Von der Mathematischen Biologie zur Systembiologie

(Vorlesung Prof. Dr. J. Timmer)

Aufgabenzettel Nr. 2

Aufgabe 3 (Übung): Brownsche Bewegung

Das denkbar einfachste Hamiltonsche System lautet $\dot{x}(t) = 0$. Mittels der Taylor-Entwicklung $x(t + \Delta t) = x(t) + \dot{x}(t) \cdot \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)$ erhält man eine Diskretisierung in der Zeit

$$\dot{x}(t) = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t). \tag{1}$$

Darauf basierend erhält man für das stochastisch gestörte System: $\dot{x}(t) = \varepsilon(t)$ in erster Ordnung der Iterationsvorschrift[1] der Brownschen Bewegung

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \varepsilon(t), \qquad \text{mit} \quad \varepsilon(t) \propto N(0, 1). \tag{2}$$

i.) Wie hängt die Varianz des Prozesses von der Zeit ab? Simulieren Sie hierzu n Zeitreihen $x_i(t)$ mit $i = \{1, 2, 3, ..., n\}$. Schätzen Sie die Varianz durch

$$\widehat{\text{var}}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2(t). \tag{3}$$

ii.) Welches Skalierungsgesetz ergibt sich? Warum?

Aufgabe 4 (Übung): Stochastisch gestörter harmonischer Oszillator

Untersuchen Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 \cdot x(t) + \sigma \cdot \varepsilon(t), \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{und} \quad \varepsilon(t) \propto N(0, 1). \tag{4}$$

i.) Integrieren Sie dazu die Differentialgleichung (4) für kleine Zeitschritte $\Delta t = 0,01 \cdot T$ und summieren Sie das dynamische Rauschen. Wählen Sie sowohl Startwerte als auch σ klug!

ii.) Ermitteln Sie das Skalierungsgesetz der Varianz (3) analog zur vorherigen Aufgabe.

[1] Dies ist nur die halbe Wahrheit! In Wirklichkeit ist es komplizierter, nämlich $x(t + \Delta t) = x(t) + \sqrt{\Delta t} \cdot \varepsilon(t)$.

Aufgabe 5 (Übung): Stochastisch gestörtes Lokta-Volterra System

i.) Untersuchen Sie analog das Lotka-Volterra System

$$\dot{x}(t) = a \cdot x(t) - b \cdot x(t) \cdot y(t), \tag{5}$$
$$\dot{y}(t) = c \cdot x(t) \cdot y(t) - d \cdot y(t) \tag{6}$$

mit den Parametern $a = 1$, $b = c = 0,1$, $d = \frac{1}{3}$ und einer geeigneten Störung $\varepsilon(t)$.

ii.) Untersuchen Sie analog das erweiterte Lotka-Volterra System

$$\dot{x}(t) = a \cdot x(t) \cdot \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - b \cdot \frac{x(t)}{x(t) + S} \cdot y(t), \tag{7}$$
$$\dot{y}(t) = c \cdot \frac{x(t)}{x(t) + S} \cdot y(t) - d \cdot y(t), \tag{8}$$

mit den Parametern $a = b = c = 1$; $d = \frac{1}{3}$; $K = 30$, $S = 10$ und einer geeigneten Störung $\varepsilon(t)$.

Aufgabe 6 (Übung): Stochastisch gestörter van der Pol Oszillator

Was ergibt sich für den stochastisch gestörten van der Pol Oszillator?