Folha Prática 2

Atenção: Estas notas não constituem uma resolução formal e rigorosa dos exercícios das Folhas Práticas. Os exercícios com um grau de dificuldade acrescido encontram-se assinalados com ($\star$).

Última atualização: 30 de setembro de 2025

Notas sobre os exercícios: 1 (c), 2(c)i., 2(c)iii. 2(d)i., 5 (e), 14, 19 (b), 19 (f), 21 (b), 22 (b) e 24.

1 (c). ($\star$) O conjunto S das funções reais de variável real que são pares é:

$$\boxed{S \;=\; \{f \text{ é uma função real} : f \text{ é par}\} \;=\; \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,:\, f(x) = f(-x)\}}$$

S é um subespaço vetorial das funções reais?

- O elemento neutro das funções reais é a função nula $N(x) = 0$ que envia qualquer número real x para 0.
  A função nula é par, isto]e, $N \in S$? Sim, porque $N(x) = 0 = N(-x)$. Seja lá qual for o número x, a função nula envia tanto x como $-x$ para 0, assim a função nula é par.
- Sejam f, $g \in S$, temos que f e g são funções pares, ou seja, $f(x) = f(-x)$ e $g(x) = g(-x)$. Será que a soma de duas funções pares é ainda uma função par? Será que $(f + g) \in S$?

$$\begin{aligned}(f+g)(x) =& f(x) + g(x) && \text{pelas propriedades das funções reais}\\ =& f(-x) + g(-x) && f \text{ e } g \text{ são pares temos } f(x) = f(-x) \text{ e } g(x) = g(-x)\\ =& (f+g)(-x) && \text{propriedade das funções reais}\end{aligned}$$

  Assim, $(f + g)(x) = (f + g)(-x)$ logo $(f + g)$ é uma função par e por isso está em S!
- Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in S$ uma função par. Será que $(\alpha f) \in S$? Isto é, será que (αf) é par?

$$\begin{aligned}(\alpha f)(x) =& \alpha\, f(x) && \text{pelas propriedades das funções reais}\\ =& \alpha\, f(-x) && \text{como } f \text{ é par temos que } f(x) = f(-x)\\ =& (\alpha f)(-x) && \text{propriedade das funções reais}\end{aligned}$$

  Assim, $(\alpha f)(x) = (\alpha f)(-x)$ logo (αf) é par e por isso pertence a S.

Portanto, S é um subespaço vetorial para as funções reais porque contêm o elemento neutro (a matriz nula), é fechado para a soma e para a multiplicação por um escalar.

2(c)i. No espaço vetorial $\mathcal{P}_2$ dos polinómios em x com grau não superior a 2, o conjunto S de polinómios $a^2 + bx + c$ com $c = 0$ é o conjunto de polinómios com grau não superior a 2 cujo coeficiente do termo de grau 0 é igual a 0.

$$\boxed{S \;=\; \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 \,|\, c = 0\} \;=\; \{ax^2 + bx \,|\, a, b \in \mathbb{R}\} \;=\; \{x^2, 2x^2, x^2 + x, x, \ldots\}}$$

Por exemplo, temos que $x^2 + 3 \notin S$ porque não conseguimos arranjar números reais a e b tal que $ax^2 + bx = x^2 + 3$, por outras palavras, o coeficiente do termo de grau 0 é 3 e não 0 como queriamos!

S é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2$?

- Será que 0 (polinómio nulo) $\in S$? Isto é, será que existe $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $ax^2 + bx = 0$?
  Sim, quando $a = b = 0$ temos que $ax^2 + bx \;=\; 0x^2 + 0x \;=\; 0 \in S$.
- Será que S é fechado para a soma? Dados quaisqueres dois polinómios de S, a sua soma ainda está em S? Isto é, para quaisqueres $ax^2 + bx$, $a'x^2 + b'x \in S$, será que $ax^2 + bx +\, a'x^2 + b'x \in S$?

$$ax^2 + bx + a'x^2 + b'x \;=\; \underset{\in\mathbb{R}}{(a + a')}x^2 + \underset{\in\mathbb{R}}{(b + b')}x \in S$$

  Sim, a soma de dois polinómios de S é ainda um polinómio de S. Isto é, dados dois polinómios de grau não superior a 2, cujo termo de grau 0 tem coeficiente igual a 0, a sua soma continua a ser um polinómio de grau não superior a 2 cujo termo de grau 0 tem coeficiente igual a 0. [i]

[i]Por exemplo, x^2 e x são elementos de S, e a sua soma $x^2 + x$ é ainda um elemento de S, o termo de grau 0 não deixa de ser diferente de 0. Atenção que um exemplo não é o mesmo que uma prova!

- Será que S é fechado para a multiplicação por um escalar? Isto é, seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $ax^2 + bx \in S$, será que $\alpha(ax^2 + bx) \in S$?

$$\alpha(ax^2 + bx) \;=\; \underbrace{(\alpha a)}_{\in\mathbb{R}}x^2 + \underbrace{(\alpha b)}_{\in\mathbb{R}}x \in S$$

  Sim, a multiplicação por um escalar de um polinómio em S é ainda um polinómio em S. Isto é, dado um número real qualquer α e um polinómio de grau não superior a 2, cujo termo de grau 0 tem coeficiente igual a 0, o produto desse polinómio por α continua a ser um polinómio de grau não superior a 2 cujo coeficiente do termo de grau 0 é ainda igual a 0.[ii]

Assim, S é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2$ porque contêm o elemento neutro, é fechado para a soma e é fechado para a multiplicação por escalar.

