Von der mathematischen Biologie zur Systembiologie

(Vorlesung Prof. Dr. J. Timmer)

Aufgabenzettel Nr. 1

Bemerkung 1: Pakete in R

Neben dem Standardpaket *base*, das die meisten einfachen Funktionen mitbringt und Teil des Grundsystems ist, gibt es weitere Pakete, die man je nach Bedarf nutzen kann. Eine Liste der Pakete findet man hier: `http://cran.r-project.org/web/packages/`. Eine Einführung in den Umgang mit Paketen finden Sie z.B. in Kapitel 13 der „An Introduction to R“. Das für diesen Kurs wichtige Paket ist *deSolve*: `http://cran.r-project.org/web/packages/deSolve/index.html`. Es stellt alles zur numerischen Lösung von Differentialgleichungssystemen bereit.

Bemerkung 2: Graphik in R

R bietet eine sehr breite Palette an Daten zu visualisieren. Die für Sie wichtigen Funktionen sind `plot()` und `matplot()`. Für eine visuell ansprechende Ausgabe sorgen darüber hinaus `par()` und `legend()`.

Aufgabe 1 (Übung): Das Lotka-Volterra System (simulativ)

Das Lotka-Volterra System ist durch das folgende Differentialgleichungen gegeben:

$$\dot{x}(t) = a \cdot x(t) - b \cdot x(t) \cdot y(t), \tag{1}$$

$$\dot{y}(t) = c \cdot x(t) \cdot y(t) - d \cdot y(t). \tag{2}$$

Dabei ist $\mathbb{R} \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$ und analog $\mathbb{R} \ni t \mapsto y(t) \in \mathbb{R}$, und die Parameter $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}_+^4$ sind alle positiv.

i.) Integrieren Sie das System für den Parametersatz $a = 1$; $b = c = 0,1$ und $d = \frac{1}{3}$ und für unterschiedliche Startwerte $x(t = 0)$ und $y(t = 0)$. Betrachten Sie die Lösungen sowohl im Konfigurations- als auch im Phasenraum.

ii.) Das *erweiterte Lotka-Volterra System* hat die Form

$$\dot{x}(t) = a \cdot x(t) \cdot \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - b \cdot \frac{x(t)}{x(t) + S} \cdot y(t), \tag{3}$$

$$\dot{y}(t) = c\frac{x(t)}{x(t) + S} \cdot y(t) - d \cdot y(t), \tag{4}$$

wobei auch die Parameter $K > 0$ und $S > 0$ positiv sind.

Betrachten Sie für den Rest des Aufgabenzettels den speziellen Parametersatz $a = b = c = 1$; $d = \frac{1}{3}$; $K = 30$ und $S = 10$.

Integrieren Sie das erweiterte Lotka-Volterra System für unterschiedliche Startwerte $x(t = 0)$ und $y(t = 0)$, und betrachten Sie die Lösungen sowohl im Konfigurations- als auch im Phasenraum.

iii.) Interpretieren Sie das erweiterte Lotka-Volterra System: Welche Bedeutung haben die darin vorkommenden Parameter?

iv.) Was sind die qualitativen Unterschiede der beiden Systeme?

Aufgabe 2 (Hausaufgabe): Das Lotka-Volterra System (analytisch)

i.) Zeigen Sie, dass das erweiterte Lotka-Volterra System (mit den in Aufgabe 1 ii.) angegebenen Parametern) keine stabilen Fixpunkte hat.

ii.) Zeigen Sie, dass alle Lösungen des erweiterte Lotka-Volterra System beschränkt bleiben indem Sie die Regionen bestimmen in denen $(x(t) + y(t))$ wächst, d.h. in denen $\dot{x}(t) + \dot{y}(t) > 0$ ist. Interpretieren Sie das so erhaltene Ergebnis dann richtig!

iii.) Welche Schlussfolgerung kann man aus dem Poincaré-Bendixon Theorem ziehen?

iv.) Was passiert für den Fall $d = \frac{3}{5}$?