

Impacto directo central

Cortes Julian, Garcia David
u{1803147, 1803346}@unimilitar.edu.co
Profesor: Castellanos Alejandro

Resumen—Cuando se genera un impacto de forma directa central de un objeto B contra otro A y este se encuentra en reposo cerca de una pared, desencadena varios impactos adicionales, estos impactos serán del objeto A con la pared y entre los dos objetos hasta que la velocidad de los dos objetos vaya en la misma dirección y que la magnitud de la velocidad de B sea mayor o igual a la de A. Lo curioso de este evento es que al desprestigiar la fricción, al ser la constante de restauración de los dos objetos elástica y al aumentar la masa del objeto B $100^{n-1} kg$, el número de choques es proporcional a $N(\pi)$.

Palabras clave—Velocidad, Impacto, masa, trayectoria, Python, velocidad, energía, entorno Tk .

I. INTRODUCCIÓN

EN la colisión de dos objetos se presenta tanto la conservación del momento como la conservación de energía, estas dos suelen ser usadas para predecir el comportamiento de dicho evento, en este caso es una serie de impactos que al variar la masa de uno de los objetos van aumentando con relación al número π .

II. MARCO TEÓRICO

II-A. Momento lineal o ímpetu en una partícula

El momento lineal hace referencia al producto de la masa de un objeto por su velocidad en un instante de tiempo determinado, esta cantidad de momento lineal es vectorial debido a que es el resultado de un escalar por un vector, siendo el escalar la masa y el vector la velocidad, la primera persona en introducirlo al mundo fue Newton, pero con el nombre de cantidad de movimiento, buscando una expresión que combinara las magnitudes características de un objeto en movimiento, siendo estas dos la masa y la velocidad, definiendo la ecuación 1

$$\vec{p} = m * \vec{v} \quad (1)$$

Si se llega a tener un sistema con más de una partícula, es decir, N partículas cada una con una masa correspondientes $m_1, m_2, m_3 \dots m_n$ y ninguna de estas sale o entra al sistema, de modo que la masa total no varía en el tiempo, cada una con una velocidad propia el momento total se define como la suma de cada uno de ellos como se ve en la ecuación 3 [1].

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n \quad (2)$$

$$\vec{p} = (m_1 * \vec{v}_1) + (m_2 * \vec{v}_2 + \dots + (m_n * \vec{v}_n) \quad (3)$$

El presente documento corresponde a un informe de proyecto de Dinámica aplicada presentado en la Universidad Militar Nueva Granada durante el periodo 2020-1.

II-B. Conservación del momento

La conservación del momento es una consecuencia de la tercera ley de Newton, ya que en el momento en que se da de la colisión los objetos se ejercen una misma fuerza, pero en sentidos opuestos como lo indica esta ley, esto lo podemos ver reflejado en la ecuación 4.

$$F_{AB} = -F_{BA} \quad (4)$$

El tiempo que interactúan los dos objetos dependen del material de estos, no será el mismo tiempo entre dos pelotas de fútbol al de dos balines de metal, pero independiente del material el tiempo de interacción entre los objetos será el mismo, es decir 5

$$t_{AB} = t_{BA} \quad (5)$$

Ya que los objetos experimentan el mismo impulso pero en direcciones opuestas obtenemos la ecuación 6.

$$F_{AB} * t_{AB} = -F_{BA} * t_{BA} \quad (6)$$

Ya que el impulso es equivalente al cambio de momento, por lo tanto, el cambio en momentos de los objetos es igual pero en direcciones opuestas obtenemos la ecuación 7.[2]

$$m_A * \vec{v}_A = m_B * \vec{v}_B \quad (7)$$

II-C. Conservación de energía

El teorema de conservación de la energía dice que la energía total en todos los instantes es la misma, siendo la energía total la suma de las energías cinéticas más las potenciales[3].

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 \quad (8)$$

III. PROCEDIMIENTO

En el evento a estudiar, se tienen dos objetos, uno A y otro B, estando A en reposo y cerca a una pared y B en movimiento hacia A con una velocidad inicial como se observa en la imagen 1.

