

# Potencial Gravitacional de Yukawa en Gravedad $f(R)$

Julián Jiménez-Cárdenas

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

`juojimenezca@unal.edu.co`

- 1 Introducción
- 2 Acercamiento Newtoniano al problema de dos cuerpos bajo el potencial de Yukawa
- 3 Ecuaciones de las órbitas
  - Aproximación a orden  $O(x^2)$
  - Aproximación a orden  $O(x^3)$
- 4 Precesión en el Potencial de Yukawa
- 5 Referencias

# Modificación de la ley de Newton

Una manera de aproximarse al problema de la materia y energía oscura es a través de una modificación de la ley de Newton. Tal modificación surge en el límite de campo débil de algunos modelos de gravedad.

## Modificación de Yukawa

Generalización de la acción de Einstein-Hilbert:

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int f(R) \sqrt{-g} d^4x \quad (1)$$

$g = \det(g_{\mu\nu})$ ,  $\kappa = 8\pi Gc^{-4}$ . En el límite de campo débil, el potencial modificado de Newton toma la forma[1]

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{(1+\delta)r} (1 + \delta e^{-r/\lambda}) \quad (2)$$

# Modificación de Yukawa

Donde  $\delta$  es la corrección de Yukawa y  $\lambda$  es la escala a la cual la fuerza de Yukawa actúa.

$$\lambda = \lambda_c = \frac{hc}{m_g} \quad (\text{Longitud de onda de Compton}[2])$$

## Parámetros de Yukawa y el Lagrangiano $f(R)$ [3]

$$\delta = \left. \frac{df(R)}{dR} \right|_{R=R_0} - 1, \quad \lambda = \sqrt{-6 \left. \frac{d^2 f(R)}{dR^2} \right|_{R=R_0} \left( \left. \frac{df(R)}{dR} \right|_{R=R_0} \right)^{-1}}$$

# Ecuaciones del Movimiento y Energía total

## Ecuaciones del Movimiento

En coordenadas polares,  $(r, \varphi)$ , y con respecto al centro de masa, las ecuaciones del movimiento son

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{\partial\Phi(r)}{\partial r} \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0 \quad (4)$$

## Energía Total

$$E_T = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{GMm}{(1+\delta)r}(1 + \delta e^{-r/\lambda}) \quad (5)$$

donde  $\mu = \frac{Mm}{m+M}$  es la masa reducida.

# Conservación del momento angular en la Energía

Se puede usar el momento angular del sistema para reescribir la energía total.

$$E_T = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GMm}{(1+\delta)} \frac{(1 + \delta e^{-r/\lambda})}{r}$$

## Potencial efectivo

$$V_{\text{eff}}(r) := \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GMm}{(1+\delta)r} - \frac{GMm\delta e^{-r/\lambda}}{(1+\delta)r} \quad (6)$$

Algunas consideraciones sobre el potencial efectivo son las siguientes:

- $\delta \neq -1$ .
- Si  $\delta$  toma valores negativos, el segundo término permanece atractivo mientras  $\delta < -1$ , y el último término se vuelve repulsivo.
- Si  $\delta < -1$ , el segundo término se vuelve repulsivo y el tercer término sigue atractivo.
- Si  $\delta > 0$ , el segundo y tercer término son atractivos.

# Potencial modificado de Newton

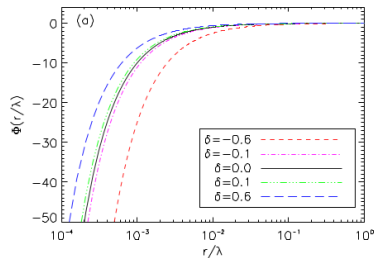
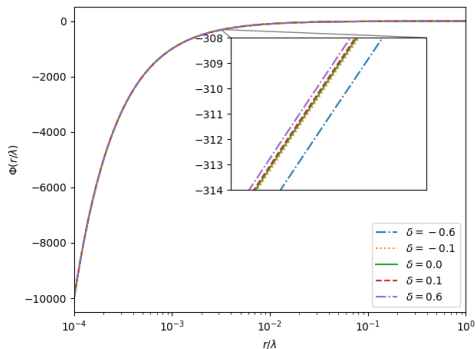


Figura 1 : De derecha a izquierda: Recreación del potencial modificado de Newton en Python y figura 1 en [4].