2(c)iii. No espaço vetorial $\mathcal{P}_2$ dos polinómios em x com grau não superior a 2, o conjunto S de polinómios $a^2 + bx + c$ com $bc = 0$ é o conjunto de polinómios com grau não superior a 2 cujo coeficiente do termo de grau 1vezes o coeficiente do termo de grau 0 é igual a 0.

$$\begin{aligned} S \;&=\; \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 \,|\, bc = 0\} \;=\; \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 \,|\, b = 0 \text{ ou } c = 0\} \\ &=\; \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 \,|\, b = 0\} \cup \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 \,|\, c = 0\} \\ &=\; \{x,\, 1\,, x^2 + x,\, x^2 + 1\,, x^2 \;\ldots\} \end{aligned}$$

Por exemplo, temos que $x^2 + 2x + 3 \notin S$ porque o produto do coeficiente do termo de grau 2 (o 1) com o coeficiente do termo de grau 0 (o 3) dá 6 que é diferente de 0. Em contrapartida o polinómio $1 \;=\; 0x^2 + 0x + 1$ pertence ao conjunto S porque o coeficiente do termo de grau 1 é igual a 0.

S é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2$?

- Será que o polinómio nulo pertence a S, $0 \in S$? Isto é, será que o coeficiente do termo de grau 1 ou o do termo de grau 0 do polinómio nulo é igual a 0?

  Sim, o polinómio nulo tem todos os coeficientes iguais a 0. É de notar que o polinómio nulo pode ser escrito como $0 = 0x^2 + \underbrace{0}_{b}x + \underbrace{0}_{c}$ e assim temos que $bc = 0 \times 0 = 0$.

- Será que S é fechado para a soma? Dados quaisqueres dois polinómios de S, a sua soma ainda está em S? Isto é, para quaisqueres polinómios $ax^2 + bx + c,\, a'x^2 + b'x + c' \in S$ em que $bc = 0$ e $b'c' = 0$ será que: $ax^2 + bx + c + a'x^2 + b'x + c' \;=\; (a + a')x^2 + (b + b')x + (c + c')$ será que ainda temos que $(b + b') \times (c + c') = 0$?

  (Neste caso, isto não se verifica. O que acontece é que conseguimos arranjar um polinómio em que $b = 0$ e $c \neq 0$, e outro em que $b' \neq 0$ e $c' = 0$. Ambos estão em S, porque $bc = 0$ e $b'c' = 0$, mas quando os somamos como $b + b' \neq 0$ e $c + c' \neq 0$ obtemos que $(b + b') \times (c + c') \neq 0$ e assim o polinómio resultante já não pertence a S. O truque está em notar que o conjunto S pode ser escrito como a união de dois subconjuntos (não mutuamente exclusivos): os polinómios cujo coeficiente do termo de grau 1 é nulo ($b = 0$), e os polinómios cujo coeficiente do termo de grau 0 é nulo ($c = 0$). Assim, conseguimos encontrar um polinómio que está no primeiro conjunto mas não no segundo, e outro que está no segundo mas não no primeiro. Quando os somamos, o resultado não pertence a nenhum dos dois subconjuntos. Como esta propriedade falha, basta apresentarmos um contraexemplo: se não se verifica para alguns polinómios, então a propriedade não se verifica em geral. O exercício 2(d)(ii) tem um raciocínio semelhante, mas usa matrizes.)

  Não! Por exemplo, temos que $x^2 + 1 \in S$, porque $b = 0$ e $c = 1$ assim $bc = 0$, e $x^2 + x \in S$, porque $b' = 1$ e $c' = 0$ assim $b'c' = 0$. Mas a sua soma não é um polinómio de S,

$$(x^2 + 1) + (x^2 + x) \;=\; 2x^2 + 1x + 1 \notin S$$

  porque $(b + b') \times (c + c') = 1 \times 1 = 1 \neq 0$.

- (Já agora, S é fechado para a multiplicação por escalar, pois se $bc = 0$, ao multiplicar por qualquer escalar/número real o resultado continua a dar 0. Mas não vale a pena estarem a verificar esta propriedade: como S não é fechado para a soma, o exercício termina logo com o contraexemplo acima).

Assim, como não é fechado para a soma, S não é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2$.

[ii] Por exemplo, $2x^2$ é um polinómio em S e se o multiplicarmos pelo número real 3 temos o polinómio $6x^2$ que continua a ser um polinómio em S.

2(d)i. No espaço $M_{n\times n}$ das matrizes quadradas de ordem n, o conjunto S das matrizes simétricas[iii] é:

$$\boxed{S \;=\; \{A \in M_{n\times n} : \; A \text{ é simétrica}\} \;=\; \{A \in M_{n\times n} : A = A^T\}}$$

S é um subespaço de $M_{n\times n}$?

