1. Tome $X = S^1 \cup ([3,4]\times[3,4])$. Considere además $x_1 \in S^1$ y $x_2 \in [3,4]\times[3,4]$.
Sabemos de clase que $\pi_1(X, x_1) = \pi_1(S^1, x_1) \cong \mathbb{Z}$, y como $[3,4]\times[3,4]$ es un convexo en $\mathbb{R}^2$, $\pi_1(X, x_2) = \pi_1([3,4]\times[3,4]) = \{e\}$.

Vemos claramente que $\pi_1(X, x_1)$ no puede ser isomorfo a $\pi_1(X, x_2)$, porque no existe siquiera un mapa inyectivo $f : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_2)$.

2. No existe. Supongamos por contradicción que existiese una retracción r de este sólido $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1\}$ a su frontera $\partial X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1\}$.
Entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} \partial X \arrow[r, "Id_{\partial X}"] \arrow[d, "i"'] & \partial X \\ X \arrow[ur, "r"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta, con $i : \partial X \to X$ la función inclusión.
Considere ahora la función proyección

$$P_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \mapsto (x,y)$$, continua.

Si componemos esta función con las funciones de nuestro diagrama, obtenemos

$$\begin{tikzcd} \partial X \arrow[r, "P_{\mathbb{R}^2}"] & S^1 \arrow[d, "i_{S^1}"] \\ & D^2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "r"] & \partial X \arrow[r, "P_{\mathbb{R}^2}"] & S^1 \\ D^2 \arrow[u, "i_{D^2}"] & & \end{tikzcd}$$

Inclusión S^1 en D^2

de donde se observa que $P_{\mathbb{R}^2} \circ r \circ i_{D^2} : D^2 \to S^1$ es una retracción de D^2 a S^1, pero esto no puede ocurrir por lo que se discutió en clase.

3. Tome $A \subset X$. $\pi_1(i) : \pi_1(A, a_0) \to \pi_1(X, i(a_0))$ sí es un monomorfismo, porque si $[\gamma], [\gamma'] \in \pi_1(A, a_0)$, y

$$\pi_1(i)[\gamma] = [i \circ \gamma] = [i \circ \gamma'] = \pi_1(i)[\gamma'],$$ como

$$i \circ \gamma \simeq i \circ \gamma', \quad \gamma \simeq \gamma', \text{ y } [\gamma] = [\gamma'].$$