Departamento de Matemática **Universidade de Aveiro**

Álgebra Linear e Geometria Analítica - A

Exame Final **10 de Janeiro de 2025**

Duração total do teste: 2h30m

Nome: ____________________

N^o mecanográfico: __________ **Curso** ____________________

Declaro que desisto: ____________________

Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5	Questão 6	Classificação final

PARTE I

Escolha múltipla

(4 val.) **1)** Selecione a (única) afirmação verdadeira em cada uma das seguintes questões. Cada resposta certa será cotada com $0,5$ valores.

(a) Considere as bases $\mathscr{B} = ((1,-1),(-3,4))$ e $\mathscr{C} = ((1,0),(0,1))$ de $\mathbb{R}^2$. A matriz de mudança de base de $\mathscr{B}$ para $\mathscr{C}$ é:

☒ $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.

☐ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$.

☐ $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$.

☐ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$.

☐ Nenhuma das anteriores.

(b) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ k & 2k+3 \end{bmatrix}$, onde k é um parâmetro real. Podemos dizer que:

- ☐ A é invertível para todo $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $det(A) = -det(A^{-1})$ para todo $k \in \mathbb{R}$.
- ☒ $det(A) = det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3k+3 \end{bmatrix}$ para todo $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ $det(2A) = 2det(A)$ para todo $k \in \mathbb{R}$.
- ☐ Nenhuma das anteriores.

Tema de auto-estudo

(c) Considere o sistema $\begin{cases} x+z=3 \\ x+2y-z=2 \\ ax+4z=1 \end{cases}$ nas variáveis x, y, z e onde a é um parâmetro real. Então:

- ☒ o sistema é de Cramer se e só se $a \neq 4$. Se $a=0$, $y = \dfrac{det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}}{det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}$.
- ☐ o sistema é de Cramer se e só se $a \neq 4$. Se $a=0$, $y = \dfrac{det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}{det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}}$.
- ☐ o sistema é de Cramer se e só se $a = 0$. Se $a=0$, $y = \dfrac{det \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}}{det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}$.
- ☐ o sistema é de Cramer se e só se $a = 0$. Se $a=0$, $y = \dfrac{det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}}{det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}$.
- ☐ Nenhuma das anteriores.

(d) Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido de produto interno e os vetores $u = (1, 1, 1)$ e $v = (1, 2, -1)$. O produto vetorial entre u e v é:

- ☐ $u \times v = 2$.
- ☒ $u \times v = (-3, 2, 1)$.
- ☐ $u \times v = (1, 2, -3)$.
- ☐ $u \times v = 0$.
- ☐ $u \times v = (3, -2, -1)$.
- ☐ Nenhuma das anteriores.

(e) Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido de produto interno e o subespaço de $\mathbb{R}^3$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y + z = 0\}.$$

Uma base ortogonal de F é:

- ☐ $\mathscr{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0))$.
- ☐ $\mathscr{B} = ((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$.
- ☐ $\mathscr{B} = ((1, 1, 1))$.
- ☒ $\mathscr{B} = ((-1, 1, 0), (1, 1, -2))$.
- ☐ Nenhuma das anteriores.

(f) Escolha a opção correta.

- ☐ Uma matriz A do tipo 3×3 é diagonalizável se e só se tem 3 valores próprios distintos.
- ☐ Se A é uma matriz do tipo 3×3 com dois valores próprios distintos então um dos subespaços próprios de A, associado a um dos valores próprios, tem dimensão superior a 1.
- ☒ Se A é uma matriz do tipo 4×4 com dois valores próprios distintos e o subespaço próprio associado a um desses valores tem dimensão 3, então A é diagonalizável.
- ☐ Nenhuma das anteriores.

(g) Seja $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que $L(x, y) = (2x + y, 3x - 4y, x - y)$. Então a matriz representativa de L relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^2$ e à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é:

☐ $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$.

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

☐ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$.

