

# Лабораторная работа 3.2.2

## Резонанс напряжений в последовательном контуре

Татаурова Юлия Романовна

13 сентября 2024 г.

**Цель работы:** исследование резонанса напряжений в последовательном колебательном контуре с изменяемой ёмкостью, получение амплитудно-частотных и фазово-частотных характеристик, определение основных параметров контура.

**Оборудование:** генератор сигналов, источник напряжения, нагрузкой которого является последовательный колебательный контур с переменной ёмкостью, двухканальный осциллограф, цифровые вольтметры.

### Экспериментальная установка

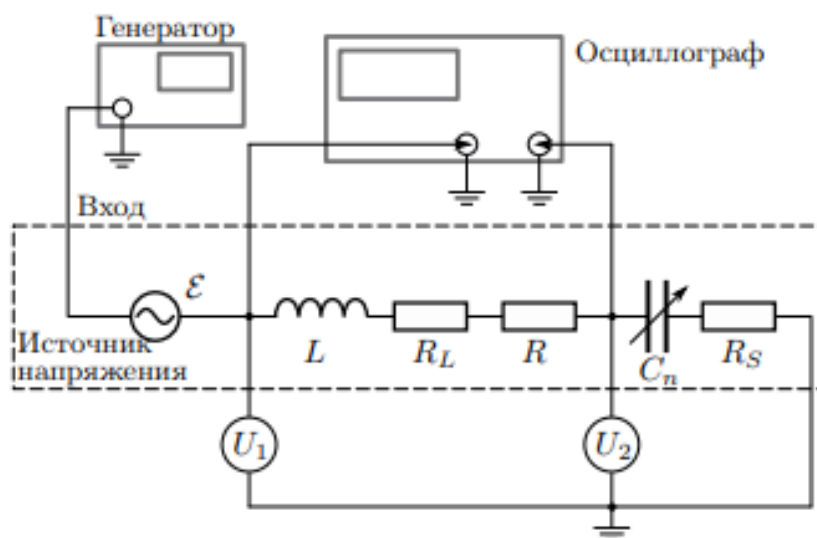


Рис. 1: Схема установки

Источник напряжения, колебательный контур и блок питания находятся в отдельном корпусе, на котором так же имеется магазин ёмкостей  $C_n$ .

n	1	2	3	4	5	6	7
$C_n$ , нФ	25.0	33.2	47.5	57.2	67.4	82.1	99.6
$R = 3.45 \text{ Ом}$							

Таблица 1: Велечины ёмкостей  $C_n$

## Теоретические сведения

Уравнение последовательного колебательного контура с подключенным внешним ЭДС выглядит следующим образом:

$$\ddot{U}_c + 2\gamma\dot{U}_c + \omega_0^2 U_c = \omega_0^2 \varepsilon_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

Решение такой системы ищется в виде  $\overline{U}_C(t) = \overline{U}_{C0} e^{i\omega t}$ . И с учетом того, что импеданс системы можно записать как  $Z = Z_0 e^{i\psi}$ , где  $Z_0 = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$ . Отсюда получаем:

$$I(t) = \frac{\varepsilon_0}{Z_0} \cos(\omega t + \phi_0 - \psi); \quad (2)$$

$$U_C(t) = \frac{\varepsilon_0}{Z_0 C \omega} \cos(\omega t + \phi_0 - \psi_C), \psi_C = \psi + \frac{\pi}{2}; \quad (3)$$

$$U_L(t) = \frac{\varepsilon_0 L \omega}{Z_0} \cos(\omega t + \phi_0 - \psi_L), \psi_L = \psi - \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

Тогда найдем частоту и соответствующее ей напряжение при резонансе напряжения на конденсаторе:

$$U_{C\omega}^{\text{рез}} = U_{L\omega}^{\text{рез}} = \frac{\rho}{R_\Sigma} \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\rho^2}{4R^2}\right)^{-1/2}; \quad (5)$$

$$\omega_C^{\text{рез}} = \omega_0 \left(1 - \frac{\rho^2}{2R^2}\right)^{1/2}; \quad (6)$$

$$\omega_L^{\text{рез}} = \omega_0 \left(1 - \frac{\rho^2}{2R^2}\right)^{-1/2} \quad (7)$$

