

Лабораторная работа 3.1.3

Измерение магнитного поля Земли

Татаурова Юлия Романовна

29 сентября 2024 г.

Цель работы: исследовать свойства постоянных неодимовых магнитов; измерить с их помощью горизонтальную и вертикальную составляющие индукции магнитного поля Земли и магнитное наклонение.

Оборудование: неодимовые магниты; тонкая нить для изготовления крутильного маятника; медная проволока; электронные весы; секундомер; измеритель магнитной индукции; штангенциркуль; брусок, линейка и штатив из немагнитных материалов; набор гирь и разновесов.

Теоретические сведения

Магнитное поле точечного диполя определяется как:

$$\vec{B}_{\text{дип}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right) \quad (1)$$

где m - магнитный момент.

Во внешнем магнитном поле с индукцией \vec{B} на точечный магнитный диполь \vec{m} действует механический момент сил:

$$\vec{M} = [\vec{m} \times \vec{B}] \quad (2)$$

Потенциальная работа при этом:

$$W = -(\vec{m} \cdot \vec{B}) \quad (3)$$

В неоднородном внешнем поле кроме момента сил на диполь действует еще сила:

$$\vec{F} = -\nabla W = (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B} \quad (4)$$

Тогда по этим формулам рассчитаем силу взаимодействия магнитов с моменами \vec{m}_1 и \vec{m}_2 направленные вдоль соединяющей их прямой \vec{r} :

$$F_{12} = m_1 \frac{\partial B_2}{\partial r} = m_1 \frac{\partial(2m_2/r^3)}{\partial r} = -\frac{6m_1 m_2}{r^4} \quad (5)$$

Если $m_{12} \perp \vec{r}$:

$$F_{12} = \frac{3m_1 m_2}{r^4} \quad (6)$$

Еще одной характеристикой материала магнита является намагниченность \mathfrak{M} : $\mathfrak{m} = \mathfrak{M}V$, где $V = 4\pi R^3/3$. $B_r = \mu_0 \mathfrak{M}$ - остаточная индукция материала. Если B_p - индукция на полюсах, тогда:

$$B_p = B_0 = \frac{2}{3} B_r \quad (7)$$

Экспериментальные данные и установка

Для проведения эксперимента были использованы магнитомягкие материалы с однородной намагниченностью. Тогда поле магнита на расстоянии $R \leq r$

$$\bar{B}_0 = \frac{\mu_0 \bar{m}}{2\pi R^3} \quad (8)$$

Определение магнитного момента магнитных шариков

I Метод: Магнитный момент \bar{m} двух одинаковых шариков рассчитаем увеличивая расстояние между друг другом. При максимальном расстоянии сила их магнитного притяжения равна силе тяжести. Тогда:

$$m = \sqrt{\frac{4\pi m_{\text{ш}} g r_{\text{max}}^4}{\mu_0}} \quad (9)$$

II Метод: Второй метод измерения магнитного момента шариков заключается в определении силы из сцепления. Максимальную силу сцепления определим по весу магнитной цепочки, которую способен удержать верхний шарик. Т.к сила притяжения убывает как $F \propto 1/r^4$, то для расчета учтем силу взаимодействия верхнего с 3 ближайшими соседями. Сила сцепления 2х шаров и минимальный вес цепочки соответственно:

$$F_0 = \frac{\mu_0 3m^2}{4\pi 8R^4}; \quad F = m_{\text{цеп}} g = F_0 \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots \right) \approx 1.08 F_0 \quad (10)$$

Величина	$m_{\text{ш}}, \text{Г}$	$d_{\text{ш}}, \text{ММ}$	$r_{\text{max}}, \text{ММ}$	$m_{\text{цеп}}, \text{Г}$
Значение	0.837 ± 0.001	5.37 ± 0.07	18.9 ± 2.1	322 ± 50
Отн.погрешность	0.1%	1.23%	11.1%	15.5%

Таблица 1: Параметры магнитного шарика

Т.к было сложно определить момент отрыва первого магнита от остальных во II методе и отрыв происходил при $\pm 50\text{г}$, то за погрешность массы было взято это число. Видим, что результирующая погрешность обоих методах достаточно большая, однако во втором методе она почти в 4 раза меньше, поэтому далее будем использовать $m = m_2$.

Метод	$m, \text{Дж/Тл}$	$\varepsilon, \%$
I	$(4.25 \pm 0.9) \cdot 10^{-2}$	22.25
II	$(6.70 \pm 0.5) \cdot 10^{-2}$	8.1

Таблица 2: Параметры магнитного шарика

Измерение поля у полюсов: Теперь зная магнитный момент рассчитаем индукцию поля и сравним результаты с значением, измеренным магнитометром и справочными данными.

