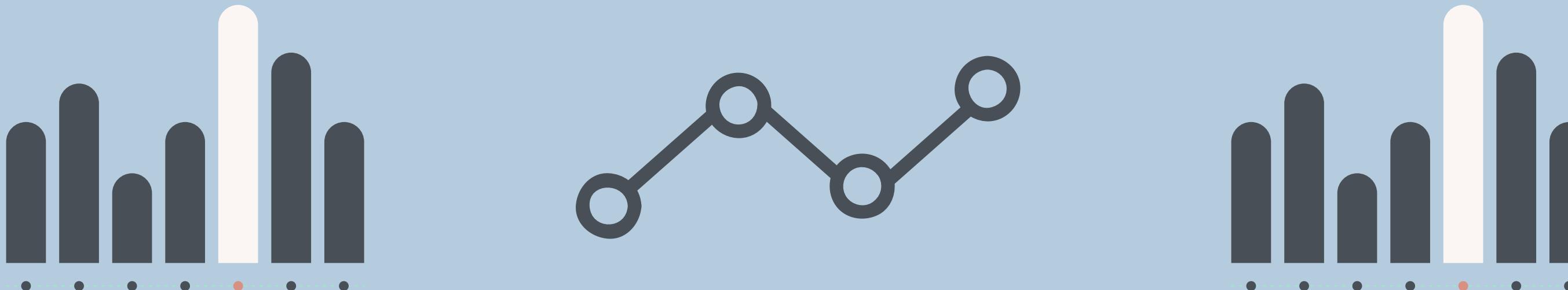


# ANÁLISE DE VARIÂNCIA

Medidas repetidas no tempo (e espaço) usando  
modelos-mistas

Julia Barra Netto-Ferreira

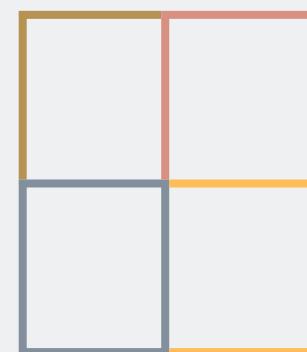


# MODELO LINEAR

A interpretação da ANOVA ou regressão se baseiam nos pressupostos do modelo linear que são:

# MODELO LINEAR

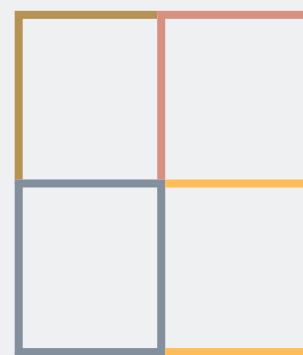
A interpretação da ANOVA ou regressão se baseiam nos pressupostos do modelo linear que são:



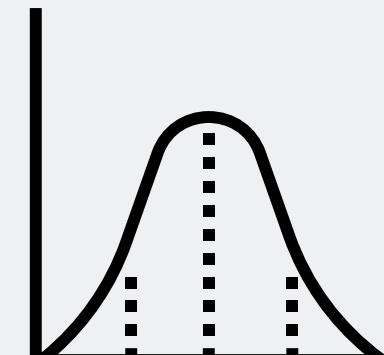
Independência  
dos resíduos.

# MODELO LINEAR

A interpretação da ANOVA ou regressão se baseiam nos pressupostos do modelo linear que são:



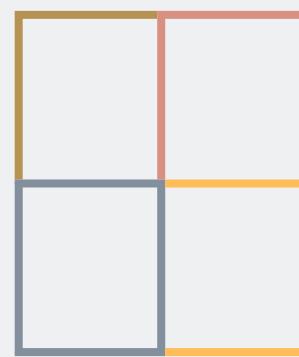
Independência  
dos resíduos.



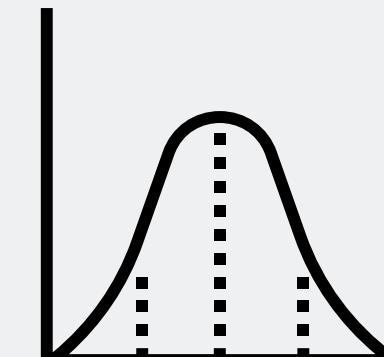
Normalidade  
dos resíduos.

# MODELO LINEAR

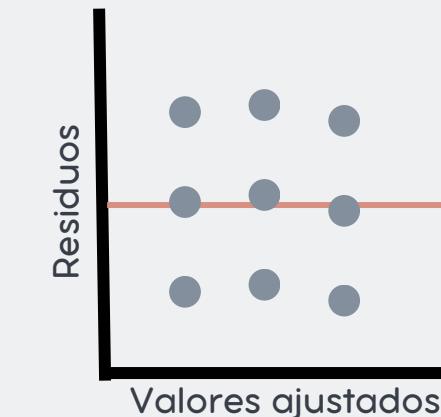
A interpretação da ANOVA ou regressão se baseiam nos pressupostos do modelo linear que são:



Independência dos resíduos.

