Álgebra Linear e Geometria Analítica - A

Exame Final **10 de Janeiro de 2025**

Duração total do teste: 2h30m

Nome: ______________________________

N^o mecanográfico: ____________ **Curso** ______________________

Declaro que desisto: ______________________________

Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5	Questão 6	Classificação final

PARTE I

Escolha múltipla

(4 val.) **1)** Selecione a (única) afirmação verdadeira em cada uma das seguintes questões. Cada resposta certa será cotada com $0,5$ valores.

(a) Considere as bases $\mathscr{B} = ((1,-1),(-3,4))$ e $\mathscr{C} = ((1,0),(0,1))$ de $\mathbb{R}^2$. A matriz de mudança de base de $\mathscr{B}$ para $\mathscr{C}$ é:

- ☒ $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.
- ☐ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$.
- ☐ $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$.
- ☐ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$.
- ☐ Nenhuma das anteriores.

(b) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ k & 2k+3 \end{bmatrix}$, onde k é um parâmetro real. Podemos dizer que:

- ☐ A é invertível para todo $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $det(A) = -det(A^{-1})$ para todo $k \in \mathbb{R}$.
- ☒ $det(A) = det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3k+3 \end{bmatrix}$ para todo $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $det(2A) = 2det(A)$ para todo $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ Nenhuma das anteriores.

(c) Considere o sistema $\begin{cases} x + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \\ ax + 4z = 1 \end{cases}$ nas variáveis x, y, z e onde a é um parâmetro real. Então:

- ☒ o sistema é de Cramer se e só se $a \neq 4$. Se $a = 0$, $y = \dfrac{det\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}}{det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}$.
- ☐ o sistema é de Cramer se e só se $a \neq 4$. Se $a = 0$, $y = \dfrac{det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}{det\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}}$.
- ☐ o sistema é de Cramer se e só se $a = 0$. Se $a = 0$, $y = \dfrac{det\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}}{det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}$.
- ☐ o sistema é de Cramer se e só se $a = 0$. Se $a = 0$, $y = \dfrac{det\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}}{det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}$.
- ☐ Nenhuma das anteriores.

(d) Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido de produto interno e os vetores $u = (1, 1, 1)$ e $v = (1, 2, -1)$. O produto vetorial entre u e v é:

☐ $u \times v = 2$

☒ $u \times v = (-3, 2, 1)$.

☐ $u \times v = (1, 2, -3)$.

☐ $u \times v = 0$.

☐ $u \times v = (3, -2, -1)$.

☐ Nenhuma das anteriores.

(e) Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido de produto interno e o subespaço de $\mathbb{R}^3$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}.$$

Uma base ortogonal de F é:

☐ $\mathscr{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0))$.

☐ $\mathscr{B} = ((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$.

☐ $\mathscr{B} = ((1, 1, 1))$.

☒ $\mathscr{B} = ((-1, 1, 0), (1, 1, -2))$.

☐ Nenhuma das anteriores.

(f) Escolha a opção correta.

☐ Uma matriz A do tipo 3×3 é diagonalizável se e só se tem 3 valores próprios distintos.

☐ Se A é uma matriz do tipo 3×3 com dois valores próprios distintos então um dos subespaços próprios de A, associado a um dos valores próprios, tem dimensão superior a 1.

☒ Se A é uma matriz do tipo 4×4 com dois valores próprios distintos e o subespaço próprio associado a um desses valores tem dimensão 3, então A é diagonalizável.

☐ Nenhuma das anteriores.

(g) Seja $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que $L(x, y) = (2x + y, 3x - 4y, x - y)$. Então a matriz representativa de L relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^2$ e à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é:

- ☐ $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$.
- ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.
- ☐ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$.
- ☒ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.
- ☐ Nenhuma das anteriores.

(h) O determinante da matriz $\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 4 & 0 & c \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ é igual a:

- ☒ $-4 \det \begin{bmatrix} b & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - c \det \begin{bmatrix} a & b \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- ☐ $-\det \begin{bmatrix} b & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} a & b \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\det \begin{bmatrix} b & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a & b \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- ☐ $4 \det \begin{bmatrix} b & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- ☐ Nenhuma das anteriores.

PARTE II

Justifique devidamente as seguintes questões:

2) Considere o sistema de equações lineares nas variáveis x, y e z e no parâmetro real a,

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ (a+1)y + az = 1 \\ x + ay + a(a-1)z = a \end{cases}$$

a) *(1 val.)* Determine os valores de a para os quais o sistema é possível e determinado.

b) *(3 val.)* Determine o valor de a para o qual o sistema tem $(0, 1, -1)$ como solução e resolva o sistema usando o método de eliminação de Gauss-Jordan para este valor de a.

