Classificação das formas quadráticas

Uma forma quadrática $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $Q(X) = X^T AX$, onde $X \in \mathbb{R}^n$ e $A_{n\times n}$ é uma matriz simétrica, é:

- **definida positiva** se $Q(X) > 0, \forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- **semi-definida positiva** se $Q(X) \geq 0, \forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- **definida negativa** se $Q(X) < 0, \forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- **semi-definida negativa** se $Q(X) \leq 0, \forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- **indefinida** se nenhuma das anteriores se verifica

Por exemplo, a forma quadrática

- $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 5x_2^2$ é definida positiva porque para qualquer $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ temos que $Q(x_1, x_2) > 0$.
- $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_3^2$ é definida negativa porque para qualquer $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ temos que $Q(x_1, x_2, x_3) < 0$.
- $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2$ é semi-definida positiva porque se $x_1 \neq 0$ ou $x_2 \neq 0$ temos que $Q(x_1, x_2, x_3) > 0$ e se $x_1 = x_2 = 0$ temos que $Q(0, 0, x_3) = 0$.
- $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 2x_2^2$ é indefinida. Por exemplo, temos que $Q(1, 0) = 2 > 0$, $Q(0, 1) = -2 < 0$ e $Q(1, 1) = 0$.

Teorema

Uma forma quadrática $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $Q(X) = X^T AX$, onde $X \in \mathbb{R}^n$ e $A_{n\times n}$ é uma matriz simétrica, é:

				Critério de Sylvester
definida positiva	$\Leftrightarrow$	todos os valores próprios de A são positivos	$\Leftrightarrow$	os menores principais **dominantes** de A são positivos
semi-definida positiva	$\Leftrightarrow$	todos os valores próprios de A são não negativos	$\Leftrightarrow$	todos os menores principais de A são não negativos
definida negativa	$\Leftrightarrow$	todos os valores próprios de A são negativos	$\Leftrightarrow$	os menores principais **dominantes** de A de ordem par são positivos e os de ordem ímpar são negativos
semi-definida negativa	$\Leftrightarrow$	todos os valores próprios de A são não positivos	$\Leftrightarrow$	os menores principais de A de ordem par são não negativos e os de ordem ímpar são não positivos
indefinida	$\Leftrightarrow$	nenhuma das anteriores se verifica	$\Leftrightarrow$	nenhuma das anteriores se verifica