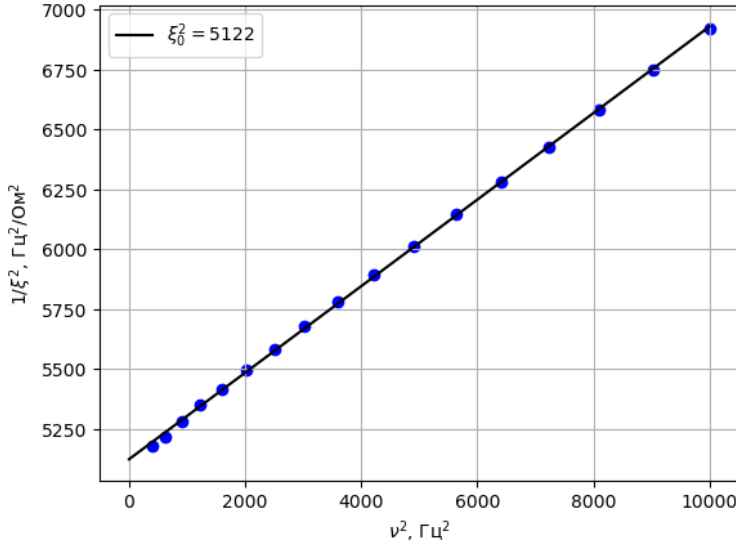


Рис. 3: График  $1/\xi^2 = f(\nu^2)$

$\nu$ , Гц	$I$ , мА	$U$ , мВ
20	$447.66 \pm 0.05$	$124.4 \pm 0.1$
25	$446.68 \pm 0.05$	$154.6 \pm 0.1$
30	$445.03 \pm 0.05$	$183.7 \pm 0.1$
35	$442.96 \pm 0.05$	$212.0 \pm 0.1$
40	$440.57 \pm 0.05$	$239.5 \pm 0.1$
45	$437.94 \pm 0.05$	$265.9 \pm 0.1$
50	$435.08 \pm 0.05$	$291.2 \pm 0.1$
55	$432.14 \pm 0.05$	$315.4 \pm 0.1$
60	$428.73 \pm 0.05$	$338.4 \pm 0.1$
65	$425.51 \pm 0.05$	$360.3 \pm 0.1$
70	$422.23 \pm 0.05$	$381.2 \pm 0.1$
75	$418.96 \pm 0.05$	$400.9 \pm 0.1$
80	$415.64 \pm 0.05$	$419.6 \pm 0.1$
85	$412.34 \pm 0.05$	$437.2 \pm 0.1$
90	$409.08 \pm 0.05$	$453.8 \pm 0.1$
95	$405.87 \pm 0.05$	$469.4 \pm 0.1$
100	$402.71 \pm 0.05$	$484.1 \pm 0.1$

Таблица 2: Показания вольтметра и амперметра при низких частотах от  $0.01\nu_h$  до  $0.05\nu_h$

Экстраполируя зависимость к точке  $\nu = 0$ , соответствующей  $|H_1|/|H_0| = 1$ , определяем  $\xi_0 = 71.69 \pm 0.03$  Гц/Ом. По формуле 6 определяем проводимость меди  $\sigma = (4.390 \pm 0.002) \cdot 10^7$  См/м.

## Измерения при средних и высоких частотах

Теперь повторим измерения, но для средних (от  $0.05\nu_h$  до  $0.1\nu_h$ ) и высоких (от  $0.5\nu_h$  до  $15\nu_h$ ) частот.

По графику  $tg\psi(\nu)$ , опираясь на формулы 3 и 7 определим проводимость материала экрана  $\sigma = (5 \pm 1.5) \cdot 10^7$  См/м.

По графику  $\psi - \pi/4 = f(\sqrt{\nu})$ , опираясь на формулу 9 определим проводимость материала экрана  $\sigma = (4.9 \pm 0.5) \cdot 10^7$  См/м.

