PROBLEMA 8.20 Probar que la función

$$u(x,\ t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

es una solución de la ecuación de onda en una dimensión, dada por (8.1), siempre que f y g sean dos funciones diferenciables de una sola variable.

PROBLEMA 8.21 La temperatura de una barra aislada de longitud l, satisface las condiciones de frontera $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 1$, y la condición inicial $u(x, 0) = \text{sen}\,(\pi x/l)$. Hallar (a) la distribución de temperatura después de un tiempo t, y (b) la temperatura en estado estacionario, es decir, la temperatura en la barra a medida que $t \longrightarrow \infty$.

A. U. Thor

Main Street
Hometown, USA

Solución: $u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$, como la ecuación diferencial de onda posee la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \text{ unidimensional espacial}$$

entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \left(f(x-ct) + g(c+ct)\right)}{\partial x^2} = f_{xx}(x-ct) + g_{xx}(x+ct)$$

por otro lado

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \left(f(x-ct) + g(c+ct)\right)}{\partial t^2} = \frac{\partial\left(-cf_t(x-ct) + cg_t(x+ct)\right)}{\partial t} \\
&= -c\cdot(-c) f_{tt}(x-ct) + c\cdot c g_{tt}(x+ct) = c^2 f_{tt}(x-ct) + c^2 g_{tt}(x+ct) \\
&= c^2\left(f_{tt}(x-ct) + g_{tt}(x+ct)\right)
\end{aligned}$$

de donde

$$f_{xx}(x-ct) + g_{xx}(x+ct) = \frac{1}{c^2}\left(c^2\left(f_{tt}(x-ct) + g_{tt}(x+ct)\right)\right)$$

por lo que

$$f_{xx}(x-ct) + g_{xx}(x+ct) = f_{tt}(x-ct) + g_{tt}(x+ct)$$

que es lo que se quería demostrar.

Solución: Como la ecuación del calor tiene la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}$$

entonces al suponer que el calor se comporta $u(x,t) = \chi(x)\tau(t) + \frac{x}{l}(u(l,t) - u(0,t)) + u(0,t)$, esto es

$$u(x,t) = \chi(x)\tau(t) + \frac{x}{l}(1-0) + 0 = u(x,t) = \chi(x)\tau(t) + \frac{x}{l}$$

entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(\chi(x)\tau(t))}{\partial x^2} = \chi''(x)\tau(t) \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \chi(x)\tau'(t)$$

por lo que

$$\chi''(x)\tau(t) = \chi(x)\tau'(t)$$

luego

$$\frac{\chi''(x)}{\chi(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{\tau'(t)}{\tau(t)} = -\sigma^2$$

por lo que

$$\frac{\chi''(x)}{\chi(x)} = -\sigma^2$$

esto es:

$$\chi''(x) + \sigma^2\chi(x) = 0$$

cuya ecuación característica es:

$$m^2 + \sigma^2 = 0$$

de donde $m = \pm\sigma j$ por lo que

$$\chi(x) = A\cos(\sigma x) + B\sin(\sigma x)$$

como $u(x,t) = \chi(x)\tau(t)$ entonces

$$u(x,t) = (A\cos(\sigma x) + B\sin(\sigma x))\tau(t) + \frac{x}{l}$$

igualmente de las condiciones de frontera se sabe que:

$$u(0,t) = 0 = (A\cos(\sigma(0)) + B\sin(\sigma(0)))\tau(t) = A\tau(t)$$

pero $\tau(t) \neq 0$ por lo que $A = 0$
Por otro lado $u(l,t) = 1$, entonces

$$u(l,t) = 1 = B\sin(\sigma l)\tau(t) + \frac{l}{l} = B\sin(\sigma l)\tau(t) + 1$$

de donde $B\sin(\sigma l)\tau(t) = 0$ pero $\tau(t) \neq 0$ y $B \neq 0$ por lo que

$$\sin(\sigma l) = 0$$

por lo tanto

$$\sigma l = n\pi$$

o sea $\sigma = \dfrac{n\pi}{l}$, luego

$$u_n(x,t) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\tau(t) + \frac{x}{l}$$

Por otro lado $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\tau'(t)}{\tau(t)} = -\sigma^2$ de donde $\tau'(t) + c^2\sigma^2\tau(t) = 0$ cuya ecuación característica esta dada por:

$$m + c^2\sigma^2 = 0$$

o sea $m = -\sigma^2$ de donde

$$\tau(t) = De^{-c^2\sigma^2 t} = De^{-\left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2 t}$$

luego

$$u_n(x,t) = B_n D e^{-\left(\frac{nc\pi}{l}\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + \frac{x}{l}$$