☒ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

☐ Nenhuma das anteriores.

(h) O determinante da matriz $\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 4 & 0 & c \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ é igual a:

☒ $-4 \det \begin{bmatrix} b & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - c \det \begin{bmatrix} a & b \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.

☐ $-\det \begin{bmatrix} b & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} a & b \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.

☐ $\det \begin{bmatrix} b & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a & b \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.

☐ $4 \det \begin{bmatrix} b & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.

☐ Nenhuma das anteriores.

PARTE II

Justifique devidamente as seguintes questões:

2) Considere o sistema de equações lineares nas variáveis x, y e z e no parâmetro real a,

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ (a+1)y + az = 1 \\ x + ay + a(a-1)z = a \end{cases}$$

a) *(1 val.)* Determine os valores de a para os quais o sistema é possível e determinado.

b) *(3 val.)* Determine o valor de a para o qual o sistema tem $(0, 1, -1)$ como solução e resolva o sistema usando o método de eliminação de Gauss-Jordan para este valor de a.

[Se não determinou o valor de a resolva o sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3y + 2z = -2 \\ x - 2y - 2z = 3 \end{cases}$ usando o método de eliminação de Gauss-Jordan. Neste caso a questão será cotada para 2 valores.]

c) *(1,5 val.)* Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e o subespaço $S = \langle (1,0,1), (a, a+1, a), (0, a, a(a-1)) \rangle$, onde a é um parâmetro real. Determine os valores de a para os quais $S = \mathbb{R}^3$.

(3,5 val.) **3)** Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ e o subconjunto

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 3z = 0 \ \wedge y = 2w\}.$$

a) Verifique que S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

b) Determine uma base e a dimensão de S.

(2 val.) **4)** Considere o sistema (impossível) $AX = B$, onde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Encontre a solução dos mínimos quadrados e calcule o erro dos mínimos quadrados associado.

(1 val.) **5)** Seja A uma matriz $n \times n$ e λ um valor próprio de A. Mostre que:

(a) λ^2 é um valor próprio de A^2.

(b) se A é diagonalizável então A^2 também é diagonalizável.

(4 val.) **6)**

(a) Determine uma equação reduzida e classifique a cónica definida pela equação

$$x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 6y + 9 = 0.$$

(b) Classifique a forma quadrática $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(x, y) = x^2 - 4xy + y^2$.

Estas notas não constituem uma resolução formal e rigorosa do Exame.

1 (a) $\mathcal{B}=((1,-1),(-3,4))$ - base de $\mathbb{R}^2$
$\mathcal{E}=((1,0),(0,1))$ - base canónica de $\mathbb{R}^2$.

$$M_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}=\begin{bmatrix} | & | \\ [(1,-1)]_{\mathcal{E}} & [(-3,4)]_{\mathcal{E}} \\ | & | \end{bmatrix}$$

(Cap. 2.1. slide 14) as colunas são os vetores da base $\mathcal{B}$ escritos à custa da base $\mathcal{E}$.

$(1,-1)=\alpha_1(1,0)+\alpha_2(0,1) \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=1\\ \alpha_2=-1\end{cases}$ assim $[(1,-1)]_{\mathcal{E}}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

$(-3,4)=\beta_1(1,0)+\beta_2(0,1) \Leftrightarrow \begin{cases}\beta_1=-3\\ \beta_2=4\end{cases}$ assim $[(-3,4)]_{\mathcal{E}}=\begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}$

NOTA: Qualquer vetor (x,y) tem as mesmas coordenadas quando escrito à custa da base canónica, isto é, $[(x,y)]_{\mathcal{E}}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$.

Logo, $M_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}1 & -3\\ -1 & 4\end{bmatrix}$

(b) $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ k & 2k+3\end{bmatrix}$ vamos analisar cada uma das opções:

A é invertível $\Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}1 & -1\\ k & 2k+3\end{vmatrix}\neq 0 \Leftrightarrow 2k+3+k\neq 0 \Leftrightarrow k\neq -1$

Logo, A é invertível apenas quando $k\neq -1$.