$\nu$ , Гц	$I$ , мА	$U$ , мВ	$\psi$ , рад
100	$400.57 \pm 0.05$	$482.4 \pm 0.1$	$0.56 \pm 0.13$
120	$388.75 \pm 0.05$	$532.8 \pm 0.1$	$0.56 \pm 0.13$
140	$378.32 \pm 0.05$	$571.9 \pm 0.1$	$0.69 \pm 0.13$
160	$369.26 \pm 0.05$	$602.1 \pm 0.1$	$0.75 \pm 0.13$
180	$361.48 \pm 0.05$	$625.5 \pm 0.1$	$0.81 \pm 0.13$
200	$354.82 \pm 0.05$	$643.7 \pm 0.1$	$0.87 \pm 0.13$
300	$332.83 \pm 0.05$	$689.8 \pm 0.1$	$1.06 \pm 0.13$
400	$320.33 \pm 0.05$	$702.4 \pm 0.1$	$1.19 \pm 0.13$
500	$311.3 \pm 0.05$	$702.1 \pm 0.1$	$1.25 \pm 0.13$
600	$303.54 \pm 0.05$	$695.5 \pm 0.1$	$1.31 \pm 0.13$
700	$296.25 \pm 0.05$	$685.4 \pm 0.1$	$1.38 \pm 0.13$
800	$288.98 \pm 0.05$	$672.8 \pm 0.1$	$1.44 \pm 0.13$
900	$281.78 \pm 0.05$	$658.6 \pm 0.1$	$1.44 \pm 0.13$
1000	$274.45 \pm 0.05$	$643.2 \pm 0.1$	$1.50 \pm 0.13$

Таблица 3: Показания вольтметра и амперметра при средних частотах от  $0.05\nu_h$  до  $0.1\nu_h$