D es absorbido por B_n por lo que

$$u_n(x,t) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} + \frac{x}{l}$$

O mejor aún: Como para cada n hay una solución, entonces la combinacioón lineal de todos ellos tambien es solución, por lo tanto:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)e^{-\left(\frac{nc\pi}{l}\right)^2 t} + \frac{x}{l}$$

Como $u(x,0) = \sin\left(\dfrac{\pi x}{l}\right)$ se tiene que:

$$u(x,0) = \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + \frac{x}{l}$$

por lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) - \frac{x}{l}$$

o sea que

$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l \left(\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) - \frac{x}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

$$\begin{aligned}
\frac{2}{l}\int_0^l \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx &= \frac{2}{l}\frac{1}{2}\int_0^l \left(\cos\left((n-1)\frac{\pi x}{l}\right) - \cos\left((n+1)\frac{x\pi}{l}\right)\right)dx \\
&= \frac{1}{l}\left(\frac{l}{\pi(n-1)}\sin\left((n-1)\frac{\pi x}{l}\right) - \frac{l}{\pi(1+n)}\sin\left((n+1)\frac{x\pi}{l}\right)\right)_0^l \\
&= 0
\end{aligned}$$

PROBLEMA 8.26 Resolver

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \quad \text{para } r < 1, \qquad 0 < \phi < \frac{\pi}{2},$$

con $u(r, 0) = 0, \; \frac{\partial u}{\partial \phi}\left(r, \frac{1}{2}\pi\right) = 0$, y $u(1, \phi) = \phi$.

$$\begin{aligned}
\frac{2}{l}\int_0^l \left(\frac{x}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx &= \frac{2}{l^2}\int_0^l x\sin\left(\frac{\pi}{l}nx\right)\,dx \\
&= \frac{2}{l^2\pi^2n^2}\left(l^2\sin\frac{\pi}{l}nx - \pi lnx\cos\frac{\pi}{l}nx\right)_0^l \\
&= \frac{2}{l^2\pi^2n^2}\left(l^2\sin\frac{\pi}{l}nl - \pi lnl\cos\frac{\pi}{l}nl - \left(l^2\sin\frac{\pi}{l}n0 - \pi ln\left(0\right)\cos\frac{\pi}{l}n0\right)\right) \\
&= \frac{2}{l^2\pi^2n^2}\left(-\pi l^2 n\left(-1\right)^n\right) = -2\frac{\left(-1\right)^n}{\pi n}
\end{aligned}$$

por lo que

$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l \left(\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) - \frac{x}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx = 0 - \left(-2\frac{\left(-1\right)^n}{\pi n}\right) = 2\frac{\left(-1\right)^n}{\pi n}$$

$$\begin{aligned}
u\left(x,t\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)e^{-\left(\frac{nc\pi}{l}\right)^2 t} + \frac{x}{l} \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)e^{-\left(\frac{nc\pi}{l}\right)^2 t} + \frac{x}{l}
\end{aligned}$$

Por último en estado estacionario se consigue que

$$\lim_{t\to\infty} u\left(x,t\right) = \lim_{t\to\infty}\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{10}\frac{\left(-1\right)^n}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)e^{-\left(\frac{nc\pi}{l}\right)^2 t} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$$

Solución: Suponga que $u\left(r,\phi\right) = R\left(r\right)\Phi\left(\phi\right)$ por lo tanto

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = R''\left(r\right)\Phi\left(\phi\right) \qquad \frac{\partial u}{\partial r} = R'\left(r\right)\Phi\left(\phi\right) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = R\left(r\right)\Phi''\left(\phi\right)$$

por lo que:

$$R''\left(r\right)\Phi\left(\phi\right) + \frac{1}{r}R'\left(r\right)\Phi\left(\phi\right) + \frac{1}{r^2}R\left(r\right)\Phi''\left(\phi\right) = 0$$

luego

$$\left(R''\left(r\right) + \frac{1}{r}R'\left(r\right)\right)\Phi\left(\phi\right) = -\frac{1}{r^2}R\left(r\right)\Phi''\left(\phi\right)$$

o mejor aún

$$r^2\left(\frac{R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)}{R(r)}\right)=-\frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)}=K^2$$

