

Aula 17

(FP3) (5)  $A_{5 \times 5}$  e  $B_{5 \times 5}$   
 $|A|=3$  e  $|B|=-5$

(a)  $|A^T|=|A|=3$

(b)  $|AB|=|A||B|=3 \cdot (-5) = -15$

(c)  $|A^4|=|AAAA|=|A||A||A||A|=|A|^4=81$

(d)  $|B^{-1}|=\frac{1}{|B|}=-\frac{1}{5}$

(e)  $|2A|=2^5|A|=32 \cdot 3=96$

(f)  $|2A^{-1}|=2^5|A^{-1}|=\frac{2^5}{3}=\frac{32}{3}$

(g)  $|(2A)^{-1}|=\frac{1}{|2A|}=\frac{1}{96}$

(h)  $|AB^{-1}A^T|=|A|\underbrace{|B^{-1}|}_{\text{alinea}}\underbrace{|A^T|}_{\text{alinea}}=|A|\frac{1}{|B|}|A|=-\frac{3^2}{5}=-\frac{9}{5}$ .

(FP3) (5) (a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=0} - 1 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=1+1=2} - 2 \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=-1-1=-2} = -2 + 4 = 2$$

(b)

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{bmatrix} \quad \text{elemento } (2,3)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

• O elemento  $(2,3)$  da  $\text{adj } A$  é o  $A_{32}=(-1)^{3+2} H_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{bmatrix}$$

• O elemento  $(2,3)$  da inversa de  $A$  é  $\frac{A_{32}}{|A|}=\frac{2}{2}=1$ .

Produto interno

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

Exemplo  $(1, 2, 3) \cdot (4, 5, 6) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32$

Norma  $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

Vetor Unitário tem norma 1

Normalizar um vetor  $X \neq 0$ :  $\frac{X}{\|X\|}$  tem a direção e sentido de  $X$  e norma 1.

(FP4) ① (d)  $U = (1, -2, 1)$ ,  $\|U\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

Um vetor unitário com direção de  $u$  é:  $\frac{U}{\|U\|} = \frac{(1, -2, 1)}{\sqrt{6}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

Propriedades:

(1)  $X \cdot X \geq 0$  porque  $X \cdot X = (x_1, \dots, x_n) \cdot (x_1, \dots, x_n) = \underbrace{x_1^2}_{\geq 0} + \underbrace{x_2^2}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{x_n^2}_{\geq 0} \geq 0$

(2)  $X \cdot X = 0 \Leftrightarrow X = 0$

(3)  $X \cdot Y = Y \cdot X$  porque  $X \cdot Y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = y_1 x_1 + \dots + y_n x_n = Y \cdot X$

(4) i.  $\underbrace{(X+Y)}_{(x+y)} \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$  porque  $(X+Y) \cdot Z = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \cdot Z$

$$\begin{aligned} &= (x_1 + y_1) z_1 + \dots + (x_n + y_n) z_n \\ &= x_1 z_1 + y_1 z_1 + \dots + x_n z_n + y_n z_n \\ &= x_1 z_1 + \dots + x_n z_n + y_1 z_1 + \dots + y_n z_n \\ &= X \cdot Z + Y \cdot Z \end{aligned}$$

ii.  $Z \cdot \underbrace{(X+Y)}_{(x+y)} = Z \cdot X + Z \cdot Y$

(5)  $(\alpha X) \cdot Y = \alpha (X \cdot Y) = X \cdot (\alpha Y)$  porque  $(\alpha X) \cdot Y = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n)$

$$= \alpha x_1 y_1 + \dots + \alpha x_n y_n$$

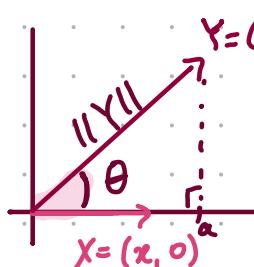
$$= \alpha (x_1 y_1 + \dots + x_n y_n) = \alpha (X \cdot Y)$$