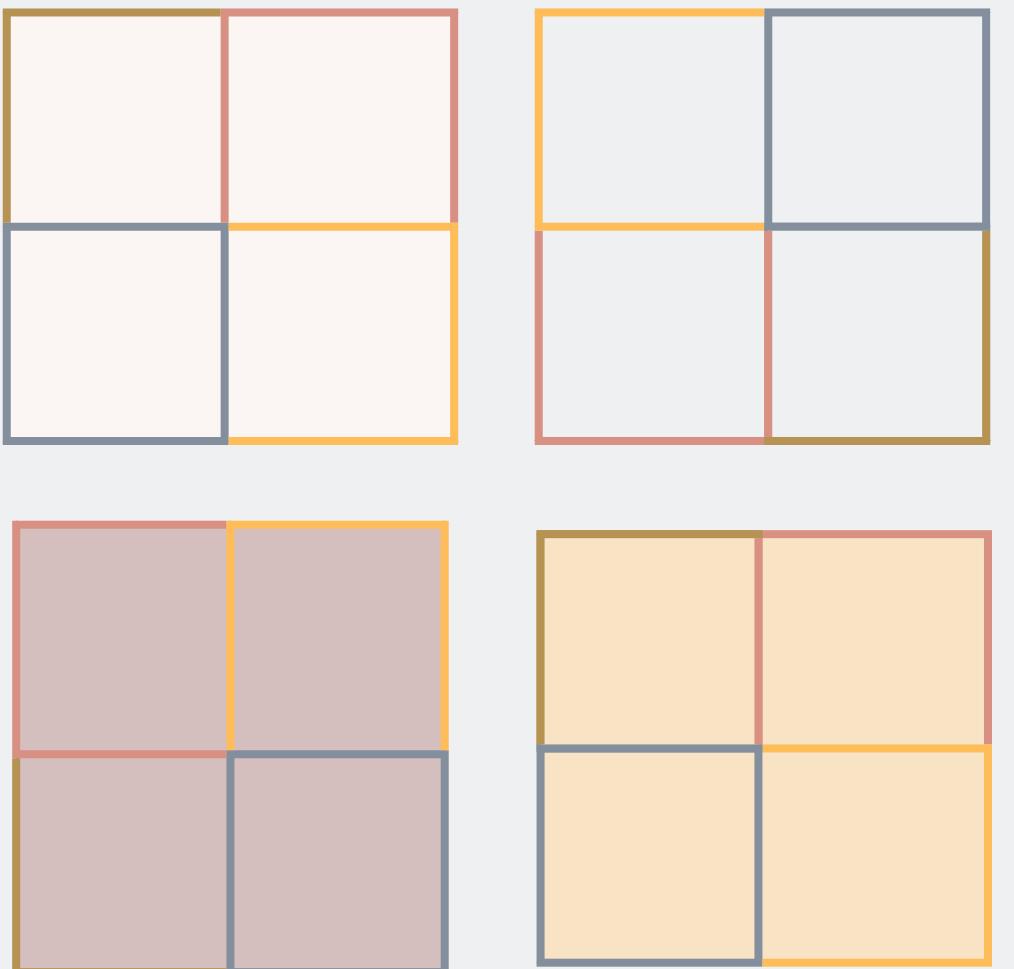


Normalidade dos resíduos.



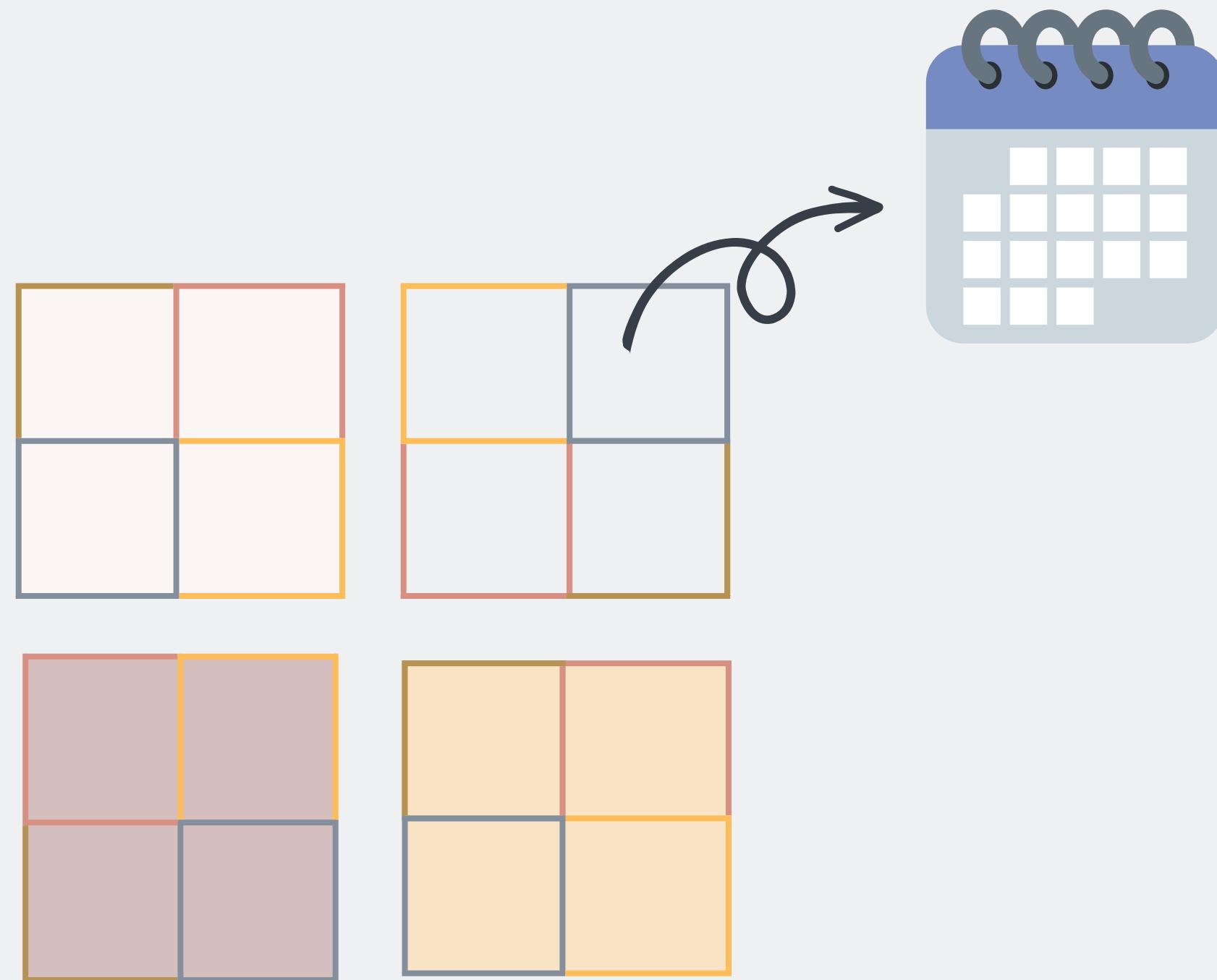
Os resíduos apresentam variância constante (homogeneidade das variâncias).

