Folha Prática 6

Atenção: Estas notas não constituem uma resolução formal e rigorosa dos exercícios das Folhas Práticas.

Última atualização: 29 de dezembro de 2025
Notas sobre os exercícios: 1(a), 1(b), 14 e 15.

1(a). $L(x,y) = (x+1, y, x+y)$ é uma aplicação linear? L é uma função que pega num vetor de $\mathbb{R}^2$ e envia num vetor de $\mathbb{R}^3$. Para ser uma aplicação linear tem de satisfazer as seguintes condições para qualquer $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

(i) $L((x,y)+(x',y')) = L(x,y) + L(x',y')$

(ii) $L(\alpha(x,y)) = \alpha L(x,y)$

Vamos ver se satisfaz a primeira condição:

$$\begin{aligned} L((x,y)+(x',y')) &= L(x+x', y+y') \quad \text{(somar os vetores)} \\ &= (x+x'+1, y+y', x+x'+y+y') \quad \text{(aplicar a função } L\text{)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(x,y)+L(x',y') &= (x+1,y,x+y)+(x'+1,y',x'+y') \quad \text{(aplicar a função } L\text{)} \\ &= (x+x'+2, y+y', x+x'+y+y') \quad \text{(somar os vetores)} \end{aligned}$$

Como $L((x,y)+(x',y')) \neq L(x,y)+L(x',y')$, L não é uma aplicação linear. [i]

1(b). $L(x,y,z) = (x+y, y, x-z)$ é uma aplicação linear? L é uma função que pega num vetor de $\mathbb{R}^3$ e envia num vetor de $\mathbb{R}^3$. Para ser uma aplicação linear tem de satisfazer as seguintes condições para qualquer $(x,y,z),(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

(i) $L((x,y,z)+(x',y',z')) = L(x,y,z)+L(x',y',z')$ e (ii) $L(\alpha(x,y,z)) = \alpha L(x,y,z)$

Vamos ver se satisfaz a primeira condição:

$$\begin{aligned} & L((x,y,z)+(x',y',z')) \\ & \quad \text{(somar os vetores)} \\ =\; & L(x+x', y+y', z+z') \\ & \quad \text{(aplicar a função } L\text{)} \\ =\; & (x+x'+y+y', y+y', x+x'-(z-z')) \\ & \quad \text{(separar em dois vetores: um com as linhas outro sem as linhas)} \\ =\; & (x+y,y,x-z) + (x'+y',y',x'-z') \\ =\; & L(x,y,z)+L(x',y',z') \end{aligned}$$

Logo $L((x,y)+(x',y')) = L(x,y)+L(x',y')$.

Vamos ver se satisfaz a segunda condição:

$$\begin{aligned} & L(\alpha(x,y,z)) \\ & \quad \text{(multiplicar cada coordenada por } \alpha\text{)} \\ =\; & L(\alpha x, \alpha y, \alpha z) \\ & \quad \text{(aplicar a função } L\text{)} \\ =\; & (\alpha x+\alpha y, \alpha y, \alpha x - \alpha z) \\ & \quad \text{(colocar o } \alpha \text{ em evidência e “cá fora”)} \\ =\; & (\alpha(x+y), \alpha y, \alpha(x-z)) \\ =\; & \alpha(x+y,y,x-z) \\ =\; & \alpha\, L(x,y,z) \end{aligned}$$

Logo, $L(\alpha(x,y,z)) = \alpha L(x,y,z)$. Portanto, L é uma aplicação linear.

[i] Nem precisamos de ver se satisfaz a segunda condição.

14. (a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

representa a aplicação linear $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ na base canónica definida como $L(X) = AX$. Logo,

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y+2z \\ 2x+y+z \\ 3x+2y+3z \end{bmatrix}$$

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2+2\times 3 \\ 2\times 1+1+1 \\ 3\times +2\times 2+3\times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 16 \end{bmatrix}$$

(b) Determinar a matriz $[L]_{\mathcal{S},\mathcal{S}}$ representativa da aplicação linear L relativamente à base $\mathcal{S} = ((1,1,0),(1,1,1),(1,0,0))$. As colunas da matriz $[L]_{\mathcal{S},\mathcal{S}}$ são as imagens por L dos vetores da base $\mathcal{S}$ escritos nas coordenadas da base $\mathcal{S}$, isto é,

$$[L]_{\mathcal{S},\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ [L(1,1,0)]_{\mathcal{S}} & [L(1,1,1)]_{\mathcal{S}} & [L(1,0,0)]_{\mathcal{S}} \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

