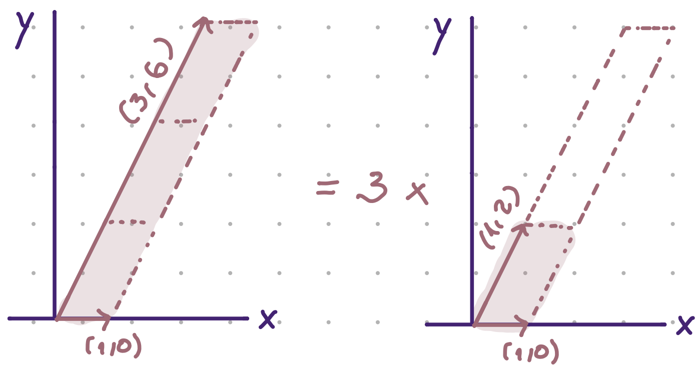
Aula 14

30/10/2025

Determinante é uma função que a uma matriz **quadrada** A associa um nº real, $\det(A)$ ou $|A|$.

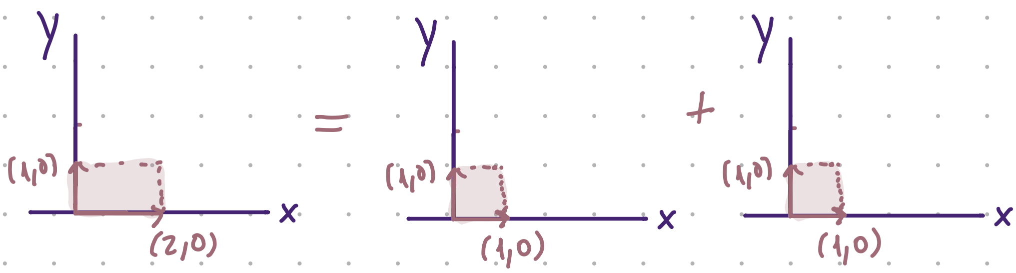
Propriedades: (exemplos)

- $\det(I_n)=1$
- $\det\left(\begin{bmatrix}1 & 3\times 1\\ 0 & 3\times 2\end{bmatrix}\right) = 3\det\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\right)$



- $\det\left(\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) + \det\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) = 1+1=2$ ou $\det\left(\begin{bmatrix}2\cdot 1 & 0\\ 2\cdot 0 & 1\end{bmatrix}\right) = 2\det\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)=2$

  $\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$



- $\det\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right) = -\det\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) = -1$ → troca a orientação

Exemplo Sabendo que $\det(C_1,C_2,C_3)=7$ calcule

- $$\begin{aligned}\det(2C_3,2C_1,C_2) &= -\det(2C_1,2C_3,C_2)\\ &= -(-\det(2C_1,C_2,2C_3))\\ &= \det(2C_1,C_2,2C_3)\\ &= 2\cdot 2\det(C_1,C_2,C_3)\\ &= 4\cdot 7\\ &= 28\end{aligned}$$

Determinante 2x2

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

FP3 1

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = -3 \quad , \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3.7 - 4.5 = 21 - 20 = 1$$

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin\alpha . \sin\alpha - (-\cos\alpha).\cos\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Determinante 3x3 - Regra de Sarrus

FP3 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ = 1.1.3 + 0.0.1 + 0.7.2 - 1.1.0 - 2.0.1 - 3.7.0 \\ = 3 \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}$$

Dada uma matriz $A_{n \times n} = [a_{ij}]$ a matriz M_{ij}, tem ordem $(n-1)\times(n-1)$, obtém-se eliminando a linha i coluna j de A.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad M_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ , \quad M_{31} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} , \quad M_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

eliminar L2, C3   Eliminar L3, C1

Menor de a_{ij} é o $\det(M_{ij})$

Exemplo Menor de a_{23} é $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.0 - 7.0 = 0$

Menor de a_{31} é $\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 14 - 1 = 13$

Menor de a_{11} é $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2.0 = 3$

Cofator de a_{ij} $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$

Exemplo Cofator de a_{23}, $A_{23} = (-1)^5 \det(M_{23}) = 0$

" " a_{31}, $A_{31} = (-1)^{3+1} \det(M_{31}) = 13$

" " a_{11}, $A_{11} = (-1)^{1+1} \det(M_{11}) = 3$

Teorema de Laplace

$A_{n\times n}$ então o desenvolvimento a partir da

... linha i

$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + \dots + a_{in}A_{in}$

ou ... coluna j

$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1^+ & 7^- & 1^+ \\ 0^- & 1^+ & 2^- \\ 0^+ & 0^- & 3^+ \end{bmatrix}$$

desenvolvimento a partir da...

... linha 1. $\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$

$$= 1(-1)^{1+1}\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}_{=3} + 7(-1)^{1+2}\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}_{=0} + 1(-1)^{1+3}\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}_{=0}$$

$$= 3$$

... coluna 3. $\det(A) = +0\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 3\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{=1} = 3$

FP3

(1) $$\begin{vmatrix} 0^+ & 7 & 1 \\ 4^- & 1 & 2 \\ 1^+ & 7 & 3 \end{vmatrix} = +0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} - 4\underbrace{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}}_{=7\cdot 3-7} + 1\underbrace{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}_{7\cdot 2-1} = -4\cdot 14 + 13 = -43$$

Corolário: O determinante de matrizes triangulares é igual ao produto da diagonal.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot 3 = 6$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 = 6$$

ou pelo Teorema de Laplace pela 1ª coluna