## Independência dos resíduos

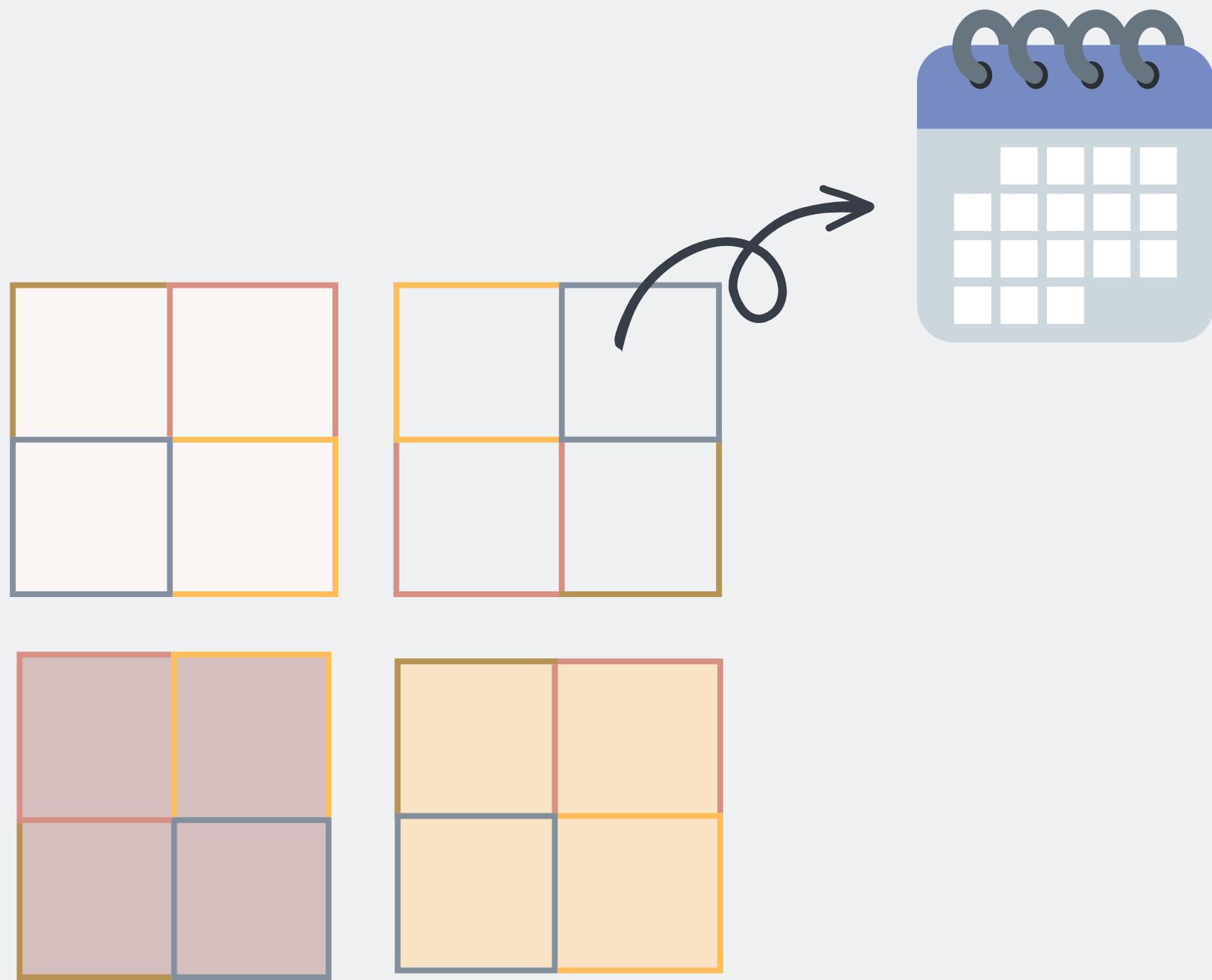


O variabilidade de um erro é independente de outro.

Esse pressuposto geralmente é alcançado por randomização adequada.



Com experimentos  
biológicos/agrícolas  
coletamos varias  
amostras em uma  
mesma unidade  
experimental



Com experimentos  
biológicos/agrícolas  
coletamos varias  
amostras em uma  
mesma unidade  
experimental

As observações seguem  
sendo independentes?

# MEDIDAS REPETIDAS

A análise de medidas repetidas combina todas as medidas em um único modelo complexo que especifica a estrutura correlacionada dos dados experimentais

- Reduz o erro padrão das médias

# MEDIDAS REPETIDAS

A análise de medidas repetidas combina todas as medidas em um único modelo complexo que especifica a estrutura correlacionada dos dados experimentais

- Reduz o erro padrão das médias
- Promove intervalos de confiança mais estreitos

# MEDIDAS REPETIDAS

A análise de medidas repetidas combina todas as medidas em um único modelo complexo que especifica a estrutura correlacionada dos dados experimentais

- Reduz o erro padrão das médias
- Promove intervalos de confiança mais estreitos
- Garante maior poder estatístico

# COMO ISSO ACONTECE?

Estamos testando o efeito de 5 tratamentos no crescimento de uma cultura, o design e um DBC com 5 repetições.

Tratamento	Repetição	Medidas	no. de obs
DBC	5	4	20
RM	5	4	60

Onde a gente tem  
mais poder de  
detectar  
diferenças?

# COMO ISSO ACONTECE?

Estamos testando o efeito de 5 tratamentos no crescimento de uma cultura, o design e um DBC com 5 repetições.

Tratamento	Repetição	Medidas	no. de obs
DBC	5	4	20
RM	5	4	60

# MEDIDAS REPETIDAS



Tempo



Espaço

# MEDIDAS REPETIDAS



Resposta = tratamento + bloco + erro

# MEDIDAS REPETIDAS

REMEMBER!

Resposta = tratamento + bloco + erro

Como ficaria o nosso  
modelo com MR?

# MEDIDAS REPETIDAS

REMEMBER!

