

**Álgebra Linear e Geometria Analítica - A**

1º Teste

3 de Novembro de 2023

**Justifique devidamente as respostas a todas as questões****Duração total do teste: 1h30m**

(3,5 val.)**1)** Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ , o vetor  $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$  e o sistema de equações lineares  $AX = b$ , onde  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$  é o vetor das incógnitas.

a) Verifique que  $A$  é invertível.b) Verifique que o sistema  $AX = b$  tem uma única solução ~~e calcule o valor de  $y$  pela regra de Cramer.~~

(3 val.)**2)** Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ , o vetor  $b = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$  e o sistema de equações lineares  $AX = b$ , onde  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$  é o vetor das incógnitas. Resolva o sistema  $AX = b$ , através do método de fatorização  $A = LU$ .

~~(1,5 val.)**3)** Considere uma economia dividida em 3 setores: manufaturação, agricultura e serviços. Por cada unidade de output a manufaturação requer 0.2 unidades do mesmo setor, 0.7 unidades da agricultura e 0 unidades dos serviços. Por cada unidade de output, a agricultura usa 0.4 unidades do seu próprio output, 0.4 unidades da manufaturação e 0.1 unidades dos serviços. Por cada unidade de output, os serviços consomem 0.5 unidades dos serviços, 0.2 unidades da manufaturação e 0.2 da agricultura. Sabendo que a demanda final (procura final) é 10 unidades de manufaturação, 5 unidades de agricultura e 10 unidades de serviços. Escreva o modelo de Leontief  $x = Cx + d$  para o problema e indique a matriz  $C$  e  $d$  para este problema.~~

(6 val.)**4)** Sejam  $A$  e  $B$  duas matrizes invertíveis de dimensão  $3 \times 3$ . Considere a equação matricial

$$A^T \cdot X \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $X$  é uma matriz de dimensão  $3 \times 3$ .a) Justifique a seguinte afirmação verdadeira: a matriz  $X$  é sempre não invertível quaisquer que sejam as matrizes  $A, B$  invertíveis.b) Considere  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ , na equação acima e calcule a matriz  $X$ .(6 val.)**5)** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$ .a) Verifique se  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y - 2z\}$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^3$ .b) Complete  $\langle (1, 1, 0), (-1, 0, 1), (-1, 1, 2) \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underline{\hspace{2cm}}\}$  e apresente todos os cálculos efetuados.

① (a) A é invertível se e só se  $\text{car}(A)=3 = n^{\circ}$  de colunas de A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim L_3 = L_3 - 2L_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} \sim L_3 = L_3 + 3L_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \text{ escalonada}$$

Como  $\text{car}(A)=3$  temos que a matriz A é invertível.

(b) Pela alínea (a), como A tem inversa temos que o sistema  $Ax=b$  é sempre possível e a solução é:

$$Ax=b \Leftrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Leftrightarrow \boxed{X = A^{-1}b}$$

② Escalonar A ~ U (sem trocar linhas, nem multiplicar uma linha por um escalar).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim L_3 = L_3 - L_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \sim L_3 = L_3 - 2L_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = U$$

U é uma matriz escalonada equivalente por linhas a A.

2º Construir L

$$\left[ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & -2 \\ \hline 1 & -1 & -2 \\ \hline \hline \div 1 & \div (-1) & \div 2 \\ \hline \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & -2 \\ \hline \hline \end{array} \right]$$

Assim,  $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  é uma matriz triangular inferior com 1's na diagonal principal.

$$\text{Como } A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \text{ temos que } Ax=b \Leftrightarrow \underbrace{LUx}_Y = b \Leftrightarrow LY = b \Leftrightarrow Y = \boxed{Y}$$

3º Resolver LY = b,  $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

$$[L \mid b] = \left[ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 0 \\ \hline \hline \end{array} \right] \sim L_3 = L_3 - L_1 \quad \left[ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 2 & 1 & -4 \\ \hline \hline \end{array} \right] \sim L_3 = L_3 - 2L_2 \quad \left[ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -2 \\ \hline \hline \end{array} \right] = [C \mid D]$$

$$LY = b \Leftrightarrow CY = D \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = -1 \\ y_3 = -2 \end{cases} \text{ A solução de } LY = b \text{ é } Y = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

