

UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
CCMN - Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza  
DCC - Departamento de Ciência da Computação  
MAB117 - Computação Concorrente

# **INTEGRAÇÃO NUMÉRICA**

Rio de Janeiro  
Janeiro/2016

**Alunos:**

Douglas Quintanilha Barbosa Ferreira

Julia Anne de Souza Alves

**Professora:**

Silvana Rosseto

# Índice

- 1 Introdução
  - 1.1 A solução
  - 1.2 Equipe
    - 1.2.1 Divisão de Tarefas e Comunicação
    - 1.2.2 Compreensão e Dificuldades do Problema
- 2 Desenvolvimento
  - 2.1 Solução Sequencial
    - 2.1.1 Das Estruturas de Dados
    - 2.1.2 Da Solução Projetada
    - 2.1.3 Da Saída do Programa
  - 2.2 Solução Paralela
    - 2.2.1 Das Estruturas de Dados
    - 2.2.2 Da Solução Projetada
    - 2.2.3 Da Saída do Programa
- 3 Testes
  - 3.1 Função 1
    - 3.1.1 Saída Esperada e Saída Real
    - 3.1.2 Ganho de Desempenho
  - 3.2 Função 2
    - 3.2.1 Saída Esperada e Saída Real
    - 3.2.2 Ganho de Desempenho
  - 3.3 Função 3
    - 3.3.1 Saída Esperada e Saída Real
    - 3.3.2 Ganho de Desempenho
  - 3.4 Função 4
    - 3.4.1 Saída Esperada e Saída Real
    - 3.4.2 Ganho de Desempenho
  - 3.5 Função 5
    - 3.5.1 Saída Esperada e Saída Real
    - 3.5.2 Ganho de Desempenho
- 4 Considerações Finais

# 1 Introdução

## 1.1 A Solução

Através da estratégia de quadratura adaptativa, utilizando o método de integração numérica retangular com ponto médio foi implementado um algoritmo de cujo objetivo é aproximar o valor de uma dada integral definida com os subintervalos de forma dinâmica das funções a seguir:

- 1)  $f(x) = 1 + x$
- 2)  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ,  $-1 < x < 1$
- 3)  $f(x) = \sqrt{1 + x^4}$
- 4)  $f(x) = \sin(x^2)$
- 5)  $f(x) = \cos(e^{-x}) * (0.005 * x^3 + 1)$

Foram implementadas duas versões, uma concorrente e uma sequencial, de solução para cada problema citado.

As entradas do programa sequencial são: limite superior de integração, limite inferior de integração e erro máximo.

As entradas do programa paralelo são: limite superior de integração, limite inferior de integração, erro máximo e número de threads. O número de threads poderá variar de 0 a 8 sendo criticado, no momento da compilação, os valores diferentes destes.

Na execução da função dois também há a crítica, no momento da compilação, a limites de integração inferiores a -1 ou superiores a 1.

A saída do programa segue o padrão abaixo:

– FUNÇÃO NOME VERSAO –

Número de threads é: *<#threads>*

Resultado integral de NOME é: *<resultado>*

Tempo de inicialização é: *<inicialização>*

Tempo de execução é: *<execução>*

Tempo total é: *<inicialização+execução>*

Onde NOME é a o nome identificador da função e VERSAO é paralela ou sequencial.

A linha que sinaliza o numero de threads apenas aparece na versão paralela, obviamente.

## 1.2 Equipe

A equipe composta por Julia Anne e Douglas Quintanilha.

### 1.2.1 Divisão de Tarefas e Comunicação

A divisão de tarefas seguiu-se juntamente como fluxo de execução das atividades combinado com a disponibilidade de cada membro da equipe.

Inicialmente, marcamos reuniões em dias consecutivos para entendermos o problema e discutir a melhor estratégia de resolução.

Com a necessidade de comunicação frequente, foi utilizado aplicativos mobile para melhor controle de tarefas.

Além disso, todo o código foi versionado e pode ser visto em

### 1.2.2 Compreensão e Dificuldades do Problema

Na solução sequencial foi importante entender como o método do ponto médio funcionava e pensar em como o programa executaria por meio recursivo as diversas iterações.

Após a implementação da solução sequencial e o entendimento de como funciona o método, a dificuldade foi projetar o modelo concorrente para a solução do problema.

As partes mais críticas foram casos específicos de como distribuir o cálculo a divisão do intervalo de integração pelo número de threads para que nenhuma ficasse ociosa.