# Potencial efectivo

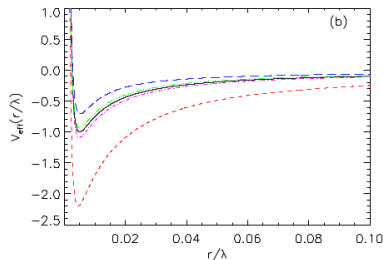
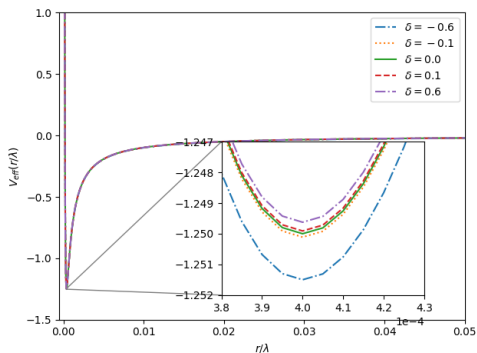


Figura 2 : De derecha a izquierda: Recreación del potencial efectivo en Python y figura 1 en [4].

# Mínimo del potencial efectivo I

Si se deriva la expresión del potencial efectivo y se iguala a cero para hallar los puntos críticos de esta función, se obtiene la expresión

$$\frac{L^2}{\mu r_{crit}^3} = \frac{GMm(\delta e^{-r_{crit}/\lambda} + 1)}{\delta + 1} + \frac{\delta GMm e^{-r_{crit}/\lambda}}{(1 + \delta)\lambda} r_{crit}. \quad (7)$$

La segunda derivada da

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V_{eff}(r)}{dr^2} = & \frac{3L^2}{\mu r^4} - \frac{2GMm}{(1 + \delta)r^3} (1 + \delta e^{-r/\lambda}) - \frac{2GMm\delta e^{-r/\lambda}}{\lambda(1 + \delta)r^2} \\ & - \frac{GMm\delta e^{-r/\lambda}}{\lambda^2(1 + \delta)r}. \end{aligned} \quad (8)$$

## Mínimo del potencial efectivo II

Evaluando esta última expresión en  $r = r_{crit}$  y usando la expresión que determina  $r_{min}$ , se simplifica la forma de la segunda derivada

$$\left. \frac{d^2 V_{eff}(r)}{dr^2} \right|_{r=r_{crit}} = \frac{GMme^{-r_{crit}/\lambda}}{(\delta + 1)r_{crit}^3} \left[ \delta \left( 1 + \frac{r_{crit}}{\lambda} - \frac{r_{crit}^2}{\lambda^2} \right) + e^{r_{crit}/\lambda} \right] \quad (9)$$

Para garantizar que este punto crítico es efectivamente un mínimo en el potencial, debe ocurrir que

$$g(x) \equiv \frac{\delta(1 + x - x^2) + e^x}{\delta + 1} > 0, \quad (10)$$

con  $x = r_{crit}/\lambda$ .

# Mínimo del potencial efectivo III

A minimum in the effective potential exists if the following condition is satisfied

$$g(x) \equiv \delta(-x^2 + x + 1) + e^x > 0, \quad (12)$$

where we have defined  $x \equiv r/\lambda$ . Eq. (12) is satisfied in the following cases: (i)  $\delta > -1$  for  $x \rightarrow 0$ , (ii)  $\delta > -e$  for  $x \rightarrow 1$ , and (iii)  $\forall \delta$  in the limit  $x \rightarrow \infty$ . Let us notice

Figura 3 : Definición de  $g(x)$  en [4].

$$r \ll \lambda, x \rightarrow 0$$

El caso en el que  $r \ll \lambda$  es la configuración común de un sistema astrofísico cuya dinámica ocurre a escalas menores que la longitud de onda del gravitón. Es posible expandir la exponencial en series de potencias:

$$e^{\pm x} \approx 1 \pm x + \frac{x^2}{2} + O(x^3) \quad (11)$$

Reemplazando esta aproximación en el potencial  $\Phi(r)$ , se obtiene

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{GM\delta}{\lambda(1+\delta)} + \frac{GM\delta r}{2\lambda^2(1+\delta)}. \quad (12)$$

El primer término es el potencial Newtoniano, el segundo un corrimiento en la energía.

$$r \ll \lambda, x \rightarrow 0 \parallel$$

### Quinta fuerza

El tercer término genera una aceleración radial constante, que se puede escribir como

$$a_{corr} = -\frac{a^* \delta}{2(1 + \delta)} \frac{r^{*2}}{\lambda^2}$$

donde  $a^*$  es la aceleración Newtoniana de un objeto a una distancia  $r^*$ .

