Álgebra Linear e Geometria Analítica - A

Exame Final **19 de Janeiro de 2024**

Justifique devidamente as respostas a todas as questões

Duração total do exame: 2h30m

~~*(2 val.)* **1)** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, o vetor $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e o sistema de equações lineares $AX = b$, onde $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ é o vetor das incógnitas. Resolva o sistema $AX = b$, através do método de fatorização $A = LU$.~~

~~(Nota: em alternativa pode resolver o sistema pelo método de eliminação de Gauss, mas neste caso a questão terá a cotação de 1 valor).~~

(2 val.) **2)** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, o vetor $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e o sistema de equações lineares $AX = b$, onde $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ é o vetor das incógnitas. Justifique que o sistema $AX = b$ é um sistema de Cramer e determine o valor da incógnita z pela regra de Cramer. Tema de auto-estudo

~~*(2 val.)* **3)** Determine a matriz A tal que $(A + I_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.~~

(4 val.) **4)** Considere o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$, F, com base $\mathscr{B} = \left((\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0), (0, 0, 1) \right)$.

a) Mostre que $\mathscr{B}$ é uma base ortonormada de F.

b) Determine a projeção ortogonal do vetor $(1, 2, 3)$ sobre F.

c) Encontre a solução dos mínimos quadrados do sistema

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

e calcule o erro dos mínimos quadrados.

(v.s.f.f)

(2 val.) **5)** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & 2 \end{bmatrix}$, onde a é um parâmatro real.

a) Calcule os valores próprios de A.

b) Determine os valores de a para os quais a matriz A é diagonalizável.

(1,5 val.) **6)** Considere a matriz simétrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 20 \end{bmatrix}$.

a) Usando o Critério de Sylvester, justifique que a forma quadrática $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $Q(X) = X^T AX$, para $X \in \mathbb{R}^3$, é definida positiva.

b) O que pode dizer acerca dos valores próprios de A?

(2,5 val.) **7)** Considere a cónica de equação

$$5x^2 - 4xy + 5y^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0.$$

Obtenha uma equação reduzida da cónica e classifique-a.

(3 val.) **8)** Considere a aplicação linear $L : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ definida por

$$L(x, y, z) = (x - z, -y + 2z, x - y + z).$$

~~a) Determine uma base do núcleo de L e a sua dimensão. L é injetiva?~~

b) Determine a matriz de representativa de L relativamente à base $\mathscr{B} = ((1, -1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1))$ de $\mathscr{R}^3$, $[L]_{\mathscr{B},\mathscr{B}}$.

(1 val.) **9)** Justifique as seguintes afirmações (verdadeiras).

~~a) Considere a aplicação linear $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^n$. Se L é injetiva então $n \geq 4$.~~

b) Seja $\{u, v, w\}$ um conjunto ortogonal de vetores de $\mathbb{R}^n$. Então $\{u, \alpha v + \beta w\}$ é também um conjunto ortogonal, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Estas notas não constituem uma resolução formal dos exercícios do Exame.

2 $Ax=b$ é um sistema de Cramer porque A é uma matriz quadrada e

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 2\times(-2) = 4 \neq 0$$

Pela Regra de Cramer,

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{7} = -\frac{1}{4}$$

Estamos a calcular a 3ª incógnita, z, assim temos o det. de A substituindo a 3ª coluna por b.

4 **(a)** $\mathcal{B} = (\underbrace{(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0)}_{=X_1}, \underbrace{(0,0,1)}_{=X_2})$ é uma base de F

$$X_1 \cdot X_2 = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\cdot(0,0,1) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\times 0 + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\times 0 + 0\times 1 = 0$$

X_1 e X_2 são ortogonais

$$X_1 \cdot X_1 = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\cdot\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1,$$ X_1 tem norma 1

$$X_2 \cdot X_2 = (0,0,1)\cdot(0,0,1) = 1,$$ X_2 tem norma 1

Assim, como $X_1 \cdot X_2 = 0$ e $X_1 \cdot X_1 = X_2 \cdot X_2 = 1$, segue que $\mathcal{B}$ é uma base ortonormada de F.