Outra parte crítica foi a modularização do programa para que o código pudesse ficar organizado e limpo facilitando o debug do mesmo. Como o problema é muito complexo foi necessário uma atenção especial a essa parte para que não houvesse o comprometimento da execução do problema.

Outro ponto a ressaltar foi um erro que podia ser facilmente cometido e poderia passar despercebido foi o cálculo de erro que deveria sempre ser calculado em valor absoluto.

## 2 Desenvolvimento

### 2.1 Solução Sequencial

Os argumentos da entrada são utilizados no programa respectivamente como limite inferior, limite superior e erro máximo. Caso nenhuma dessas entradas seja respeitada, o programa se encerra com erro.

#### 2.1.1 Das Estruturas de Dados

Foi utilizada variáveis do tipo inteiro e double para os cálculos das funções.

#### 2.1.2 Da Solução Projetada

A função de cálculo da integral é feita em etapas:

Definição do intervalo sendo o (limite superior – limite inferior) dividido pelo número de partições, que na primeira iteração vale 1.

Define-se o limite inferior da partição como o limite inferior da integração.

Através de um laço de 0 até o número de partições é calculado o valor de cada partição sendo intervalo vezes função no ponto (limite inferior da partição + limite superior da partição) dividido por 2. Onde limite superior da partição é limite inferior da partição + tamanho do intervalo.

Com o resultado acima, é calculado o erro subtraindo-se do resultado da iteração anterior o resultado atual. Na primeira iteração, o resultado da iteração anterior é zero.

Caso o erro obtido acima seja maior que o erro informado na entrada do programa, não é considerado um erro aceitável e é calculado novamente todos os passos acima com o número de partições dobrado. Caso o erro seja menor, retorna-se o valor desejado.

#### 2.1.3 Da Saída do Programa

-- FUNÇÃO NOME SEQUENCIAL --

O valor da integral de NOME de LIMITE SUPERIOR até LIMITE INFERIOR é: RESULTADO

Tempo de inicialização é: TEMPO1

Tempo de execução é: TEMPO2

Tempo total é: TEMPO1+TEMPO2

Onde nome é a identificação da função, exemplo: SENO.

### 2.2 Solução Paralela

Os argumentos da entrada são utilizados no programa respectivamente como limite inferior, limite superior, erro máximo e número de threads. Caso nenhuma dessas entradas seja respeitada, o programa se encerra com erro. Caso o número de threads seja menor que 1 ou maior que 8, o programa se encerra com erro.

### *2.2.1 Das Estruturas de Dados*

Foi utilizada variáveis do tipo double para os calculos das funções e controle do fluxo de execução. Também foram utilizados dois vetores principais, um que guardava o resultado parcial da integral, calculado por cada thread e o outro com o fim dos intervalos de integração, para que estes valores pudessem ser consumidos pelas threads, se baseando na estratégia Produtor / Consumidor.

### *2.2.2 Da Solução Projetada*

A solução projetada para resolver o problema concorrente foi de dividir a carga de calcular a integral em partições, que são pedaços menores do intervalo de integração, e distribuí-las em blocos para as threads, com o objetivo de reduzir o erro numérico.

Como o método da quadratura adaptativa deveria ser utilizado, foi necessário ter várias iterações para o cálculo da integral, sempre verificando se o erro desejado havia sido obtido. Com isto em mente, adotamos a estratégia de utilizar uma barreira ao final de cada iteração, para que todas as threads esperassem as outras finalizarem seus respectivos pedaços do cálculo da integral. Dentro da barreira também aproveitávamos para atualizar os valores do erro, número de partições para a próxima iteração e atualizar o valor final da integral com o valor obtido na iteração atual.

Para a divisão do trabalho em blocos, utilizamos como inspiração a estratégia Produtor / Consumidor, em que a cada iteração dividimos o intervalo de integração em partições menores, e estas partições são agrupadas em pequenos blocos, que são identificados pelo número da última partição de seu bloco. Estes blocos são salvos em vetor de partições que serve como um buffer. Este buffer é consumido quando as threads iniciam seu cálculo de integral, removendo um bloco do buffer, calculando as partições iniciais e finais e realizando o cálculo da integral nestas pequenas partições.

Como exemplo desta divisão, vamos supor que rodemos o programa utilizando 5 threads e em determinada iteração, dividimos o intervalo de integração em 128 partições. Como queremos obter o balanceamento de carga, dividimos as partições entre nossas 5 threads, arredondando pra baixo. Obtemos 25 partições por thread nessa iteração, como cada bloco é identificado pela sua última partição, preenchemos o vetor de partições da seguinte maneira: [24][49][74][99][127]. Vale atentar para o último elemento do vetor, que é identificado pela partição 127, se tornando assim o maior bloco, já que temos uma divisão com resto e o nosso ultimo bloco incorpora as partições restantes.

