

Folha Prática 4

Atenção: Estas notas não constituem uma resolução formal e rigorosa dos exercícios das Folhas Práticas.

Última atualização: 18 de novembro de 2025

Notas sobre os exercícios: 1(f), 1(h), 16(c), 16(d), 24.4.

1(f) $u = (1, -2, 1)$ e $v = (-1, 1, 0)$

1º Encontrar os vetores ortogonais a v .

Queremos saber quais são os vetores ortogonais a v para usarmos esses vetores no próximo passo.

Um vetor (x, y, z) é ortogonal a v se e só se $(x, y, z) \cdot v = 0$.

$$\begin{aligned}(x, y, z) \cdot v &= 0 \\ \Leftrightarrow (x, y, z) \cdot (-1, 1, 0) &= 0 \\ \Leftrightarrow -x + y &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= y\end{aligned}$$

Logo todos os vetores (x, y, z) tal que $x = y$ são ortogonais a v , isto é,

$$\begin{aligned}&(x, x, z), \quad x, z \in \mathbb{R} \\ &\text{Separar em dois vetores: um com os } x\text{'s outro com os } z\text{'s} \\ &= (x, x, 0) + (0, 0, z), \quad x, z \in \mathbb{R} \\ &\text{Colocar o } x \text{ e o } z \text{ em evidência} \\ &= x(1, 1, 0) + z(0, 0, 1), \quad x, z \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Ou seja, todos os vetores ortogonais a v são combinação linear dos vetores $(1, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

2º Escrever o vetor u como C.L. de v e de um vetor ortogonal a v .

Vamos tentar escrever u à custa do vetor v e de um vetor que é ortogonal a v . Nós já conhecemos o vetor v e também já sabemos que todos os vetores ortogonais a v são combinação linear de $(1, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$. Assim sendo o objetivo é escrever o vetor u à custa de v e de $(1, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.ⁱ

$$\begin{aligned}u &= \alpha_1 v + \alpha_2 (1, 1, 0) + \alpha_3 (0, 0, 1) \\ \Leftrightarrow (1, -2, 1) &= \alpha_1 (-1, 1, 0) + \alpha_2 (1, 1, 0) + \alpha_3 (0, 0, 1) \\ &\dots \text{fazer contas} \dots \\ \Leftrightarrow (1, -2, 1) &= -\frac{3}{2}(-1, 1, 0) - \frac{1}{2}(1, 1, 0) + 1(0, 0, 1) \\ &\text{Juntar o } (1, 1, 0) \text{ e } (0, 0, 1) \\ \Leftrightarrow (1, -2, 1) &= -\frac{3}{2}(-1, 1, 0) + -(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1) \\ \Leftrightarrow u &= -\frac{3}{2}v + \underbrace{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)}_{\text{ortogonal a } v}\end{aligned}$$

1(h) Um vetor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é ortogonal/perpendicular ao vetor u se e só se $(x, y, z) \cdot u = 0$. Portanto, o objetivo é saber quais são os vetores (x, y, z) cujo produto interno com o vetor u dá zero.

$$\begin{aligned}(x, y, z) \cdot u &= 0 \\ \Leftrightarrow (x, y, z) \cdot (1, -2, 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x - 2y + z &= 0 \\ \Leftrightarrow z &= -x + 2y\end{aligned}$$

Logo todos os vetores da forma $(x, y, -x + 2y)$, $x, y \in \mathbb{R}$ são ortogonais ao vetor u .ⁱⁱ Isso é o

ⁱTodos os vetores a vermelho são ortogonais a v .

ⁱⁱEm vez disto poderíamos ter escrito $x = 2y - z$ ou $y = \frac{x+z}{2}$, o resultado seria ligeiramente diferente mas também estaria correto. Aliás, por mim a resolução podia acabar aqui...

mesmo que dizer que todos os vetores da forma

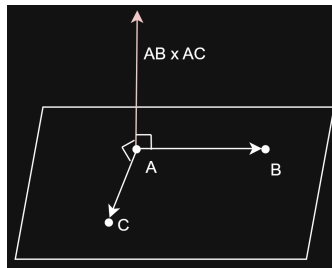
$$\begin{aligned} & (x, y, -x + 2y) \\ & \text{Separar em dois vetores: um com os } x\text{'s outro com os } y\text{'s} \\ & = (x, 0, -x) + (0, y, 2y) \\ & \text{Colocar o } x \text{ e o } y \text{ em evidência} \\ & = x(1, 0, -1) + y(0, 1, 2), \quad x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

são ortogonais ao vetor u^{iii} .

