Departamento de Matemática **Universidade de Aveiro**

Álgebra Linear e Geometria Analítica - A

Exame de recurso **28 de Janeiro de 2025**

Duração total do teste: 2h30m

Nome: ______________________________

N^o mecanográfico: ______________ **Curso** ______________________________

Número de folhas suplementares: ______________

Declaro que desisto: ______________________________

Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5	Questão 6	Classificação final

PARTE I

Escolha múltipla

(4 val.) **1)** Selecione a (única) afirmação verdadeira em cada uma das seguintes questões. Cada resposta certa será cotada com $0,5$ valores.

(a) Considere o sistema de equações lineares $AX = b$ nas variáveis x, y e z e no parâmetro real a representado pela matriz do sistema $A|b = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & a-3 \\ 0 & a & 3 & 2 \\ 0 & 0 & a+2 & 4 \end{bmatrix}$. Escolha a opção correta:

- ☐ O sistema é possível e determinado para todo $a \in \mathbb{R}$.
- ☐ O sistema é possível e determinado se e só se $a \neq 0$ e $a \neq -2$ e $a \neq 3$.
- ☐ O sistema é possível e determinado se e só se $a \neq -2$.
- ☐ O sistema é possível e determinado se e só se $a \neq 0$ e $a \neq -2$.

(b) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. O elemento $(2,1)$ da matriz AB é:

- ☐ 0.
- ☐ -1.
- ☐ 1.
- ☐ 9.

(c) Sabendo que as matrizes A, B, M e X, do tipo $n \times n$, são matrizes invertíveis tais que $MXM^{-1} = MB + AM$, verifica-se que:

- ☐ $X = M^{-1}B + AM^{-1}$.
- ☐ $X = BM + M^{-1}AM^2$.
- ☐ $X = MB + AM$.
- ☐ $X = BM + AM$.

(d) Seja $\mathscr{B}$ uma base de $\mathbb{R}^2$. Sabendo-se que a matriz de mudança de base de $\mathscr{B}$ para a base canónica de $\mathbb{R}^2$ é dada por $S = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, pode concluir-se que:

- ☐ $\mathscr{B} = ((4,1),(1,3))$.
- ☐ $\mathscr{B} = ((1,3),(4,1))$.
- ☐ $\mathscr{B} = ((3,1),(1,4))$.
- ☐ $\mathscr{B} = ((1,4),(3,1))$.

(e) Seja A uma matriz do tipo 4×4. Sabendo que o elemento $(2,4)$ da matriz A^{-1} é igual a 5 e que o determinante de A é 2, conclui-se que:

- ☐ o elemento $(4,2)$ da matriz de A é igual a 10.
- ☐ o elemento $(2,4)$ da matriz A é igual a 10.
- ☐ o elemento $(4,2)$ da matriz adjunta de A é igual a 10.
- ☐ o elemento $(2,4)$ da matriz adjunta de A é igual a 10.

(f) Encontre todos os valores de β para os quais a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & \beta \end{bmatrix}$ é invertível.

- ☐ $\beta \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.
- ☐ $\beta \in \{1,3\}$.
- ☐ $\beta \in \{-3,3\}$.
- ☐ $\beta \in \mathbb{R}$.

(g) Considere o espaço vetorial $\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes do tipo 2×2 com entradas em $\mathbb{R}$. Qual dos seguintes subconjuntos é subespaço de $\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$?

- ☐ $S = \{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\}$.
- ☐ $S = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : 2a - b = c\}$.
- ☐ $S = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : b \geq 0\}$.
- ☐ $S = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : 2a - b = 2\}$.

(h) Seja $\mathscr{B} = (u_1, u_2)$ uma base de $\mathbb{R}^2$ e $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear definida por $L(u_1) = (1,2)$ e $L(u_2) = (1,0)$. Se v é um vetor de $\mathbb{R}^2$ com vetor das coordenadas na base $\mathscr{B}$, $[v]_{\mathscr{B}} = (1,2)$, então:

- ☐ $L(v) = (1,2)$.
- ☐ $L(v) = (1,0)$.
- ☐ $L(v) = (3,2)$.
- ☐ $L(v) = u_1 + u_2$.