$\det(A)=\dfrac{1}{\det(A^{-1})}\neq -\det(A^{-1})$ (Propriedade 7 Cap. 3. slide 8)

$\det(2A)=\det\left(2\begin{bmatrix}1 & -1\\ k & 2k+3\end{bmatrix}\right)=\det\left(\begin{bmatrix}2\times 1 & 2\times(-1)\\ 2k & 2(2k+3)\end{bmatrix}\right)$ (Propriedade 3 Cap. 3. slide 2)

$=2\det\left(\begin{bmatrix}1 & 2\times(-1)\\ k & 2(2k+3)\end{bmatrix}\right)=2\times 2\times\det\left(\begin{bmatrix}1 & -1\\ k & 2k+3\end{bmatrix}\right)=4\det(A)\neq 2\det(A)$

$\det(A)=\det\left(\begin{bmatrix}1 & -1\\ k & 2k+3\end{bmatrix}\right)\underset{(L_2=L_2-kL_1)}{=}\det\left(\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 3k+3\end{bmatrix}\right)$ Opção correta!

esta operação elementar não altera o determinante (Propriedade 5 Cap. 3 slide 8)

(c) $\begin{cases} x+z=3 \\ x+2y-z=2 \\ ax+4z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ a & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX=b$

O sistema $Ax=b$ é um sistema de Cramer se e só se

$|A| \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ a & 0 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 2(4-a) \neq 0$
$\Leftrightarrow 8-2a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 4$

Se $a=0$ então $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}}$

Estamos a calcular a 2ª incógnita, y, logo no numerador temos o det. de A substituindo a 2ª coluna por $b=[3\ 2\ 1]^T$.

(d) $u \times v = (1,1,1) \times (1,2,-1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = i\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}_{=-1-2=-3} - j\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}_{=-1-1=-2} + k\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}_{=2-1=1}$

$= -3i+2j+k = -3(1,0,0)+2(0,1,0) = (-3,2,1)$

(e) $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$ queremos uma base ortogonal de F.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$B=((-1,1,0),(-1,0,1))$ não pode ser a opção correta porque os vetores não são ortogonais: $(-1,1,0)\cdot(-1,0,1)=1\neq 0$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$B=((1,0,0),(0,1,0))$ não pode ser a opção correta porque apesar dos vetores serem ortogonais $(1,0,0)\cdot(0,1,0)=0$ os vetores não pertencem a F e para ser uma base de F convinha serem vetores de F...
$(1,0,0)\notin F$ porque $1+0+0\neq 0$ e $(0,1,0)\notin F$ porque $0+1+0\neq 0$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$B=((1,1,1))$ não pode ser a opção correta porque apesar do conjunto $\{(1,1,1)\}$ ser ortogonal dado que só temos um vetor, B não é uma base de F porque $(1,1,1)\notin F$ $(1+1+1\neq 0)$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$B=((-1,1,0),(1,1,-2))$ temos que os vetores são ortogonais porque $(-1,1,0)\cdot(1,1,-2)=-1+1+0=0$ logo são linearmente independentes
(Teorema do Cap. 4. slide 7)

Para além disso geram F:
$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z=0\} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=-y-z\}$
$=\{(-y-z,y,z), y,z\in\mathbb{R}\} = \{(-y,y,0)+(-z,0,z), y,z\in\mathbb{R}\}$

$= \{y(-1,1,0)+z(-1,0,1),\ y,z\in\mathbb{R}\} = \langle(-1,1,0),(-1,0,1)\rangle$ (Lema ii. Cap.2.2 Slide 3)

$(\times(-2))$

$= \langle(-1,1,0),(2,0,-2)\rangle = \langle(-1,1,0),(2,0,-2)+(-1,1,0)\rangle$ (Lema iii. Cap.2.2. slide 3)

$= \langle(-1,1,0),(1,1,-2)\rangle$

Logo, $(-1,1,0)$ e $(1,1,-2)$ geram F e são ortogonais (o que implica que são l.i.) assim $B=((-1,1,0),(1,1,-2))$ é uma base ortogonal de F.