- 12 (a) Para escrever a equação cartesiana $ax + by + cz + d = 0$ de um plano \mathcal{P} que contém os pontos $A = (1, 2, 1)$, $B = (0, 0, 3)$ e $C = (1, -1, 1)$ precisamos de um vetor $w = (a, b, c)$ ortogonal ao plano. Se o vetor w é ortogonal ao plano \mathcal{P} então é ortogonal a qualquer vetor que esteja no plano. Por exemplo, é ortogonal a \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= B - A = (0, 0, 3) - (1, 2, 1) = (-1, -2, 2) \\ \overrightarrow{AC} &= C - A = (1, -1, 1) - (1, 2, 1) = (0, -3, 0) \end{aligned}$$

Pelo Cap.4 slide 13 Propriedade 6 sabemos que o produto externo de \overrightarrow{AB} com \overrightarrow{AC} é um vetor ortogonal a esses dois vetores, isto é,



$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= (-1, -2, 2) \times (0, -3, 0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 6i - 0j + 3k = 6(1, 0, 0) - 0(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1) = (6, 0, 3) \end{aligned}$$

Logo, $w = (6, 0, 3)$ é ortogonal ao plano e a equação de \mathcal{P} é $6x + 3z + d = 0$. Para determinar d basta substituir por um ponto que está no plano. Por exemplo, como $A = (1, 2, 1) \in \mathcal{P}$ temos que $6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -9$. A equação cartesiana de \mathcal{P} é: $6x + 3z - 9 = 0 \Leftrightarrow 2x + z - 3 = 0$

— OU —

Em alternativa podem escrever a equação vetorial do plano

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \alpha(v_1, v_2, v_3) + \beta(u_1, u_2, u_3), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

em que (x_0, y_0, z_0) é um ponto no plano e (v_1, v_2, v_3) , (u_1, u_2, u_3) são vetores diretores do plano (não colineares). Em seguida, escrevem as equações paramétricas correspondentes e, resolvendo-as, obtêm a equação cartesiana do plano.

Como \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} são vetores diretores do plano:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= B - A = (0, 0, 3) - (1, 2, 1) = (-1, -2, 2) \\ \overrightarrow{AC} &= C - A = (1, -1, 1) - (1, 2, 1) = (0, -3, 0) \end{aligned}$$

e o ponto $A \in \mathcal{P}$. Segue que a equação vetorial do plano é:

$$(x, y, z) = (1, 2, 1) + \alpha(-1, -2, 2) + \beta(0, -3, 0), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

O que é o mesmo que escrever o seguinte sistema e eliminando os parâmetros α e β obtemos a equação cartesiana do plano:

$$\begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = 2 - 2\alpha - 3\beta \\ z = 1 + 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - x \\ y = 2 - 2(1 - x) - 3\beta \\ z = 1 + 2(1 - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - x \\ \beta = \frac{-y + 2x}{3} \\ \mathbf{z} = \mathbf{3} - \mathbf{2x} \end{cases} \text{Equação cartesiana}$$

ⁱⁱⁱNas soluções chamam ao x de α e ao y de β , mas o nome das variáveis não importa.

- (b) A distância de um ponto $Q = (1, 2, 3)$ ao plano \mathcal{P} , cuja equação cartesiana é $2x + 1z - 3 = 0$ é dada pela seguinte fórmula (ver Cap.4 slide 20):

$$d(Q, \mathcal{P}) = \frac{|2x_Q + 1z_Q - 3|}{\sqrt{(2)^2 + (1)^2}} = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

