Aula 5

29/09/2025

Inversa de uma matriz $A_{n\times n}$ (quadrada!) é a única matriz $A^{-1}_{n\times n}$ tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Se a inversa não existe, então diz-se que A é não invertível/singular.

10 (c) $\boxed{\begin{array}{l} \text{Se } A^2 = I_n \\ \Leftrightarrow AA = I_n \\ \Leftrightarrow A = A^{-1} \end{array}} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} A = I_n \text{ ou } A = -I_n \\ \text{(rotação de } 180^\circ\text{)} \end{array}}$

A afirmação é falsa porque temos exemplos de matrizes A tal que $A^2 = I_n$ **mas** $A \neq \pm I_n$.
Por exemplo, em $\mathbb{R}^2$:

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ - trocar o eixo x com o eixo y.

ou

$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ - reflexão pelo eixo y

ou

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ - reflexão pelo eixo x

Propriedades (slide 36)

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$, $(aA^{-1}) = \frac{1}{a}A^{-1}$ $a \in \mathbb{R}$

Calcular a inversa: $[A \mid I_n] \sim [I_n \mid A^{-1}]$

Nota:
$AX = B$ trabalhamos com $[A|B]$ para obter X
$AA^{-1} = I_n$ trabalhamos com $[A|I_n]$ para obter A^{-1}

Exº: Calcular a inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$$[A|I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2 - 2L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \underset{L_1 = L_1 - L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \underset{L_1 = L_1/2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] = [I_2 | A^{-1}]$$

Logo $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (confirmar que $AA^{-1} = I_2$!!)

23 (c) $$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -5 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 + 2L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_2 = L_2 + L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_1 = L_1 + L_2 \\ L_3 = L_3 - 3L_2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 & -2 \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2 + L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 & -2 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 = -L_2 \\ L_3 = -L_3}}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right] = [I_3 | A^{-1}]$$

Teorema A é invertível $\Leftrightarrow A \sim I_n$

Exp $A = \begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ tem inversa?

$A = \begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \underset{L_2 = L_2 + L_1}{\sim} \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \not\sim I_2$ logo A não tem inversa, é singular

Teorema (slide 37)

$A_{n\times n}$ tem inversa $\iff A \sim I_n$

Qual é a característica de I_n? | $car(I_2) = car\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) = 2$ | $car(I_3) = car\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right) = 3$

$\iff car(A) = n$

$\iff nul(A) = n - car(A) = 0$ é a dimensão do $N(A)$

$\iff N(A) = \{0_{n\times 1}\}$ ($\neq$ do conjunto vazio, $\emptyset$ ou $\{\}$)

$\iff AX = 0$ só tem a solução trivial $X = 0_{n\times 1}$

$\iff AX = B$ é sempre possível determinado

$\underbrace{A^{-1}A}_{=I_n}X = A^{-1}B \iff X = A^{-1}B$ é a única solução

21) • $A = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{bmatrix} \underset{L_2 = L_2 - \frac{5}{2}L_1}{\sim} \begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1/2\end{bmatrix}$ escalonada

$car(A) = 2$ logo é invertível.

• $B = \begin{bmatrix}3 & 2\\ -6 & -4\end{bmatrix} \underset{L_2 = L_2 + 2L_1}{\sim} \begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ escalonada

$car(B) = 1 \neq$ nº de colunas de B logo não é invertível.

28) $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & \alpha\end{bmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_1}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & \alpha\end{bmatrix} \underset{L_3 = L_3 - L_2}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & \alpha\end{bmatrix} \underset{L_2 = L_2 - L_1}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & \alpha\end{bmatrix}$ $\alpha \neq 0$

A tem inversa $\iff car(A) = 3 \iff \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

31) $M = ?$

$AMA = B \iff \underbrace{A^{-1}A}_{=I_2}MA = A^{-1}B \iff MA = A^{-1}B \iff M\underbrace{AA^{-1}}_{=I_2} = A^{-1}BA^{-1}$

$\iff M = A^{-1}BA^{-1} \iff M = \begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & -3\end{bmatrix}$

contas ...

33 $\begin{cases} 4x+y+3z=1 \\ 3x+y+3z=0 \\ 5x+y+4z=1 \end{cases} \Leftrightarrow AX=B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(a) A tem inversa?

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \underset{L_1=L_1-L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2=L_2-3L_1 \\ L_3=L_3-5L_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \underset{L_3=L_3-L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

car(A) = 3 logo A tem inversa.

Calcular a inversa de A:

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_1=L_1-L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2=L_2-3L_1 \\ L_3=L_3-5L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\underset{L_3=L_3-L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2=L_2-3L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right] = [I_3 | A^{-1}]$$

(b) Pelo Teorema do slide 37, como A é invertível o sistema $AX=B$ é possível determinado com solução:

$$AX=B \Leftrightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{=I_3}X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

FP1 até ao ex. 35

Recomendo 30 e 32