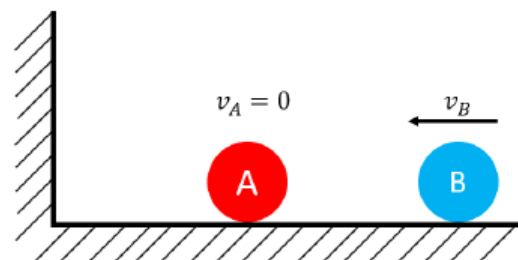


Figura 1. Gráfica de descripción del evento

III-A. Modelación matemática

Para el análisis del problema se deben tener en cuenta la ecuación de conservación del momento 9 sin ninguna fuerza externa que afecte el momento lineal y la ecuación de la constante de restauración 10.

$$(m_A * v_{A1}) + (m_B * v_{B1}) = m_A * v_{A2} + m_B * v_{B2} \quad (9)$$

$$e = \frac{V_{B2} - V_{A2}}{V_{A2} - V_{B1}} \quad (10)$$

En este evento 1, el número de impactos depende directamente de la masa de B , donde estos aumentaran en razón del número π , es decir, cuando la masa de A y de B sean ambas iguales a $1kg$, los impactos totales serán 3, si la más de A se mantiene y la de B es de $1kg$, solo existirá un impacto y así aumentaran los impactos aumentando cada dígito del número π .

Partiendo de esta premisa, el evento se analiza dependiendo la masa de B , es decir, cada vez que esta varía se hace un nuevo análisis.

- Inicialmente partiendo de la ecuación 9 y 10 haciendo los respectivos despajes para cada velocidad, sabiendo que el choque es perfectamente elástico ($e = 1$) se tiene que

$$v_a = \frac{m_a * v_{a0} + m_b * v_{b0} - (v_{a0} - v_{b0}) * m_b}{m_a + m_b} \quad (11)$$

$$v_b = v_{a0} - v_{b0} + v_a \quad (12)$$

- Sabiendo el comportamiento de cuando existe un choque perfectamente elástico cuando la masa m_a choca la pared la velocidad que lleva únicamente cambia la dirección que lleva inicialmente.

III-B. $N(\pi)$ en colisiones de dos masas

En un experimento años tras, un científico identifico que si se hacen colisionar dos masas en un escenario como en la figura 1 de la forma de que $m_1 = 1Kg$ y m_2 de la forma de $100^{n-1}Kg$, de esta forma se ve que aparece π para cada n . Si hacemos un análisis de fase y vemos que cada colisión esta dada por una trayectoria de un punto A a uno B, si unimos esos puntos tendremos una recta que para este caso cada punto A,B sera una colisión de pared [4], masa. Esta recta se puede saber partiendo de la ecuación

$$m_a V_1 + m_b V_2 = M(1) \quad (13)$$

Si hacemos $x = v_2$ y $y = v_1$ y haciendo unos cuantos arreglos algebraicos obtenemos:

$$y = -\frac{m_a}{m_b}x + 1 \quad (14)$$

Es una recta que pasa por la primera fase de colisión entre las masas, si esta misma se reemplaza en la ecuación de conservación de energía 8 vemos que obtenemos una ecuación muy similar a la de un circulo o elipse.

$$1 = \frac{m_a}{m_b}x^2 + y^2 \quad (15)$$

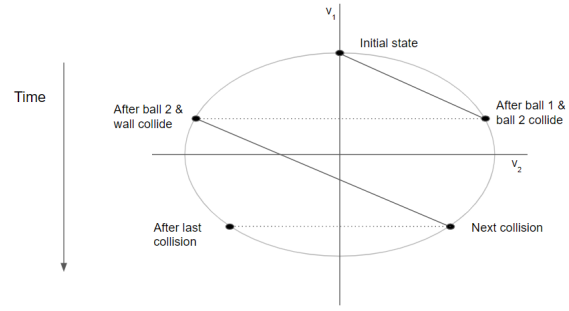


Figura 2. Diagrama de fases en las colisiones[5]

