

# Лабораторная работа 3.6.1

## Спектральный анализ электрических сигналов

Татаурова Юлия Романовна

4 октября 2024 г.

**Цель работы:** изучить спектры сигналов различной формы и влияние параметров сигнала на вид соответствующих спектров; проверить справедливость соотношений неопределённостей; познакомиться с работой спектральных фильтров на примере RC-цепочки.

**Оборудование:** генератор сигналов произвольной формы, цифровой осциллограф с функцией быстрого преобразования Фурье или цифровой USB-осциллограф, подключённый к персональному компьютеру.

### Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов и проверка соотношений неопределенности

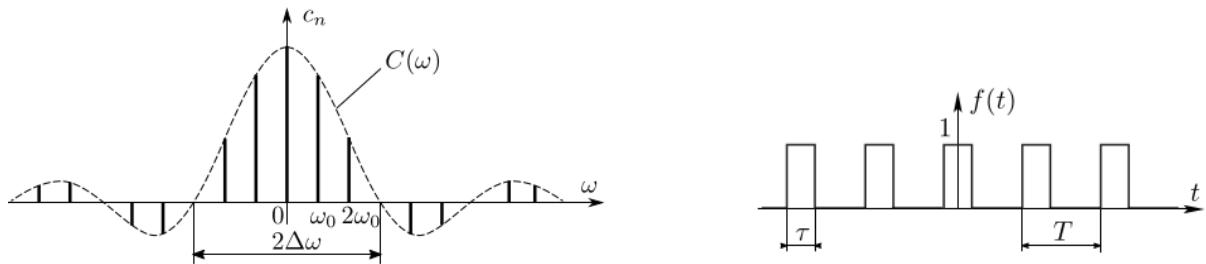


Рис. 1: Периодическая последовательность импульсов и её спектр

Найдем спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов длительности  $\tau$  и периодом следования импульсов  $T > \tau$ :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin(\pi n \tau / T)}{n \omega_0 \tau / 2} = \frac{\sin(\pi n \tau / T)}{\pi n} \quad (1)$$

Тогда представленные ниже фотографии легко объяснить. При увеличении частоты повторения синус растет, а с ним и амплитуда гармоник. При этом кол-во гармоник в полушарии уменьшается т.к частота повторения растет. Если же увеличивать длительность импульса, то амплитуда гармоник растет, а ширина  $\Delta\omega$  уменьшается.