PARTE II

As seguintes questões devem ser resolvidas nas folhas de prova (folhas suplementares). Justifique devidamente as suas respostas.

(2,5 val.) **2)** Considere uma economia com dois setores, Setor 1 e Setor 2. As relações de consumo entre os setores são representadas pela seguinte matriz de consumo

$$C = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,5 \end{bmatrix},$$

ou seja,

- para produzir um unidade, o primeiro setor utiliza $0,4$ unidades da produção do próprio setor e $0,3$ unidades da produção do segundo setor.
- para produzir um unidade, o segundo setor utiliza $0,2$ unidades da produção do primeiro setor e $0,5$ da produção do segundo setor.

Calcule o vetor de produção que representa a produção necessária para satisfazer o consumo final $d = \begin{bmatrix} 100 \\ 110 \end{bmatrix}$.

(5 val.) **3)** Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido de produto interno e o subespaço de $\mathbb{R}^3$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x + y + z = 0\}.$$

(a) Mostre que $\mathscr{B} = ((-1, 1, 0), (1, 1, -2))$ é uma base ortogonal de F.

(b) Determine a projeção ortogonal do vetor $(1, 0, 0)$ sobre F.

(c) Determine um vetor unitário de $\mathbb{R}^3$ ortogonal a F.

(3 val.) **4)** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule o determinante de A.

(b) Sejam B e C matrizes invertíveis do tipo 4×4 e tais que $(2A)^T = C^{-1}B^{-1}C$. Calcule o determinante de B. [Se não calculou o determinante de A na alínea anterior, considere $\det(A) = 3$.]

(4 val.) **5)** Determine uma equação reduzida e classifique a quádrica definida pela equação

$$x^2 + y^2 + 2z^2 - 4xy + 4z + 1 = 0.$$

(1,5 val.) **6)** Considere $\Delta = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 \end{bmatrix}$. Mostre que $\Delta = 0$ se e só se $n \geq 3$.

Estas notas não constituem uma resolução formal e rigorosa do Exame.

1 (d) $\mathcal{B}=(X_1^?, X_2^?)$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ e $bc=((1,0),(0,1))$ é a base canónica de $\mathbb{R}^2$.
A matriz mudança da base $\mathcal{B}$ para bc, $M_{bc\leftarrow\mathcal{B}}$, é uma matriz cujas colunas são os vetores da base $\mathcal{B}$ escritos nas coordenadas da base canónica bc, isto é,

$$M_{bc\leftarrow\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[X_1]_{bc} & [X_2]_{bc}\end{bmatrix}$$

(Cap. 2.1. slide 14)

Assim,

$[X_1]_{bc}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$, isto é, X_1 é 3 vezes o 1º vetor de bc + 1 vez o 2º vetor de bc $\Big\}$ $X_1=3(1,0)+1(0,1)=(3,1)$

$[X_2]_{bc}=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$, isto é, X_2 é 1 vez o 1º vetor de bc + 4 vezes o 2º vetor de bc $\Big\}$ $X_2=1(1,0)+4(0,1)=(1,4)$

Portanto, $\mathcal{B}=((3,1),(1,4))$.

(e) $A_{4\times 4}$ e o elemento $(2,4)$ de A^{-1} é igual a 5 e $|A|=2$.

linha (2), coluna (4)

Temos que $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\operatorname{adj}A \Leftrightarrow \operatorname{adj}A=|A|\,A^{-1}$ (Teorema Cap.3.1. slide 10)

Assim, o elemento $(2,4)$ da adjunta de A é igual ao elemento $(2,4)$ da inversa de A vezes o determinante de A, ou seja, o elemento $(2,4)$ da adjunta de A é igual a $5\times 2=10$.

(f) A é invertível $\Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}1^{+} & 3^{-} & 0^{+}\\ 1 & 0 & 0^{-}\\ 1 & 3 & \beta^{+}\end{vmatrix}\neq 0 \Leftrightarrow \beta\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}\neq 0$

$\Leftrightarrow -3\beta\neq 0 \Leftrightarrow \beta\neq 0$

Resposta: $\beta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

(h) $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}=(u_1,u_2)$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ tal que $L(u_1)=(1,2)$ e $L(u_2)=(1,0)$.