(b) Como $\mathcal{B} = (\underbrace{(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0)}_{=X_1}, \underbrace{(0,0,1)}_{=X_2})$ é uma base ortonormada de F então:
(ver Teorema do Cap. 4 slide 10)

$$\begin{aligned} \operatorname{proj}_F(1,2,3) &= ((1,2,3)\cdot X_1)X_1 + ((1,2,3)\cdot X_2)X_2 \\ &= ((1,2,3)\cdot(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0))X_1 + ((1,2,3)\cdot(0,0,1))X_2 \\ &= (\sqrt{2}/2 + \sqrt{2})X_1 + 3X_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) + 3(0,0,1) \\ &= (3/2, 3/2, 0) + (0,0,3) = (3/2, 3/2, 3) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 2 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = b$$ é impossível logo vamos usar o método dos mínimos quadrados

<u>Equações Normais:</u>

$$A^TAX = A^Tb \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolver as equações normais:

$$[A^TA|A^Tb] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{array}\right] \underset{L_2=L_2+L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \underset{L_1=L_1+2L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \underset{L_1=\frac{L_1}{2}}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 9/2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] = [C|D]$$

$A^TAX=A^Tb \Leftrightarrow CX = D \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/2 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ y = 3 \end{cases}$ é a solução dos mínimos quadrados

O erro é: $\left\| b - A\begin{bmatrix} 9/2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9/2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\|$

$$= \left\| \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

5 (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & 2 \end{bmatrix}$ é uma matriz triangular inferior logo os valores próprios são os elementos da diagonal principal: 1 e 2.

ou

$\det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda^{+} & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & a & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)\det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ a & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$

$\Leftrightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = 2$ são os valores próprios de A.

(b) $A_{3\times3}$ é diagonalizável se e só se A possui 3 vetores próprios l.i.

Pela alínea (a), $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = (1-\lambda)^1(2-\lambda)^2$ logo, $1 \leq \dim U_1 \leq 1 \Rightarrow \dim U_1 = 1$ e $1 \leq \dim U_2 \leq 2$ (Teorema do Cap. 5.1. slide 4)

1 e 2 são valores próprios de A logo A possui $\dim U_1 + \dim U_2$ vetores próprios l.i. (Teorema do Cap. 5.1. slide 11)

Assim, $A_{3\times3}$ é diagonalizável $\Leftrightarrow \dim U_1 + \dim U_2 = 3 \Leftrightarrow 1 + \dim U_2 = 3$
$\Leftrightarrow \dim U_2 = 2$
$\Leftrightarrow$ nº de colunas de A $- car(A - 2I_3) = 2$ ← Cap. 5.1. slide 12
$\Leftrightarrow 3 - car(A - 2I_3) = 2$
$\Leftrightarrow car(A - 2I_3) = 1$
$\Leftrightarrow a = 0$

C.A.

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2=L_2+L_1 \\ L_3=L_3+L_1}}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ escalonada

$car(A - 2I_3) = 1 \Leftrightarrow a = 0$

ou $A_{3\times3}$ é diagonalizável $\Leftrightarrow$ A possui 3 vetores próprios l.i.

(vamos calcular os vetores próprios de A e ver para que valores de a é que a matriz A possui 3 vetores próprios l.i.)

Subespaço próprio associado ao valor próprio 1:

$$U_1 = \{X \in \mathbb{R}^3 : (A - 1I_3)X = 0\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} 0=0 \\ x+y=0 \\ x+ay+z=0 \end{cases}\right\}$$

$$= \{(-y, y, y(1-a)),\ y \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{y(-1,1,1-a),\ y \in \mathbb{R}\} = \langle(-1,1,1-a)\rangle$$

C.A.

$$\begin{cases} 0=0 \\ x+y=0 \\ x+ay+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ -y+ay+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} — \\ -y(1-a)+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ z=y(1-a) \end{cases}$$

$(-1,1,1-a)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 1.

(Já temos 1 vetor próprio faltam mais 2.)