- 16(c) $\mathcal{B} = ((4/5, 0, 3/5), (0, 1, 0), (-3/5, 0, 4/5))$

Queremos determinar a matriz de mudança da base $\tilde{\mathcal{B}} = ((0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1))$ para a base \mathcal{B} , isto é,

$$M_{\mathcal{B} \leftarrow \tilde{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} \left| \begin{array}{c} [(0, 0, 1)]_{\mathcal{B}} \\ \vdots \end{array} \right| & \left| \begin{array}{c} [(0, 1, 1)]_{\mathcal{B}} \\ \vdots \end{array} \right| & \left| \begin{array}{c} [(1, 1, 1)]_{\mathcal{B}} \\ \vdots \end{array} \right| \end{bmatrix}$$

A matriz de mudança de base $M_{\mathcal{B} \leftarrow \tilde{\mathcal{B}}}$ o que faz é pegar em vetores na base $\tilde{\mathcal{B}}$ e escreve-os na base \mathcal{B} . Portanto, as colunas desta matriz são os vetores da base $\tilde{\mathcal{B}}$ escritos à custa da base \mathcal{B} .

Pela alínea (a) sabemos que a base \mathcal{B} é ortonormada por isso podemos usar o Teorema do slide 8 do Capítulo 4 para escrever os vetores de $\tilde{\mathcal{B}}$ na base \mathcal{B} .

Assim, a primeira coluna da matriz é:

$$[(0, 0, 1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} (0, 0, 1) \cdot (4/5, 0, 3/5) \\ (0, 0, 1) \cdot (0, 1, 0) \\ (0, 0, 1) \cdot (-3/5, 0, 4/5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{bmatrix}$$

A segunda coluna da matriz é:

$$[(0, 1, 1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} (0, 1, 1) \cdot (4/5, 0, 3/5) \\ (0, 1, 1) \cdot (0, 1, 0) \\ (0, 1, 1) \cdot (-3/5, 0, 4/5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 1 \\ 4/5 \end{bmatrix}$$

A terceira coluna da matriz é:

$$[(1, 1, 1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} (1, 1, 1) \cdot (4/5, 0, 3/5) \\ (1, 1, 1) \cdot (0, 1, 0) \\ (1, 1, 1) \cdot (-3/5, 0, 4/5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 1 \\ 1/5 \end{bmatrix}$$

Portanto temos que

$$M_{\mathcal{B} \leftarrow \tilde{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} 3/5 & 3/5 & 7/5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4/5 & 4/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

- 16(d). A matriz $M_{\mathcal{B} \leftarrow \tilde{\mathcal{B}}}$ de mudança de base que calculamos na alínea (c) o que faz é pega num vetor que esteja escrito na base $\tilde{\mathcal{B}}$ e passa-o para as suas coordenadas na base \mathcal{B} .^{iv} Portanto^v, se soubermos quais são as coordenadas de um vetor na base $\tilde{\mathcal{B}}$ usando esta matriz conseguimos determinar quais são as suas coordenadas na base \mathcal{B} , isto é,

$$[Y]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B} \leftarrow \tilde{\mathcal{B}}} [Y]_{\tilde{\mathcal{B}}}$$

Pegamos no vetor $[Y]_{\tilde{\mathcal{B}}}$, que nos é dado, e se multiplicarmos pela matriz $M_{\mathcal{B} \leftarrow \tilde{\mathcal{B}}}$ obtemos esse mesmo vetor mas agora na base \mathcal{B} .

$$[Y]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3/5 & 3/5 & 7/5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4/5 & 4/5 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

^{iv}Para mim ajuda-me a ver a setinha $\mathcal{B} \leftarrow \tilde{\mathcal{B}}$ que diz que vai de $\tilde{\mathcal{B}}$ para \mathcal{B} .

^vver Teorema do slide 18 do Capítulo 2

24.4 Equações normais:

$$\begin{aligned} A^T A X = A^T b &= \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Resolver o sistema, vou usar o método de Gauss-Jordan mas podias usar a inversa tbm, deves de indicar TODAS as operações elementares que fazes, mas eu vou saltar isso à frente e meter só o resultado final.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 6 \\ 3 & 11 & 14 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

A solução dos mínimos quadrados é $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

O erro dos mínimos quadrados é: ^{vi}

$$\begin{aligned} \|b - Ax\| &= \left\| \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6} \end{aligned}$$

Assim, o erro dos mínimos quadrados é $\sqrt{6}$.

^{vi}fazemos a diferença do vetor b que é dado no enunciado com o vetor Ax e calculamos a norma desse vetor