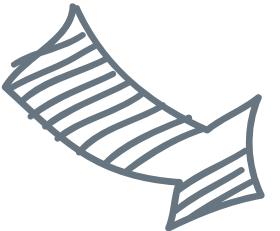
Resposta = tratamento + bloco + erro

Como ficaria o nosso  
modelo com MR?

Resposta = tratamento + tempo +  
tratamento x tempo + bloco + erro

# MEDIDAS REPETIDAS

Resposta = tratamento + tempo +  
tratamento x tempo + bloco + erro



Esse modelo diz que cada  
combinacao de tempo e trat.  
são uma rep (unidade  
experimental).

## MEDIDAS REPETIDAS

Resposta = tratamento + tempo +  
tratamento x tempo + bloco + erro

Só que em um modelo de MR, quando fazemos mais de uma observação em uma mesma unidade experimental, temos uma pseudo-repetição

# MEDIDAS REPETIDAS

Resposta = tratamento + bloco + erro<sub>Trat</sub>  
tempo + tratamento x tempo + erro<sub>MR</sub>

No modelo correto a gente especifica "dois  
tamanhos" de unidades experimentais que  
serão analisadas com precisões diferentes.

# MEDIDAS REPETIDAS

Resposta = tratamento + bloco + erro<sub>Trat</sub>  
tempo + tratamento x tempo + erro<sub>MR</sub>

No modelo correto a gente especifica "dois  
tamanhos" de unidades experimentais que  
serão analisadas com precisões diferentes.

# ANOVA

Fonte de variação	GL
Bloco	3
Tratamento	4
Resíduo	12
Total	19

# ANOVA

Fonte de variacao	GL
Bloco	3
Tratamento	4
Residuo	12
Total	19

Fonte de variação	GL
Bloco	3
Tratamento	4
Tempo	2
Trat. x Tempo	8
Residuo	42
Total	59

# ANOVA

<b>Fonte de variacao</b>	<b>GL</b>
<b>Bloco</b>	<b>3</b>
<b>Tratamento</b>	<b>4</b>
<b>Residuo</b>	<b>12</b>
<b>Total</b>	<b>19</b>

<b>Fonte de variação</b>	<b>GL</b>
<b>Bloco</b>	<b>3</b>
<b>Tratamento</b>	<b>4</b>
<b>Tempo</b>	<b>2</b>
<b>Trat. x Tempo</b>	<b>8</b>
<b>Resíduo</b>	<b>42</b>
<b>Total</b>	<b>59</b>

<b>Fonte de variação</b>	<b>GL</b>
<b>Bloco</b>	<b>3</b>
<b>Tratamento</b>	<b>4</b>
<b>Resíduo DBC</b>	<b>12</b>
<b>Tempo</b>	<b>2</b>
<b>Trat. x Tempo</b>	<b>8</b>
<b>Resíduo MR</b>	<b>30</b>
<b>Total</b>	<b>59</b>

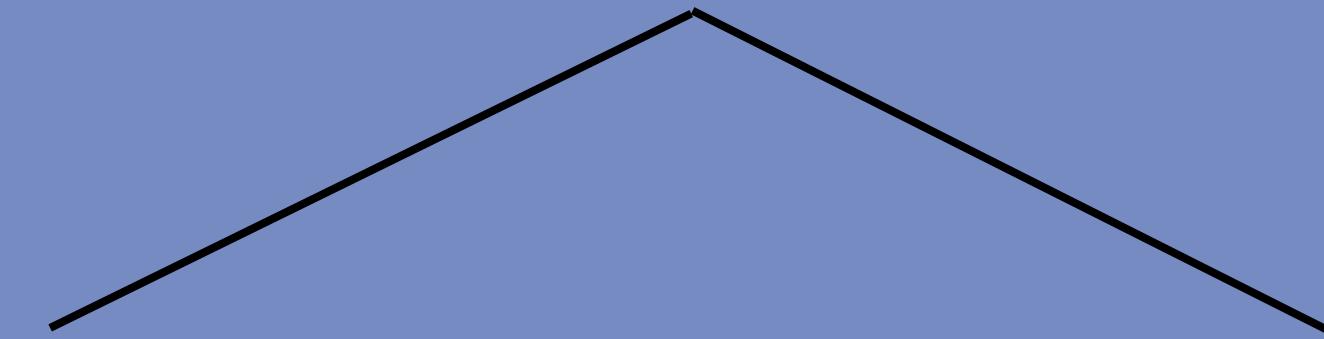
# MODELOS MISTOS

Fonte de variação	GL
Bloco	3
Tratamento	4
Resíduo DBC	12
Tempo	2
Trat. x Tempo	8
Residuo MR	30
Total	59



Permite uma abordagem mais complexa com especificações flexíveis dos resíduos e outros efeitos aleatórios, por incorporar correlações e variâncias heterogêneas entre observações ou unidades experimentais.