El mínimo (en caso de que  $g(x) > 0$ ) para los órdenes  $O(x^2)$  y  $O(x^3)$  se puede calcular explícitamente, bajo la condición de que

$$\left. \frac{dV(r)}{dr} \right|_{r=r_{min}} = 0.$$

$O(x^2)$ 

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GMm}{(1+\delta)r} - \frac{GMm\delta}{(1+\delta)r} \left(1 - \frac{r}{\lambda}\right), \quad (13)$$

$$r_{\text{min}} = \frac{L^2}{\mu GMm}. \quad (14)$$

El mínimo coincide con el del potencial efectivo, y su valor está corrido respecto al del potencial efectivo Newtoniano:

$$V_{\text{eff}}(r_{\text{min}}) = -\frac{GMm}{2} \left( \frac{G\mu Mm}{L^2} - \frac{2\delta}{\lambda(1+\delta)} \right). \quad (15)$$

$O(x^3)$ 

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GMm}{r} + \frac{\delta GMm}{\lambda(1+\delta)} - \frac{\delta GMmr}{2(\delta+1)\lambda^2}. \quad (16)$$

Cuando se deriva el último término, que va como  $\delta/\lambda^2$ , debido a que se trabaja con el régimen  $\delta \ll 1$  (pequeñas desviaciones del caso Newtoniano), el corrimiento de  $r_{\min}$  es despreciable.

El potencial efectivo es en este punto:

$$V_{\text{eff}}(r_{\min}) = -\frac{GMm}{2} \left( \frac{G\mu Mm}{L^2} - \frac{2\delta}{\lambda(1+\delta)} \right) - \frac{L^2\delta}{2(1+\delta)\lambda^2\mu}. \quad (17)$$



## Aproximación a orden $O(x^2)$ I

Se usa la conservación del momento angular para escribir

$$\dot{r} = \dot{\varphi} \frac{dr}{d\varphi} = \frac{L}{\mu r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{L}{\mu} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r} \right). \quad (18)$$

Entonces, a segundo orden, la energía se puede reescribir como

Energía total a segundo orden

$$E_T = \frac{L^2}{2\mu} \left( \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r} \right) \right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GMm}{r} + \frac{\delta GMm}{(1+\delta)\lambda}. \quad (19)$$

De aquí se puede deducir la siguiente ecuación diferencial

$$(u')^2 + u^2 - 2\beta_0 u = \beta_1 \quad (20)$$

Donde  $u = 1/r$ ,  $u' = \frac{d(1/r)}{d\varphi}$  y

$$\gamma = GMm; \quad \beta_0 = \frac{\mu\gamma}{L^2}; \quad \beta_1 = \frac{2\mu E_T}{L^2} - \frac{2\mu\gamma}{L^2\lambda} \frac{\delta}{1+\delta}. \quad (21)$$

## Aproximación a orden $O(x^2)$ II

Derivando nuevamente la ecuación diferencial, se obtiene

$$u'(u'' + u - \beta_0) = 0. \quad (22)$$

Se buscan soluciones Keplerianas, dado que la energía es casi la misma que en el caso Kepleriano, de modo que se hace la suposición

$$u \equiv \frac{1}{r} = \frac{1}{l}(1 + \epsilon \cos \varphi),$$

donde  $l$  es el parámetro de la elipse y  $\epsilon$  la excentricidad. Ingresando esta suposición en las ecuaciones diferenciales, se obtiene

$$l = \frac{1}{\beta_0} \quad (23)$$

$$\epsilon^2 = 1 + l^2 \beta_1 \quad (24)$$

## Aproximación a orden $O(x^2)$ III

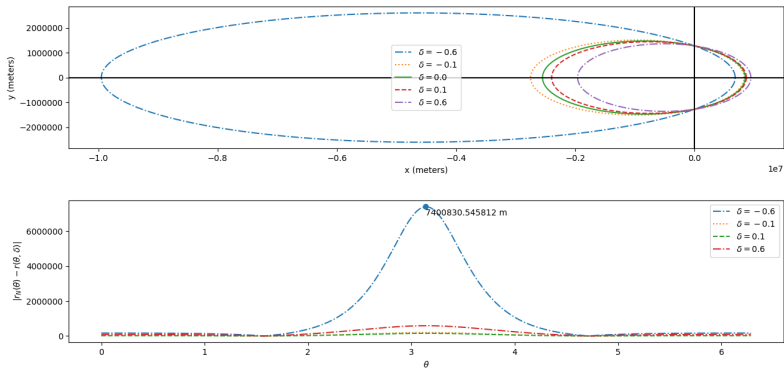
En términos de las constantes del movimiento, la excentricidad queda como

$$\epsilon^2 = 1 - \frac{2L^2}{\mu\gamma} \frac{\delta}{(1+\delta)\lambda} + \frac{2E_T L^2}{\mu\gamma^2}. \quad (25)$$