Lo que sucede en la figura anterior es que cada recta representa una trayectoria de la masa 1 y su pendiente esta dada por la relación de las masas como se ve en 14, si la masa b aumenta mucho la recta tiende a ser vertical creando desde la punta de la elipse un circulo. Cada impacto de esta sera un punto dentro coincidente de la elipse mencionada y la recta, entonces habrá un choque inicial de pared-masa o de masa-pared o como se ve en la figura 2 hay un solo punto que representa un impacto con la pared o solo con la masa, vemos que si la masa m_2 aumenta de la forma ya descrita aumentamos el numero de impactos recorriendo los impactos al final la totalidad de $2\pi \text{ rads}$ [5], haciendo relaciones matemáticas y deducciones complejas, se llega a una relación directamente proporcional a los dígitos de π y de las masas dada por:

$$N(\pi) = \sqrt{\frac{m_b}{m_a}} \quad (16)$$

Por lo que se ve que el numero de dígitos de π esta dado por la relación únicamente de las masas de cada objeto. [5]

IV. RESULTADOS

Se realizó una interfaz gráfica con la que se ingresen datos como : m_a , m_b , v_{a0} , v_{b0} . Estos datos se almacenan en unas variables y se aplica el tratamiento matemático correspondiente. La interfaz se ve en la figura 3



Figura 3. Interfaz de usuario

De la figura observada la masa A corresponde a la caja azul y la masa B a la caja roja, debajo de este tenemos unos campos de texto los cuales permiten ver el numero de colisiones y el estado del programa.

Al finalizar el estado de simulación vemos se muestran dos nuevas pestañas, donde aparecen las gráficas de momento y de energía respectivamente, ver figura 4 y 5.

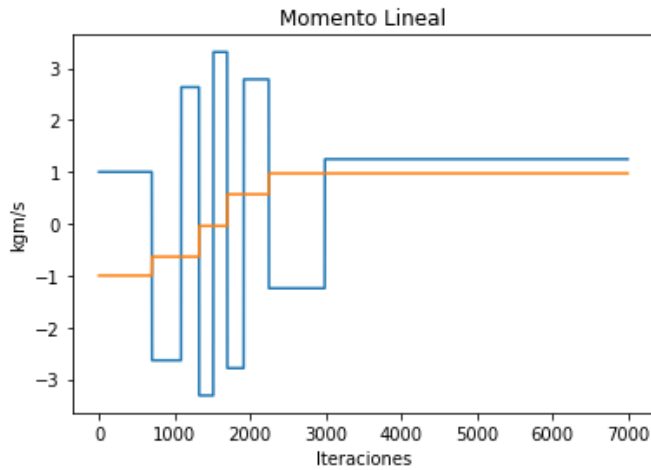


Figura 4. Gráfica del Momento lineal de las masas

Como se ve en la figura 5 para unas colisiones dadas de $v_{a0} = v_{b0} = 1$, $m_a = 1kg$ y $m_b = 10kg$, tenemos ese comportamiento de la cantidad de movimiento, donde después de las colisiones se observa como llega un punto donde una supera a la otra y no vuelven a colisionar, siendo la gráfica azul correspondiente a la masa A y la amarilla a la B. Con la energía pasa algo similar.

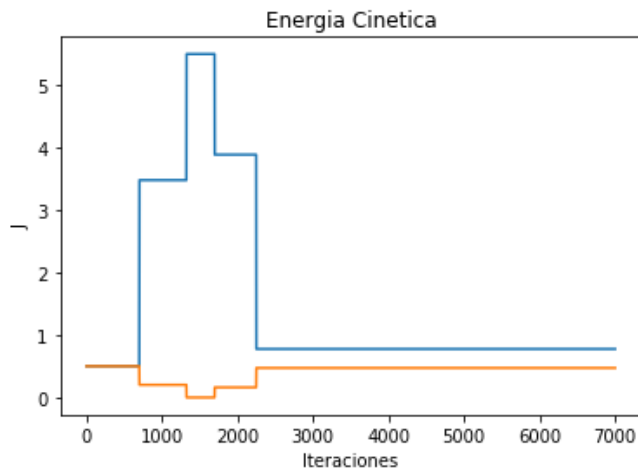


Figura 5. Gráfica de la energía cinética de las masas

Al igual que en el caso anterior, se contempla como la energía cinética cambia durante el choque, siendo máxima en el punto de mayor cantidad de choques. Al saber que el entorno Tkinter crea frames que pueden ser editados iterativamente, dentro de un ciclo while se van actualizando las posiciones de estos objetos con la formula cinética de posición

$$X(t) = X_0 + V_0 t \quad (17)$$

IV-A. Programacion

Antes de plantear un código, es importante tener el principio físico claro, una vez se conocen las ecuaciones que describen el comportamiento del sistema, se debe evaluar como se va a plantear el entorno gráfico requerido, en este escenario es importante conocer diferentes métodos, pero por experiencia Tkinter funciona bien en la mayoría de GUI.