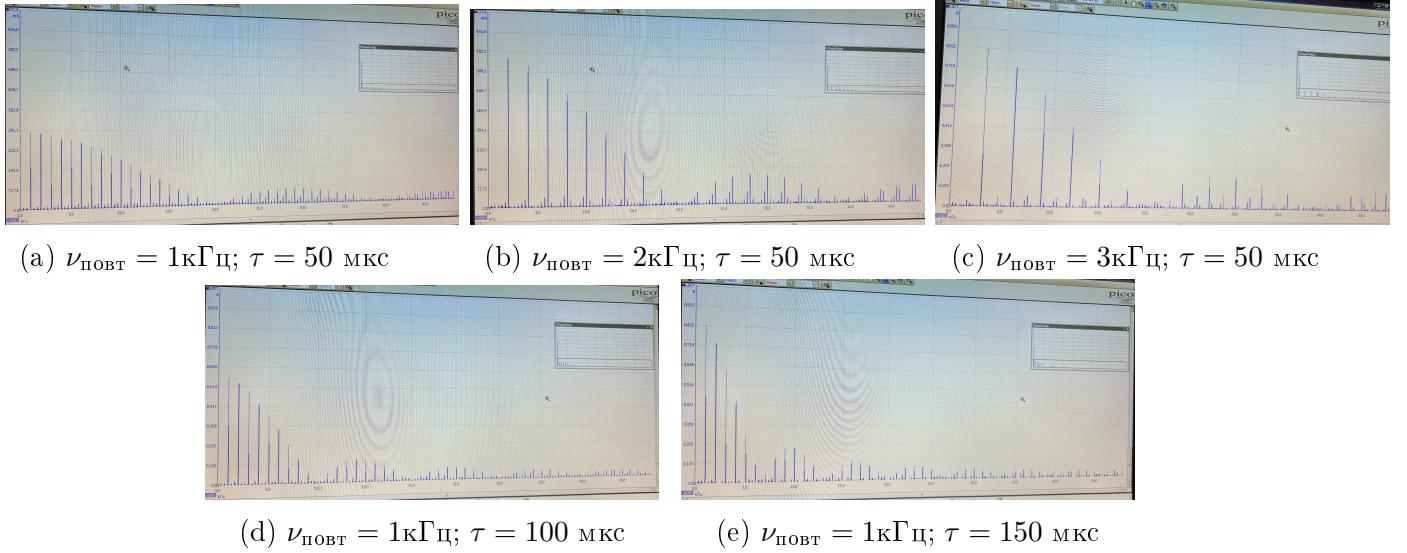


Рис. 2: Изменения спектров при разных параметрах сигнала

| $n$                      | 1     | 3    | 8     | 9     | 12    | 15    |
|--------------------------|-------|------|-------|-------|-------|-------|
| $\nu_n, \text{кГц}$      | 1     | 3    | 9     | 10    | 12    | 15    |
| $ a_n , \text{ усл.ед}$  | 282.6 | 274  | 196.9 | 179.8 | 145.6 | 84.83 |
| $ a_n/a_1  \text{ эксп}$ | 1     | 0.97 | 0.7   | 0.64  | 0.51  | 0.3   |
| $ a_n/a_1  \text{ теор}$ | 1     | 0.97 | 0.7   | 0.64  | 0.51  | 0.3   |

Таблица 1: Сравнение амплитуд и частот гармоник

Из формулы (1) видно, что полуширина  $\Delta\nu$  главного максимума определяется условием  $\sin(\omega\tau/2) = 0$  или  $\Delta\nu \cdot \tau = 1$ . Соотношение  $\Delta\nu \cdot \tau \approx 1$  имеет универсальный характер и остается справедливым по порядку величины для произвольного сигнала  $f(t)$ .

Теперь зафиксируем период повторения  $T$  прямоугольного сигнала ( $T = 1 \text{ мс}; \nu_{\text{повт}} = 1\text{кГц}$ ) и будем измерять полную ширину спектра  $\Delta\nu$  от центра спектра до гармоники с нулевой амплитудой, изменяя длительность импульса.

| $\tau, \text{ мкс}$      | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 | 140 | 160 | 180 | 200 |
|--------------------------|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $\Delta\nu, \text{ кГц}$ | 46 | 25 | 17 | 12 | 10  | 8   | 7   | 5   | 5   | 5   |

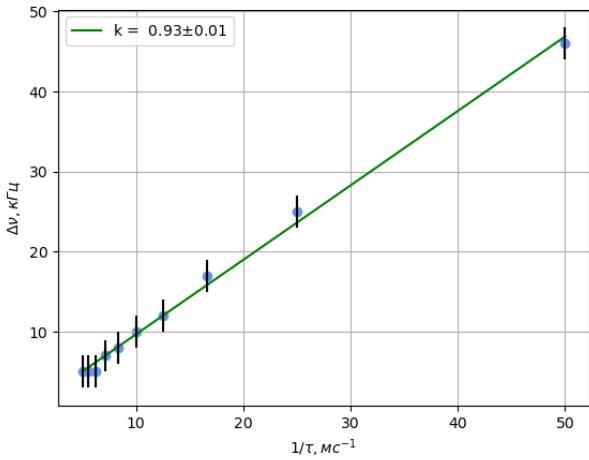
Таблица 2: Зависимость ширины спектра от длительности импульса

Теперь зафиксируем длительность прямоугольного сигнала  $\tau = 50 \text{ мкс}$  и будем менять период повторения  $T$ , измеряя  $\delta\nu$  - расстояния между соседними гармониками.