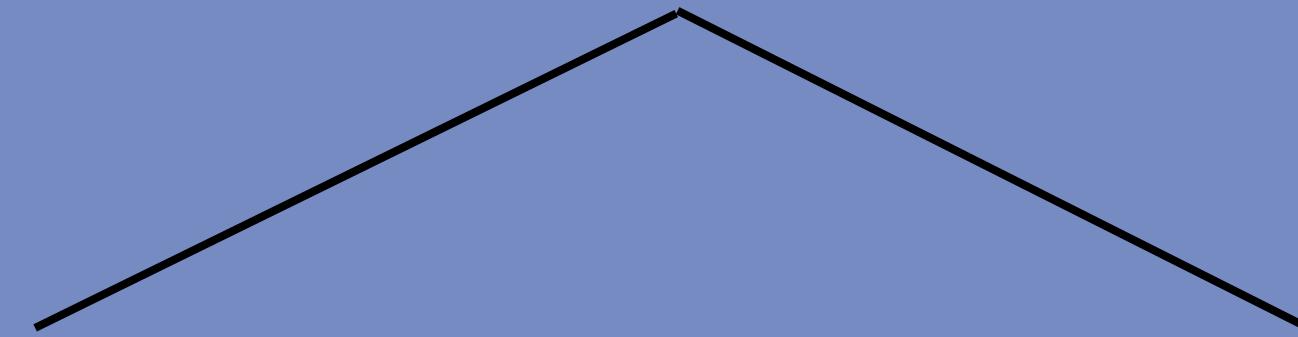
# MODELOS MISTOS



Efeitos fixos

Efeitos aleatórios

# MODELOS MISTOS

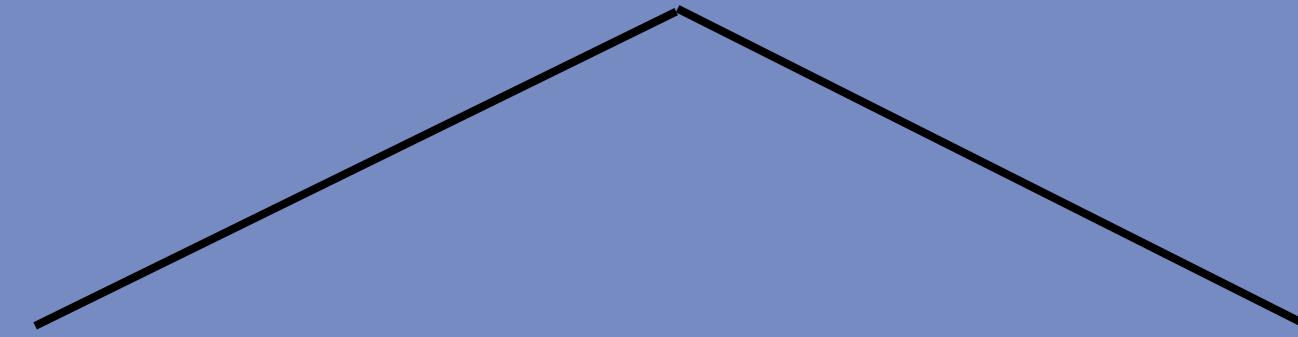


## Efeitos fixos

são aqueles fatores cujos níveis são  
selecionados por um processo não  
aleatório (tratamento) ou consistem em  
toda a população de níveis possíveis

## Efeitos aleatórios

# MODELOS MISTOS



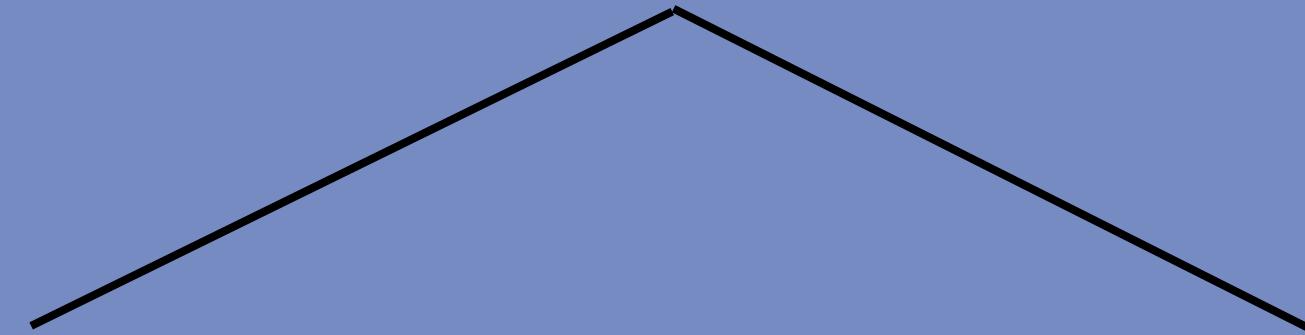
## Efeitos fixos

são aqueles fatores cujos níveis são selecionados por um processo não aleatório (tratamento) ou consistem em toda a população de níveis possíveis

## Efeitos aleatórios

um fator onde seus níveis consistem em uma amostra aleatória de níveis de uma população de níveis possíveis

# MODELOS MISTOS



## Efeitos fixos

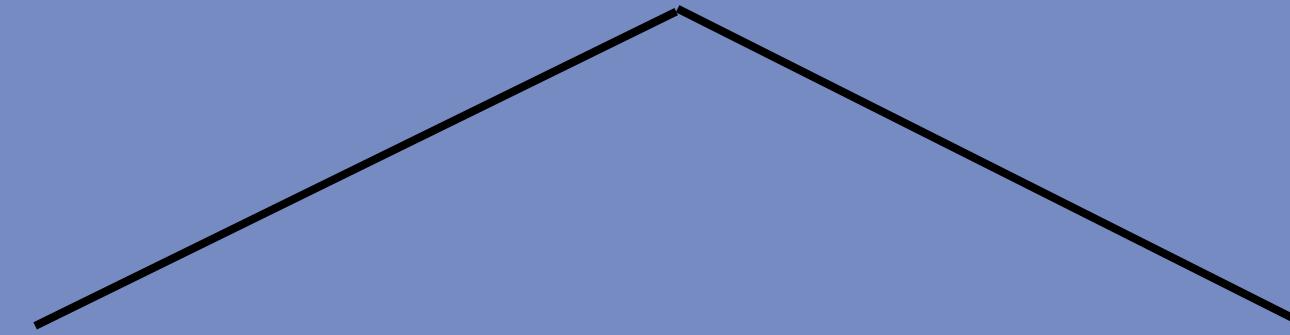
são aqueles fatores cujos níveis são selecionados por um processo não aleatório (tratamento) ou consistem em toda a população de níveis possíveis

## Efeitos aleatórios

um fator onde seus níveis consistem em uma amostra aleatória de níveis de uma população de níveis possíveis

Média

# MODELOS MISTOS



## Efeitos fixos

são aqueles fatores cujos níveis são selecionados por um processo não aleatório (tratamento) ou consistem em toda a população de níveis possíveis