(6)  $\|\alpha X\| = |\alpha| \|X\|$

porque  $\|\alpha X\| = \|(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)\| = \sqrt{(\alpha x_1)^2 + \dots + (\alpha x_n)^2} = \sqrt{\alpha^2 x_1^2 + \dots + \alpha^2 x_n^2}$

$$= \sqrt{\alpha^2 (x_1^2 + \dots + x_n^2)} = \sqrt{\alpha^2} \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = |\alpha| \|X\|$$

Ângulo entre vetores



$$Y = (a, b) \neq (0, 0) \quad X \cdot Y = (x, 0) \cdot (a, b) = x \cdot a + 0 \cdot b = xa$$

$$\|X\| = \sqrt{x^2 + 0^2} = x \quad \text{Assim, } \frac{X \cdot Y}{\|X\|} = \frac{xa}{x} = a$$

$$(\text{SOTCAHTOA}) \quad \cos \theta = \frac{a}{\|Y\|} = \frac{X \cdot Y}{\|X\| \cdot \|Y\|} = \frac{X \cdot Y}{\|X\| \|Y\|}$$

Logo,  $X, Y \neq 0$  temos que:

$$\cos \theta = \frac{X \cdot Y}{\|X\| \|Y\|} \quad \text{e} \quad \theta = \arccos \left( \frac{X \cdot Y}{\|X\| \|Y\|} \right)$$

em que  $\theta$  é o ângulo formado por  $X$  e  $Y$ .

## Casos Particulares:

- ortogonais / perpendiculares       $X \perp Y$   
 Se  $\theta = \pi/2$  logo  $\cos \frac{\pi}{2} = \frac{X \cdot Y}{\|X\| \|Y\|} \Rightarrow X \cdot Y = 0$

- Tem a mesma direção:

- se tem o mesmo sentido  $\theta = 0$  logo  $\cos 0 = \frac{X \cdot Y}{\|X\| \|Y\|}$



$$\therefore X \cdot Y = (\|X\|) (\|Y\|)$$

- sentidos opostos  $\Rightarrow \theta = -\pi$  logo  $\cos \pi = \frac{X \cdot Y}{\|X\| \|Y\|}$



$$\therefore X \cdot Y = -(\|X\|) (\|Y\|)$$

NOTA Se  $X=0$  ou  $Y=0$   $\therefore X$  e  $Y$  são colineares e ortogonais.

(FP4) 3

$$X=(1,0,0) \in Y=(y_1, y_2, y_3) = ?$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{3} &= \frac{X \cdot Y}{\|X\| \|Y\|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{y_1^2}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} \Leftrightarrow \\ &y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 4y_1^2 \Leftrightarrow 3y_1^2 = y_2^2 + y_3^2 \Leftrightarrow y_1 = \sqrt{\frac{y_2^2 + y_3^2}{3}} \end{aligned}$$

Soluções: vetores da forma  $(\sqrt{\frac{y_2^2 + y_3^2}{3}}, y_2, y_3)$ ,  $y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ .

- $\{X_1, \dots, X_n\}$  é ortogonal se  $X_i \cdot X_j = 0$  ( $i \neq j$ )  
 e' ortonormalizado se  $X_i \cdot X_j = 0$  ( $i \neq j$ )  $\oplus X_i \cdot X_i = 1$   
 (o.n.) (é ortogonal) (é unitário)

Exemplos:

- $\{(1,0), (0,-2)\}$  é ortogonal porque  $(1,0) \cdot (0,-2) = 0$  mas não é ortonormalizado porque  $(0,-2) \cdot (0,-2) = 4 \neq 1$
- $\{(1,0), (0,1)\}$  é orto normalizado (não l.i. !)

Base ortogonal / o.n. Uma base em que os vetores são ortogonais / o.n.

Exemplos:

- $\{(1,0), (0,-2)\}$  é uma base ortogonal de  $\mathbb{R}^2$  (mas não é uma base o.n.)
- $\{(1,0), (0,1)\}$  é uma base o.n. de  $\mathbb{R}^2$

Teorema  $B = (X_1, \dots, X_n)$  é uma base o.n. de  $\mathbb{R}^n$  então

$$[X]_B = \begin{bmatrix} x \cdot X_1 \\ \vdots \\ x \cdot X_n \end{bmatrix}$$

isto é,  $X = (x \cdot X_1)X_1 + \dots + (x \cdot X_n)X_n$ .