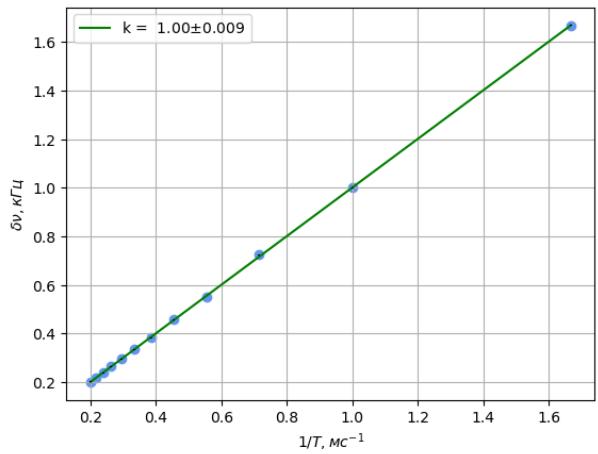
| $T, \text{ мс}$          | 0.6   | 1     | 1.4   | 1.8  | 2.2   | 2.6   | 3     | 3.4   | 3.8   | 4.2   | 4.6   | 5     |
|--------------------------|-------|-------|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\delta\nu, \text{ кГц}$ | 1.668 | 1.000 | 0.723 | 0.55 | 0.457 | 0.383 | 0.334 | 0.295 | 0.264 | 0.238 | 0.217 | 0.200 |

Таблица 3: Зависимость ширины спектра от длительности импульса

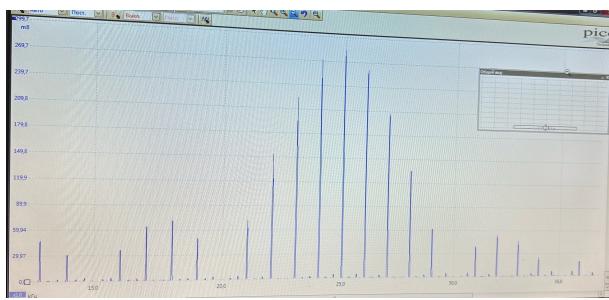
Из графиков ниже видно, что соотношение неопределенностей выполняется.



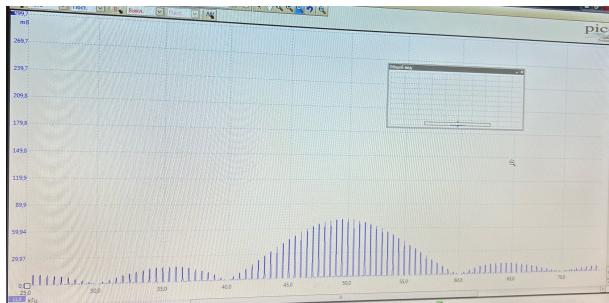
(a) График зависимости  $\Delta\nu(1/\tau)$



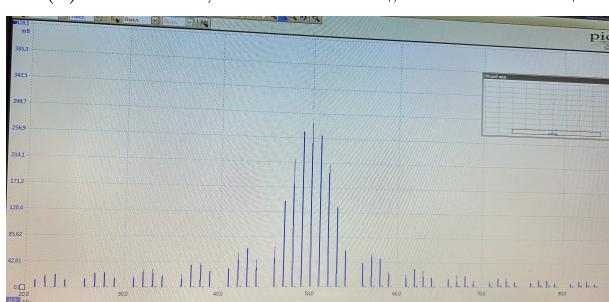
(b) График зависимости  $\delta\nu(1/T)$



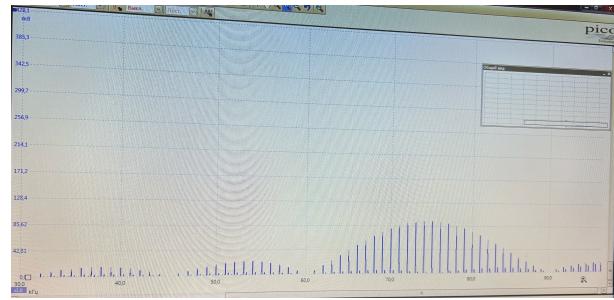
(a)  $\nu_0 = 25\text{ kHz}$ ;  $\Delta\nu = 9\text{ kHz}$ ;  $\delta\nu = 1\text{ kHz}$