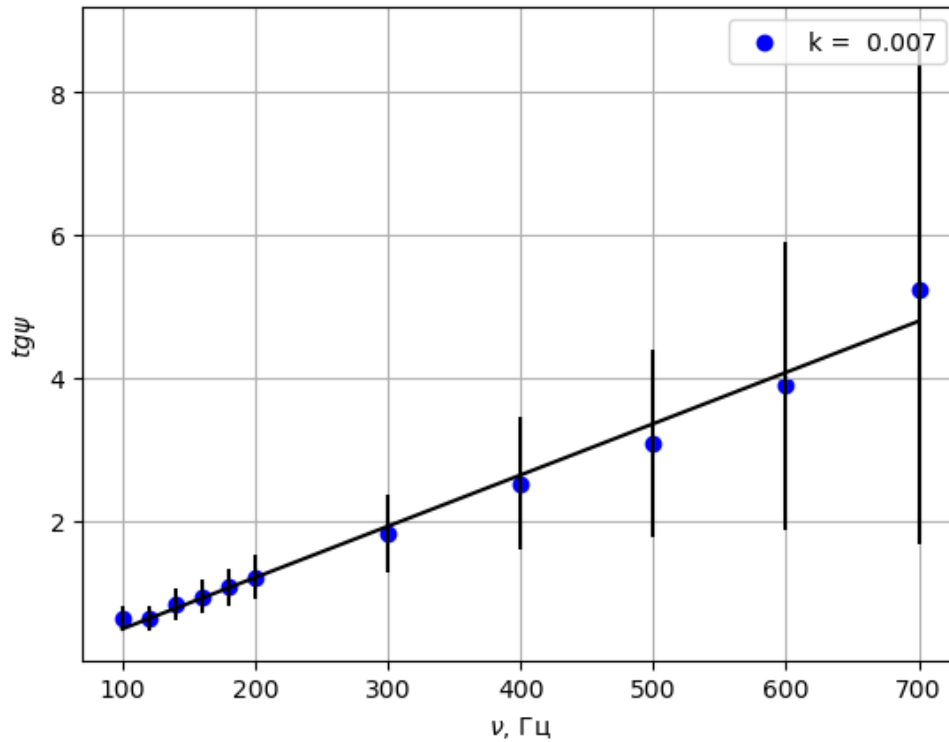


Рис. 4: График зависимости фазового сдвига от частоты

$\nu$ , Гц	$I$ , мА	$U$ , мВ	$\psi$ , рад
1000	$274.65 \pm 0.05$	$643.2 \pm 0.1$	$1.413 \pm 0.314$
1200	$259.69 \pm 0.05$	$610.9 \pm 0.1$	$1.57 \pm 0.314$
1440	$242.52 \pm 0.05$	$570.7 \pm 0.1$	$1.57 \pm 0.314$
1728	$222.73 \pm 0.05$	$523.7 \pm 0.1$	$1.57 \pm 0.314$
2070	$201.74 \pm 0.05$	$472.9 \pm 0.1$	$1.727 \pm 0.314$
2480	$179.95 \pm 0.05$	$419.3 \pm 0.1$	$1.727 \pm 0.314$
2980	$157.53 \pm 0.05$	$364.6 \pm 0.1$	$1.884 \pm 0.314$
3580	$136.33 \pm 0.05$	$311.8 \pm 0.1$	$1.884 \pm 0.314$
4300	$116.73 \pm 0.05$	$262.6 \pm 0.1$	$1.884 \pm 0.314$
5160	$99.14 \pm 0.05$	$218.0 \pm 0.1$	$2.041 \pm 0.314$
6190	$83.6 \pm 0.05$	$178.2 \pm 0.1$	$2.198 \pm 0.314$
7430	$70.04 \pm 0.05$	$143.2 \pm 0.1$	$2.355 \pm 0.314$
8920	$58.18 \pm 0.05$	$112.7 \pm 0.1$	$2.512 \pm 0.314$
10700	$47.9 \pm 0.05$	$87.1 \pm 0.1$	$2.826 \pm 0.314$
12840	$38.578 \pm 0.005$	$65.3 \pm 0.1$	$2.826 \pm 0.314$
15410	$30.735 \pm 0.005$	$48.6 \pm 0.1$	$3.297 \pm 0.314$
18490	$23.64 \pm 0.005$	$36.0 \pm 0.1$	$3.768 \pm 0.314$
22190	$17.046 \pm 0.005$	$27.2 \pm 0.1$	$4.239 \pm 0.314$
26630	$10.724 \pm 0.005$	$20.7 \pm 0.1$	$4.396 \pm 0.314$

Таблица 4: Показания вольтметра и амперметра при высоких частотах от  $0.5\nu_h$  до  $15\nu_h$