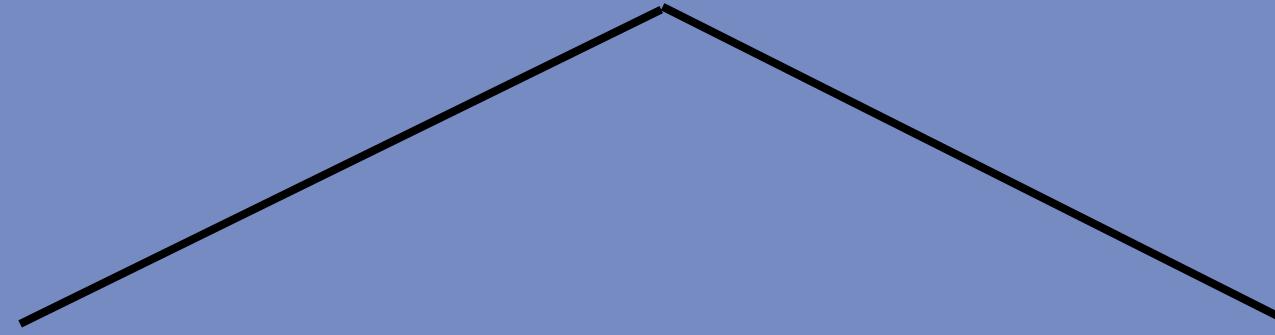
## Efeitos aleatórios

um fator onde seus níveis consistem em uma amostra aleatória de níveis de uma população de níveis possíveis

Média

Variância

# MODELOS MISTOS



## Efeitos fixos

são aqueles fatores cujos níveis são selecionados por um processo não aleatório (tratamento) ou consistem em toda a população de níveis possíveis

## Efeitos aleatórios

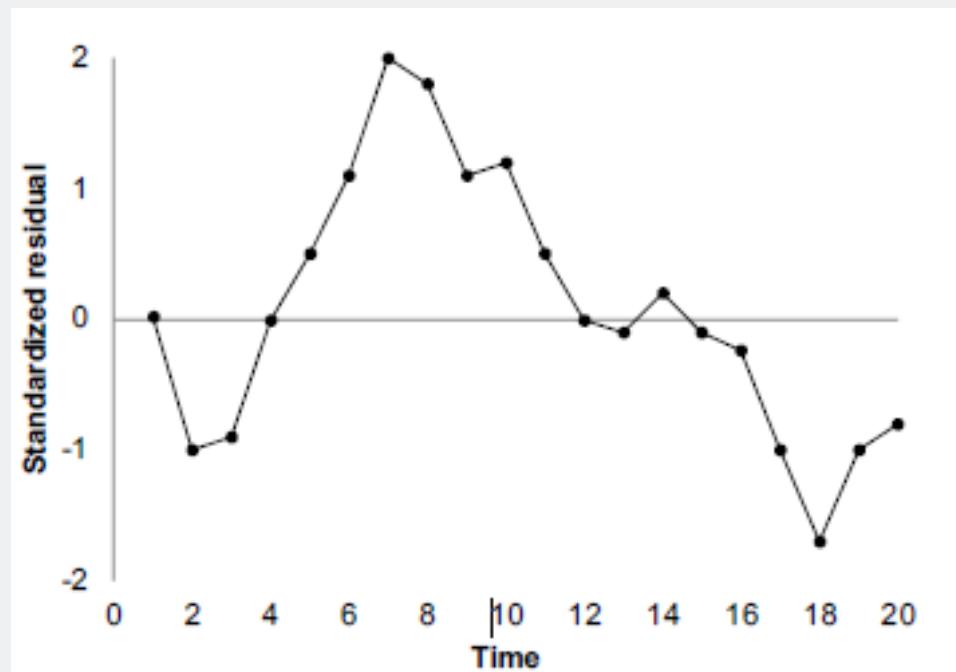
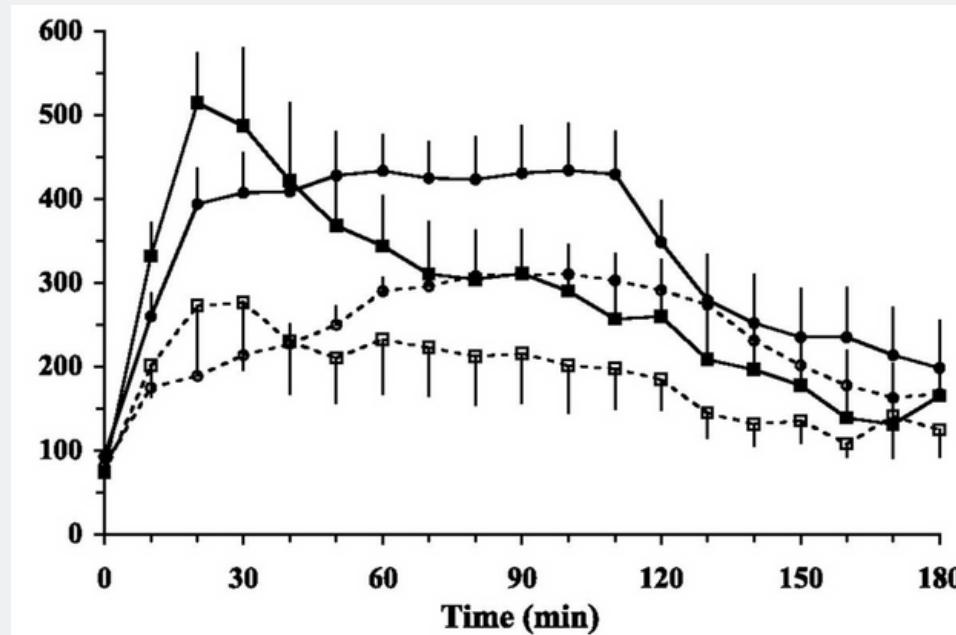
um fator onde seus níveis consistem em uma amostra aleatória de níveis de uma população de níveis possíveis

Média

Variância

E aqui que podemos explorar a correlação e a heterogeneidade

# JUNTANDO TUDO



Medidas repeditas são feitas na mesma unidade experimental (mas em todas as unidades ao mesmo tempo), e essas observações provavelmente terão seus resíduos correlacionados com períodos de tempo.