(f) vamos analisar cada uma das opções:

$A_{3\times3}$ é diagonalizável se e só se A tem 3 valores próprios distintos.

A implicação: Se $A_{3\times3}$ tem 3 valores próprios distintos $\Rightarrow$ é diagonalizável, é verdadeira, mas a implicação contrária: Se $A_{3\times3}$ é diagonalizável $\Rightarrow$ tem 3 valores próprios distintos é <u>falsa</u>. (ver Observações do Cap. 5.1. slide 12).
Por exemplo, (Cap. 5.1. Slide 13-14)

$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ tem dois valores próprios: 1 e 2.
$(1,0,0),(0,0,1)$ são os vetores próprios associados ao 1
$(1,1,0)$ é o vetor próprio associado ao 2.
(ver contas no Cap. 5.1. Slide 13-14)

Apesar de $A_{3\times3}$ só ter 2 valores próprios, é diagonalizável porque temos 3 vetores próprios l.i.. Assim, existe P invertível e D diagonal tal que $A=PDP^{-1}$:

$$P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix} \quad e \quad D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

Se $A_{3\times3}$ tem 2 valores próprios distintos então um dos subespaços próprios de A, associado a um dos valores próprios, tem dimensão superior a 1 ($\ngeq 1$)

É <u>falsa</u>! A dimensão de um subespaço próprio associado a um valor próprio λ pode ser visto como o nº de vetores próprios associados ao valor próprio λ.

Cada valor próprio λ é <u>obrigado</u> a dar-nos pelo menos 1 vetor próprio, isto é, $\dim U_\lambda \geq 1$. Não existe nada no enunciado que obrigue um dos valores a dar mais do que 1 vetor próprio, isto é, $\dim U_\lambda > 1$. Portanto, a afirmação é falsa.

Só por curiosidade, bastava adicionarmos "e A é diagonalizável" para a afirmação ser verdadeira:
Se $A_{3\times3}$ tem 2 valores próprios distintos e <u>A é diagonalizável</u> então A tem de ter 3 vetores próprios l.i. assim tem de existir um valor próprio que nos vai dar 1 vetor próprio e outro que nos vai dar 2 vetores próprios, isto é, um dos subespaços próprios de A associado a um valor próprio λ <u>tem</u> dimensão <u>superior</u> a 1, $\boxed{\dim U_\lambda > 1}$

Se $A_{4\times4}$ tem dois valores próprios distintos, λ e λ', e o subespaço próprio associado a um desses vetores tem dimensão 3, então A é diagonalizável.

$A_{4\times4}$ tem no total $\dim U_\lambda + \dim U_{\lambda'}$ vetores próprios l. i. (Teorema Cap. 5.1. slide 11)
Sabemos que um dos subespaços próprios, por exemplo U_λ, tem dimensão 3 e sabemos que o outro subespaço próprio, o $U_{\lambda'}$, tem de ter pelo menos dimensão 1 (2º Teorema do Cap. 5.1. Slide 4). Assim, $A_{4\times4}$ tem

$$\underbrace{\dim U_\lambda}_{=3} + \underbrace{\dim U_{\lambda'}}_{\geq 1} \geq 3+1 = 4$$

pelo menos 4 vetores próprios l.i. logo, A é diagonalizável. Opção correta!

Já agora como estamos em $\mathbb{R}^4$ sabemos que existem no máximo 4 vetores l.i. logo podemos concluir que A tem exatamente 4 vetores próprios l.i. ⇒ é diagonalizável.