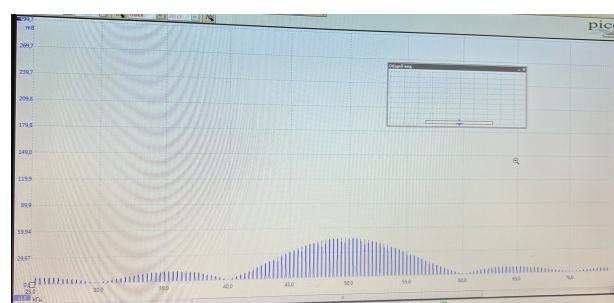
(c)  $T = 2\text{ ms}$ ;  $\Delta\nu = 10\text{ kHz}$ ;  $\delta\nu = 0.5\text{ kHz}$



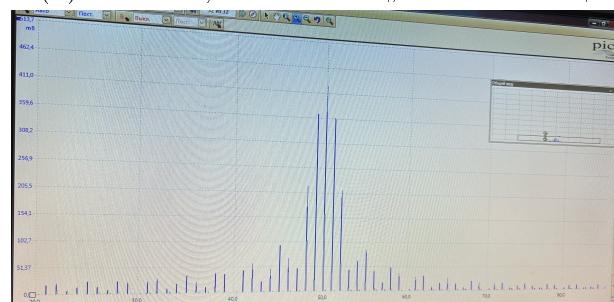
(e)  $N = 10$  шт.;  $\Delta\nu = 4\text{ kHz}$ ;  $\delta\nu = 1\text{ kHz}$



(b)  $\nu_0 = 75\text{ kHz}$ ;  $\Delta\nu = 5\text{ kHz}$ ;  $\delta\nu = 1\text{ kHz}$



(d)  $T = 3\text{ ms}$ ;  $\Delta\nu = 10\text{ kHz}$ ;  $\delta\nu = 0.33\text{ kHz}$



(f)  $N = 15$  шт.;  $\Delta\nu = 3\text{ kHz}$ ;  $\delta\nu = 1\text{ kHz}$

Рис. 4: Спектры синусоидального цуга при разных значениях параметров  $\nu_0, N, T$   
Значения по умолчанию:  $T = 1\text{ ms}$ ;  $\nu_0 = 50\text{ kHz}$ ;  $N = 5$  шт

## Наблюдение спектра периодической последовательности цугов

Обратное преобразование Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2)$$

Прямое преобразование Фурье:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad (3)$$

Теперь пусть  $F_0(\omega)$  - спектр функции  $f_0(t)$ . Найдем спектр  $F(\omega)$  функции  $f(t) = f_0(t) \cos(\omega_0 t)$ .

$$f(t) = \frac{1}{2} f_0(t) e^{i\omega_0 t} + \frac{1}{2} f_0(t) e^{-i\omega_0 t}$$

Тогда из прямого преобразования Фурье:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_0(t) e^{-i(\omega-\omega_0)t} dt = F_0(\omega - \omega_0) \Rightarrow F(\omega) = \frac{1}{2} F_0(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} F_0(\omega + \omega_0)$$

Т.е исходный спектр сдвигается по оси частот на  $\omega_0$  и домножается на 1/2. Найдем

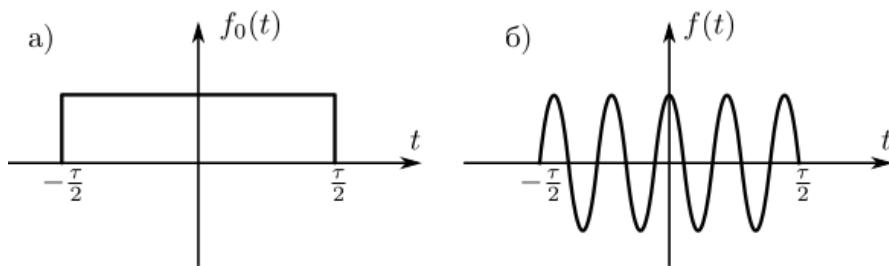


Рис. 5: Прямоугольный и синусоидальный импульсы

спектр обрывка синусоиды с частотой  $\omega_0$  и длительностью  $\tau$ . Цуг может быть представлен как:

$$f(t) = f_0(t) \cos(\omega_0 t) \quad (4)$$

Тогда с учетом предыдущих выкладок получаем:

$$F(\omega) = \frac{\tau}{2} \left[ \frac{\sin(\omega - \omega_0)\tau/2}{(\omega - \omega_0)\tau/2} + \frac{\sin(\omega + \omega_0)\tau/2}{(\omega + \omega_0)\tau/2} \right] \quad (5)$$

Убедимся в справедливости соотношени неопределенности и теоремы смешения.

| $\Delta\nu$ , кГц      | 9   | 5   | 14    | 4   | 3   |
|------------------------|-----|-----|-------|-----|-----|
| $\tau = N/\nu_0$ , мкс | 100 | 200 | 66    | 200 | 300 |
| $\Delta\nu \cdot \tau$ | 0.9 | 1   | 0.924 | 0.8 | 0.9 |

Таблица 4: Проверка соотношения неопределенности

## Исследование спектра амплитудно-модулированного сигнала

Рассмотрим просейшее амплитудно-модулированное колебание:

$$f(t) = a(t) \cos(\omega_0 t); \quad a(t) = a_0(1 + m \cos(\Omega t)) \quad (6)$$

$m$  - глубина модуляции, связанная с максимальной и минимальной амплитудой:

$$m = \frac{a_{\max} - a_{\min}}{a_{\max} + a_{\min}} \quad (7)$$

$$f(t) = a_0 \cos \omega_0 t + \frac{ma_0}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{ma_0}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t$$

Как видим, посчитанное значение глубины модуляции почти совпадает с заданным значением в 50%.

Теперь меняя на генераторе глубину модуляции, мы будем измерять отношение амплитуд боковой и основной спектральных линий.

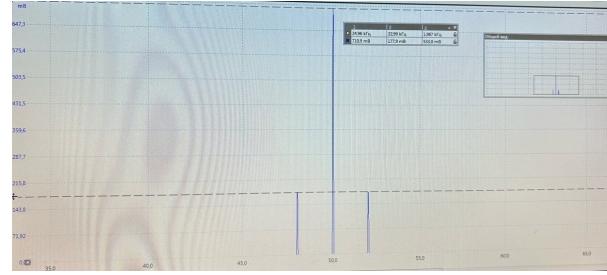


Рис. 6: Амплитудная модуляция  
 $\nu_0 = 50$  кГц;  $\nu_{\text{мод}} = 2$  кГц;  $m = 0.5$ ;  $m_{\text{форм}} = 0.51$

Видим, что коэффициент прямой  $1/2$ , что совпадает с теорией:  $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}} = \frac{ma_0/2}{a_0} = \frac{1}{2}m$

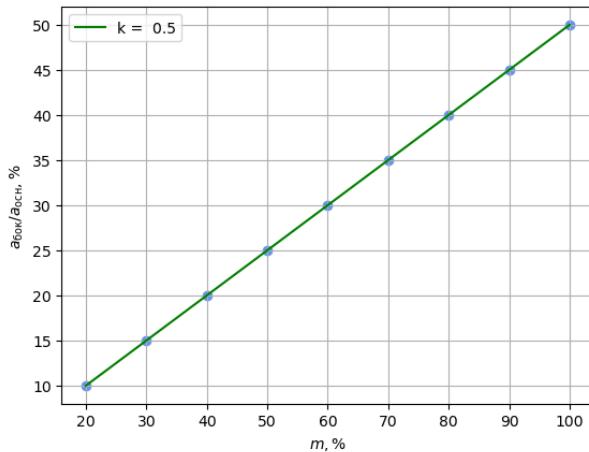


Рис. 7: График зависимости  $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$  от  $m$