- $O_{n\times n}$ (matriz nula de ordem n) $\in S$? Sim, porque $O = O^T$, isto é, a matriz nula é simétrica porque é igual à sua transposta.
- Sejam A e B duas matrizes $n \times n$ simétricas, ou seja, $A = A^T$ e $B = B^T$. Assim, $A, B \in S$. Será que $A+B \in S$? Será que $A+B$ é ainda uma matriz simétrica, isto é, $(A+B) = (A+B)^T$?

$$\begin{aligned} (A+B)^T =& A^T + B^T && \text{pela Prop 5 slide 14 Cap.1.1} \\ =& A + B && \text{como } A \text{ e } B \text{ são simétricas temos que } A = A^T \text{ e } B = B^T \end{aligned}$$

  Logo, $A + B \in S$, a soma de duas matrizes simétricas é ainda uma matriz simétrica.
- Dado um escalar qualquer, $\alpha \in \mathbb{R}$, e uma matriz quadrada de ordem n simétrica, $A \in S$. Será que αA é ainda uma matriz simétrica? Isto é, será que $\alpha A = (\alpha A)^T$?

$$\begin{aligned} (\alpha A)^T =& \alpha A^T && \text{pela Prop. 9 slide 14 Cap.1.1} \\ =& \alpha A && \text{como } A \text{ é simétrica temos que } A = A^T \end{aligned}$$

  Logo, $\alpha A \in S$, a multiplicação por um escalar de uma matriz simétrica é ainda uma matriz simétrica.

Assim, S é um subespaço de $M_{n\times n}$ porque contêm o elemento neutro (a matriz nula), é fechado para a soma e fechado para a multiplicação por um escalar.

5 (e). ($\star$) Estamos no espaço vetorial $\mathcal{P}_2$ dos polinómios em t com grau não superior a 2[iv]. Qual é o espaço gerado pelo conjunto $\{t^2+1, t^2+t, t+1\}$? O espaço gerado pelos polinómios indicados é denotado por $\langle t^2+1, t^2+t, t+1\rangle$ e consiste em todos os polinómios da forma at^2+bt+c, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, que conseguimos escrever como combinação linear dos polinómios t^2+1, t^2+t e $t+1$?

Nós apenas queremos saber quais são os polinómios at^2+bt+c que conseguimos escrever à custa dos polinómios t^2+1, t^2+t e $t+1$. Isto implica que temos de ver quando é que o seguinte sistema é possível:

$$at^2+bt+c = \alpha_1(t^2+1) + \alpha_2(t^2+t) + \alpha_3(t+1), \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$$

Nestes exercícios as nossas incógnitas são a, b e c, não nos interessa saber quem são α_1, α_2 e α_3! De novo, nós queremos saber quais são os polinómios que são combinação linear de t^2+1, t^2+t e $t+1$; não estamos interessados em como é que são combinação linear daqueles polinómios, só quais é que são.

O espaço gerado pelos polinómios indicados é:

$$\begin{aligned} \langle t^2+1, t^2+t, t+1\rangle =& \{at^2+bt+c \in \mathcal{P}_2 \,:\, at^2+bt+c \;=\; \alpha_1(t^2+1) + \alpha_2(t^2+t) + \alpha_3(t+1),\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}\} \\ & \text{Do lado direito da equação vamos agrupar os termos } t^2,\ t \text{ e os termos independentes} \\ =& \{at^2+bt+c \in \mathcal{P}_2 \,:\, at^2+bt+c = (\alpha_1+\alpha_2)t^2 + (\alpha_2+\alpha_3)t + (\alpha_1+\alpha_3),\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}\} \\ & \text{Quero que as cores/coeficientes do lado esquerdo sejam iguais às do lado direito} \\ =& \left\{ at^2+bt+c \in \mathcal{P}_2 \,:\, \begin{cases} (\alpha_1+\alpha_2) = a \\ (\alpha_2+\alpha_3) = b \\ (\alpha_1+\alpha_3) = c \end{cases} ,\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ & \text{Vamos escrever o sistema com matrizes porque somos fortes} \\ =& \left\{ at^2+bt+c \in \mathcal{P}_2 \,:\, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{\text{Quando é que este sistema é possível?}},\quad \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

[iii] Ver a definição de matriz simétrica no Cap.1 slide 12

[iv] Até agora os termos dos polinómios são x mas nesta alínea são t, não importa a letra funciona da mesma forma!

O sistema[v]:

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$

é possível se e só se $car(A) = car([A|B])$. Vamos escalonar a matriz ampliada $[A|B]$:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & a\\0 & 1 & 1 & b\\1 & 0 & 1 & c\end{array}\right] \underset{L_3=L_3-L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & a\\0 & 1 & 1 & b\\0 & -1 & 1 & c-a\end{array}\right] \underset{L_3=L_3+L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & a\\0 & 1 & 1 & b\\0 & 0 & 2 & c-a+b\end{array}\right]$$

Os pivots estão marcados nesta cor. Temos sempre que $car(A) = car([A|B])$, ou seja, o sistema $AX = B$ é sempre possível. Logo, seja lá qual for o polinómio $at^2 + bt + c \in \mathcal{P}_2$ conseguimos sempre escrevê-lo como combinação linear dos polinómios $t^2 + 1$, $t^2 + t$ e $t + 1$. Portanto, não existe um único polinómio em $\mathcal{P}_2$ que não pode ser escrito como combinação linear dos polinómios indicados, isso é o mesmo que dizer que o espaço gerado por esses polinómios corresponde a todos os polinómios em t de grau não superior a 2.

$$\langle t^2+1, t^2+t, t+1\rangle = \mathcal{P}_2$$

14. [vi] $K = \{(a^2, 0, 1), (0, a, 2), (1, 0, 1)\}$

Qualquer base de $\mathbb{R}^3$ é um conjunto com 3 vetores, porque a dimensão de $\mathbb{R}^3$ é 3, que é linearmente independente e gera $\mathbb{R}^3$. Pelo Teorema do Cap.2 slide 13, como K tem exatamente 3 vetores e $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ basta ver para que valores de a é que K é um conjunto l.i. ou para que valores de a é que K gera $\mathbb{R}^3$ que automaticamente satisfaz a outra condição e forma uma base de $\mathbb{R}^3$.