Такая колебательная система характеризуется добротностью  $Q$ .

$$Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\gamma^2} - 1} = \sqrt{\frac{\rho^2}{R_\Sigma^2} - \frac{1}{4}} \quad (8)$$

где  $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$  - волновое сопротивление контура,  $R_\Sigma = R + R_L + R_S$  - активное сопротивление системы. При слабом затухании  $Q \gg 1 \Rightarrow \gamma \ll \omega_0 \Rightarrow Q \approx \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{1}{R_\Sigma} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\rho}{R_\Sigma} = \frac{1}{\omega_0 C R_\Sigma}$ . Выражения для импедансов ёмкости, индуктивности и последовательного контура:

$$Z_C = R_S - \frac{i}{\omega C}, \quad Z_L = R_L + i\omega L, \quad Z = R_\Sigma + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega L} \right) \quad (9)$$

## Экспериментальные данные

При резонансе  $\omega_0 = \omega$ , тогда индуктивность можно вычислить по формуле  $L = \frac{1}{4\pi^2\nu^2C}$ , добротность колебательного контура определяется по формуле  $Q = \frac{U_c^{\text{рез}}}{\varepsilon_0}$ ,  $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ . Будем придерживаться того, что  $Q \gg 1$  (хотя судя на самом деле не совсем так) и считать суммарное сопротивление как  $R_\Sigma = \frac{\rho}{Q}$ .  $R_{\text{Smax}} = 10^{-3}\rho$ ,  $R_L = R_\Sigma - R_{\text{Smax}} - R$ ,  $I = \frac{\varepsilon_0}{R_\Sigma}$

$C_n$ , нФ	$f_{0n}$ , кГц	$U_c$ , В	$\varepsilon$ , В	$L$ , мкГн	$Q$	$\rho$ , Ом	$R_\Sigma$ , Ом	$R_{\text{Smax}}$ , Ом	$R_L$ , Ом	$I$ , мА
25.0	31.3	4.93	0.2	1034.2	24.6	203.40	8.25	0.20	4.60	24.24
33.2	27.1	3.27	0.2	1024.7	16.4	175.60	10.74	0.18	7.11	18.62
47.5	23	3.86	0.2	1008.1	19.3	145.67	7.55	0.15	3.95	26.50
57.2	21	3.40	0.2	1004.2	17.0	132.50	7.80	0.13	4.21	25.66
67.4	19.4	2.78	0.2	998.6	13.9	121.71	8.76	0.12	5.19	22.84
82.1	17.5	3.06	0.2	1007.4	15.3	110.77	7.24	0.11	3.68	27.62
99.6	15.9	2.83	0.2	1006.0	14.2	100.50	7.10	0.10	3.55	28.16
Среднее значение				1011.7	-	-	-	-	4.61	-
Случ. погрешность				11.6	-	-	-	-	1.14	-

Таблица 2: Результаты измерений резонансной частоты и напряжения для разных значений ёмкости при  $\varepsilon_0 = 0.2\text{В}$

$C_n$ , нФ	$f_{0n}$ , кГц	$U_c$ , В	$\varepsilon$ , В	$L$ , мкГн	$Q$	$\rho$ , Ом	$R_\Sigma$ , Ом	$R_{\text{Smax}}$ , Ом	$R_L$ , Ом	$I$ , мА
25.0	31.18	9.47	0.4	1042.2	24	204.18	8.64	0.20	4.97	46.38
33.2	27.21	7.56	0.4	1030.5	19	176.18	9.21	0.18	5.58	43.42
47.5	22.92	7.22	0.4	1015.1	18	146.19	8.10	0.15	4.50	49.39
57.2	20.92	6.48	0.4	1011.9	16	133.00	8.21	0.13	4.63	48.72
67.4	19.26	5.86	0.4	1013.1	15	122.60	8.37	0.12	4.80	47.80
82.1	17.49	5.60	0.4	1008.6	14	110.84	7.92	0.11	4.36	50.52
99.6	15.92	5.51	0.4	1003.4	14	100.37	7.29	0.10	3.73	54.90
Среднее значение				1017.8	-	-	-	-	4.65	-
Случ. погрешность				12.6	-	-	-	-	0.52	-