Cuando  $\delta = 0$ , se recupera el valor Newtoniano

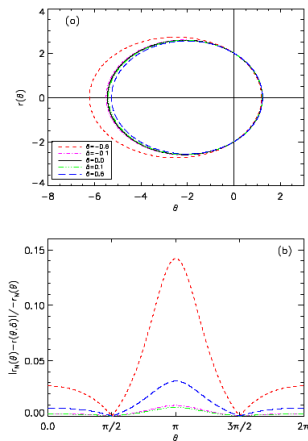
$$\epsilon^2 = 1 + \frac{2E_T L^2}{\gamma^2 \mu}.$$

# Aproximación a orden $O(x^2)$ IV



**Figura 4 :** Ilustración del efecto del potencial gravitacional modificado sobre los parámetros orbitales.

# Aproximación a orden $O(x^2)$ V



**Figura 5 :** Ilustración del efecto del potencial gravitacional modificado sobre los parámetros orbitales[4].

## Aproximación a orden $O(x^3)$ I

A tercer orden, la ecuación diferencial procedente de la energía adquiere un nuevo término

$$(u')^2 + u^2 - 2\beta_0 u - \beta_2 \frac{1}{u} = \beta_1, \quad (26)$$

donde  $\beta_0, \beta_1$  son las mismas constantes del caso anterior, y

$$\beta_2 = \frac{\mu\gamma\delta}{L^2\lambda^2(1+\delta)}$$

Tomando la derivada de la ecuación diferencial,

$$u'(u'' + u + \frac{\beta_2}{2u^2} - \beta_0) = 0 \quad (27)$$

se introduce nuevamente  $u \equiv 1/r = (1 + \epsilon \cos \varphi)/l$ , pero en este caso se evalúa para  $\varphi = 0, \varphi = \pi$ , obteniendo el sistema de ecuaciones diferenciales

Sistema para  $l$  y  $\epsilon$

$$\epsilon^2(1 - l\beta_0) + 2\epsilon(1 - l\beta_0) - l\beta_0 + \frac{l^3\beta_2}{2} + 1 = 0 \quad (28)$$

$$\epsilon^2(1 - l\beta_0) - 2\epsilon(1 - l\beta_0) - l\beta_0 + \frac{l^3\beta_2}{2} + 1 = 0 \quad (29)$$

Restando ambas ecuaciones, se obtiene que

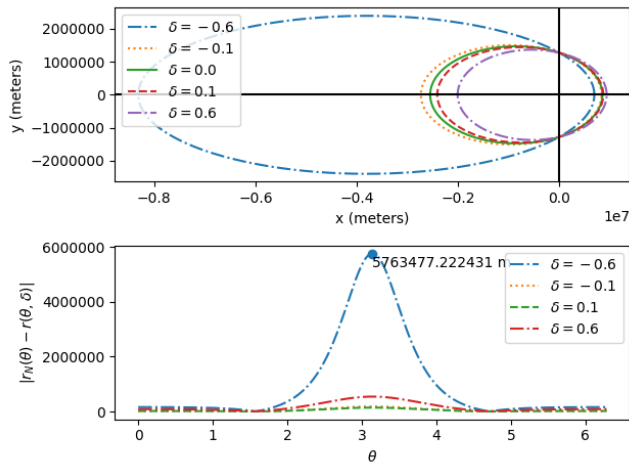
$$l = \frac{1}{\beta_0}.$$

Introduciendo ahora nuestra suposición para  $u$  en la primera ecuación diferencial y evaluando nuevamente, en  $\varphi = 0, \pi$ , se obtiene la excentricidad,

$$\epsilon^2 = 1 + l^2\beta_1 + l^3\beta_2,$$

resultado distinto al calculado en el artículo.

# Aproximación a orden $O(x^3)$ III



**Figura 6 :** Ilustración del efecto del potencial gravitacional modificado sobre los parámetros orbitales,  $O(x^3)$ [4].



# Aproximación a orden $O(x^3)$ IV

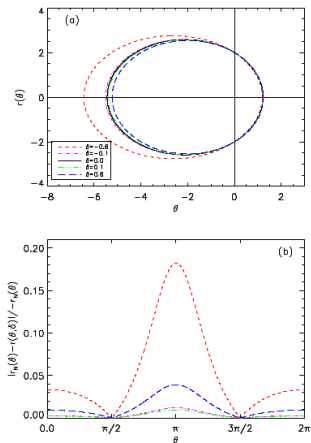


Figura 7 : Ilustración del efecto del potencial gravitacional modificado sobre los parámetros orbitales,  $O(x^3)[4]$ .