Para que valores de a é que K é l.i.? O conjunto K é l.i. se

$$\alpha_1(a^2,0,1) + \alpha_2(0,a,2) + \alpha_3(1,0,1)) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{bmatrix}a^2 & 0 & 1\\0 & a & 0\\1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = B$$

implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ (ver a definição do Cap.2 slide 9).

Ou seja, isto é o mesmo que dizer que o conjunto K é l.i. quando o sistema acima $AX = B$ é possível e determinado (tem uma única solução quando os α's são todos iguais a 0). O sistema $AX = B$ é possivel e determinado se e só se $car(A) = car([A|B]) = \text{n}^{\text{o}}$ de colunas de $A = 3$.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c}a^2 & 0 & 1 & 0\\0 & a & 0 & 0\\1 & 2 & 1 & 0\end{array}\right] \underset{L_1\leftrightarrow L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 0\\0 & a & 0 & 0\\a^2 & 0 & 1 & 0\end{array}\right] \underset{L_3=L_3-a^2L_1}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 0\\0 & a & 0 & 0\\0 & -2a^2 & 1-a^2 & 0\end{array}\right] \underset{L_3=L_3+2aL_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 0\\0 & a & 0 & 0\\0 & 0 & 1-a^2 & 0\end{array}\right] \text{(escalonada)}$$

Assim, temos $car(A) = car([A|B]) = 3$ se e só se o pivot da L_2 é o a e o pivot da L_3 é o $1 - a^2$, ou seja, $a \neq 0$ e $1 - a^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ e $a \neq \pm 1$.

Para que valores de a é que K gera $\mathbb{R}^3$? O conjunto K gera $\mathbb{R}^3$ se for possível escrever qualquer vetor (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ como combinação linear dos vetores de K.

Vamos ver para que valores de a é que K gera $\mathbb{R}^3$.

$$\alpha_1(a^2,0,1) + \alpha_2(0,a,2) + \alpha_3(1,0,1)) = (x,y,z) \Leftrightarrow \begin{bmatrix}a^2 & 0 & 1\\0 & a & 0\\1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \Leftrightarrow CX = D$$

(Nesta parte, queremos determinar para que valores de a é possível escrever todos os vetores de $\mathbb{R}^3$ como combinação linear dos vetores de K. Ou seja, queremos saber quando é que o sistema é possível, não nos interessa como isso é feito, isto é, os valores específicos dos α's não importam.)

[v] Reparem que o que fazemos com os vetores também fazemos aqui: os coeficientes dos polinómios estão nas colunas da matriz A. Por exemplo, o primeiro polinómio $t^2 + 0t + 1$ tem coeficientes $1, 0, 1$ o que corresponde à primeira coluna de A...

[vi] Este exercício é semelhante à questão 4 do Teste 1 de 2024/2025.

$CX = D$ é possível se e só se $car(C) = car([C|D])$. Vamos escalonar a matriz ampliada $[C|D]$[vii].

$$[C|D] = \left[\begin{array}{ccc|c} a^2 & 0 & 1 & x \\ 0 & a & 0 & y \\ 1 & 2 & 1 & z \end{array}\right] \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & z \\ 0 & a & 0 & y \\ a^2 & 0 & 1 & x \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - a^2 L_1}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & z \\ 0 & a & 0 & y \\ 0 & -2a^2 & 1-a^2 & x - a^2 z \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 + 2aL_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & z \\ 0 & a & 0 & y \\ 0 & 0 & 1-a^2 & x - a^2 z + 2ay \end{array}\right] \underset{L_2 = \frac{L_2}{a},\, a \neq 0}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & z \\ 0 & 1 & 0 & y/a \\ 0 & 0 & 1-a^2 & x - a^2 z + 2ay \end{array}\right] \underset{L_3 = \frac{L_2}{1-a^2},\, a \neq \pm 1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & z \\ 0 & 1 & 0 & y/a \\ 0 & 0 & 1 & (x-a^2z+2ay)/1-a^2 \end{array}\right]$$

Como a $car(C) = car([C|D])$ temos que o sistema $CX = D$ é sempre possível quando $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Vamos ver o que acontece quando $a = 0$, $a = 1$ e $a = -1$:

Se $a = 0$ temos que

$$[C|D] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 1 & 2 & 1 & z \end{array}\right] \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & x \end{array}\right] \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & y \end{array}\right]$$

o sistema $CX = D$ é possível se e só se $car(C) = car([C|D]) = 2$, isto é, $y = 0$! Portanto, se $a = 0$ o conjunto K gera apenas os vetores (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ cuja segunda coordenada é nula. Neste caso, o espaço gerado por K não é $\mathbb{R}^3$, $\langle K \rangle \neq \mathbb{R}^3$, e por isso não pode ser uma base de $\mathbb{R}^3$.

