# Конденсатор на больших частотах

Татаурова Юлия Романовна

25 декабря 2024 г.

Рассмотрим поведение конденсатора при постепенном увеличении частоты. Пусть сначала к обкладкам конденсатора приложено переменное напряжение низкой частоты. Когда напряжение меняется, с нижней обкладки положительный заряд сменяется отрицательным. Заряд медленно "плещется"туда-сюда и поле вместе с ним. В каждый момент времени электрическое поле однородно (без учета краевых эффектов). Электрическое поле в этом случае можно записать в виде

$$E = E_0 e^{i\omega t}, \tag{1}$$

где $E_0$ постоянно.

Однако, при изменениии электрического поля, согласно уравнениям Максвелла, возникает магнитное поле.

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \left( \mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S} \tag{2}$$

В силу симметрии магниное поле будет направлено по концентрическим окружнжостям вокруг электрического поля. Тогда при условии отсутсвия токов проводимости ($\mathbf{j} = 0$) и для простоты вычислений $\varepsilon = \mu = 1$

$$B \cdot 2\pi r = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \cdot \pi r^2$$

Получаем выражение магнитной индукции в зависимости от радиуса $r$

$$B = \frac{i\omega r}{2c} E_0 e^{i\omega t} \tag{3}$$

Видим, что магнитное поле тоже колеблется, ес SOMETHING!!!! page 202

Теперь будем увеличивать частоту и посмотрим, что происходит. Т.к магнитное поле тоже изменяется со временем, то электрическое поле уже не может считаться однородным. Согласно уравнениям Максвелла должна возникнуть вихревое электрическое поле, которое будет изменятся в зависимости от $r$:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S} \tag{4}$$

Пусть электрическое поле при низких частотах $\mathbf{E_1} = \mathbf{E_0} e^{i\omega t}$ и $\mathbf{E_2}$ - поправка из-за изменения магнитного поля. Тогда суммарное поле:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E_1} + \mathbf{E_2}$$

В центре конденсатора при $r = 0$ будем считать $E_2 = 0$.

Чтобы найти $E_2$ используем выражение 4.

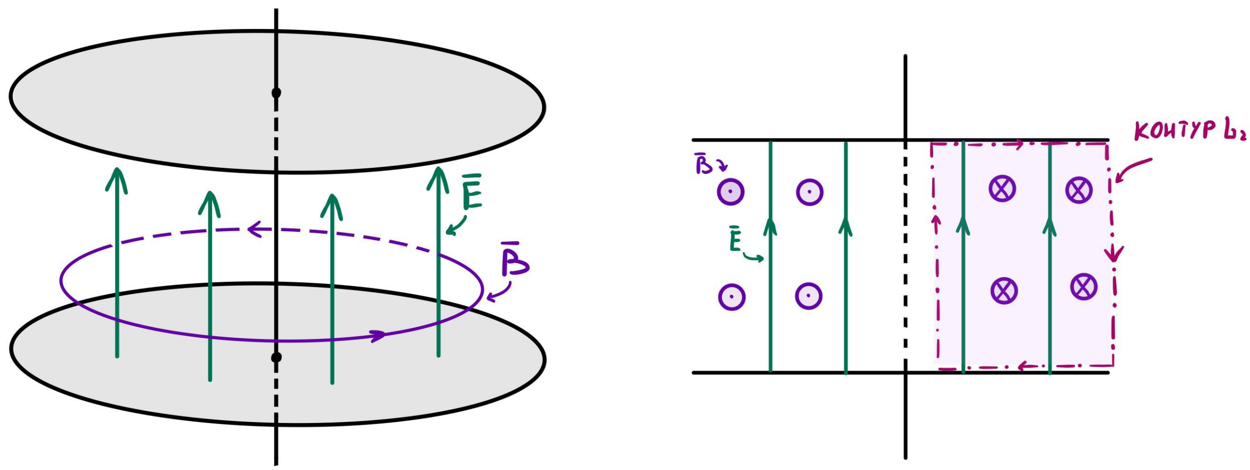


Рис. 1: Электрическое и магнитное поля между обкладками конденсатора

Цикруляцию электрического поля берем по контуру $L_2$, изображенному на 1. Получаем

$$-E_2(r) \cdot h = -\frac{1}{c}\int_0^r \frac{\partial B}{\partial t} \cdot h dr,$$