## Изучение фильтрации сигналов

Параметры RC-цепочки:  $R = 3 \text{ кОм}$ ;  $C = 1000 \text{ пФ} \Rightarrow \tau_{\text{RC}} = RC = 3 \text{ мкс.}$

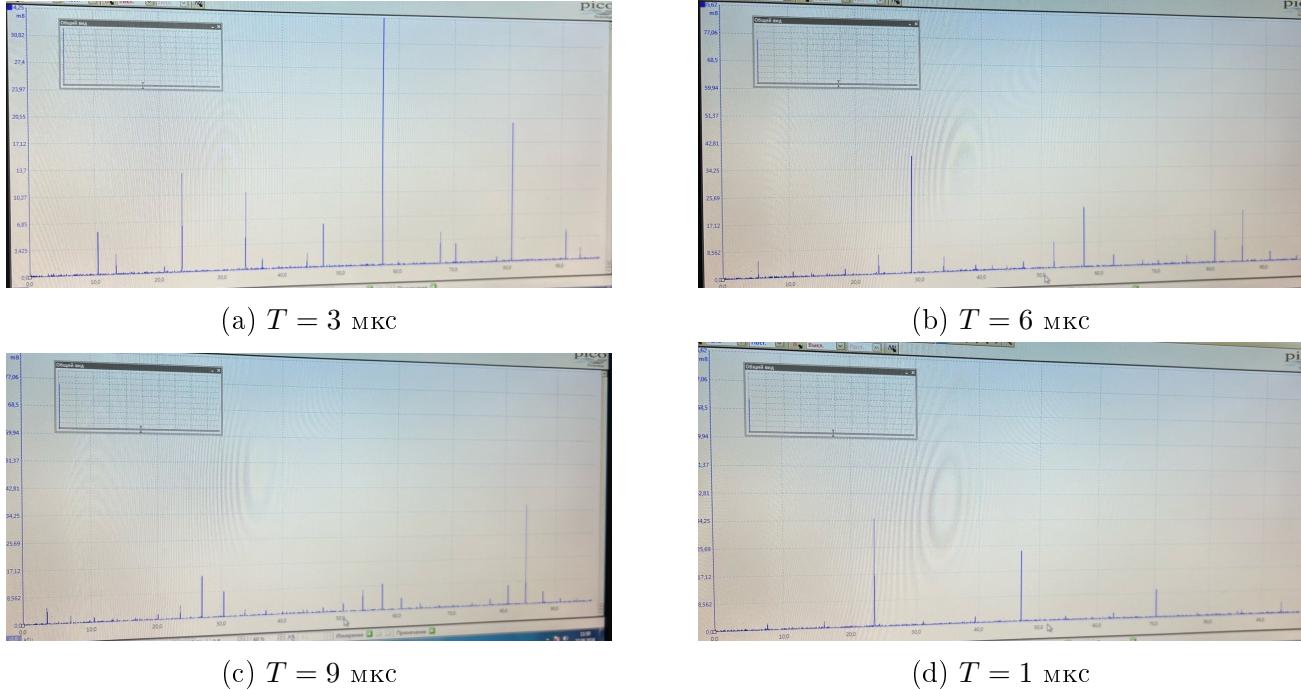
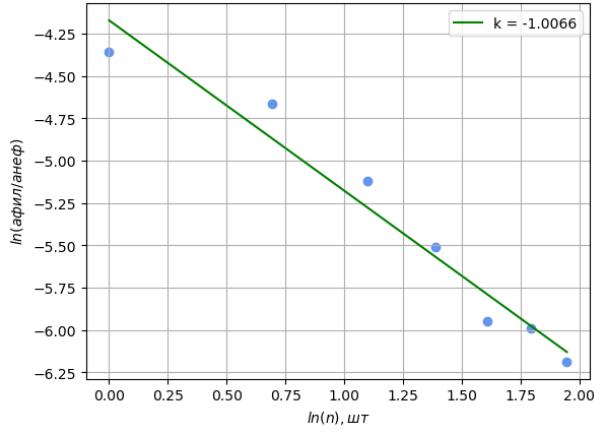
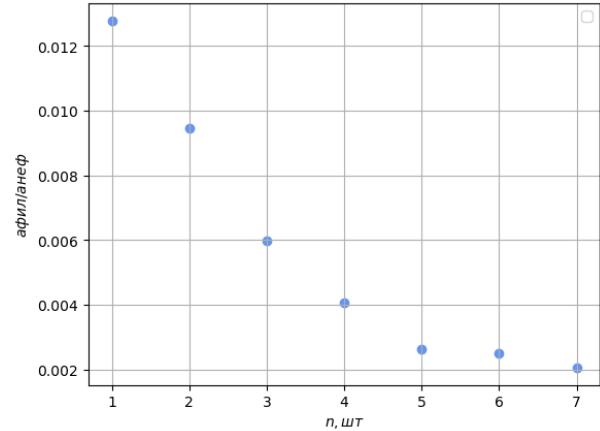


