

Aula 1

15/09 (2025)

julianca.eunha@ua.pt

Avaliação

Discreta
Teste 1 (50%) a 9 out.

⊕

Teste 2 (50%) Época Exames

Exame Final
(100%)
ou
Época de Exames

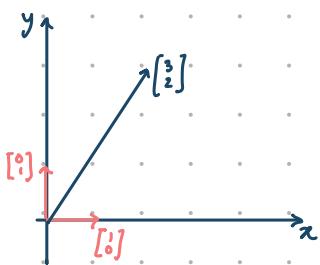
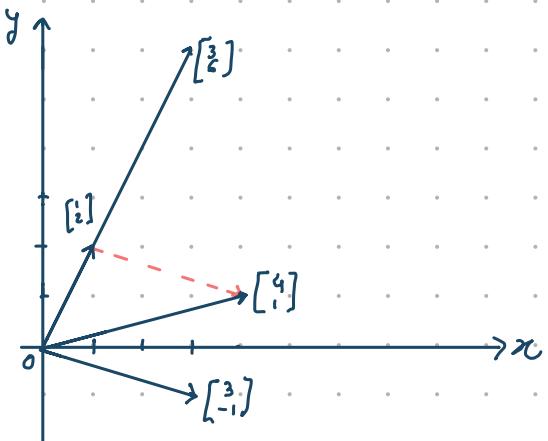
< 9.5 ou Telefonia de Nota
(100%)

↓
Época de Recurso

Vetores em \mathbb{R}^2 : $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+1 \\ -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 1 \\ 3 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$



$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ é combinacão linear de $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\{ (1,0), (0,1) \}$ não é uma base de \mathbb{R}^2

Matrizes

$A_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$ tem dimensão/ordem 3×2
nº de linhas nº de colunas

$a_{21} = 4$ elemento na linha 2 e coluna 1 de A

$a_{32} = 9$ elemento na linha 3 e coluna 2 de A

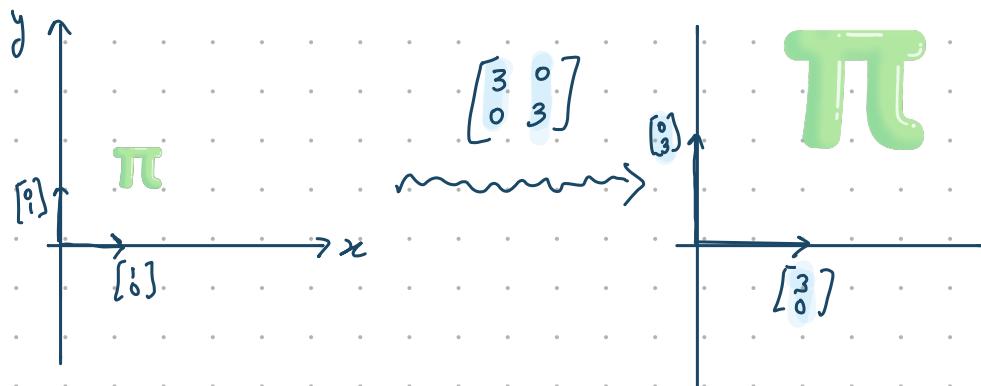
$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 7 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ tem ordem 2×4

$b_{13} = 1$, $b_{21} = 0$ e $b_{11} = 3$

Intuição

Matrizes são transformações (funções) lineares no espaço tal que:

- origem é sempre fixa e
- linhas são sempre linhas



Matriz Nula só tem zeros

$$O_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, O_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dots$$

Matriz linha tem ordem $1 \times n, n \in \mathbb{R}$
 $L_{1 \times 5} = [5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1]$

Matriz coluna $m \times 1, m \in \mathbb{R}$

$$C_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Matriz quadrada nº de linhas = nº de colunas

$$E_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 3 \\ 16 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

diagonal principal

Matriz diagonal (quadrada)

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz identidade tens 1's na diag. principal e o resto é 0's.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots$$

Matriz triangular superior

Quadradas abaixo da
diag. principal só 0's.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular inferior

Quadradas acima da
diag. principal só 0's.