### *2.2.3 Da Saída do Programa*

-- FUNÇÃO NOME PARALELA --

Número de threads é: #THREADS

Resultado da integral de NOME é: RESULTADO

Tempo de inicialização é: TEMPO1

Tempo de execução é: TEMPO2

Tempo total é: TEMPO1+TEMPO2

Onde nome é a identificação da função, exemplo: SENO.

### 3 Testes

Foi desenvolvido um script que calcula o ganho de desempenho e pode ser visto nos arquivos de código fonte.

#### 3.1 Função 1

A função  $f(x) = 1 + x$ , apelidada como função linear, pode ser vista na solução sequencial em `linearSequencial.c` e na solução concorrente em `linearParalela.c`.

##### 3.1.1 Saída Esperada e Saída Real

###### Caso 1

Limite de integração: [0, 10]

Erro: 0.00001

Saída Esperada (de acordo com o Wolfram): 60

Situação: **APROVADO**

Saída Sequencial: 60.000000

Saída Paralela para de 1 até 8 threads: 60.000000

###### Caso 2

Limite de integração: [50, 130]

Erro: 0.00001

Saída Esperada (de acordo com o Wolfram): 7280

Situação: **APROVADO**

Saída Sequencial: 7280.000000

Saída Paralela para de 1 até 8 threads: 7280.000000

###### Caso 3

Limite de integração: [-30, 70]

Erro: 0.00001

Saída Esperada (de acordo com o Wolfram): 2100

Situação: **APROVADO**

Saída Sequencial: 2100.000000

Saída Paralela para de 1 até 8 threads: 2100.000000

##### 3.1.2 Ganho de Desempenho

###### Caso 1

Limite de integração: [0, 10]

Erro: 0.00001

Tempo Sequencial: 0.00001216

Ganho Real para 1 thread: 0.04860998737823230525

Ganho Real para 2 thread: 0.04549271048011602167

Ganho Real para 3 thread: 0.04381391618207339081

Ganho Real para 4 thread: 0.01891151067974554795

Ganho Real para 5 thread: 0.01891151067974554795

Ganho Real para 6 thread: 0.01870846198126537233

Ganho Real para 7 thread: 0.02870030016533170676

Ganho Real para 8 thread: 0.02006402006402006402

###### Caso 2

Limite de integração: [50, 130]  
Erro: 0.00001  
Tempo Sequencial: 0.00001979  
Ganho Real para 1 thread: 0.03706816844582667899  
Ganho Real para 2 thread: 0.02835027510957754359  
Ganho Real para 3 thread: 0.03481732709397673120  
Ganho Real para 4 thread: 0.03974801869538711643  
Ganho Real para 5 thread: 0.02476987033554389785  
Ganho Real para 6 thread: 0.02232962421790116518  
Ganho Real para 7 thread: 0.02812435477686340441  
Ganho Real para 8 thread: 0.03062945937998173685

Conclusão: Como a função é linear e seu erro por ser simétrico será compensado, é necessário apenas 1 iteração, tornando quanto maior o número de threads menor o ganho pois se torna muito custoso a criação e manutenção das mesmas.

## 3.2 Função 2

A função  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ,  $-1 < x < 1$ , apelidada como função parábola, pode ser vista na solução sequencial em `parabolaSequencial.c` e na solução concorrente em `parabolaParalela.c`.

### 3.2.1 Saída Esperada e Saída Real

#### Caso 1

Limite de integração: [-1, 1]  
Erro: 0.00001  
Saída Esperada (de acordo com o Wolfram): 1.5708  
Situação: **APROVADO**  
Saída Sequencial: 1.570802  
Saída Paralela para de 1 até 8 threads: 1.570802

#### Caso 2

Limite de integração: [0, 1]  
Erro: 0.00001  
Saída Esperada (de acordo com o Wolfram): 0.78540  
Situação: **APROVADO**  
Saída Sequencial: 0.785401  
Saída Paralela para de 1 até 8 threads: 0.785401

### 3.2.2 Ganho de Desempenho

#### Caso 1

Limite de integração: [-1, 1]  
Erro: 0.00001  
Tempo Sequencial: 0.00009584  
Ganho Real para 1 thread: 0.15556673754605807781  
Ganho Real para 2 thread: 0.08757790083520660854  
Ganho Real para 3 thread: 0.05824935433230364105  
Ganho Real para 4 thread: 0.06937812561806006837  
Ganho Real para 5 thread: 0.12216504875359436144  
Ganho Real para 6 thread: 0.03827456864216054013  
Ganho Real para 7 thread: 0.08415063082962198240