4º Resolver UX = Y

$$[U \mid Y] = \left[ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 & 4 \\ \hline 0 & -1 & -2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -2 \\ \hline \hline \end{array} \right] \sim L_2 = L_2 + L_3 \quad \left[ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -2 \\ \hline \hline \end{array} \right] \sim L_2 = L_2 / 2 \quad \left[ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline \hline \end{array} \right] \sim L_2 = -L_2 \quad \left[ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline \hline \end{array} \right] = [E \mid F]$$

$$UX = Y \Leftrightarrow EX = F \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = -1 \end{cases} \text{ Assim, } X = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ é a solução do sistema } Ax = b.$$

(4)  $X_{3 \times 3} = ?$

(b) Seja  $C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\boxed{A^T X B^{-1}} = \boxed{C} \Leftrightarrow A^T X \underbrace{B^{-1} B}_{= I_3} = CB \Leftrightarrow \underbrace{(A^T)^{-1} A^T}_{= I_3} X = (A^T)^{-1} C B \Leftrightarrow \boxed{X = (A^T)^{-1} C B}$$

$$\text{Calcular } (A^T)^{-1} = \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$[A^T | I_3] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[L_2=L_2-L_1]{L_3=L_3+L_1} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[L_3=L_3+2L_2]{L_1=L_1-L_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{matrix} L_2 = -L_2 \\ L_1 = L_1 - L_3 \end{matrix} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right] = [I_3 | (A^T)^{-1}]$$

$$\text{Logo, } X = (A^T)^{-1} C B = \left[ \begin{array}{ccc} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc} -19 & -15 & -41 \\ -5 & -4 & -11 \\ 23 & 18 & 49 \end{array} \right]$$

(5) (a)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y - 2z\} \subseteq \mathbb{R}^3$  é um subespaço vetorial?

$$= \{(y - 2z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\}$$

•  $(0, 0, 0) \in S$ ? Sim porque a primeira coordenada é igual à segunda coordenada menos 2 vezes a terceira coordenada, isto é,  $0 = 0 - 2 \cdot 0$ .

•  $(y - 2z, y, z), (y' - 2z', y', z') \in S$ . Será que  $(y - 2z, y, z) + (y' - 2z', y', z') \in S$ ?

$$(y - 2z, y, z) + (y' - 2z', y', z') = (y - 2z + y' - 2z', y + y', z + z')$$

$$= ((y + y') - 2(z + z'), y + y', z + z') \in S$$

porque a primeira coordenada,  $(y + y') - 2(z + z')$ , é igual à segunda coordenada,  $y + y'$ , menos 2 vezes a terceira,  $z + z'$ .

Assim,  $S$  é fechado para a soma.

•  $\alpha \in \mathbb{R}, (y - 2z, y, z) \in S$ . Será que  $\alpha(y - 2z, y, z) \in S$ ?

$\alpha(y - 2z, y, z) = (\alpha(y - 2z), \alpha y, \alpha z) \in S$  porque a primeira coordenada é igual à segunda coordenada menos 2 vezes a terceira, isto é,

$$\underbrace{\alpha(y - 2z)}_{1^{\text{a}} \text{ coordenada}} = \underbrace{\alpha y}_{2^{\text{a}} \text{ coordenada}} - 2 \underbrace{\alpha z}_{3^{\text{a}} \text{ coordenada}}$$

Assim,  $S$  é fechado para a multiplicação por escalar.

$S$  é um subespaço de  $\mathbb{R}^3$ .

(b)

$$\begin{aligned}\langle(1,1,0), (-1,0,1), (-1,1,2)\rangle &= \{(x,y,z) = \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(-1,0,1) + \alpha_3(-1,1,2), \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \right\}\end{aligned}$$

Quando é que o sistema  $AX=B$   $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$  é possível ( $\text{car}(A) = \text{car}([A|B])$ )?

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 2 & z \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & x \\ 0 & 1 & 2 & y-x \\ 0 & 1 & 2 & z \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_3 - L_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & x \\ 0 & 1 & 2 & y-x \\ 0 & 0 & 0 & z-y+x \end{array} \right] \text{ escalonada}$$

Temos que a  $\text{car}(A)=2$  para o sistema  $AX=B$  ter possível queremos ter que  $\text{car}([A|B]) = \text{car}(A)$ , ou seja,  $\text{car}([A|B])=2$ . logo,  $z-y+x=0$ .

Assim, todos os vetores  $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$  tal que  $z-y+x=0$  são c.l. dos vetores  $(1,1,0), (-1,0,1), (-1,1,2)$  e estão no espaço gerado por eles.

$$\langle(1,1,0), (-1,0,1), (-1,1,2)\rangle = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z-y+x=0\}$$