1º Calcular $L(1,1,0)$, $L(1,1,1)$ e $L(1,0,0)$.[ii]

$$\begin{aligned} L(1,1,0) &= (1+1+2\times 0, 2\times 1+1+0, 3\times 1+2\times 1+3\times 0) = (2,3,5) \\ L(1,1,1) &= (1+1+2\times 1, 2\times 1+1+1, 3\times 1+2\times 1+3\times 1) = (4,4,8) \\ L(1,0,0) &= (1+0+2\times 0, 2\times 1+0+0, 3\times 1+2\times 0+3\times 0) = (1,2,3) \end{aligned}$$

2º Escrever $L(1,1,0)$, $L(1,1,1)$ e $L(1,0,0)$ como combinação linear dos vetores de $\mathcal{S}$.

$$\begin{aligned} L(1,1,0) = (2,3,5) &= \alpha_1(1,1,0)+\alpha_2(1,1,1)+\alpha_3(1,0,0) \\ \Leftrightarrow (2,3,5) &= (\alpha_1,\alpha_1,0)+(\alpha_2,\alpha_2,\alpha_2)+(\alpha_3,0,0) \\ \Leftrightarrow (2,3,5) &= (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_2) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 2 \\ \alpha_1+\alpha_2 = 3 \\ \alpha_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -2 \\ \alpha_2 = 5 \\ \alpha_3 = -1 \end{cases}$$

Logo, a primeira coluna de $[L]_{\mathcal{S},\mathcal{S}}$ é $[L(1,1,0)]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} L(1,1,1) = (4,4,8) &= \beta_1(1,1,0)+\beta_2(1,1,1)+\beta_3(1,0,0) \\ \Leftrightarrow (4,4,8) &= (\beta_1+\beta_2+\beta_3, \beta_1+\beta_2, \beta_2) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1+\beta_2+\beta_3 = 4 \\ \beta_1+\beta_2 = 4 \\ \beta_2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 = -4 \\ \beta_2 = 8 \\ \beta_3 = 0 \end{cases}$$

Logo, a segunda coluna de $[L]_{\mathcal{S},\mathcal{S}}$ é $[L(1,1,1)]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$L(1,0,0) = (1,2,3) = \theta_1(1,1,0)+\theta_2(1,1,1)+\theta_3(1,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_1 = -1 \\ \theta_2 = 3 \\ \theta_3 = -1 \end{cases}$$

[ii] Vou trabalhar com os vetores na forma $(-,-,-)$ em vez de matrizes, só porque ocupa menos espaço; é apenas uma questão de notação, na prática não faz diferença.

Logo, a terceira coluna de $[L]_{\mathcal{S},\mathcal{S}}$ é $[L(1,0,0)]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\ 3\\ -1\end{bmatrix}$. Portanto, temos que

$$\boxed{[L]_{\mathcal{S},\mathcal{S}} = \begin{bmatrix}-2 & -4 & -1\\ 5 & 8 & 3\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}}$$

15. Seja $\mathcal{S} = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ uma base e $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ um aplicação linear tal que:

$$L(1,1,1) = (-1,1),\ L(1,1,0) = (1,1) \ \text{ e } \ L(1,0,0) = (0,2)$$

(a) $[L]_{\mathcal{S},B_c}$ é uma matriz cujas colunas são as imagens de $\mathcal{S}$ pela função L escritas nas coordenadas da base canónica de $\mathbb{R}^2$ é $B_c = ((1,0),(0,1))$.

$$[L]_{\mathcal{S},B_c} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ [L(1,1,1)]_{B_c} & [L(1,1,0)]_{B_c} & [L(1,0,0)]_{B_c} \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

1ª Calcular a imagem por L dos elementos de $\mathcal{S}$[iii]

$$L(1,1,1) = (-1,1)$$
$$L(1,1,0) = (1,1)$$
$$L(1,0,0) = (0,2)$$

2º Escrever $L(1,1,1)$, $L(1,1,0)$ e $L(1,0,0)$ como combinação linear de B_c

Escrever $L(1,1,1) = (-1,1)$ à custa da base canónica de $\mathbb{R}^2$, B_c.