Ganho Real para 8 thread: 0.06280181772878822035

#### Caso 2

Limite de integração: [0, 1]

Erro: 0.00001

Tempo Sequencial: 0.00004005

Ganho Real para 1 thread: 0.09887179993581356308

Ganho Real para 2 thread: 0.07884721383763353368

Ganho Real para 3 thread: 0.05461520280711961165

Ganho Real para 4 thread: 0.03746036321706543672

Ganho Real para 5 thread: 0.06162209236992920552

Ganho Real para 6 thread: 0.03071334763020963210

Ganho Real para 7 thread: 0.03919428725410940447

Ganho Real para 8 thread: 0.02432368968672318442

### 3.3 Função 3

A função  $f(x) = \sqrt{1 + x^4}$ , apelidada como função exponencial, pode ser vista na solução sequencial em `exponencialSequencial.c` e na solução concorrente em `exponencialParalela.c`.

#### 3.3.1 Saída Esperada e Saída Real

##### Caso 1

Limite de integração: [0, 20]

Erro: 0.00001

Saída Esperada (de acordo com o Wolfram): 2667.88

Situação: **APROVADO**

Saída Sequencial: 2667.87771398

Saída Paralela para de 1 até 8 threads: 2667.87771398

##### Caso 2

Limite de integração: [-50, 50]

Erro: 0.00001

Saída Esperada (de acordo com o Wolfram): 83335.8

Situação: **APROVADO**

Saída Sequencial: 83335.78543169

Saída Paralela para de 1 até 8 threads: 83335.78543169

##### Caso 3

Limite de integração: [30, 100]

Erro: 0.00001

Saída Esperada (de acordo com o Wolfram): 324 333

Situação: **APROVADO**

Saída Sequencial: 324333.34499833

Saída Paralela para de 1 até 8 threads: 324333.34499833

#### 3.3.2 Ganho de Desempenho

##### Caso 1

Limite de integração: [0, 20]

Erro: 0.00001

Tempo Sequencial: 0.00481009

Ganho Real para 1 thread: 0.97723352599981715307  
Ganho Real para 2 thread: 1.04059553503169957605  
Ganho Real para 3 thread: 1.04034968408233628822  
Ganho Real para 4 thread: 1.32995042658666836875  
Ganho Real para 5 thread: 1.01563073695253081563  
Ganho Real para 6 thread: 0.98728392456305277900  
Ganho Real para 7 thread: 1.14780063452169719067  
Ganho Real para 8 thread: 1.22357881364903489890

#### Caso 2

Limite de integração: [-50, 50]  
Erro: 0.00001  
Tempo Sequencial: 0.04423904  
Ganho Real para 1 thread: .79330798079906413716  
Ganho Real para 2 thread: 1.39837061385623452093  
Ganho Real para 3 thread: 2.13515797035640444977  
Ganho Real para 4 thread: 2.25279632552918718288  
Ganho Real para 5 thread: 1.89073759236251879945  
Ganho Real para 6 thread: 1.55709567358897490932  
Ganho Real para 7 thread: 1.63241565127865479260  
Ganho Real para 8 thread: 1.62857759214142721565

Conclusão: Quanto maior o valor da entrada consequentemente haverá mais partes a serem calculadas, então quanto mais thread estão em execução, melhor é o desempenho. Mas há o limite de 4 processadores na máquina usada e por isso a melhor opção são 4 threads.

### 3.4 Função 4

A função  $f(x) = \sin(x^2)$ , apelidada como função seno, pode ser vista na solução sequencial em senoSequencial.c e na solução concorrente em senoParalela.c.

#### 3.4.1 Saída Esperada e Saída Real

##### Caso 1

Limite de integração: [0, 10]  
Erro: 0.00001  
Saída Esperada (de acordo com o Wolfram): 0.583671  
Situação: **APROVADO**  
Saída Sequencial: 0.58366983  
Saída Paralela para de 1 até 8 threads: 0.58366983

##### Caso 2

Limite de integração: [-30, 0]  
Erro: 0.00001  
Saída Esperada (de acordo com o Wolfram): 0.625544  
Situação: **APROVADO**  
Saída Sequencial: 0.62554149  
Saída Paralela para de 1 até 8 threads: 0.62554149

##### Caso 3

Limite de integração: [-50, 100]  
Erro: 0.00001

Saída Esperada (de acordo com o Wolfram): 1.25048  
Situação: **APROVADO**  
Saída Sequencial: 1.25047960  
*Saída Paralela para de 1 até 8 threads: 1.25047960*