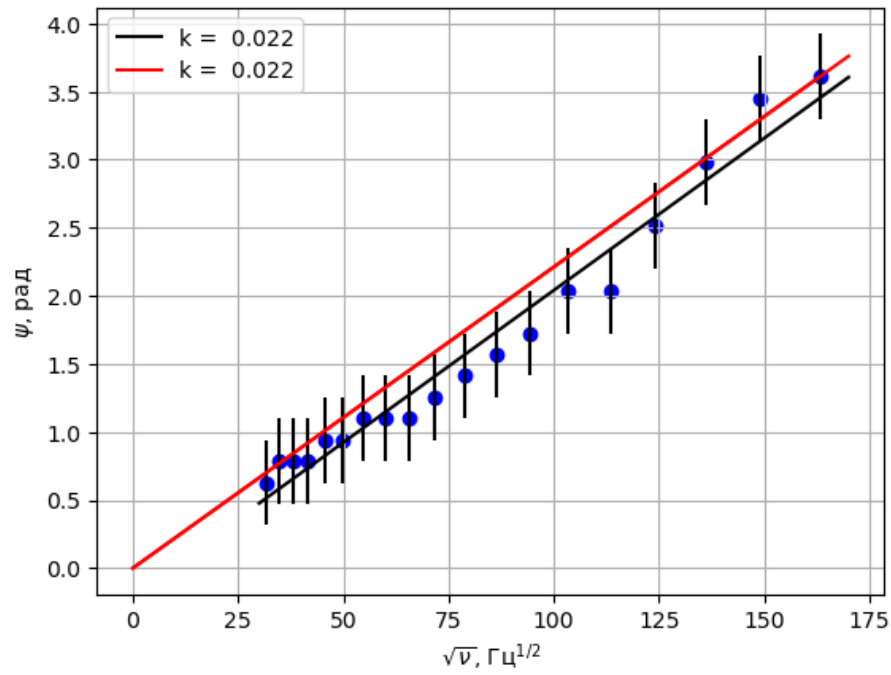


Рис. 5: График зависимости фазового сдвига от квадрата частоты

# Измерение индуктивности катушки

$\nu$ , Гц	$L$ , мГн
50	$9.88 \pm 0.05$
150	$7.25 \pm 0.05$
250	$5.36 \pm 0.05$
400	$4.08 \pm 0.05$
500	$3.69 \pm 0.05$
600	$3.46 \pm 0.05$
800	$3.21 \pm 0.05$
1500	$2.97 \pm 0.05$
4000	$2.89 \pm 0.05$
7500	$2.92 \pm 0.01$
12000	$3.05 \pm 0.01$
16200	$3.31 \pm 0.01$
20000	$3.71 \pm 0.01$

Таблица 5: Зависимость индуктивности катушки от частоты

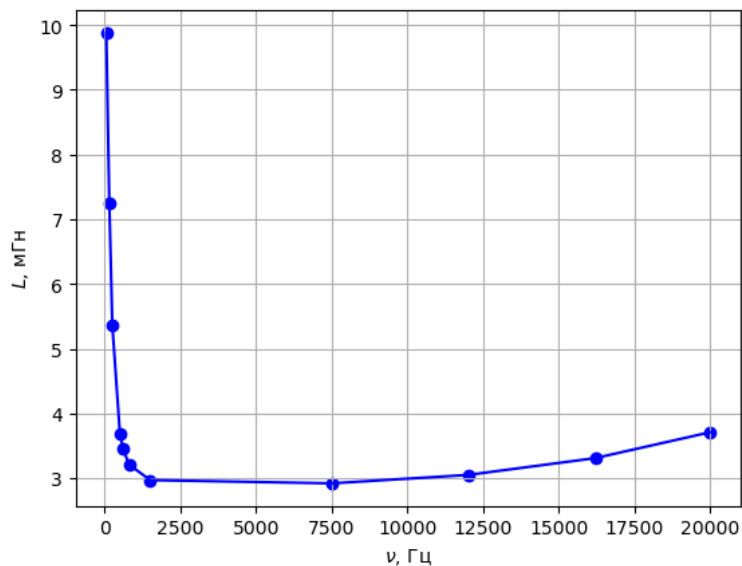


Рис. 6: График зависимости индуктивности от частоты

Теперь построим график зависимости  $\frac{L_{max}-L_{min}}{L-L_{min}}$  от  $\nu^2$ . Аппроксимируя полученный график к прямой, проходящей через начало координат, по формуле 16, нашли проводимость материала экрана  $\sigma = (4.4 \pm 0.2) \cdot 10^7$  См/м.