(g) $L(x,y) = (2x+y, 3x-4y, x-y)$
$bc = ((1,0),(0,1))$ base canónica de $\mathbb{R}^2$
$Bc = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ base canónica de $\mathbb{R}^3$

$$[L]_{bc,Bc} = \begin{bmatrix} | & | \\ [L(1,0)]_{Bc} & [L(0,1)]_{Bc} \\ | & | \end{bmatrix}$$

as colunas são as imagens por L dos vetores de bc escritos nas coordenadas de Bc. (Cap. 6 slide 8)

1º Calcular $L(1,0) = (2,3,1)$ e $L(0,1) = (1,-4,-1)$

2º Escrever $L(1,0)$ e $L(0,1)$ como combinação linear dos vetores de Bc.

NOTA: Qualquer vetor tem as mesmas coordenadas quando escrito à custa da base canónica (ver 1(a))

$L(1,0) = (2,3,1) = 2(1,0,0) + 3(0,1,0) + 1(0,0,1)$ base Bc

logo, $[L(1,0)]_{Bc} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$L(0,1) = (1,-4,-1) = 1(1,0,0) - 4(0,1,0) - 1(0,0,1)$ base Bc

logo, $[L(0,1)]_{Bc} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}$

Assim, $[L]_{bc,Bc} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

(h) $\begin{vmatrix} a^+ & b & 0 \\ 4^- & 0^+ & c^- \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} b & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} a & b \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$

④ $A_{3\times 2}\, X_{2\times 1} = B_{3\times 1}$

Equações Normais:

$$A^TAX = A^TB \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Resolver as equações normais:

$$[A^TA \mid A^TB] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 11 & 6 \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2 + L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 9 & 6 \end{array}\right] \underset{L_2 = \frac{L_2}{9}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_1 = L_1 + 2L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \end{array}\right] \underset{L_1 = \frac{L_1}{2}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array}\right],\ X = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$ é a solução dos mínimos quadrados

Calcular o erro: $$\|B - AX\| = \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4/3 \\ 4/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -8/3 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + \left(\tfrac{-8}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4+4+64}{9}} = \sqrt{\frac{72}{9}} \quad \left(= \sqrt{\frac{2^2 \times \cancel{3^2} \times 2}{\cancel{3^2}}} = 2\sqrt{2} \right)$$

⑤ (a) $\boxed{\lambda \text{ é um valor próprio de } A_{n\times n}} \Longrightarrow \boxed{\lambda^2 \text{ é um valor próprio de } \lambda}$

Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é um valor próprio de A então existe um vetor não nulo $X \in \mathbb{R}^n$ tal que

(Cap. 5.1. slide 2)

$$\boxed{AX = \lambda X}$$

Assim, $A^2X = A\,AX = A\lambda X = \lambda AX = \lambda\lambda X = \lambda^2 X$, como $X \in \mathbb{R}^n$ é um vetor não nulo temos que λ^2 é um valor próprio de A^2, isto é,

$$\boxed{A^2X = \lambda^2 X}$$

(b) $\boxed{A \text{ é diagonalizável}} \Longrightarrow \boxed{A \text{ é diagonalizável}}$

Se A é diagonalizável então existe P invertível e D diagonal tal que

(Cap. 5.1. slide 9)

$$\boxed{A = PDP^{-1}}$$

Logo, $A^2 = AA = PD\cancel{P^{-1}}\cancel{P}DP^{-1} = PDDP^{-1} = PD^2P^{-1}$ (Cap. 5.1. slide 15) como P é invertível e D^2 é diagonal segue que A^2 é diagonalizável.

$$\boxed{A^2 = PD^2P^{-1}}$$

⑥ (a) $x^2-4xy+y^2-6x+6y+9=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -6 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+9=0$
$(\mathbb{R}^2)$

$\Leftrightarrow X^TAX+BX+9=0$

Calcular os valores próprios de A:

$|A-\lambda I_2|=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (1-\lambda)-2=0 \Leftrightarrow \lambda^2-2\lambda+\underbrace{1-2}_{=-1}=0$