Рис. 8: Спектры "фильтрованного" сигнала  $RC$  – при различных значениях  $T$

| $n$                           | 1      | 2      | 3     | 4     | 5      | 6      | 7      |
|-------------------------------|--------|--------|-------|-------|--------|--------|--------|
| $a_n^\Phi / a_n^{\text{исх}}$ | 0.0128 | 0.0094 | 0.006 | 0.004 | 0.0026 | 0.0025 | 0.0021 |

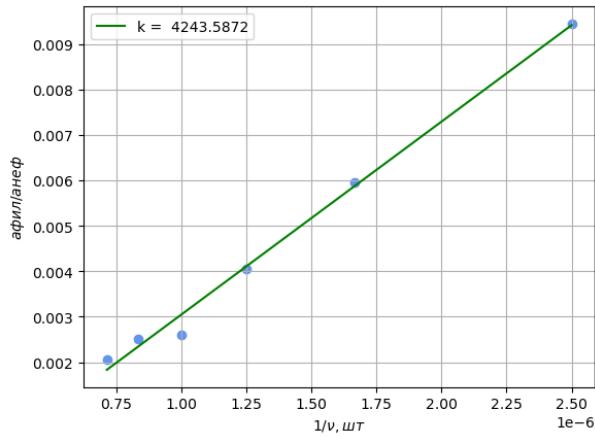


(a) Зависимость  $K(n)$  в логарифмических координатах

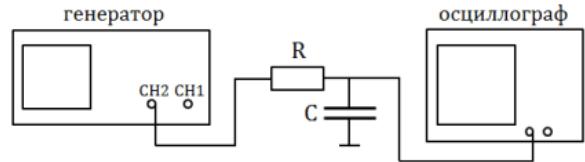


(b) Схема фильтрации сигналов

Из логарифмического графика видим, что  $K$  обратно пропорционален  $n$ . Действительно  $K = \frac{1}{\tau_{\text{RC}}} \int_0^t f(t)dt = \frac{t}{\tau_{\text{RC}}}$  т.е обратно пропорционально частоте  $\nu = n\nu_0$ .



(a) Зависимость  $K(1/n)$



(b) Схема фильтрации сигналов

По графику найдем экспериментально  $\tau_{RC} = \frac{1}{2\pi\nu_0 k} \approx 37 \pm 26$  мкс, что почти в 10 раз больше теоретического значения в 3мкс.

## Результаты и выводы

- 1) Исследуя спектр прямоугольных импульсов, сравнили теоретическое и экспериментальные значения соотношения амплитуд и проверили формулу неопределенности. Результаты хорошо совпали с теорией.
- 2) Наблюдали спектр периодической последовательности щугов и убедились в теореме смещения. Центр спектра сместился на  $\nu_0$ .
- 3) Исследуя спектр амплитудно-модулированного сигнала, убедились в справедливости изложенной теории (отношение боковой и основной гармоники равно половине глубины модуляции)
- 4) Изучали фильтрацию сигналов на  $RC$ -цепочке. Проверили экспериментально, что коэффициент фильтрации  $K$  обратно пропорционален номеру гармоники. Однако экспериментально полученное из графиков значение  $\tau_{RC}$  значительно отличается от теор.значения. Даже с учетом погрешности в 70%.