Aula 4

25/09/2025

9 ⚠ a ordem importa: $AB \neq BA$

i. $(A+B)^2 = (A+B)(A+B)$
$= A^2 + AB + BA + B^2$
$\neq A^2 + \underbrace{AB + AB}_{=2AB} + B^2$

ii. $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 \underbrace{-AB + AB}_{=0} + B^2$

iv. $(AB)^2 = ABAB \neq AABB$

16 (b) $\begin{cases} x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - 8x_2 + 12x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow AX = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & -8 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -8 & 12 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2 \leftrightarrow L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 4 & -8 & 12 & 1 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - 2L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & -2 & 8 & -1 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 + 2L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{array}\right] = [C|D]$

escalonada

$car(A) = 2 < car([A|B]) = 3$, pelo slide 32, $AX=B$ é impossível.

$AX = B \Leftrightarrow CX = D \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 15 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_2 - 4x_3 = 8 \\ 0 = 15 \end{cases}$

(a) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow AX = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \end{array}\right] \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 = L_2 - 4L_1 \\ L_3 = L_3 - 3L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -9 & -18 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & -1 \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2 - 3L_3}{\sim}$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -1 \end{array}\right] \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{L_1 = L_1 + L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{L_2 = \frac{L_2}{(-3)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [E|F]$

reduzida.

$EX = F \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3} - 2x_3 \end{cases}$

Conjunto de soluções: $\{(x_3, \frac{1}{3} - 2x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\}$

grau de indeterminação = nº de variáveis livres = nº de colunas de A − car(A)
$= 3 - 2 = 1$ temos apenas uma variável livre, o x_3.

17 α é uma variável, não é uma incógnita!

$$\begin{cases} \alpha x + y = 1 \\ x + \alpha y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow AX = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{array}\right]$ está escalonada? Não, seja lá qual for o valor de α não está.

- Escalonar $[A|B]$:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{array}\right] \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2 - \alpha L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1-\alpha^2 & 1-\alpha \end{array}\right] \text{ escalonada}$$

Não sei se L_2 tem pivot, depende do valor de α. Se $\alpha = 1$ L_2 não tem pivot se $\alpha \neq 1$ então L_2 tem pivot que está mais à direita do pivot de L_1.

- Calcular $car(A)$ e $car([A|B])$

Se $1-\alpha^2$ for o pivot da L_2, isto é, $1-\alpha^2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \pm 1$

$$[A|B] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \underset{\neq 0}{1-\alpha^2} & 1-\alpha \end{array}\right]$$

temos que $car(A) = car([A|B]) = 2 =$ nº de colunas de A, pelo slide 32, se $\alpha \neq \pm 1$ então o sistema é possível determinado.

Se $1-\alpha$ é o pivot da L_2, isto é, $1-\alpha^2 = 0$ e $1-\alpha \neq 0 \Leftrightarrow$ $\alpha = \pm 1$ e $\alpha \neq 1 \Leftrightarrow \alpha = -1$

$$[A|B] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \underset{=0}{1-\alpha^2} & \underset{\neq 0}{1-\alpha} \end{array}\right]$$

temos que $car(A) = 1 < car([A|B]) = 2$, logo se $\alpha = -1$ o sistema é impossível.

Se a L_2 não tem pivot, isto é, $1-\alpha^2 = 0$ e $1-\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

$$[A|B] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

temos que $car(A) = car([A|B]) = 1 <$ nº de colunas de $A = 2$, logo quando $\alpha = 1$ o sistema é possível indeterminado.

19 $[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha+2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha+1 \end{array}\right]$

Está escalonada? Depende do valor de α.

Por exemplo, se $\alpha = -2$, $[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right]$ Não.

se $\alpha = 0$, $[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ Sim

• escalonar $[A|B]$:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha+2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha+1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\alpha+1} & \frac{\alpha}{\alpha+1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\alpha+1}{\alpha} \end{array}\right] \text{ escalonada!}$$

$L_1 = L_1/_{\alpha+2}$, $\alpha+2 \neq 0$

$L_2 = L_2/_{\alpha+1}$, $\alpha+1 \neq 0$

$L_3 = \frac{L_3}{\alpha}$, $\alpha \neq 0$

Se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0\}$ então $car(A) = car([A|B]) = 3 =$ nº de colunas de A logo o sistema é possível determinado.

E se $\alpha = -2$?

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right] \underset{L_2 \leftrightarrow L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right] \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Se $\alpha = -2$ temos $car(A) = car([A|B]) = 2 <$ nº de colunas de A logo o sistema é possível indeterminado.

E se $\alpha = 0$?

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Se $\alpha = 0$, $car(A) = 2 < car([A|B]) = 3$ logo o sistema é impossível.

E se $\alpha = -1$?

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 + L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Se $\alpha = -1$, $car(A) = 2 < car([A|B]) = 3$ logo o sistema é impossível.

Sistema Homogéneo

$AX = 0$ é sempre possível, tem sempre a solução trivial $X = 0$.

A nulidade de A é o grau de indeterminação do sistema $AX = 0$:

$$nul(A) = \text{nº de colunas de } A - car(A)$$

Exp $AX = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$[A|0] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ -1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \underset{L_2 = L_2 + L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} = [E|F]$

$nul(A) = 2 - car(A) = 2 - 1 = 1$ temos uma variável livre

$AX = 0 \iff EX = F \iff \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x_1 - x_2 = 0 \iff x_1 = x_2$

Conjunto de soluções $\{(x_2, x_2) : \underset{\substack{\downarrow \\ \text{variável livre}}}{x_2 \in \mathbb{R}}\} = \{(0,0), (1,1), (-1,-1) \dots\}$

Espaço Nulo de $A_{m \times n}$ $\mathcal{N}(A) = \{X \in \mathbb{R}^n : AX = 0\}$ – vetores que são enviados no vetor nulo.

Vetor nulo $0_{m \times 1} \in \mathcal{N}(A)$.

A nulidade de A é a dimensão do $\mathcal{N}(A)$.

Exp anterior $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathcal{N}(A) = \{X \in \mathbb{R}^2 : AX = 0\} = \{(x_2, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\}$

- reta, $x_1 = x_2$, que tem dimensão 1.

Próximo episódio: $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ não tem inversa. Porquê?

FP1 até ao 20
Recomendo 16 (c) e (d) e 18.