Se $a = 1$ temos que

$$[C|D] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 1 & 2 & 1 & z \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 2 & 0 & z - x \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - 2L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & z - x - 2y \end{array}\right]$$

o espaço gerado por K são os vetores de $\mathbb{R}^3$ tal que $z - x - 2y = 0$. Assim, para $a = 1$, $\langle K \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - x - 2y = 0\} \neq \mathbb{R}^3$ e por isso não pode ser uma base de $\mathbb{R}^3$.

De um modo semelhante, se $a = -1$

$$[C|D] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & -1 & 0 & y \\ 1 & 2 & 1 & z \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & -1 & 0 & y \\ 0 & 2 & 0 & z - x \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 + 2L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & -1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & z - x + 2y \end{array}\right]$$

o espaço gerado por K são os vetores de $\mathbb{R}^3$ tal que $z - x + 2y = 0$. Assim, para $a = -1$, $\langle K \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - x + 2y = 0\} \neq \mathbb{R}^3$.

Assim sabemos que o conjunto K gera todos os vetores de $\mathbb{R}^3$ se e só se $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

Em suma, o conjunto K é uma base de $\mathbb{R}^3$, é l.i. e gera $\mathbb{R}^3$, se e só se $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

(Nota: Como indicado no início, podem usar o Teorema do slide 13 e verificar apenas quando é que K é linearmente independente ou quando é que K gera $\mathbb{R}^3$. Só precisam de mostrar uma das duas condições, o que vos poupa algum tempo na resolução. Contudo, se utilizarem esse teorema, têm de explicar **muitooooo** bem que compreendem que um conjunto, para ser base de um espaço, tem de ser linearmente independente e gerar o espaço. Caso essa explicação não seja suficientemente detalhada e apenas verifiquem uma das condições, podem perder mais de metade da cotação. Se não se sentirem confiantes com a justificação, é preferível verificar ambas as condições.)

19 (b) O primeiro passo é escalonar e reduzir a matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} \underset{L_2 = L_2 - 3L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & -5 \end{bmatrix} = \mathbf{A_e} \underset{L_2 = \frac{L_2}{4}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -7/4 & -5/4 \end{bmatrix} = \mathbf{A_r}$$

[vii] Vou fazer algo semelhante ao exercício 17 da FP1.

i. Determinar uma base para o espaço nulo

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(A) =& \{X \in \mathbb{R}^4 \,:\, \mathbf{A_r}X = 0\} \\
=& \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -7/4 & -5/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
=& \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x + 2z + w = 0 \text{ e } y - 7z/4 - 5w/4 = 0\} \\
& \text{Vamos escrever tudo em relação a } z \text{ e } w \\
=& \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x = -2z - w \text{ e } y = 7z/4 + 5w/4\} \\
=& \{(-2z - w, 7z/4 + 5w/4, z, w),\ z, w \in \mathbb{R}\} \\
& \text{Separar em dois vetores: um que tem os z's outro que tem os w's} \\
=& \{(-2z, 7z/4, z, 0) + (-w, 5w/4, 0, w),\ z, w \in \mathbb{R}\} \\
& \text{Meter o } z \text{ e o } w \text{ em evidência} \\
=& \{z(-2, 7/4, 1, 0) + w(-1, 5/4, 0, 1),\ z, w \in \mathbb{R}\} \\
=& \langle (-2, 7/4, 1, 0), (-1, 5/4, 0, 1) \rangle \\
& \text{Opcional: multiplicar cada um dos vetores por 4 para não termos frações} \\
=& \langle (-8, 7, 4, 0), (-4, 5, 0, 4) \rangle
\end{aligned}$$

Assim, uma base para o espaço nulo é $\{(-8,7,4,0), (-4,5,0,4)\}$.

ii. determine bases para o espaço das linhas e o espaço das colunas de A

As linhas não nulas de $\mathbf{A_e}$ ou de $\mathbf{A_r}$ formam uma base para o espaço das linhas de A. Assim, uma base para o espaço das linhas pode ser as linhas (não nulas) de $\mathbf{A_e}$:

$$\{(1,0,2,1), (0,4,-7,-5)\}$$

ou as linhas não nulas de $\mathbf{A_r}$:

$$\{(1,0,2,1), (0,1,-7/4,-5/4)\}$$

Para calcular uma base para o espaço das colunas podemos fazer de duas formas diferentes:

1. as colunas com os pivots da forma escalonada $\mathbf{A_e}$ formam uma base para $\mathcal{C}(A)$.

$$\mathbf{A_e} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & -5 \end{bmatrix}$$

O pivot da L_1 está na coluna 1 e o pivot da L_2 está na coluna 2. Assim, a coluna 1 e 2 da matriz A formam uma base para $\mathcal{C}(A)$:

$$\{(1,3), (0,4)\}$$

OU

2. $B = (a,b) \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow AX = B$ é possível. Um sistema $AX = B$ é possível se e só se $car(A) = car([A|B])$. Vamos escalonar $[A|B]$ para contar a característica:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & a \\ 3 & 4 & -1 & -2 & b \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2 - 3L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & a \\ 0 & 4 & -7 & -5 & b - 3a \end{array}\right]$$