где $h$ - расстояние между обкладками конденсатора.

$$\mathbf{E_2} = -\frac{\omega^2 r^2}{4c^2}\mathbf{E_0}e^{i\omega t} \tag{5}$$

$$\mathbf{E} = \left(1 - \frac{1}{4}\frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)\mathbf{E_0}e^{i\omega t} \tag{6}$$

Может показаться, что на этом наши рассуждения подошли к концу, однако выражение для поля $B$ 3 верно только в первом приближении. Перепишем его как

$$B_1 = \frac{1}{2}\frac{i\omega r}{c}E_0 e^{i\omega t}$$

Т.к это поля появилось из-за изменения $\mathbf{E_1}$, а правильное магнитное поле будет создаваться от электрического поля $\mathbf{E_1} + \mathbf{E_2}$. Аналогично тому, как мы поступали с электрическим полем, представим магнитное в виде $\mathbf{B} = \mathbf{B_1} + \mathbf{B_2}$, где $\mathbf{B_2}$ - добавочное поле, создаваемое полем $\mathbf{E_2}$. Снова применим теорему о цикруляции магниной индукции 2:

$$B_2 \cdot 2\pi r = \frac{1}{c}\int_0^r \frac{\partial E_2(r)}{\partial t} \cdot 2\pi r dr$$

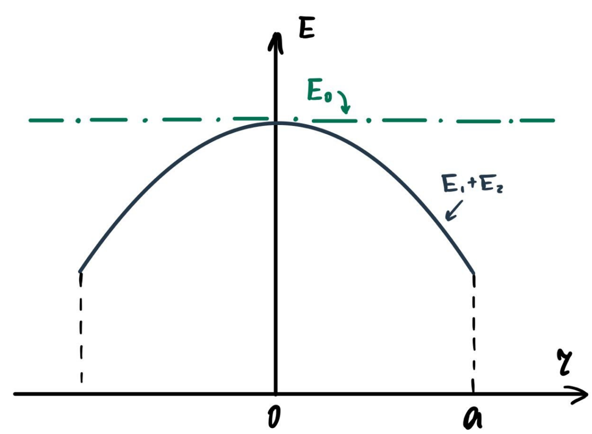


Рис. 2: Электрическое поле между обкладками конденсатора на высоких частотах

Получаем выражение для $B_2$:

$$B_2(r) = -\frac{1}{16}\frac{i\omega^3 r^3}{c^3}E_0 e^{i\omega t} \tag{7}$$

Но раз магнитное поле снова не такое, как мы изначально думали, то надо посчитать еще одну поправку к $\mathbf{E}$... Однако новое электрическое поле вызовет новую поправку к магнитному полю, которое в свою очередь приведет к дальнейшей поправке к электрическому полю и т.д и т.д.

Таким образом, выражение для напряженности электрического поля можно записать как:

$$E = E_0 e^{i\omega t}\left(1 - \frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{\omega r}{2c}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{\omega r}{2c}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{\omega r}{2c}\right)^6 + \ldots\right) \tag{8}$$

И выражение для индукции магнитного поля:

$$B = E_0 e^{i\omega t}\left(\frac{1}{1!}\left(\frac{\omega r}{2c}\right)^1 - \frac{1}{1!2!}\left(\frac{\omega r}{2c}\right)^3 + \frac{1}{2!3!}\left(\frac{\omega r}{2c}\right)^5 - \frac{1}{3!4!}\left(\frac{\omega r}{2c}\right)^7 + \ldots\right) \tag{9}$$

Окончательно получается, что электрическое поле между обкладками конденсатора на любой частоте дается произведением $E_0 e^{i\omega t}$ на бесконечный ряд, содержащий переменную $\omega r/c$. Аналогично и для поля $B$.