$$L(1,1,1) = (-1,1) \ = \alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1 = -1\\ \alpha_2 = 1\end{cases} \quad \text{logo } [L(1,1,1)]_{B_c} = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$$

Escrever $L(1,1,0) = (1,1)$ à custa da base canónica de $\mathbb{R}^2$, B_c.

$$L(1,1,0) = (1,1) \ = \beta_1(1,0) + \beta_2(0,1)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\beta_1 = 1\\ \beta_2 = 1\end{cases} \quad \text{logo } [L(1,1,0)]_{B_c} = \begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

Escrever $L(1,0,0) = (0,2)$ à custa da base canónica de $\mathbb{R}^2$, B_c.

$$L(1,0,0) = (0,2) \ = \theta_1(1,0) + \theta_2(0,1)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\theta_1 = 0\\ \theta_2 = 2\end{cases} \quad \text{logo } [L(1,0,0)]_{B_c} = \begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}$$

Nota: Qualquer vetor tem as mesmas coordenadas quando escrito à custa da base canónica, isto é, $[(x,y)]_{B_c} = (x,y)$, nem precisavamos de fazer contas mas também não era difíceis.

Assim,

$$[L]_{\mathcal{S},B_c} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ [L(1,1,1)]_{B_c} & [L(1,1,0)]_{B_c} & [L(1,0,0)]_{B_c} \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

(b) Determine $[L(X)]_{B_c}$ e $L(X)$[iv], sabendo que

$$[X]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$$

[iii] Não precisamos de calcular nada, pois esta informação já nos é dada.

[iv] É suposto que $[L(X)]_{B_c} = L(X)$, porque qualquer vetor é igual a si próprio na base canónica.

1º Determinar $[L(X)]_{B_c}$ usando $[L]_{\mathcal{S},B_c}$ calculado na alínea anterior.

$$\begin{aligned}
[L(X)]_{B_c} &= [L]_{\mathcal{S},B_c}[X]_{\mathcal{S}} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2º Determinar $L(X)$ já sabemos $[L(X)]_{B_c}$, isto é, $L(X)$ nas coordenadas de B_c:

$$[L(X)]_{B_c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

isto é o mesmo que dizer que $L(X)$ é 1 vez o primeiro vetor da base B_c mais 9 vezes o segundo vetor da base B_c, isto é,

$$L(X) = 1 \underbrace{(1,0)}_{\substack{1^{\text{o}}\text{vetor} \\ \text{de } B_c}} + 9 \underbrace{(0,1)}_{\substack{2^{\text{o}}\text{vetor} \\ \text{de } B_c}} = (1,9)$$

(c) A base canónica de $\mathbb{R}^3$ é $B = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$. Queremos determinar a matriz $[L]_{B,B_c}$ cujas colunas são as imagens por L dos vetores da base B escritos nas coordenadas da base B_c, isto é,

$$[L]_{B,B_c} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ [L(1,0,0)]_{B_c} & [L(0,1,0)]_{B_c} & [L(0,0,1)]_{B_c} \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

1º Calcular $L(1,0,0)$, $L(0,1,0)$ e $L(0,0,1)$

Pelo enunciado temos que $L(1,0,0) = (0,2)$

Para determinar $L(0,1,0)$ e $L(0,0,1)$ vamos usar o facto de que sabemos para onde são enviados pela função L os vetores $(1,1,1)$, $(1,1,0)$ e $(1,0,0)$. Assim,

Como

$$(0,1,0) = 0(1,1,1) + (1,1,0) - (1,0,0)$$

temos que

$$\begin{aligned}
L(0,1,0) &= 0L(1,1,1) + L(1,1,0) - L(1,0,0) \\
&= (1,1) - (0,2) \\
&= (1,-1)
\end{aligned}$$

Como

$$(0,0,1) = (1,1,1) - (1,1,0) + 0(1,0,0)$$

temos que

$$\begin{aligned}
L(0,0,1) &= L(1,1,1) - L(1,1,0) + 0L(1,0,0) \\
&= (-1,1) - (1,1) \\
&= (-2,0)
\end{aligned}$$

Portanto, $L(1,0,0) = (0,2)$, $L(0,1,0) = (1,-1)$, e $L(0,0,1) = (-2,0)$.