Таблица 3: Результаты измерений резонансной частоты и напряжения для разных значений ёмкости при  $\varepsilon_0 = 0.4\text{В}$

Сравнивая таблицы, можно сказать, что все характеристики за исключением силы тока в среднем совпадают. Значения же для силы тока различаются примерно в 2 раза, что не удивительно, т.к. напряжение тоже было поднято в 2 раза, а остальные значения сохранились.

Далее определим амплитудно-частотные характеристики системы для ёмкостей  $C_1$  и  $C_7$ . Данные представлены в таблицах 4,6. По ним так же вычислим добротность и сравним результаты с прошлыми полученными значениями.

$\nu$ , кГц	$U_C$
30560	3.00
30660	3.28
30760	3.58
30860	3.93
30960	4.27
31060	4.58
32160	4.81
31160	4.93
31260	4.93
31360	4.81
31460	4.61
31560	4.39
31660	4.12
31760	3.87
31860	3.62
31960	3.38
32060	3.15
32260	2.95
32360	2.76
32460	2.58

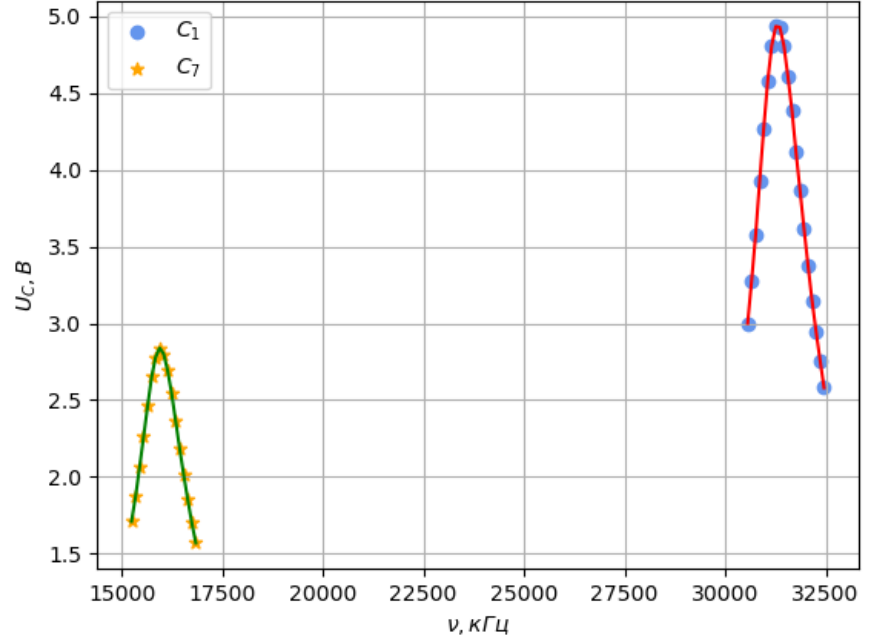


График АЧХ для  $C_1$  и  $C_7$

Таблица 4: АЧХ при  $C_1$

$\nu$ , кГц	$U_C$
15240	1.71
15340	1.87
15440	2.06
15540	2.26
15640	2.46
15740	2.65
15840	2.78
15940	2.84
16040	2.80
16140	2.69
16240	2.54
16340	2.36
16440	2.18
16540	2.01
16640	1.85
16740	1.70
16840	1.57

