Números de Fibonacci y ternas pitagóricas

JULIÁN

No se usa la misma notación con el fin de que sea más simple recurrir a las propiedades de los elementos de la secuencia de Fibonacci.

Teorema .1. *Sean* $(a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3})$ *números de Fibonacci consecutivos. Entonces, los números*

$$a = a_n a_{n+3}$$

$$b = 2a_{n+1}a_{n+2}$$

$$c = a_n a_{n+2} + a_{n+1}a_{n+3}$$

forman una terna pitagórica. Es decir: $a^2 + b^2 = c^2$.

Demostración. Observe que

$$c^2 = a_n^2 a_{n+2}^2 + 2a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} + a_{n+1}^2 a_{n+3}^2. \tag{1}$$

El procedimiento para realizar la prueba es partir de $a^2 + b^2$ e ir encontrando términos similares a c^2, con el fin de obtener la igualdad.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= a_n^2 a_{n+3}^2 + 4a_{n+1}^2 a_{n+2}^2 \\ &= a_n^2 \underbrace{(a_{n+2} + a_{n+1})^2}_{a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1}} + 4a_{n+1}^2 a_{n+2}^2 \\ &= a_n^2 a_{n+2}^2 + 2a_n^2 a_{n+1} a_{n+2} + a_n^2 a_{n+1}^2 + 4a_{n+1}^2 a_{n+2}^2. \end{aligned}$$

Ya se encontró el primer término de la ecuación (1). Se procederá a encontrar los otros dos, y no se tendrá en cuenta el que ya se obtuvo.

$$\begin{aligned} 2a_n^2 a_{n+1} a_{n+2} + a_n^2 a_{n+1}^2 + 4a_{n+1}^2 a_{n+2}^2 &= 2a_n \underbrace{(a_{n+3} - 2a_{n+1})}_{a_n = a_{n+3} - 2a_{n+1}} a_{n+1} a_{n+2} + a_n^2 a_{n+1}^2 + 4a_{n+1}^2 a_{n+2}^2 \\ &= 2a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} - 4a_n a_{n+1}^2 a_{n+2} + 4a_{n+1}^2 a_{n+2}^2 + a_n^2 a_{n+1}^2. \end{aligned}$$

Falta el último término.

$$\begin{aligned} -4a_n a_{n+1}^2 a_{n+2} + 4a_{n+1}^2 a_{n+2}^2 + a_n^2 a_{n+1}^2 &= -4 \underbrace{(a_{n+2} - a_{n+1})}_{a_n = a_{n+2} - a_{n+1}} a_{n+1}^2 a_{n+2} + 4a_{n+1}^2 a_{n+2}^2 + a_n^2 a_{n+1}^2 \\ &= 4a_{n+1}^3 a_{n+2} + a_n^2 a_{n+1}^2 \\ &= 4a_{n+1}^3 a_{n+2} + \underbrace{(a_{n+3} - 2a_{n+1})^2}_{a_n = a_{n+3} - 2a_{n+1}} a_{n+1}^2 \\ &= 4a_{n+1}^3 a_{n+2} + a_{n+1}^2 a_{n+3}^2 - 4a_{n+1}^3 a_{n+3} + 4a_{n+1}^4. \end{aligned}$$

Finalmente, basta probar que lo que sobra es igual a cero, y efectivamente

$$\begin{aligned} 4a_{n+1}^3 a_{n+2} - 4a_{n+1}^3 a_{n+3} + 4a_{n+1}^4 &= 4a_{n+1}^3(a_{n+2} - a_{n+3} + a_{n+1}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□