# JUNTANDO TUDO

Medidas feitas próximas umas das outras no tempo  
são muitas vezes mais similares  
entre si

Rep	Trat.	Tempo 1	Tempo 2	Tempo (n)
1	A			
	B			
	C			

Alta correlação Baixa correlação

# Estrutura de covariância

O resíduo consiste em uma matriz de valores:

Encontrar a melhor estrutura de covariância é parte do trabalho de modelar MR.

# Estrutura de covariância

O resíduo consiste em uma matriz de valores:

Encontrar a melhor estrutura de covariância é parte do trabalho de modelar MR.

Identity

$$\sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

Diagonal

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4^2 \end{bmatrix}$$

Banded

$$\begin{bmatrix} \sigma^2 & \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1^2 & \sigma^2 & \sigma_1^2 & \sigma_2^2 \\ \sigma_2^2 & \sigma_1^2 & \sigma^2 & \sigma_1^2 \\ \sigma_3^2 & \sigma_2^2 & \sigma_1^2 & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

Compound Symmetry

$$\sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho & \rho \\ \rho & \rho & 1 & \rho \\ \rho & \rho & \rho & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_2^2 & \sigma_2^2 \\ \sigma_2^2 & \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_2^2 \\ \sigma_2^2 & \sigma_2^2 & \sigma_1^2 & \sigma_2^2 \\ \sigma_2^2 & \sigma_2^2 & \sigma_2^2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix}$$

Autocorrelation 1<sup>st</sup> order

$$\sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho^1 & \rho^2 & \rho^3 \\ \rho^1 & 1 & \rho^1 & \rho^2 \\ \rho^2 & \rho^1 & 1 & \rho^1 \\ \rho^3 & \rho^2 & \rho^1 & 1 \end{bmatrix}$$

Unstructured

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 & \sigma_{13}^2 & \sigma_{14}^2 \\ \sigma_{12}^2 & \sigma_{22}^2 & \sigma_{23}^2 & \sigma_{24}^2 \\ \sigma_{13}^2 & \sigma_{23}^2 & \sigma_{33}^2 & \sigma_{34}^2 \\ \sigma_{14}^2 & \sigma_{24}^2 & \sigma_{34}^2 & \sigma_{44}^2 \end{bmatrix}$$

# Estrutura de covariância

O resíduo consiste em uma matriz de valores:

1

As diagonais são as variações dos resíduos em cada ponto no tempo.

2

Fora da diagonal são as covariâncias entre pontos sucessivos no tempo.

Identity

$$\sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

Diagonal

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4^2 \end{bmatrix}$$

Banded

$$\begin{bmatrix} \sigma^2 & \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1^2 & \sigma^2 & \sigma_1^2 & \sigma_2^2 \\ \sigma_2^2 & \sigma_1^2 & \sigma^2 & \sigma_1^2 \\ \sigma_3^2 & \sigma_2^2 & \sigma_1^2 & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

Compound Symmetry

$$\sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho & \rho \\ \rho & \rho & 1 & \rho \\ \rho & \rho & \rho & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_2^2 & \sigma_2^2 \\ \sigma_2^2 & \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_2^2 \\ \sigma_2^2 & \sigma_2^2 & \sigma_1^2 & \sigma_2^2 \\ \sigma_2^2 & \sigma_2^2 & \sigma_2^2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix}$$

Autocorrelation 1<sup>st</sup> order

$$\sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho^1 & \rho^2 & \rho^3 \\ \rho^1 & 1 & \rho^1 & \rho^2 \\ \rho^2 & \rho^1 & 1 & \rho^1 \\ \rho^3 & \rho^2 & \rho^1 & 1 \end{bmatrix}$$

Unstructured

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 & \sigma_{13}^2 & \sigma_{14}^2 \\ \sigma_{12}^2 & \sigma_{22}^2 & \sigma_{23}^2 & \sigma_{24}^2 \\ \sigma_{13}^2 & \sigma_{23}^2 & \sigma_{33}^2 & \sigma_{34}^2 \\ \sigma_{14}^2 & \sigma_{24}^2 & \sigma_{34}^2 & \sigma_{44}^2 \end{bmatrix}$$

# Estrutura de covariância

1

As diagonais são as variações dos resíduos em cada ponto no tempo.

2

Fora da diagonal são as covariâncias entre pontos sucessivos no tempo.

Identity

$$\sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

As variâncias dos tempos são as mesmas e não existe covariância entre eles

# Estrutura de covariância

1

As diagonais são as variações dos resíduos em cada ponto no tempo.

2

Fora da diagonal são as covariâncias entre pontos sucessivos no tempo.

Diagonal

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4^2 \end{bmatrix}$$

As variâncias de cada tempo são diferentes, mas não tem covariância entre eles

# Estrutura de covariância

1

As diagonais são as variações dos resíduos em cada ponto no tempo.

2

Fora da diagonal são as covariâncias entre pontos sucessivos no tempo.

Unstructured

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 & \sigma_{13}^2 & \sigma_{14}^2 \\ \sigma_{12}^2 & \sigma_{22}^2 & \sigma_{23}^2 & \sigma_{24}^2 \\ \sigma_{13}^2 & \sigma_{23}^2 & \sigma_{33}^2 & \sigma_{34}^2 \\ \sigma_{14}^2 & \sigma_{24}^2 & \sigma_{34}^2 & \sigma_{44}^2 \end{bmatrix}$$

Cada tempo tem uma variância e covariância com os outros.

# Estrutura de covariância

1

As diagonais são as variações dos resíduos em cada ponto no tempo.

2

Fora da diagonal são as covariâncias entre pontos sucessivos no tempo.

Compound Symmetry

$$\sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho & \rho \\ \rho & \rho & 1 & \rho \\ \rho & \rho & \rho & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_2^2 & \sigma_2^2 \\ \sigma_2^2 & \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_2^2 \\ \sigma_2^2 & \sigma_2^2 & \sigma_1^2 & \sigma_2^2 \\ \sigma_2^2 & \sigma_2^2 & \sigma_2^2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix}$$

Cada tempo tem uma variância e covariância igual

# Estrutura de covariância

1

As diagonais são as variações dos resíduos em cada ponto no tempo.