Se $[v]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ então v é 1 vez o 1º vetor de $\mathcal{B}$ + 2 vezes o 2º vetor de $\mathcal{B}$

Isto é, $v=1u_1+2u_2$ então $L(v)=1L(u_1)+2L(u_2)$
$=1(1,2)+2(1,0)=(3,2)$

(2) Matriz de Consumo: $C=\begin{bmatrix}0.4 & 0.2\\ 0.3 & 0.5\end{bmatrix}$ e consumo final $d=\begin{bmatrix}100\\110\end{bmatrix}$

O vetor de produção é $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ em que x_1 e x_2 é quanto o Setor 1 e o setor 2 têm de produzir para satisfazer as necessidades da economia, respetivamente.

Modelo de Leontief: $X=CX+d \Leftrightarrow I_2X-CX=d \Leftrightarrow (I_2-C)X=d$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0.4&0.2\\0.3&0.5\end{bmatrix}\right)X=d \Leftrightarrow \begin{bmatrix}0.6&-0.2\\-0.3&0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}100\\110\end{bmatrix}$$

NOTA: Como todas as entradas de C e d são não negativas (≥ 0) e a soma de cada coluna de C é menor do que 1 (soma da coluna 1 é $0.4+0.3=0.8<1$ e a soma da coluna 2 é $0.2+0.5=0.7<1$). Então pelo Teorema do Cap. 3.2. Slide 8 o modelo de Leontief tem uma única solução economicamente viável.

Resolver o modelo:

$$[I_2-C\,|\,d]=\left[\begin{array}{cc|c}0.6&-0.2&100\\-0.3&0.5&110\end{array}\right]\underset{\substack{L_1=\frac{100L_1}{2}\\ L_2=10L_2}}{\sim}\left[\begin{array}{cc|c}3&-1&500\\-3&5&1100\end{array}\right]\underset{L_2=L_2+L_1}{\sim}$$

$$\sim\left[\begin{array}{cc|c}3&-1&500\\0&4&1600\end{array}\right]\underset{L_2=L_2/4}{\sim}\left[\begin{array}{cc|c}3&-1&500\\0&1&400\end{array}\right]\underset{L_1=L_1+L_2}{\sim}\left[\begin{array}{cc|c}3&0&900\\0&1&400\end{array}\right]\underset{L_1=\frac{L_1}{3}}{\sim}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&300\\0&1&400\end{array}\right]$$

Logo, o setor 1 tem de produzir 300 unidades e o setor 2 tem de produzir 400.

(3) (a) Os vetores são ortogonais porque $(-1,1,0)\cdot(1,1,-2)=-1+1=0$ logo são linearmente independentes. (Teorema do Cap. 4. Slide 7)

Para além disso, $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x+y+z=0\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x=-y-z\}$

$$=\{(-y-z,y,z),\ y,z\in\mathbb{R}\}=\{y(-1,1,0)+z(-1,0,1),\ y,z\in\mathbb{R}\}$$

$$=\langle(-1,1,0),(-1,0,1)\rangle=\langle(-1,1,0),(2,0,-2)\rangle \quad \text{(Lema ii. Cap. 2.2. Slide 3)}$$

$(\times(-2))$

$$=\langle(-1,1,0),(-1,1,0)+(2,0,-2)\rangle \quad \text{(Lema iii. Cap. 2.2. Slide 3)}$$

$$=\langle(-1,1,0),(1,1,-2)\rangle$$

Os vetores $(-1,1,0)$ e $(1,1,-2)$ geram F e são ortogonais logo $\mathcal{B}=((-1,1,0),(1,1,-2))$ é uma base ortogonal de F.

(b) Para usarmos o Teorema do Cap. 4 slide 10 temos de ter uma base ortonormada de F, isto é, os vetores da base tem de ser ortogonais e unitários (norma igual a 1). Já sabemos que os vetores de $\mathcal{B}$ são ortogonais só falta dividir cada vetor pela sua norma (Cap. 4 slide 6).