# Precesión en el potencial de Yukawa I

Para el hallar corrimiento en el periastro debido al potencial de Yukawa, se estudian pequeñas perturbaciones de la órbita circular. Considere primero la energía total

$$(u')^2 + u^2 + \frac{g(u)}{L^2} = \frac{2\mu E_T}{L^2} - \frac{2\mu\gamma}{L^2\lambda} \frac{\delta}{1+\delta} \quad (30)$$

$g(u)$  refiere a la interacción gravitacional. Se impone una órbita cerrada, con una distancia mínima y máxima al centro

$$r_-|_{\varphi=0} = a(1 - \epsilon) \text{ y } r_+|_{\varphi=\pi} = a(1 + \epsilon)$$

$a$  es el semieje mayor de la órbita. Estos valores corresponden a

$$u_0 = \frac{1}{r_-} \text{ y } u_1 = \frac{1}{r_+}.$$

## Precesión en el potencial de Yukawa II

Al ser máximo y mínimo, se satisface que  $u'|_{u=u_0} = u'|_{u=u_1} = 0$ .  
Evaluando la energía en estos puntos,

$$u_0^2 + \frac{g(u_0)}{L^2} = \frac{2\mu E_T}{L^2} - \frac{2\mu\gamma}{L^2\lambda} \frac{\delta}{1+\delta} \quad (31)$$

$$u_1^2 + \frac{g(u_1)}{L^2} = \frac{2\mu E_T}{L^2} - \frac{2\mu\gamma}{L^2\lambda} \frac{\delta}{1+\delta} \quad (32)$$

De las cuales se obtiene que

$$L^2 = \frac{g(u_0) - g(u_1)}{u_1^2 - u_0^2} \quad (33)$$

## Precesión en el potencial de Yukawa III

$$E_T = \frac{u_1^2 g(u_0) - u_0^2 g(u_1)}{2\mu(u_1^2 - u_0^2)} + \frac{\gamma}{\lambda} \frac{\delta}{1 + \delta} \quad (34)$$

Despejando  $u'$  en la ecuación de la energía, se obtiene

$$u' = \sqrt{G(u_0, u_1, u)}, \quad (35)$$

donde  $G(u_0, u_1, u)$  es

$$G(u_0, u_1, u) = \frac{g(u_0)(u_1^2 - u^2) + g(u_1)(u^2 - u_0^2) - (u_1^2 - u_0^2)g(u)}{g(u_0) - g(u_1)}. \quad (36)$$

El ángulo recorrido para ir de  $r_-$  a  $r_+$  será

$$\varphi(r_+) - \varphi(r_-) = \int_{u_0}^{u_1} G(u_0, u_1, u)^{-1/2} du \quad (37)$$

# Precesión en el potencial de Yukawa IV

La precesión por revolución se puede ver como

$$\omega = 2|\varphi(r_+) - \varphi(r_-)| - 2\pi \quad (38)$$

**A orden**  $O(x^2)$ ,  $g(u) = -2\mu\gamma u = 2\mu\Phi_N(1/u)$ , donde  $\Phi_N(1/u)$  es el potencial Newtoniano. Por comparación, no hay precesión. Sin embargo, **a orden**  $O(x^3)$  se tiene que

$$g(u) = 2\mu\Phi_N(1/u) - \frac{\mu\gamma\delta}{\lambda^2(1+\delta)} \frac{1}{u}$$

Para resolver la integral que da el ángulo recorrido, se hace el cambio de variables

$$u_1 = u_0 + \eta, \quad u = u_0 + \eta v, \quad \text{con } 0 < v < 1. \text{ Así,}$$

$$\Delta\varphi \equiv \varphi(r_+) - \varphi(r_-) = \eta \int_0^1 g(u_0, u_0 + \eta, \lambda, \delta, u_0 + \eta v) dv, \quad (39)$$

$$\text{donde } g(u_0, u_0 + \eta, \lambda, \delta, u_0 + \eta v) = \frac{1}{\sqrt{G(u_0, u_0 + \eta, \lambda, \delta, u_0 + \eta v)}}.$$

- [1] S. Capozziello, M. De Laurentis, Annalen der Physik 524, 545 (2012)
- [2] K. Lee, F. A. Jenet, R. H. Price, N. Wex, M. Kramer Astrophys. J. 722, 1589-1597 (2010)
- [3] S. Capozziello, M. De Laurentis, Phys. Rept. 509, 167 (2011).
- [4] I. Martino, R. Lazkoz. Analysis of the Yukawa gravitational potential in  $f(R)$  gravity I: semiclassical periastron advance.