2

Fora da diagonal são as covariâncias entre pontos sucessivos no tempo.

Autocorrelation 1<sup>st</sup> order

$$\sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho^1 & \rho^2 & \rho^3 \\ \rho^1 & 1 & \rho^1 & \rho^2 \\ \rho^2 & \rho^1 & 1 & \rho^1 \\ \rho^3 & \rho^2 & \rho^1 & 1 \end{bmatrix}$$

Variância diferente e covariância diminui quanto mais espaçado estão os tempos

# MENSAGEM CHAVE!

A análise de dados com medidas repetidas requer uma mistura de dados experimentais sólidos, modelagem estatística adequada e experiência prática, pois cada experimento e seus correspondentes conjuntos de dados diferem.

## ANALISANDO NO R

Vamos usar um conjunto de dados simulados de lixiviação. Onde o extrato lixiviado foi coletado de 3 fertilizantes (controle, KCl e K<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>) durante 9 eventos de lixiviação. O experimento é um DBC com 3 blocos.

Fertilizante = 3

Lixiviações = 9

Bloco = 3

Total = 81

GL =

# ANALISANDO NO R

Vamos usar um conjunto de dados simulados de lixiviação. Onde o extrato lixiviado foi coletado de 3 fertilizantes (controle, KCl e K<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>) durante 9 eventos de lixiviação. O experimento é um DBC com 3 blocos.

Fertilizante = 3

Lixiviações = 9

Bloco = 3

Total = 81

GL = (81 - 1) = 80

Fonte de variação	GL
Bloco	
Tratamento	
Resíduo DBC	
Lixiviações	
Trat. x Lixi.	
Resíduo MR	
Total	80

# ANALISANDO NO R

Vamos usar um conjunto de dados simulados de lixiviação. Onde o extrato lixiviado foi coletado de 3 fertilizantes (controle, KCl e K<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>) durante 9 eventos de lixiviação. O experimento é um DBC com 3 blocos.

Fertilizante = 3

Lixiviações = 9

Bloco = 3

Total = 81

GL = (81 - 1) = 80

Fonte de variação	GL
Bloco	2
Tratamento	
Resíduo DBC	
Lixiviações	
Trat. x Lixi.	
Resíduo MR	
Total	80

# ANALISANDO NO R

Vamos usar um conjunto de dados simulados de lixiviação. Onde o extrato lixiviado foi coletado de 3 fertilizantes (controle, KCl e K<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>) durante 9 eventos de lixiviação. O experimento é um DBC com 3 blocos.

Fertilizante = 3

Lixiviações = 9

Bloco = 3

Total = 81

GL = (81 - 1) = 80

Fonte de variação	GL
Bloco	2
Tratamento	2
Resíduo DBC	
Lixiviações	
Trat. x Lixi.	
Resíduo MR	
Total	80

# ANALISANDO NO R

Vamos usar um conjunto de dados simulados de lixiviação. Onde o extrato lixiviado foi coletado de 3 fertilizantes (controle, KCl e K<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>) durante 9 eventos de lixiviação. O experimento é um DBC com 3 blocos.

Fertilizante = 3

Lixiviações = 9

Bloco = 3

Total = 81

GL = (81 - 1) = 80

Fonte de variação	GL
Bloco	2
Tratamento	2
Resíduo DBC	4
Lixiviações	
Trat. x Lixi.	
Resíduo MR	
Total	80

# ANALISANDO NO R

Vamos usar um conjunto de dados simulados de lixiviação. Onde o extrato lixiviado foi coletado de 3 fertilizantes (controle, KCl e K<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>) durante 9 eventos de lixiviação. O experimento é um DBC com 3 blocos.

Fertilizante = 3

Lixiviações = 9

Bloco = 3

Total = 81

GL = (81 - 1) = 80

Fonte de variação	GL
Bloco	2
Tratamento	2
Resíduo DBC	4
Lixiviações	8
Trat. x Lixi.	
Resíduo MR	
Total	80

# ANALISANDO NO R

Vamos usar um conjunto de dados simulados de lixiviação. Onde o extrato lixiviado foi coletado de 3 fertilizantes (controle, KCl e K<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>) durante 9 eventos de lixiviação. O experimento é um DBC com 3 blocos.

Fertilizante = 3

Lixiviações = 9

Bloco = 3

Total = 81

GL = (81 - 1) = 80

Fonte de variação	GL
Bloco	2
Tratamento	2
Resíduo DBC	4
Lixiviações	8
Trat. x Lixi.	16
Resíduo MR	
Total	80

# ANALISANDO NO R

Dois  
"tamanhos"  
de  
unidades  
experimentais

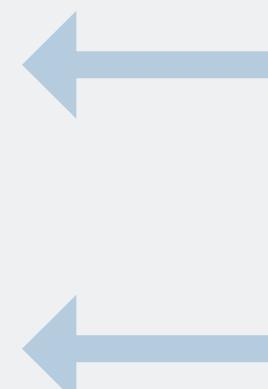
Fonte de variação	GL
Bloco	2
Tratamento	2
Resíduo DBC	4
Lixiviações	8
Trat. x Lixi.	16
Resíduo MR	48
Total	80

# ANALISANDO NO R

Dois  
"tamanhos"  
de  
unidades  
experimentais

DBC

Numerador  
Denominador



Fonte de variação	GL
Bloco	2
Tratamento	2
Resíduo DBC	4
Lixiviações	8
Trat. x Lixi.	16
Resíduo MR	48
Total	80

# ANALISANDO NO R

Dois  
"tamanhos"  
de  
unidades  
experimentais

DBC

Numerador  
Denominador

MR

Numerador  
Denominador

Fonte de variação	GL
Bloco	2
Tratamento	2
Resíduo DBC	4
Lixiviações	8
Trat. x Lixi.	16
Resíduo MR	48
Total	80