por lo que

$$r^2\left(\frac{R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)}{R(r)}\right)=K^2$$

luego

$$r^2R''(r)+rR'(r)=K^2R(r)$$

o lo que es lo mismo

$$r^2R''(r)+rR'(r)-K^2R(r)=0 \qquad \text{ec. dif de Euler}$$

Supongamos que $R(r)=r^m$ de donde $R'(r)=mr^{m-1}$ y $R''(r)=m(m-1)r^{m-2}$ de donde

$$r^2m(m-1)r^{m-2}+rmr^{m-1}-K^2r^m=0$$

$$\left(m^2-m\right)r^m+mr^m-K^2r^m=0$$

$$r^m\left(\left(m^2-m\right)+m-k^2\right)=0$$

como $r\neq 0$ se tiene que:

$$\left(m^2-m\right)+m-K^2=0 \qquad \text{o} \qquad m^2-K^2=0$$

o sea $m=\pm K$ por lo que $R(r)=Ar^K+Br^{-K}$ por lo que

$$u(r,\phi)=R(r)\Phi(\phi)=\left(Ar^K+Br^{-K}\right)\Phi(\phi)$$

por otro lado:

$$-\frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)}=K^2$$

de donde

$$\Phi''(\phi)+K^2\Phi(\phi)=0$$

cuya ecuación caracteística es $h^2+K^2=0$, de donde $h=\pm Kj$ por lo que

$$\Phi(\phi)=C\cos(k\phi)+D\sin(k\phi)$$

luego

$$u(r,\phi)=R(r)\Phi(\phi)=\left(Ar^K+Br^{-K}\right)(C\cos(K\phi)+D\sin(K\phi))$$

con lo cual de las condiciones de borde o frontera se tiene que:

$$u(r,0)=0=\left(Ar^K+Br^{-K}\right)(C\cos(K0)+D\sin(K0))=\left(Ar^K+Br^{-K}\right)C$$

de donde $C=0$ por otro lado $\dfrac{\partial u\left(r,\frac{\pi}{2}\right)}{\partial\phi}=0$ esto es

$$\frac{\partial u\left(r,\frac{\pi}{2}\right)}{\partial\phi}=\left(Ar^K+Br^{-K}\right)\left(KD\cos\left(K\frac{\pi}{2}\right)\right)=0$$

como $KD \neq 0$ entonces $\cos\left(K\frac{\pi}{2}\right) = 0$ de donde $K\frac{\pi}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ por lo que $K = 2n+1$ por lo que

$$u_n(r,\phi) = R(r)\Phi(\phi) = \left(Ar^{2n+1} + Br^{-(2n+1)}\right)\left(D_n \sin((2n+1)\phi)\right)$$

Si $r = 0$

$$u_n(0,\phi) = \left(A0^{2n+1} + B0^{-(2n+1)}\right)\left(D_n \sin((2n+1)\phi)\right)$$

no lo que es no definido ya que $0^{-(2n+1)} = no\ definido$, por lo que $B = 0$

$$u_n(r,\phi) = \left(Ar^{2n+1}\right)\left(D_n \sin((2n+1)\phi)\right)$$

como para cada n existe una solución y para A absorbido por D_n se tiene que:

$$u(r,\phi) = \sum_{n=0} D_n r^{2n+1} \sin((2n+1)\phi)$$

De la última condición de frontera ase tiene que:

$$u(1,\phi) = \phi = \sum_{n=0} D_n \sin((2n+1)\phi)$$

luego

$$\begin{aligned}
D_n &= \frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi \sin((2n+1)\phi)\,d\phi = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi \sin((2n+1)\phi)\ d\phi \\
&= -\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2n+1)^2}\left(\phi\cos(\phi+2n\phi) - \sin(\phi+2n\phi) + 2n\phi\cos(\phi+2n\phi)\right)_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2n+1)^2}\left[\left(\frac{\pi}{2}\cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) + 2n\frac{\pi}{2}\cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right)\right. \\
&\quad \left. - \left(0\cos((2n+1)0) - \sin((2n+1)0) + 2n0\cos((2n+1)0)\right)\right] \\
&= -\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2n+1)^2}\left(0 - (-1)^{n+1} - 0\right) = \frac{4}{\pi(2n+1)^2}(-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

Por lo que

$$u(r,\phi) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2} r^{2n+1}\sin((2n+1)\phi)$$