Величина	$B_r, \text{Тл (эксп)}$	$B_r, \text{Тл (теор)}$	$B_0 = B_p, \text{Тл}$	$B_p, \text{Тл (измер)}$
Значение	1.03 ± 0.09	1.2 – 1.4	0.68 ± 0.06	0.27 ± 0.03
Отн.погр.	8.9%	-	8.9%	10.5%

Таблица 3: Сравнение магных индукций

Измерение горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли

Магнитное поле Земли будем измерять по периоду крутильных колебаний магнитной стрелки вокруг вертикальной оси. Если не учитывать упругость нитки, то возвращающий момент сил такого маятника и соответственно уравнение колебаний выглядит как:

$$M = -\mathfrak{m}_n B_{\parallel} \sin \theta; \quad J_n \ddot{\theta} + \mathfrak{m}_n B_{\parallel} \theta = 0 \quad (11)$$

$$J_n \approx \frac{1}{12} m_n l_n^2 = \frac{1}{3} n^3 m R^2 \quad (12)$$

Тогда период малых колебаний:

$$T_n = 2\pi \sqrt{\frac{J_n}{\mathfrak{m}_n B_{\parallel}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m R^2}{3 \mathfrak{m} B_{\parallel}}} \cdot n \quad (13)$$

$n_{\text{шт}}$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$T, \text{ с}$	0.86	1.14	1.45	1.69	1.892	2.25	2.52	2.76	3.06	3.82
$\sigma, \text{ с}$	0.01	0.01	0.03	0.03	0.02	0.05	0.02	0.04	0.05	0.76
$\varepsilon, \%$	1.31	0.88	2.26	1.67	1.29	2.38	0.79	1.36	1.58	19.92

Таблица 4: Зависимость периода колебаний от кол-ва магнитов

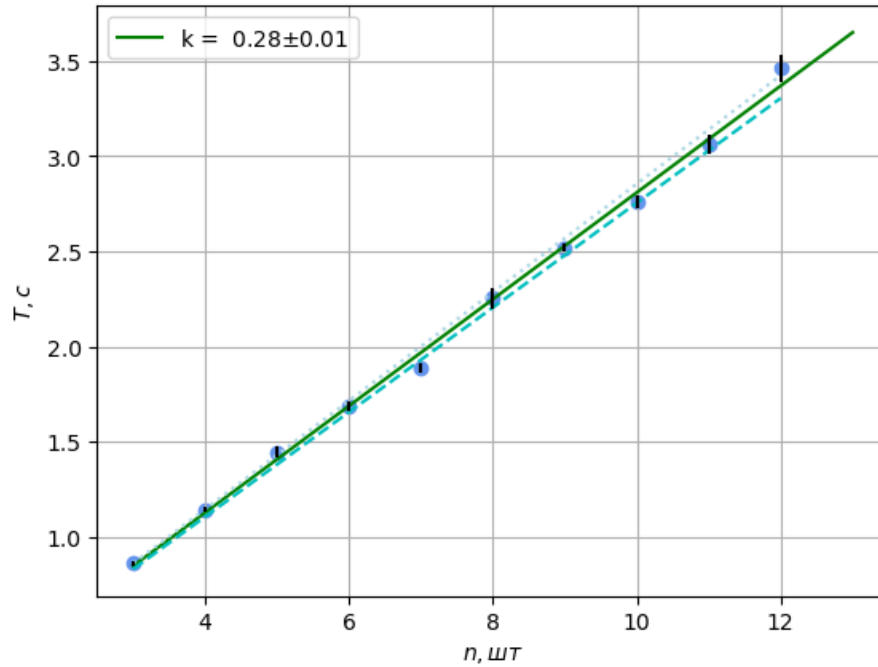


Рис. 1: График зависимости периода колебаний от кол-ва магнитов $T(n)$

Из формулы 13 и графика находим $B_{\parallel} = (1.5 \pm 0.1) \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$ ($\varepsilon \approx 7.5\%$)

Измерение вертикальной составляющей индукции магнитного поля Земли

Для измерения B_{\perp} будем уравнивать момент, образованный вертикальной составляющей магнитного поля Земли, моментом сил грузов, подвешенных к магнитной стрелке. Тогда условие равновесия:

$$m_{\text{гр}} g r_{\text{гр}} = n m B_{\perp} \quad (14)$$

$n_{\text{ш}}$	10	8	6	4
$m_{\text{гр}}, \text{ Г}$	0.174	0.200	0.200	0.200
$r_{\text{гр}}, \text{ см}$	2.14	1.61	1.07	0.05
$M, \text{ Н} \cdot \text{ м} \cdot 10^{-5}$	3.74 ± 0.05	3.22 ± 0.04	2.15 ± 0.03	1.07 ± 0.01