Subespaço próprio associado ao valor próprio 2:

$$U_2 = \{X \in \mathbb{R}^3 : (A - 2I_3)X = 0\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} -x=0 \\ x=0 \\ x+ay=0 \end{cases}\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x=0 \\ ay=0 \end{cases}\right\}$$

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x=0 \\ y=0 \text{ ou } a=0 \end{cases}\right\}$$

$\boxed{\text{Se } y=0}$ $U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=0 \text{ e } y=0\} = \{(0,0,z),\ z \in \mathbb{R}\}$

$= \{z(0,0,1),\ z \in \mathbb{R}\} = \langle(0,0,1)\rangle$

$(0,0,1)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 2. Neste caso, A só tem 2 vetores próprios l.i., $(0,0,1)$ e $(-1,1,a-1)$ e por isso <u>não</u> é diagonalizável.

$\boxed{\text{Se } a=0}$ $U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=0\} = \{(0,y,z),\ y,z \in \mathbb{R}\}$

$= \{(0,y,0)+(0,0,z),\ y,z \in \mathbb{R}\} = \{y(0,1,0)+z(0,0,1),\ y,z \in \mathbb{R}\}$

$= \langle(0,1,0),(0,0,1)\rangle$

$(0,1,0), (0,0,1)$ são vetores próprios associados ao valor próprio 2. Portanto,

$A_{3\times3}$ é diagonalizável $\Leftrightarrow$ A possui 3 vetores próprios l.i. e isso acontece apenas quando $a=0$ sendo os vetores próprios $(-1,1,1-a),(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.

6 (a) Os menores principais dominantes são:

$$\Delta_1 = |1| = 1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3-1 = 2, \quad \Delta_3 = |A| = \begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{1} & \overset{+}{-3} \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 20 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 20 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

L2, C2 L3, C3   L3, C3

$$= 60-1-(20+3)-3(1+9) = 6$$

Como todos os menores principais dominantes são positivos, isto é, $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 > 0$, pelo Critério de Sylvester, a forma quadrática Q é definida positiva. (Cap. 5.2. slide 10)

(b) Pela alínea (a), como $Q(X) = X^TAX$ é definida positiva então todos os valores próprios de A são positivos. (Cap. 5.2. slide 7)

7 $5x^2-4xy+5y^2+\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$

$(\mathbb{R}^2)$

$\Leftrightarrow X^TAX + BX = 0$

<u>Eliminar o termo cruzado $-4xy$:</u>

<u>Calcular os valores próprios de A:</u>

$|A-\lambda I_2| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (5-\lambda)^2-4=0 \Leftrightarrow \lambda^2-10\lambda+21=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2-4\times21}}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{10\pm\sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow \lambda = 7$ ou $\lambda = 3$ são os valores próprios de A

<u>Calcular os vetores próprios de A:</u>

$\mathcal{U}_7 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (A-7I_2)X=0\} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=-y\} = \{(-y,y), y\in\mathbb{R}\} = \{y(-1,1), y\in\mathbb{R}\} = \langle(-1,1)\rangle$

$(-1,1)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 7.

$\mathcal{U}_3 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (A-3I_2)X=0\} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=y\} = \{(y,y), y\in\mathbb{R}\} = \{y(1,1), y\in\mathbb{R}\} = \langle(1,1)\rangle$

$(1,1)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 3.

Dividir cada vetor próprio pela sua norma:

$$\frac{(-1,1)}{\|(-1,1)\|}=\frac{(-1,1)}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ e } \frac{(1,1)}{\|(1,1)\|}=\frac{(1,1)}{\sqrt{1^2+1^2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Construir P e D: $P=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$ e $D=\begin{bmatrix}7 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

vetor próprio do 7 — vetor próprio do 2

Mudança de variável: $X=P\hat{X}$ em que $\hat{X}=\begin{bmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\end{bmatrix}$ e calcular $\hat{B}=BP=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}0 & 2\end{bmatrix}$$

Assim, $X^TAX+BX=0 \Leftrightarrow \hat{X}^TD\hat{X}+\hat{B}\hat{X}=0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\hat{x} & \hat{y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow 7\hat{x}^2+2\hat{y}^2+2\hat{y}=0$$