$\Leftrightarrow \lambda=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4.(-1)}}{2} \Leftrightarrow \lambda=3$ ou $\lambda=-1$

Calcular os vetores proprios de A:

$\mathcal{U}_3=\{X\in\mathbb{R}^2:(A-3I_2)X=0\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x=-y\}=\{(-y,y), y\in\mathbb{R}\}$

$=\{y(-1,1), y\in\mathbb{R}\}=\langle(-1,1)\rangle$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x-2y=0 \\ -2x-2y=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x=-y$

$\mathcal{U}_{-1}=\{X\in\mathbb{R}^2:(A-(-1)I_2)X=0\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x=y\}=\{(y,y), y\in\mathbb{R}\}$

$=\{y(1,1), y\in\mathbb{R}\}=\langle(1,1)\rangle$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y=0 \\ 2x-2y=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x=y$

Dividir cada vetor próprio pela sua norma:

$\frac{(-1,1)}{\|(-1,1)\|}=\frac{(-1,1)}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\frac{(1,1)}{\|(1,1)\|}=\frac{(1,1)}{\sqrt{1^2+1^2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Construir $P=\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ e $D=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Mudança de variável $X=P\hat{X}$ onde $\hat{X}=\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}$

e calcular $\hat{B}=BP=\begin{bmatrix} -6 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$

C.A.

$\frac{12}{\sqrt{2}}=\frac{12\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}=\frac{12\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$

Assim, $X^TAX+BX+9=0 \Leftrightarrow \hat{X}^TD\hat{X}+\hat{B}\hat{X}+9=0$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 6\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}+9=0$

$\Leftrightarrow 3\hat{x}^2-\hat{y}^2+6\sqrt{2}\hat{x}+9=0$

Completar o quadrado:

$$\Leftrightarrow 3\left(\hat{x}^2 + 2\sqrt{2}\,\hat{x}\right) - \hat{y}^2 + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\hat{x}^2 + 2\sqrt{2}\,\hat{x} + \left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) - \hat{y}^2 + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\hat{x}^2 + 2\sqrt{2}\,\hat{x} + (\sqrt{2})^2\right) - 3(\sqrt{2})^2 - \hat{y}^2 + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(\underbrace{\hat{x} + \sqrt{2}}_{=\tilde{x}})^2 - \hat{y}^2 = -3 \Leftrightarrow -\tilde{x}^2 + \frac{\hat{y}^2}{3} = 1 \quad \text{hipérbole}$$

(b) $Q(x,y) = x^2 - 4xy + y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = X^T A X$

Pela alínea anterior sabemos que A tem valores próprios 3 e -1, isto é, um valor próprio é positivo e outro é negativo logo a forma quadrática Q é indefinida. (Cap. 5.2. slide 7)

ou

Os menores principais dominantes são:

$$\underbrace{\Delta_1 = |1| = 1}_{L2, C2} \quad e \quad \Delta_2 = |A| = 1 - 4 = -5$$

Pelo Critério de Sylvester, Q é indefinida.

Cap. 5.2. slide 10:

Teorema (Critério de Sylvester):

Uma forma quadrática $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $Q(X) = X^T AX$, onde A é uma matriz simétrica, é:

1. definida positiva se e só se os menores principais dominantes de A são positivos; X Não pode ser porque $\Delta_2 < 0$
2. semi-definida positiva se e só se todos os menores principais de A são não negativos; X Não pode ser porque $\Delta_2 < 0$
3. definida negativa se e só se os menores principais dominantes de A de ordem par são positivos e os de ordem ímpar são negativos; X Não pode ser porque $\Delta_2 < 0$
4. semi-definida negativa se e só se os menores principais de A de ordem par são não negativos e os de ordem ímpar são não positivos; X Não pode ser porque $\Delta_2 < 0$
5. indefinida se nenhuma das anteriores se verifica. ✓ Então só resta esta opção