2º Escrever $L(1,0,0)$, $L(0,1,0)$ e $L(0,0,1)$ nas coordenadas da base B_c

Vamos escrever $L(1,0,0)$ à custa da base $B_c = ((1,0),(0,1))$.

$$\begin{aligned}
L(1,0,0) = (0,2) &= \alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 2 \end{cases} \quad \text{logo } [L(1,0,0)]_{B_c} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Escrever $L(1,0,0) = (1,-1)$ à custa da base canónica de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
L(1,0,0) = (1,-1) &= \beta_1(1,0) + \beta_2(0,1) \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} \beta_1 = 1 \\ \beta_2 = -1 \end{cases} \quad \text{logo } [L(1,0,0)]_{B_c} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Escrever $L(0,0,1) = (-2,0)$ à custa da base canónica de $\mathbb{R}^2$.

$$L(0,0,1) = (-2,0) = \theta_1 (1,0) + \theta_2 (0,1)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \theta_1 = -2 \\ \theta_2 = 0 \end{cases} \quad \text{logo } [L(0,0,1)]_{B_c} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$[L]_{B,B_c} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ [L(1,0,0)]_{B_c} & [L(0,1,0)]_{B_c} & [L(0,0,1)]_{B_c} \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(d) $B_c = ((1,0),(0,1))$ é a base canónica de $\mathbb{R}^2$ e $B = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$. Usando a alínea anterior, temos que :

$$[L(X)]_{B_c} = [L]_{B,B_c} [X]_B \tag{$\star$}$$

Sabemos que qualquer vetor tem as mesmas coordenadas quando escrito à custa da base canónica e como B_c e B são bases canónicas temos que $[L(X)]_{B_c} = L(X)$ e $[X]_B = X$. Assim, podemos simplificar ($\star$):

$$\begin{aligned} L(X) &= [L]_{B,B_c} X \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y - 2z \\ 2x - y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Logo, temos que a aplicação linear $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é definida por $L(x,y,z) = (y-2z, 2x-y)$.

— **OU** —

Vamos usar o facto de que sabemos para onde são enviados pela função L os vetores $(1,1,1)$, $(1,1,0)$ e $(1,0,0)$, $L(1,1,1) = (-1,1)$, $L(1,1,0) = (1,1)$ e $L(1,0,0) = (0,2)$.

Dado um vetor qualquer (x,y,z) se soubermos como é que esse vetor está relacionado com os vetores $(1,1,1)$, $(1,1,0)$ e $(1,0,0)$ conseguimos determinar para onde é que esse vetor é enviado, porque sabemos para onde são enviados $(1,1,1)$, $(1,1,0)$ e $(1,0,0)$.

1º Escrever (x,y,z) como combinação linear de $(1,1,1)$, $(1,1,0)$ e $(1,0,0)$.

$$(x,y,z) = \alpha_1 (1,1,1) + \alpha_2 (1,1,0) + \alpha_3 (1,0,0)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = x \\ \alpha_1 + \alpha_2 = y \\ \alpha_1 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_3 = x - y \\ \alpha_2 = y - z \\ \alpha_1 = z \end{cases}$$

Logo,

$$(x,y,z) = z(1,1,1) + (y-z)(1,1,0) + (x-y)(1,0,0)$$

2º Aplicar L aos vetores[v]

$$L(x,y,z) = zL(1,1,1) + (y-z)L(1,1,0) + (x-y)L(1,0,0)$$

Como sabemos as imagem dos vetores a azul, vamos substituir e fazer contas:

$$\begin{aligned} L(x,y,z) &= zL(1,1,1) + (y-z)L(1,1,0) + (x-y)L(1,0,0) \\ &= z(-1,1) + (y-z)(1,1) + (x-y)(0,2) \\ &= (-z,z) + (y-z, y-z) + (0, 2x-2y) \\ &= (-z + y - z, z + y - z + 2x - 2y) \\ &= (y - 2z, 2x - y) \end{aligned}$$

[v] Atenção que x, y e z são números reais.