### 3.4.2 Ganho de Desempenho

#### Caso 1

Limite de integração: [0, 10]  
Erro: 0.00001  
Tempo Sequencial: 0.00086093  
Ganho Real para 1 thread: 0.65416733152491888729  
Ganho Real para 2 thread: 1.07090738593171716947  
Ganho Real para 3 thread: 0.60506471405598663564  
Ganho Real para 4 thread: 1.10775096909756185921  
Ganho Real para 5 thread: 0.64840442338072669826  
Ganho Real para 6 thread: 0.46352353379509167979  
Ganho Real para 7 thread: 0.42051500433931853832  
Ganho Real para 8 thread: 0.46307249329535768487

#### Caso 3

Limite de integração: [-50, 100]  
Erro: 0.00001  
Tempo Sequencial:  
Ganho Real para 1 thread: 1.10507493399628374432  
Ganho Real para 2 thread: 1.21785849337576591138  
Ganho Real para 3 thread: 1.34835852977289461411  
Ganho Real para 4 thread: 2.77469337710776982727  
Ganho Real para 5 thread: 2.06751266735045442019  
Ganho Real para 6 thread: 1.59765718611658419440  
Ganho Real para 7 thread: 1.41858223973243388792  
Ganho Real para 8 thread: 1.70434457015075437491

## 3.5 Função 5

A função  $f(x) = \cos(e^{-x}) * (0.005 * x^3 + 1)$ , apelidada como função elefante, pode ser vista na solução sequencial em `elefanteSequencial.c` e na solução concorrente em `elefanteParalela.c`.

### 3.5.1 Saída Esperada e Saída Real

#### Caso 1

Limite de integração: [0, 20]  
Erro: 0.00001  
Saída Esperada (de acordo com o Wolfram): 219.759  
Situação: **APROVADO**  
Saída Sequencial: 219.75925433  
*Saída Paralela para de 1 até 8 threads: 219.75923511*

#### Caso 2

Limite de integração: [10, 100]  
Erro: 0.00001  
Saída Esperada (de acordo com o Wolfram): 125077

Situação: **APROVADO**  
Saída Sequencial: 125077.49999708  
*Saída Paralela para de 1 até 8 threads: 125077.49998833*

#### Caso 3

Limite de integração: [-10, 40]  
Erro: 0.00001  
Saída Esperada (de acordo com o Wolfram): 3239.42  
Situação:  
Saída Sequencial: 3239.42245489  
*Saída Paralela para de 1 até 8 threads: 3239.42245938*

### 3.5.2 Ganho de Desempenho

#### Caso 2

Limite de integração: [10, 100]  
Erro: 0.00001  
Tempo Sequencial: 0.03894901  
Ganho Real para 1 thread: 0.92737725332209499727  
Ganho Real para 2 thread: 1.27982814985665394204  
Ganho Real para 3 thread: 1.77156115926801505997  
Ganho Real para 4 thread: 1.62543339530148845463  
Ganho Real para 5 thread: 1.59226783726969209842  
Ganho Real para 6 thread: 1.70850844609533917042  
Ganho Real para 7 thread: 1.76829728771209750050  
Ganho Real para 8 thread: 1.89147951890771425339

#### Caso 2

Limite de integração: [-10, 40]  
Erro: 0.00001  
Tempo Sequencial: 0.65455103  
Ganho Real para 1 thread: 0.92126304845554514822  
Ganho Real para 2 thread: 1.24641002549244750740  
Ganho Real para 3 thread: 1.71045404196595274444  
Ganho Real para 4 thread: 2.07416488898905156785  
Ganho Real para 5 thread: 1.86071912596469920223  
Ganho Real para 6 thread: 2.01478774076465175861  
Ganho Real para 7 thread: 2.04377787043300127377  
Ganho Real para 8 thread: 2.12424916262638742193

Conclusão: Quanto maior o numero de threads, melhor é o desempenho do programa, visto que temos uma função complexa.

## 4 Considerações Finais

O projeto foi desenvolvido parte a parte sempre pensando na melhor forma de execução e melhor desempenho do software.

O código está completamente comentado sendo de fácil entendimento. Além disso, há uma variante de debug para a versão concorrente, que mostra a execução dos programas passo a passo, imprimindo os valores dos vetores de partição e de integral, o cálculo que cada thread realiza em cada partição, quando cada thread é criada e quando se trava, ficando bem mais fácil acompanhar e

entender o fluxo do programa.