Обозначим $x = \frac{\omega r}{c}$. Тогда выражения для $E$ и $B$ примут следующий вид:

$$E = E_0 e^{i\omega t}\left(1 - \frac{x^2}{(1!)^2} + \frac{x^4}{(2!)^2} - \frac{x^6}{(3!)^2} + \ldots\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \tag{10}$$

$$B = E_0 e^{i\omega t}\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{1!2!} + \frac{x^5}{2!3!} + \ldots\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) \tag{11}$$

Последнее равентсво верно для $x \ll 1$. Эти функции называют функциями Бесселя 1-го рода 0-го $J_0(x)$ и 1-го $J_1(x)$ порядка соответсвтенно.

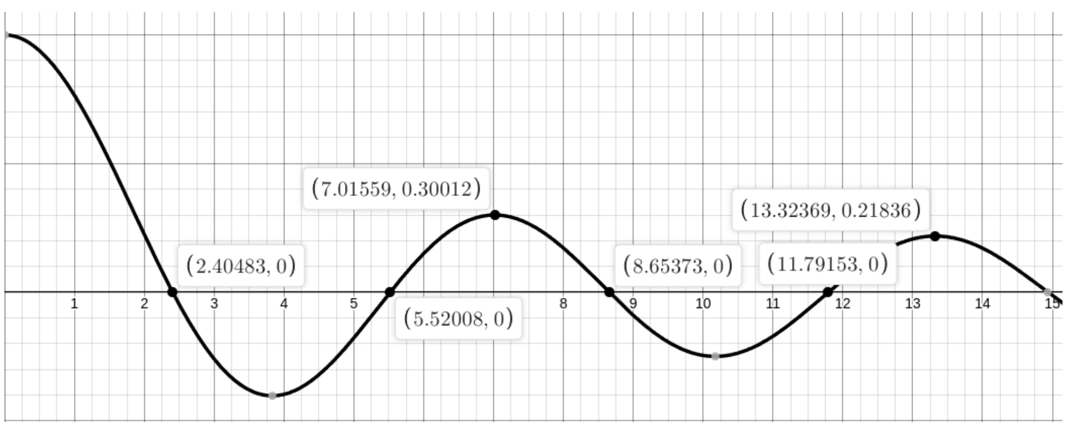


Рис. 3: Функция Бесселя $J_0(x)$

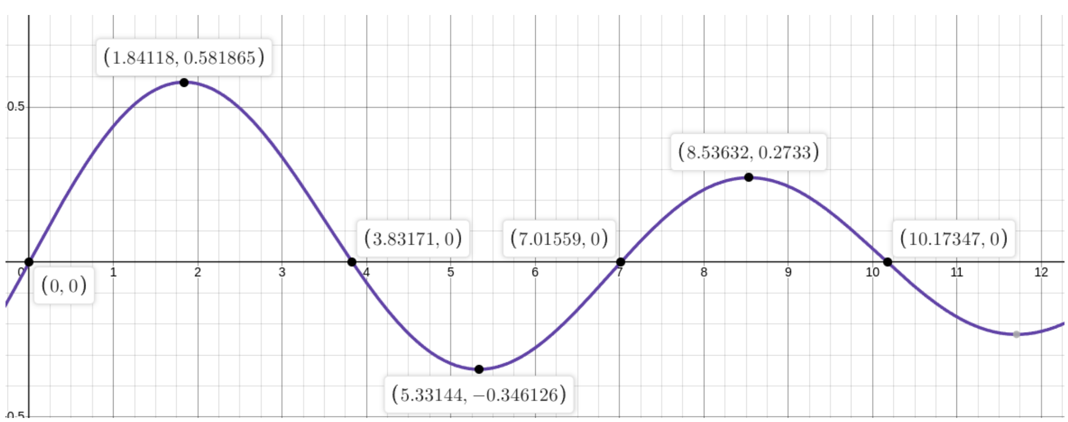


Рис. 4: Функция Бесселя $J_1(x)$

Из графиков видно, что поля в центре конденсатора и у его края могут быть направлены в противоположные стороны. И вообще по мере удаления от центра конденсатор может много раз менять направление своих полей. При высоких частотах конденсатор уже не напоминает идеальной емкости. Конденсатор похож, с одной стороны, на емкость, а с другой - на индуктивность. От электрического поля возникают заряды на поверхности обкладок, а от магнитного - ЭДС.