Com a $car(A) = car([A|B])$ o sistema $AX = B$ é sempre possível, ou seja, todos os vetores $B = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ pertencem ao espaço das colunas de A. Portanto, $\mathcal{C}(\mathcal{A}) = \mathbb{R}^2$ e uma base para este espaço é, por exemplo, a base canónica de $\mathbb{R}^2$

$$\{(1,0), (0,1)\}$$

A base que obtemos para $\mathcal{C}(A)$ no ponto 1. e 2. são diferentes, mas não tem problema.

iii. calcule a caracteristica e a nulidade, e verifique que $car(A) + nul(A) = n$

A característica de A é igual à dimensao de $\mathcal{C}(A)$ e dimensao de $\mathcal{L}(A)$.Assim, $car(A) = 2$. A nulidade de A é igual à dimensão do espaço nulo. Assim, $nul(A) = 2$. E n é o número de colunas de A. Portanto verificamos que,

$$car(A) + nul(A) = n \Leftrightarrow 2 + 2 = 4$$

iv. A característica de uma matriz é o máximo número de linhas l.i.. Como a $car(A) = 2$ sabemos que as 2 linhas de A são l.i.

19 (f) O primeiro passo é escalonar e reduzir a matriz A (este passo é necessário para determinar uma base para o espaço das linhas e para o espaço nulo).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2=L_2-L_1 \\ L_3=L_3+L_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{L_2=-\frac{L_2}{2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{L_3=-L_3-L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A_e}^{\text{(escalonada)}}$$

$$\underset{\substack{L_2=L_2-2L_3 \\ L_1=L_1-3L_3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_1=L_1-2L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A_r}\left(\substack{\text{escalonada e} \\ \text{reduzida}}\right)$$

i. Determinar uma base para o espaço nulo

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A) &= \{X \in \mathbb{R}^3 \, : \, AX = 0\} \\ &= \{X \in \mathbb{R}^3 \, : \, \mathbf{A_r}X = 0\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x = 0 \text{ e } y = 0 \text{ e } z = 0\} \\ &= \{(0, 0, 0)\} \end{aligned}$$

O espaço nulo de A contêm apenas o vetor nulo de $\mathbb{R}^3$ e a base para o espaço $\{(0, 0, 0)\}$ é o conjunto vazio, denotado por $\emptyset$. (ver a nota do slide 11 do Capítulo 2)

ii. determine bases para o espaço das linhas e o espaço das colunas de A

As linhas não nulas de $\mathbf{A_e}$ ou de $\mathbf{A_r}$ formam uma base para o espaço das linhas de A. Assim, uma base para o espaço das linhas pode ser as linhas (não nulas) de $\mathbf{A_e}$:

$$\{(1, 2, 3), (0, 1, 2), (0, 0, 1)\}$$

ou as linhas (não nulas) de $\mathbf{A_r}$:

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

Para determinar uma base para o espaço das colunas podemos fazer de duas formas diferentes:

1. as colunas com os pivots da forma escalonada $\mathbf{A_e}$ formam uma base para $\mathcal{C}(A)$.

$$\mathbf{A_e} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O pivot da L_1 está na coluna 1, o pivot da L_2 está na coluna 2 e o pivot da L_3 está na coluna 3. Assim, a coluna 1,2 e 3 da matriz A formam uma base para $\mathcal{C}(A)$:

$$\{(1, 1, -1), (2, 0, -1), (3, -1, 0)\}$$

OU

2. $B=(a,b,c) \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow AX=B$ é possível. Vamos ver quais são os vetores $B=(a,b,c)$ que estão no espaço das colunas de A e assim determinamos uma base para o espaço. Um sistema $AX=B$ é possível se e só se $car(A)=car([A|B])$. Vamos escalonar $[A|B]$ para contar a característica:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 1 & 0 & -1 & b \\ -1 & -1 & 0 & c \end{array}\right] \underset{\substack{L_2=L_2-L_1 \\ L_3=L_3+L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -2 & -4 & b-a \\ 0 & 1 & 3 & c+a \end{array}\right] \underset{L_2=-\frac{L_2}{2}}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 2 & (b-a)/2 \\ 0 & 1 & 3 & c+a \end{array}\right] \underset{L_3=L_3-L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 2 & (b-a)/2 \\ 0 & 0 & 1 & c+a-(b-a)/2 \end{array}\right] \text{(escalonada)}$$

Com a $car(A)=car([A|B])=3$ o sistema $AX=B$ é sempre possível, ou seja, todos os vetores $B=(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ pertencem ao espaço das colunas de A. Portanto, $\mathcal{C}(\mathcal{A})=\mathbb{R}^3$ e uma base para este espaço é, por exemplo, a base canónica de $\mathbb{R}^3$

$$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

Neste caso, a base que obtemos para $\mathcal{C}(A)$ no ponto 1. e 2. são diferentes mas não tem problema! Os espaços vetoriais tem infinitas bases diferentes.

iii. calcule a caracteristica e a nulidade, e verifique que $car(A)+nul(A)=n$

A característica de A é igual ao número de pivots da sua forma escalonada, que por sua vez é igual à dimensão de $\mathcal{L}(A)$ e à dimensao de $\mathcal{C}(A)$. A dimensão consiste no número de elementos de qualquer base. Assim, $car(A)=3$.