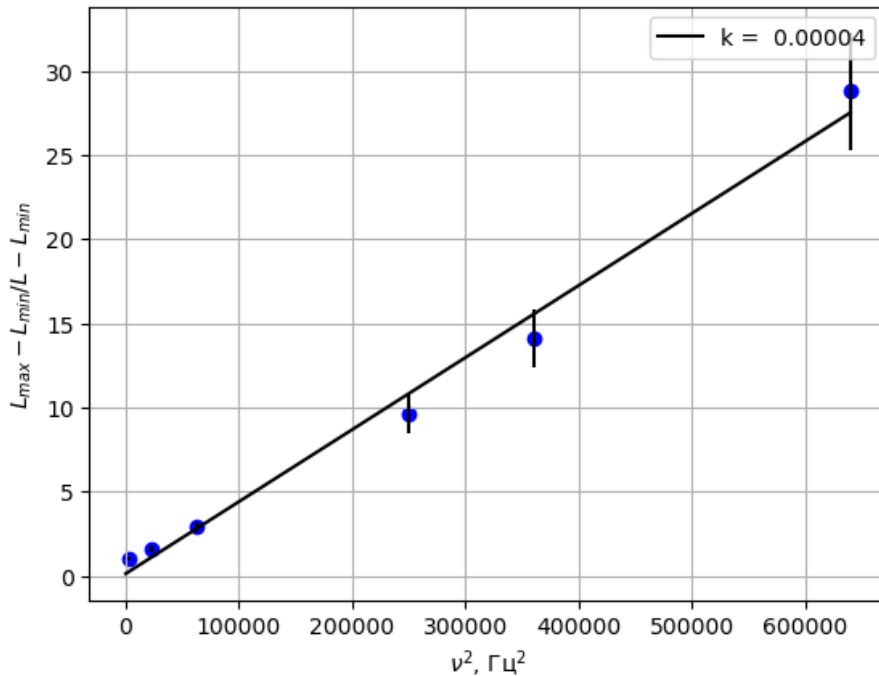


Рис. 7: График зависимости  $\frac{L_{max}-L_{min}}{L-L_{min}}$  от  $\nu^2$

# Результаты и выводы

1)Разными методами вычислили значение проводимости материала экрана. Сравнительная таблица представлена ниже.

При низких частотах	$\sigma, \text{См/м}\cdot 10^7$			$\xi_0, \text{Гц/Ом}$
	По фазовому сдвигу в средних частотах	По фазовому сдвигу в высоких частотах	По изменению индуктивности катушки	
$4.390 \pm 0.002$	$5 \pm 1.5$	$4.9 \pm 0.5$	$4.4 \pm 0.2$	$71.69 \pm 0.03$

Таблица 6: Таблица результатов вычислений

2)Сравнили теоретическую и экспериментальную зависимость  $|H_1|/|H_2|$  от частоты  $\nu$ . Результаты приведены на графике ниже.

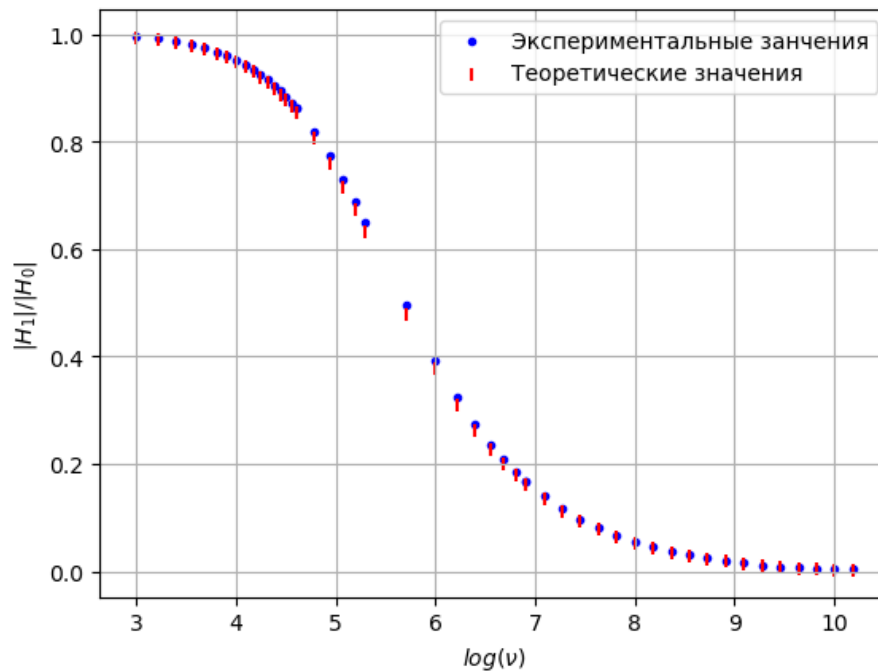


Рис. 8: График зависимости  $|H_1|/|H_2|$  от  $\log(\nu)$