[Se não determinou o valor de a resolva o sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3y + 2z = -2 \\ x - 2y - 2z = 3 \end{cases}$ usando o método de eliminação de Gauss-Jordan. Neste caso a questão será cotada para 2 valores.]

c) *(1,5 val.)* Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e o subespaço $S = \langle (1,0,1), (a, a+1, a), (0, a, a(a-1)) \rangle$, onde a é um parâmetro real. Determine os valores de a para os quais $S = \mathbb{R}^3$.

(3,5 val.) **3)** Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ e o subconjunto

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 3z = 0 \ \wedge y = 2w\}.$$

a) Verifique que S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

b) Determine uma base e a dimensão de S.

(2 val.) **4)** Considere o sistema (impossível) $AX = B$, onde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Encontre a solução dos mínimos quadrados e calcule o erro dos mínimos quadrados associado.

(1 val.) **5)** Seja A uma matriz $n \times n$ e λ um valor próprio de A. Mostre que:

(a) λ^2 é um valor próprio de A^2.

(b) se A é diagonalizável então A^2 também é diagonalizável.

(4 val.) **6)**

(a) Determine uma equação reduzida e classifique a cónica definida pela equação

$$x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 6y + 9 = 0.$$

(b) Classifique a forma quadrática $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(x, y) = x^2 - 4xy + y^2$.

2 (a)
$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ (a+1)y + az = 1 \\ x + ay + a(a-1)z = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & a+1 & a \\ 1 & a & a(a-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = B$$

O sistema $AX=B$ é possível determinado se e só se $car(A) = car([A|B]) = 3 =$ nº de colunas de A.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & a+1 & a & 1 \\ 1 & a & a(a-1) & a \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & a+1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a(a-1) & a-1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 = \frac{L_2}{a+1},\ a \neq -1 \\ L_3 = \frac{L_3}{a(a-1)},\ a\neq 0 \text{ e } a \neq 1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a/(a+1) & 1/(a+1) \\ 0 & 0 & 1 & 1/a \end{array}\right]$$

$AX=B$ é possível determinado se e só se $car(A) = car([A|B]) = 3$, isto é, se $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, 1\}$.

<u>NOTA</u>: Por descargo de consciência vou só ver o que acontece quando $a=0$ ou $a=-1$ ou $a=1$, <u>mas isto não é necessário</u>

Se $a=0$, $[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} car(A) = 2 \\ < \\ car([A|B]) = 3 \end{array}$ é <u>impossível</u>.

Se $a=-1$, $[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 + 2L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $car(A) = car([A|B]) = 2 <$ nº de colunas A

<u>Poss. Ind.</u>

Se $a=1$, $[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $car(A) = car([A|B]) = 2 <$ nº de colunas A

<u>Poss. Ind.</u>

(b)
$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ (a+1)y + az = 1 \\ x + ay + a(a-1)z = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & a+1 & a \\ 1 & a & a(a-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = B$$

Se $(0, 1, -1)$ é solução do sistema $AX=B$ então se substituirmos $x=0$, $y=1$ e $z=-1$ no sistema acima conseguimos determinar o valor de a.

$$\begin{cases} 0 + a \times 1 = 1 \\ (a+1) \times 1 - a = 1 \\ 0 + a - a(a-1) = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ (a+1) \times 1 - a = 1 \\ 0 + a - a(a-1) = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2 - 1 = 1 \\ 0 + 1 - 1(1-1) = 1 \end{cases}$$

← daqui tiro o a

← Estas equações não servem para nada

Assim, para que $(0,1,-1)$ seja solução de $AX=B$ temos de ter que $a=1$.

Para $a=1$ vamos resolver o sistema $AX=B$ com método de Gauss – Jordan:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 2y+z=1 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX=B$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_3=L_3-L_1 \\ L_2=\frac{L_2}{2}}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{L_1=L_1-L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [E|F]$$

escalonada e reduzida ⚠

como $car(A) = car([A|B]) = 2 <$ número de colunas de A temos que o sistema é Poss. Ind.

$$AX=B \Leftrightarrow EX=F \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2}z = 1/2 \\ y + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z \\ y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z \end{cases}$$

o conjunto de soluções é: $\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}z, z\right), z \in \mathbb{R}\right\}$

(c) Queremos saber para que valores de a é que o subespaço S é igual a $\mathbb{R}^3$, isto é, para que valores de a é que os vetores geram $\mathbb{R}^3$.

Corolário do Cap 2.1 slide 12:

Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ sabemos que qualquer conjunto com exatamente 3 vetores que geram $\mathbb{R}^3$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$. Portanto, nestas condições, os vetores $(1,0,1)$, $(a, a+1, a)$ e $(0, a, a(a-1))$ vão formar uma base de $\mathbb{R}^3$ e por isso conseguimos escrever qualquer vetor $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ de forma única como combinação dos vetores $(1,0,1)$, $(a,a+1,a)$ e $(0,a,a(a-1))$.