A nulidade de A é igual à dimensão do espaço nulo. Na alínea i, vimos que a base do espaço nulo era o conjunto vazio que tem 0 elementos. Assim, $nul(A)=0$.

n é o número de colunas de A. Portanto verificamos que,

$$car(A)+nul(A)=n \Leftrightarrow 3+0=3$$

iv. A característica de uma matriz é o número máximo de linhas (colunas) l.i.. Como a $car(A)=3$ sabemos que as 3 linhas de A são l.i.

21 (b) $\mathcal{B}=(X_1,X_2,X_3,X_4)$ é uma base de $\mathbb{R}^4$. Queremos escrever as coordenadas do vetor $(2,1,0,0)$ na base $\mathcal{B}$, por outras palavras, queremos escrever o vetor $(2,1,0,0)$ como combinação linear dos vetores da base $\mathcal{B}$. Vamos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} (2,1,0,0) &= \alpha_1 X_1+\alpha_2 X_2+\alpha_3 X_3+\alpha_4 X_4 \\ \Leftrightarrow (2,1,0,0) &= \alpha_1(1,1,0,0)+\alpha_2(1,0,0,0)+\alpha_3(1,1,1,0)+\alpha_4(1,1,1,1) \\ \Leftrightarrow (2,1,0,0) &= (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4, \alpha_1+\alpha_3+\alpha_4, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_4) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=2 \\ \alpha_1+\alpha_3+\alpha_4=1 \\ \alpha_3+\alpha_4=0 \\ \alpha_4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}$$

(Reparem que os vetores da base $\mathcal{B}$ ficam nas colunas da matriz)

Depois de resolvermos o sistema, o vetor das coordenadas de $(2,1,0,0)$ na base $\mathcal{B}$ é:

$$[(2,1,0,0)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}$$

Usando o método de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&2\\1&0&1&1&1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&0\end{array}\right]\underset{L_2=L_2-L_1}{\sim}\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&2\\0&-1&0&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&0\end{array}\right]\underset{\substack{L_3=L_3-L_4\\L_1=L_1-L_4}}{\sim}\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&0&2\\0&-1&0&0&-1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{array}\right]\underset{L_1=L_1-L_3}{\sim}$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&2\\0&-1&0&0&-1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{array}\right]\underset{L_1=L_1+L_2}{\sim}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&1\\0&-1&0&0&-1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{array}\right]\underset{L_2=-L_2}{\sim}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{array}\right]$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&0&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1=\alpha_2=1\\\alpha_3=\alpha_4=0\end{cases}$$

Temos que o vetor $(2,1,0,0)$ é C.L. dos vetores da base $\mathcal{B}$ da seguinte forma[viii]:

$$(2,1,0,0)\;=\;\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\alpha_3X_3+\alpha_4X_4\;\Leftrightarrow\;(2,1,0,0)\;=\;1X_1+1X_2+0X_3+0X_4$$

Logo, o vetor das coordenadas de $(2,1,0,0)$ na base $\mathcal{B}$ é:

$$[(2,1,0,0)]_{\mathcal{B}}\;=\;\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{bmatrix}\;=\;\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

22 (b) $\mathcal{B}_1=((1,2,1),(0,2,0),(0,0,-1))$ e $\mathcal{B}_2=(\underbrace{(1,0,-1)}_{=X_1},\underbrace{(1,1,1)}_{=X_2},\underbrace{(2,3,-1)}_{=X_3})$ são bases de $\mathbb{R}^3$.

A matriz P de mudança da base $\mathcal{B}_1$ para a base $\mathcal{B}_2$ é a matriz cujas colunas são os vetores de $\mathcal{B}_1$ escritos nas coordenadas da base $\mathcal{B}_2$.

$$P\;=\;M_{\mathcal{B}_2\leftarrow\mathcal{B}_1}\;=\;\begin{bmatrix}|&|&|\\ [(1,2,1)]_{\mathcal{B}_2}&[(0,2,0)]_{\mathcal{B}_2}&[(0,0,-1)]_{\mathcal{B}_2}\\|&|&|\end{bmatrix}$$

Vamos escrever cada um dos vetores $(1,2,1),(0,2,0)$ e $(0,0,-1)$ à custa dos vetores da base $\mathcal{B}_2$:

$$(1,2,1)\;=\;\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\alpha_3X_3\;\Leftrightarrow\;(1,2,1)\;=\;\alpha_1(1,0,-1)+\alpha_2(1,1,1)+\alpha_3(2,3,-1)$$

...resolver o sistema, devem apresentar as contas ...

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1=-3/5\\\alpha_2=4/5\\\alpha_3=2/5\end{cases}\qquad\text{Assim, }[(1,2,1)]_{\mathcal{B}_2}\;=\;\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix}\;=\;\begin{bmatrix}-3/5\\4/5\\2/5\end{bmatrix}\;\textbf{1ª Coluna de }P$$

$$(0,2,0)\;=\;\beta_1X_1+\beta_2X_2+\beta_3X_3\;\Leftrightarrow\;(0,2,0)\;=\;\beta_1(1,0,-1)+\beta_2(1,1,1)+\beta_3(2,3,-1)$$

...resolver o sistema, devem apresentar as contas ...