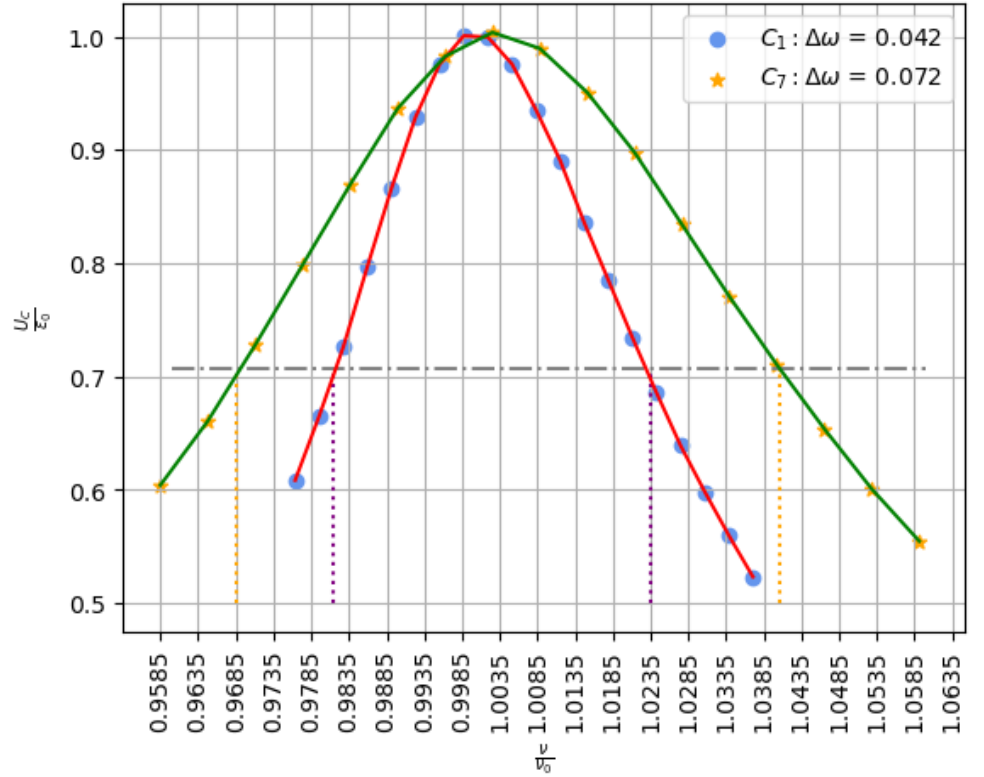


Таблица 5: АЧХ при  $C_7$

График АЧХ для  $C_1$  и  $C_7$  в безразмерных координатах

$\nu_{C1}, \text{кГц}$	$\nu_{C7}, \text{кГц}$	$x$
29750	14150	2
30450	14550	3
30700	14850	4
30890	15150	5
31030	15350	6
31160	15550	7
31290	15610	8
31410	15680	9
31580	15740	10
31750	15840	11
32020	15870	12
32440	15920	13