Una vez se tiene el entorno gráfico, un *Canvas* sobre el cual trabajar la muestra gráfica del comportamiento físico, es importante tener claro que para evitar el consumo innecesario de recursos que solamente al momento de dar aceptar el programa debe empezar, esto tiene varias bondades; pese a que no es necesario reiniciar la GUI para hacer otra prueba, la simulación es mas rápida, ya que hay bastantes funciones cíclicas infinitas, la mayoría de ellas dentro del ciclo-while infinito lo cual hacer un mal encapsulamiento de estas lleva a consumir mas recursos.

Se sabe que con la librería Tkinter se pueden crear objetos basados en su posición, dándole propiedades de color, contorno...etc. Si el parámetro de posición se modifica iterativamente se genera un movimiento, pero antes de esto se debe limpiar el *Canvas* de esta forma se obtiene que cada update que tenga dentro del while sera un fotograma diferente, de esa manera de obtiene la animación de movimiento, si este cambio de posición esta controlado por la ecuación 17 obtenemos datos de posición para las masas, al realizar listas de 2 posiciones una para cada masa, es sencillo trabajar de forma simultanea la velocidades y las posiciones de cada una usando también las ecuaciones 11 y 12.

Si el programa nunca se cerrase nunca se podría graficar ya que las listas se llenarían infinitamente, de esta forma se sabe que deben existir parámetros de cierre de simulación, estos están definidos por un contador que aumenta si la velocidad de m_2 es mayor que m_1 , al llegar a un punto de control de muestras acaba, además de si la posición es muy distante entre ambos de la misma forma ejecuta un *break* que finaliza el bucle infinito y ya permite graficar los datos obtenidos. Estas graficas saltan en entornos Tk completamente diferentes a la raíz principal, dentro de estos frames se insertan las gráficas haciendo uso de unas librerías que adoptan parte de Tkinter y matplotlib.

V. CONCLUSIONES

Se llega a determinar que la conservación de momento es una medida abstracta de la energía cinética, siendo el momento lineal la alusión a la energía cinética, se concluye esto cuando se observan las gráficas de momento lineal y de energía cinética, donde se ve como corresponde la cantidad de choques con la magnitud de la energía, como si una fuera proporcional a la frecuencia y magnitud de la otra.

Además se concluye que la forma en la que aparece π es realmente asombrosa, la matemática demuestra nuevamente

que estas constantes están casi en todas partes, en esta simulación de bloques chocando se sabe que al llegar a un punto de fase de una circunferencia, donde actúan líneas de impacto de pendiente $\frac{m_b}{m_a}$ repitiéndose exactamente en los 2π radianes de esta elipse, dando las cifras de π . Se esperaría mejorar en la toma de datos, ya que baja el rendimiento debido a que cuando se quiere hallar muchos decimales de Pi el equipo no lo permite.

REFERENCIAS

- [1] F. Sears y M. Zemansky. “Física Universitaria”. En: *Pearson*. 2016.
- [2] Khan Academy. “Momento Lineal”. En: <https://es.khanacademy.org>. 2019.
- [3] I. Martín. “Física general”. En: *imartins*. 2003.
- [4] Rhett Allain. “For Pi Day, Calculate Pi Yourself Using Two Colliding Balls”. En: *Wired*, en <https://www.wired.com/story/for-pi-day-calculate-pi-yourself-using-two-colliding-balls/>. 2019.
- [5] C. Fraser. “The Pi Machine: The most unexpected answer to a counting puzzle”. En: *e-Book Medium*, <https://medium.com/@christopher.fraser/the-pi-machine-the-most-unexpected-answer-to-a-counting-puzzle-b365db558b12>. 2019.