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\beta_1=-6/5\\\beta_2=-2/5\\\beta_3=4/5\end{cases}\qquad\text{Assim, }[(0,2,0)]_{\mathcal{B}_2}\;=\;\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{bmatrix}\;=\;\begin{bmatrix}-6/5\\-2/5\\4/5\end{bmatrix}\;\textbf{2ª Coluna de }P$$

$$(0,0,-1)\;=\;\theta_1X_1+\theta_2X_2+\theta_3X_3\;\Leftrightarrow\;(0,0,-1)\;=\;\theta_1(1,0,-1)+\theta_2(1,1,1)+\theta_3(2,3,-1)$$

...resolver o sistema, devem apresentar as contas ...

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\theta_1=1/5\\\theta_2=-3/5\\\theta_3=1/5\end{cases}\qquad\text{Assim, }[(0,2,0)]_{\mathcal{B}_2}\;=\;\begin{bmatrix}\theta_1\\\theta_2\\\theta_3\end{bmatrix}\;=\;\begin{bmatrix}1/5\\-3/5\\1/5\end{bmatrix}\;\textbf{3ª Coluna de }P$$

[viii] Podem e devem confirmar que a seguinte equação está certa

Logo,

$$P = M_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} -3/5 & -6/5 & 1/5 \\ 4/5 & -2/5 & -3/5 \\ 2/5 & 4/5 & 1/5 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & -6 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

24. Seja $\mathcal{S} = ((-1,1,0),(1,0,1),(0,0,1))$ e $\mathcal{T} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ bases ordenadas. Determine Y_1, Y_2 e Y_3, sabendo que

$$M_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz $M_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{T}}$ é uma matriz de mudança de base da base $\mathcal{T}$ para a base $\mathcal{S}$. As colunas da matriz são os vetores da base $\mathcal{T}$ escritos nas coordenadas da base $\mathcal{S}$, isto é,temos que $[Y_1]_{\mathcal{S}}$ é igual à primeira coluna, $[Y_2]_{\mathcal{S}}$ é igual à segunda coluna e $[Y_3]_{\mathcal{S}}$ é igual à terceira coluna.

$$M_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ [Y_1]_{\mathcal{S}} & [Y_2]_{\mathcal{S}} & [Y_3]_{\mathcal{S}} \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

Sabemos que:

$$[Y_1]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

são as coordenadas do vetor Y_1 na base $\mathcal{S}$. Isso quer dizer que o vetor Y_1 é 1 vez o primeiro vetor da base $\mathcal{S}$, 2 vezes o segundo vetor da base $\mathcal{S}$ e -1 vez o terceiro vetor da base $\mathcal{S}$. Como conhecemos os vetores da base $\mathcal{S}$ conseguimos à custa deles determinar o vetor Y_1.

$$Y_1 = 1\underbrace{(-1,1,0)}_{\substack{1^{\text{o}}\text{vetor} \\ \text{da base } \mathcal{S}}} + 2\underbrace{(1,0,1)}_{\substack{2^{\text{o}}\text{vetor} \\ \text{da base } \mathcal{S}}} - 1\underbrace{(0,0,1)}_{\substack{3^{\text{o}}\text{vetor} \\ \text{da base } \mathcal{S}}} = (-1,1,0) + (2,0,2) + (0,0,-1) = (1,1,1)$$

Também sabemos que:

$$[Y_2]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

são as coordenadas do vetor Y_2 na base $\mathcal{S}$. Isso quer dizer que o vetor Y_2 é 1 vez o primeiro vetor da base $\mathcal{S}$, 1 vez o segundo vetor da base $\mathcal{S}$ e -1 vez o terceiro vetor da base $\mathcal{S}$. Como conhecemos os vetores da base $\mathcal{S}$ conseguimos à custa deles calcular o vetor Y_2.

$$Y_2 = 1\underbrace{(-1,1,0)}_{\substack{1^{\text{o}}\text{vetor} \\ \text{da base } \mathcal{S}}} + 1\underbrace{(1,0,1)}_{\substack{2^{\text{o}}\text{vetor} \\ \text{da base } \mathcal{S}}} - 1\underbrace{(0,0,1)}_{\substack{3^{\text{o}}\text{vetor} \\ \text{da base } \mathcal{S}}} = (-1,1,0) + (1,0,1) + (0,0,-1) = (0,1,0)$$

Finalmente, sabemos que:

$$[Y_3]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

são as coordenadas do vetor Y_3 na base $\mathcal{S}$. Isso quer dizer que o vetor Y_3 é 2 vezes o primeiro vetor da base $\mathcal{S}$, 1 vez o segundo vetor da base $\mathcal{S}$ e 1 vez o terceiro vetor da base $\mathcal{S}$.

$$Y_3 = 2\underbrace{(-1,1,0)}_{\substack{1^{\text{o}}\text{vetor} \\ \text{da base } \mathcal{S}}} + 1\underbrace{(1,0,1)}_{\substack{2^{\text{o}}\text{vetor} \\ \text{da base } \mathcal{S}}} + 1\underbrace{(0,0,1)}_{\substack{3^{\text{o}}\text{vetor} \\ \text{da base } \mathcal{S}}} = (-2,2,0) + (1,0,1) + (0,0,1) = (-1,2,2)$$

Assim, chegamos à conclusão que $\mathcal{T} = ((1,1,1),(0,1,0),(-1,2,2))$.