Таблица 5: Зависимость момента сил тяжести груза от числа магнитов

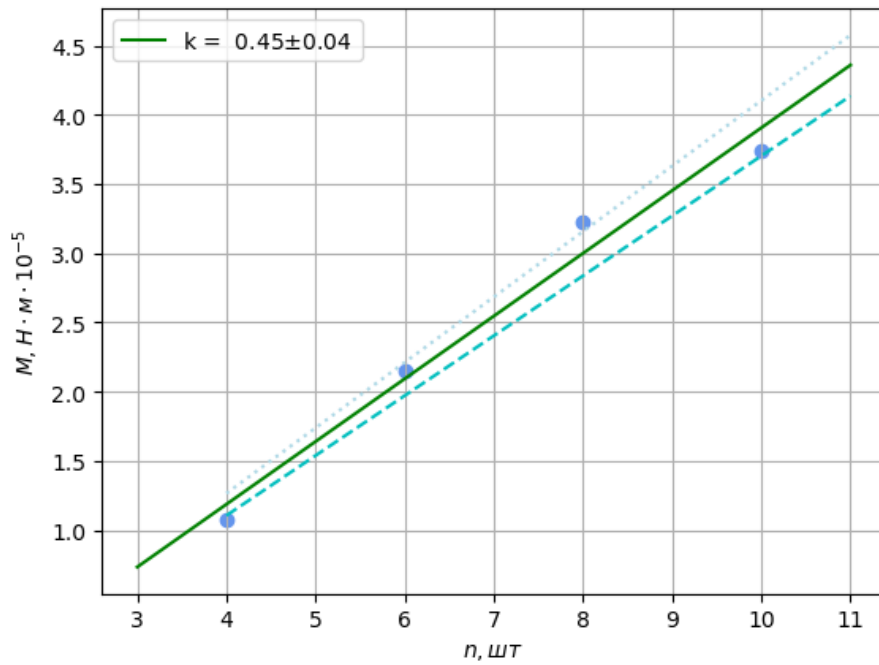


Рис. 2: Зависимость момента сил тяжести груза от числа магнитов $M_{\text{гр}}(n)$

Из формулы (14) и гарфика получаем $B_{\perp} = (6.7 \pm 0.8) \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$ ($\varepsilon \approx 12\%$).

Теперь найдем магнитное наклонение β : $\text{tg } \beta = B_{\perp} / B_{\parallel} = 4.44 \pm 0.63$ ($\varepsilon \approx 14\%$) \Rightarrow

$$\beta = 77.3^{\circ} \pm 1.7^{\circ}; B = \sqrt{B_{\parallel}^2 + B_{\perp}^2} = (6.9 \pm 0.9) \cdot 10^{-5} \text{ Тл} (\varepsilon \approx 11.8\%)$$

Оценим магнитный момент и магнитное отклонение магнитного поля Земли, считая ее однородно намагниченным шаром.

$$B_r = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mathbf{m} \cos \varphi}{R^3} \quad B_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m}}{R^3} \Rightarrow \quad (15)$$

$$B_{\perp} = B_m \cos \varphi + B_r \quad B_{\parallel} = B_m \sin \varphi \Rightarrow \quad (16)$$

$$\text{tg } \beta = 2 \text{tg } \varphi \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 71^{\circ} (\varphi = 56^{\circ}) \quad (17)$$

Выводы

1) Вычислили магнитный момент неодимовых магнитов, сравив 2 способа его определения. $m_1 = 4.25 \cdot 10^{-2}$ Дж/Тл и $m_1 = 6.70 \cdot 10^{-2}$ Дж/Тл. Несмотря на то, что второй метод кажется менее точным, его относительная погрешность все равно оказалась меньше, чем первого метода.

2) С помощью магнитометра было измерено магнитная индукция у полюсов магнитного шарика ≈ 0.27 Тл. Эта величина была также получена из формулы (8) при уже полученном магнитном моменте ≈ 0.68 Тл. Видно, что значения отличаются сильно и даже с учетом погрешности не совпадают. Так же была определена остаточная индукция ≈ 1.03 Тл, что в пределах погрешности совпадает со справочными данными 1.1 – 1.4 Тл.

3) С помощью крутильных колебаний магнитной "стрелки" была определена горизонтальная составляющая магнитного поля Земли ≈ 150 мТл. Табличная величина для долгопрудного составляет ≈ 165 мТл. Т.е. полученный результат совпадает в пределах погрешности с табличной величиной.

4) Уравновесивая механический момент, действующий на магнитную "стрелку" мы определили значение вертикальной составляющей магнитного поля Земли ≈ 670 мТл. Табличные данные для Долгопрудного ≈ 504 мТл. В ворота погрешности это значение не попадает.

5) Мы также вычислили значение магнитного отклонения $\approx 77^\circ$. Табличные данные для Долгопрудного $\approx 72^\circ$. В ворота погрешности так же не попадает.