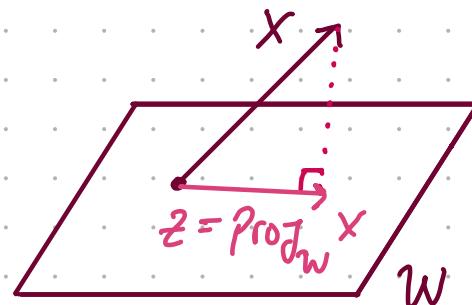
Exemplo  $B = (x_1, x_2) = \left( \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right)$  é base o.u. de  $\mathbb{R}^2$

$$[(1, 5)]_B = \begin{bmatrix} (1, 5) \cdot x_1 \\ (1, 5) \cdot x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - 5\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Assim,  $(1, 5) = -2\sqrt{2}x_1 + 3\sqrt{2}x_2$ .

Projeção ortogonal: de um vetor  $X$  sobre um espaço  $W$  é um vetor:

$$z = \text{proj}_W X$$



Intuição:

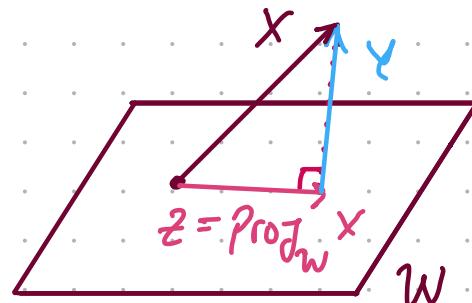
-  $W$  é um subespaço. Por exemplo, um plano de  $\mathbb{R}^3$ .

- Logo conseguimos encontrar uma base o.n. de  $W$  ( $x_1, x_2$ ) em que:

$$x_1 \cdot x_2 = 0 \quad (*)$$

$$x_1 \cdot x_1 = 1 \text{ e } x_2 \cdot x_2 = 1 \quad (**)$$

-  $X = z + Y$  em que  $Y$  é ortogonal a  $W$  logo também é ortogonal a  $x_1$  e  $x_2$ , isto é,  $x_2 \cdot Y = x_1 \cdot Y = 0 \quad (***)$



Como  $z \in W$  é c.l. da base o.n.  $(x_1, x_2)$

$$z = \text{proj}_W X = \overset{?}{\alpha_1} x_1 + \overset{?}{\alpha_2} x_2$$

Portanto,  $X = Y + z = Y + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$

$$X \cdot x_1 = (Y + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \cdot x_1 = \underbrace{Y \cdot x_1}_{=0 \text{ por } (***)} + \underbrace{\alpha_1 x_1 \cdot x_1}_{=1 \text{ por } (**)} + \underbrace{\alpha_2 x_2 \cdot x_1}_{=0 \text{ por } (***)} = \alpha_1$$

$$X \cdot X_2 = \alpha_2$$

Assim,  $\vec{z} = \text{proj}_W X = (X \cdot X_1)X_1 + \dots + (X \cdot X_2)X_2$ .

Teorema  $(X_1, \dots, X_n)$  base o.n. de  $W$

$$\text{proj}_W X = (X \cdot X_1)X_1 + \dots + (X \cdot X_n)X_n$$

Exemplo  $((\underbrace{1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0}_{= X_1}), (\underbrace{0, 0, 1}_{= X_2}))$  base o.n. de  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$

Qual é a proj. ortogonal de  $X = (2, -2, 3)$ ?

$$\begin{aligned}\text{proj}_W X &= (X \cdot X_1)X_1 + (X \cdot X_2)X_2 \\ &= (2, -2, 3) \cdot (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)X_1 + (2, -2, 3) \cdot (0, 0, 1)X_2 \\ &= \left(2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0\right)X_1 + 3(0, 0, 1) \\ &= 0X_1 + 3(0, 0, 1) = (0, 0, 3).\end{aligned}$$

FP4. Recomendo ex. 7(a), 15, 16.