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Operações com Matrizes

Transposta de uma matriz

$$A_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A^T_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B_{2 \times 4} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 7 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B^T_{4 \times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 7 \\ 1 & 0 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Prop: $(A^T)^T = A$

Daf: A é simétrica se $A = A^T$. Exp: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^T$

Igualdade $A = B$ se tem a mesma ordem e as entradas \rightarrow iguais

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Soma Tem de ter a mesma ordem Δ

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 8 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 3+2 & 4+4 \\ 8+5 & 0+2 & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 13 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicar por um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$

$$2 \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 3 & 2 \times 0 \\ 2 \times 8 & 2 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 16 & 8 \end{bmatrix}$$

Prop. (slide 14)

$$A + O = A$$

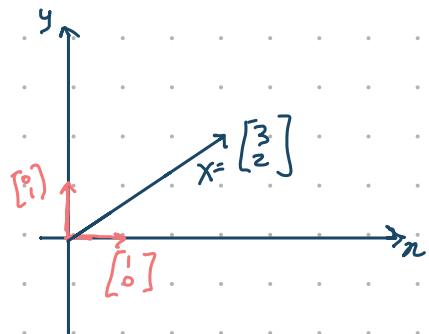
↓
matriz nula

$$A - A = O$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

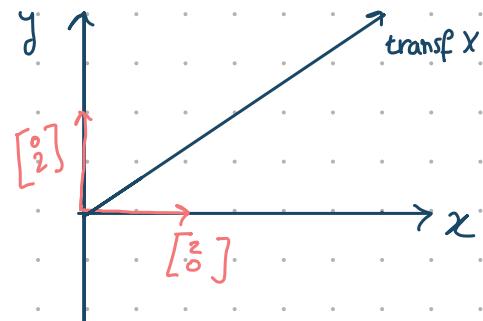
$$(\alpha A)^T = \alpha A^T$$

Multiplicação de matrizes (intuição)



Ampliação
x2

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{transf } X &= 3 \text{ transf } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \text{ transf } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Isto é, X após A é:

$$AX = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_0 + 3x_2 \\ 0x_0 + 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 3 + 3 \times 0 & 2 \times 4 + 3 \times 7 \\ 4 \times 3 + 0 \times 3 & 4 \times 4 + 3 \times 7 \\ 8 \times 3 + 0 \times 0 & 8 \times 4 + 0 \times 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 29 \\ 12 & 37 \\ 24 & 32 \end{bmatrix}$$

3×2 2×2
 $\text{nº de colunas} = \text{nº de linhas} \checkmark$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 2 + 4 \times 4 + 8 \times ? \dots \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

\times

Este produto não está definido porque o nº de colunas de B ≠ nº de linhas de A .

Não podem fazer isto

O nº de colunas de B ≠ nº de linhas de A .

Prop. (slide 17) $A \underset{\text{identidade}}{\underset{\text{I}}{\times}} = A$

$$\alpha(AB) = A\alpha B$$

⚠ $(AB)^T = B^T A^T \neq A^T B^T$

⚠ $AB \neq BA$ (tipos as funções $fog \neq gof$)
(ver ex. 6 FP1)

Potência $A^0 = I$

$$p \in \mathbb{N} \quad A^p = \underbrace{A \dots A}_{p \text{ vezes}}$$

FP1 ② $2(A+B) - AB$

$$= 2 \left[\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right] - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 2 \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 12 & 1 \\ 5 & 11 & 1 \\ 1 & 7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 8 & 12 & 4 \\ 8 & 6 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 12 & 1 \\ 5 & 11 & 1 \\ 1 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & -8 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 7 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

④ $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + (-4) \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \end{bmatrix}$

$?^8$
 $2x3+0x1+\frac{0}{(-1)(1)} \quad ?^5$

$3 \times 4 \quad 4 \times 2 \quad 3 \times 2$

Assim, a I^2 = coluna é $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ e a 2^{a} linha $\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$\textcircled{6} \quad EA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 11 & 15 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Somamos à linha 2
da matriz A 3 vezes a
linha 1

$$AE = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 19 & 5 & 6 \\ 31 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Somamos à coluna 1 de A
3 vezes a coluna 2.

FP1 até ao ex. 14

Recomendo o ex. 1, 4, 5