Completar o quadrado

$$\Leftrightarrow 7\hat{x}^2+2(\hat{y}^2+1\hat{y})=0 \Leftrightarrow 7\hat{x}^2+2\left(\hat{y}^2+\hat{y}+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2-\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 7\hat{x}^2+2\left(\hat{y}^2+\hat{y}+(1/2)^2\right)-2\times(1/2)^2=0 \Leftrightarrow 7\hat{x}^2+2(\underbrace{\hat{y}+1/2}_{=\tilde{y}})^2=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 14\hat{x}^2+4\tilde{y}^2=1 \Leftrightarrow \frac{\hat{x}^2}{1/14}+\frac{\tilde{y}^2}{1/4}=1$$ elipsóide

8 (b) $L(x,y,z)=(x-z,-y+2z,x-y+z)$ e $\mathcal{B}=((1,-1,0),(1,0,1),(0,0,1))$

$$[L]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}=\begin{bmatrix} | & | & | \\ [L(1,-1,0)]_{\mathcal{B}} & [L(1,0,1)]_{\mathcal{B}} & [L(0,0,1)]_{\mathcal{B}} \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

1º Calcular $L(1,-1,0)$, $L(1,0,1)$ e $L(0,0,1)$

$$L(1,-1,0)=(1-0,-(-1)+2\times0,1-(-1)+0)=(1,1,2)$$

$$L(1,0,1)=(0,2,2) \text{ e } L(0,0,1)=(-1,2,1)$$

2º Escrever $L(1,-1,0)$, $L(1,0,1)$ e $L(0,0,1)$ como combinação linear de $\mathcal{B}$

$$L(1,-1,0)=(1,1,2)=\alpha_1(1,-1,0)+\alpha_2(1,0,1)+\alpha_3(0,0,1)$$

$$\Leftrightarrow (1,1,2)=(\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_1,\alpha_2+\alpha_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1+\alpha_2=1 \\ -\alpha_1=1 \\ \alpha_2+\alpha_3=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2=2 \\ \alpha_1=-1 \\ \alpha_3=0 \end{cases}$$ assim $$[L(1,-1,0)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L(1,0,1)=(0,2,2) = \beta_1(1,-1,0)+\beta_2(1,0,1)+\beta_3(0,0,1)$$

$$\Leftrightarrow (0,2,2)=(\beta_1+\beta_2,-\beta_1,\beta_2+\beta_3) \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1+\beta_2=0 \\ -\beta_1=2 \\ \beta_2+\beta_3=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_2=2 \\ \beta_1=-2 \\ \beta_3=0 \end{cases} \quad [L(1,0,1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L(0,0,1)=(-1,2,1) = \gamma_1(1,-1,0)+\gamma_2(1,0,1)+\gamma_3(0,0,1)$$

$$\Leftrightarrow (-1,2,1)=(\gamma_1+\gamma_2,-\gamma_1,\gamma_2+\gamma_3) \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1+\beta_2=-1 \\ -\beta_1=2 \\ \beta_2+\beta_3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_2=1 \\ \beta_1=-2 \\ \beta_3=0 \end{cases} \quad [L(0,0,1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Logo, $[L]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

9 (b) $\boxed{\{u,v,w\} \text{ é ortogonal}} \Longrightarrow \boxed{\{u,\alpha v+\beta w\} \text{ é ortogonal}, \ \alpha,\beta \in \mathbb{R}}$

Se $\{u,v,w\}$ é ortogonal então $u\cdot v=0$, $v\cdot w=0$ e $u\cdot w=0$. Nestas condições queremos mostrar que $\{u,\alpha v+\beta w\}$ é ortogonal, isto é, $u\cdot(\alpha v+\beta w)=0$

$$u\cdot(\alpha v+\beta w) = u\cdot(\alpha v)+u\cdot(\beta w) = \alpha\underbrace{(u\cdot v)}_{=0}+\beta\underbrace{(u\cdot w)}_{=0} = 0$$

Logo, u e $\alpha v+\beta w$ são ortogonais, isto é, $\{u,\alpha v+\beta w\}$ é ortogonal.