Таблица 6: АЧХ при  $C_1$

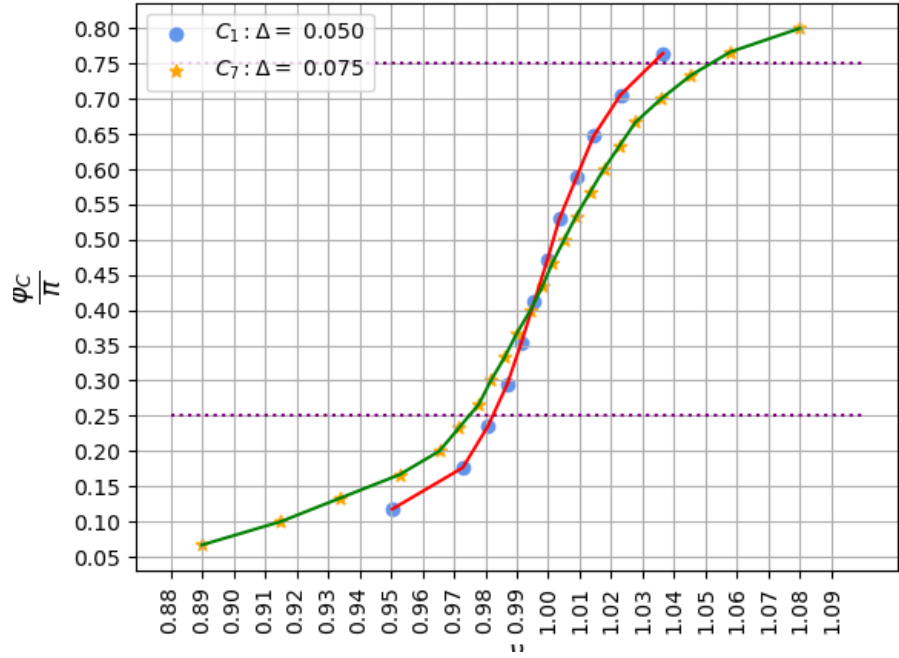


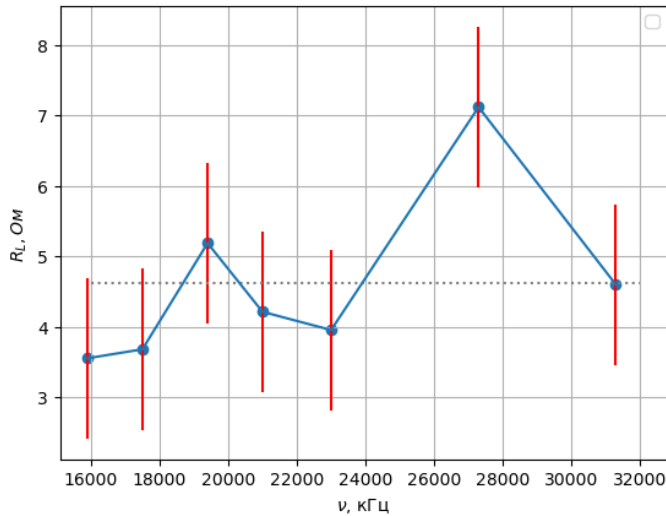
График ФЧХ для  $C_1$  и  $C_7$

Значение добротности по ФЧХ найдем по ширине кривой, ограниченной значениями  $\frac{\Delta\varphi}{\pi}$  между 0.25 и 0.75.

Теперь рассмотрим график зависимости  $R_L(\nu_0)$  (представлен ниже). Видно, что значения  $R_L$  отклоняются от среднего достаточно сильно ( $\approx 25\%$ ). Причиной такого поведения могут быть скин-эффект (ток течет по меньшему сечению).

$C_n$	$C_1$	$C_7$
$Q = \frac{U_C^{\text{рез}}}{\varepsilon_0}$	24.6	14.2
$Q = \frac{\omega_0}{\delta\omega}$	23.81	13.88
$Q = \frac{1}{\Delta \frac{\nu}{\nu_0}}$	20	13.3

Рис. 2: Сравнение добротностей, посчитанных разными способами



Оценим погрешности. В случае АЧХ  $\sigma_{\frac{\Delta\omega}{\omega}} = 0.005$ , тогда  $\sigma_Q = \frac{\sigma_{\frac{\Delta\omega}{\omega}}}{\Delta\omega^2}$ ,  $\sigma_{Q1} = 2.82$ ,  $\sigma_{Q7} = 0.96$ . Аналогично считается в случае ФЧХ:  $\sigma_{Q1} = 4$ ,  $\sigma_{Q7} = 1.8$ . Видно, что значения для добротности полученные всеми способами близки и с учетом погрешности совпадают. Однако считать  $Q$  через ФЧХ менее точно, чем АЧХ.