Assim, queremos saber para que valores de a é que o seguinte sistema:

$$(x,y,z) = \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(a,a+1,a) + \alpha_3(0,a,a(a-1))$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & a+1 & a \\ 1 & a & a(a-1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow B = AX$$

ver o 2º Teorema do Cap 2.1. Slide 10.

é possível determinado / $car(A) = car([A|B]) = 3$?

Pela alínea 2(a), $car(A)=3$ se e só se $a \in \mathbb{R}\setminus\{0,1,-1\}$.

NOTA: Reparem que esta matriz A é igual à matriz dos coeficientes que nos dão no início deste exercício e por isso nós já sabemos quando é que a $car(A)=3$. Senão tivessem reparado nisso tinham de escalonar a matriz e ver quando $car(A)=3$. Tinham de fazer:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & x \\ 0 & a+1 & a & y \\ 1 & a & a(a-1) & z \end{array}\right] \underset{L_3=L_3-L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & x \\ 0 & a+1 & a & y \\ 0 & 0 & a(a-1) & z-x \end{array}\right] \underset{\substack{L_2=L_2/(a+1) \quad a\neq -1 \\ a \neq 0 \\ L_3=L_3/(a(a-1)) \quad a \neq 1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & x \\ 0 & 1 & a/a+1 & \frac{y}{a+1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{z-x}{a(a-1)} \end{array}\right]$$

O sistema é possível determinado $\Leftrightarrow car(A) = car([A|B]) = 3$, isto é, $a \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$.

③ $S=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : \underbrace{x+3z=0}_{\Leftrightarrow\, x=-3z} \wedge y=2w\} = \{(-3z,2w,z,w),\ z,w\in\mathbb{R}\}$

"e"

(a) • $(0,0,0,0)\in S$? Sim, porque a primeira coordenada é igual a menos 3 vezes a terceira, isto é, $0=-3.0$, e a segunda coordenada é igual a 2 vezes a quarta coordenada, isto é, $0=2.0$.

• $(-3z,2w,z,w),(-3z',2w',z',w')\in S$. Será que S é fechado para a soma?

$(-3z,2w,z,w)+(-3z',2w',z',w')=(-3z-3z',2w+2w',y+y',z+z')\in S$ porque a primeira coordenada é igual a menos 3 vezes a terceira, isto é, $-3z-3z'=-3(z+z')$. Para além disso a 2^a coordenada, $2w+2w'$, é igual a 2 vezes a 4^a coordenada, $w+w'$. S é fechado para a soma.

• $\alpha\in\mathbb{R}$, $(-3z,2w,z,w)\in S$. S é fechado para a multiplicação por escalar?

$\alpha(-3z,2w,z,w)=(-3\alpha z,2\alpha w,\alpha z,\alpha w)\in S$ porque

$$\underbrace{-3\alpha z}_{1^a\text{ coordenada}} = -3\underbrace{(\alpha z)}_{3^a\text{ coordenada}} \quad e \quad \underbrace{2\alpha w}_{2^a\text{ coordenada}} = 2\underbrace{(\alpha w)}_{4^a\text{ coordenada}}$$

Logo, S é fechado para a multiplicação por escalar.

Portanto S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

(b) $S=\{(-3z,2w,z,w),\ z,w\in\mathbb{R}\}$

$=\{(-3z,0,z,0)+(0,2w,0,w),\ z,w\in\mathbb{R}\}$

$=\{z(-3,0,1,0)+w(0,2,0,1),\ z,w\in\mathbb{R}\}$

$=\{$vetores de $\mathbb{R}^4$ que são combinação linear de $(-3,0,1,0)$ e $(0,2,0,1)\}$

$=\langle(-3,0,1,0),(0,2,0,1)\rangle$

Assim, $K=\{(-3,0,1,0),(0,2,0,1)\}$ gera S se for l.i. é uma base de $\mathbb{R}^4$.

$\boxed{\text{K é l.i.?}}$ $(0,0,0,0)=\alpha_1(-3,0,1,0)+\alpha_2(0,2,0,1)$

$\Leftrightarrow (0,0,0,0)=(-3\alpha_1,0,\alpha_1,0)+(0,2\alpha_2,0,\alpha_2)$

$\Leftrightarrow (0,0,0,0)=(-3\alpha_1,2\alpha_2,\alpha_1,\alpha_2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-3\alpha_1=0\\2\alpha_2=0\\\alpha_1=0\\\alpha_2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=0\\\alpha_2=0\end{cases}$ Poss. Det.

Logo, K é l.i.

Portanto, $((-3,0,1,0),(0,2,0,1))$ é uma base de S, como esta base tem 2 vetores temos que a dimensão de S é igual a 2, $\dim S=2$.