Seja $X_1 = \frac{(-1,1,0)}{\|(-1,1,0)\|} = \frac{(-1,1,0)}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ e $X_2 = \frac{(1,1,-2)}{\|(1,1,-2)\|} = \frac{(1,1,-2)}{\sqrt{6}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$

Pela alínea (a), temos que X_1 e X_2 geram F porque $(-1,1,0)$ e $(1,1,-2)$ geram F.

$$F = \langle \underset{(\div\sqrt{2})}{(-1,1,0)}, \underset{(\div\sqrt{6})}{(1,1,2)} \rangle = \langle X_1, X_2 \rangle$$ (Lema ii. cap. 2.2. slide 3)

Para além disso,

$X_1 \cdot X_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right) = 0$ são ortogonais $\Rightarrow$ são linearmente independentes

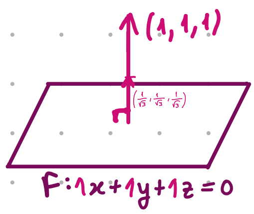
Logo, (X_1, X_2) é uma base ortogonal de F e também temos que:

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \cdot X_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 \\ X_2 \cdot X_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}\right)^2 = 1 \end{array}\right\} X_1 \text{ e } X_2 \text{ são unitários}$$

Portanto, (X_1, X_2) é uma base ortonormada de F. Pelo Teorema do Cap. 4 slide 10, a projeção de $(1,0,0)$ em F é:

$$\begin{aligned} \text{proj}_F(1,0,0) &= ((1,0,0)\cdot X_1)X_1 + ((1,0,0)\cdot X_2)X_2 \\ &= \left((1,0,0)\cdot\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right)\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) + \left((1,0,0)\cdot\left(\tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{-2}{\sqrt{6}}\right)\right)\left(\tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{-2}{\sqrt{6}}\right) \\ &= -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) + \tfrac{1}{\sqrt{6}}\left(\tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{-2}{\sqrt{6}}\right) = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 0\right) + \left(\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{6}, -\tfrac{1}{3}\right) \\ &= (2/3, -1/3, -1/3) \end{aligned}$$

(c) A equação cartesiana do plano F é $1x+1y+1z=0$ logo o vetor $(1,1,1)$ é ortogonal a F (Cap. 4. slide 17) e $\|(1,1,1)\| = \sqrt{3}$.



Pelo Cap. 4. slide 6, o vetor $\frac{(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ é unitário e ortogonal a F.

4 (a)
$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\Big(-3\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=0} - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\Big) = -2(2-1) = -2$$

(b) Como $(2A)^T = C^{-1}B^{-1}C$ logo $|(2A)|^T = |C^{-1}B^{-1}C|$.

$$|(2A)|^T = |C^{-1}B^{-1}C|$$

$$\Leftrightarrow |2A| = |C^{-1}||B^{-1}||C|$$

$$\Leftrightarrow 2^4|A| = \underbrace{\frac{1}{|C|}|C|}_{=1}\frac{1}{|B|}$$

2 está a multiplicar por todas as 4 linhas/colunas de A logo sai 4 vezes do determinante.

$$\Leftrightarrow 2^4 \times (-2) = \frac{1}{|B|} \Leftrightarrow \frac{1}{|B|} = -32 \Leftrightarrow |B| = -\frac{1}{32}$$

5 ($\mathbb{R}^3$) $x^2+y^2+2z^2-4xy+4z+1=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow X^TAX + BX + 1 = 0$$

Calcular os valores próprios de A:

$$|A-\lambda I_3| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)\underbrace{((1-\lambda)^2-4)}_{=\lambda^2-2\lambda-3}=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2-4.(-3)}}{2} \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = -1 \text{ ou } \lambda = 3$$

Calcular os vetores próprios de A:

$$U_2 = \{X \in \mathbb{R}^3 : (A-2I_3)X = 0\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \text{ e } y = 0\} = \{(0,0,z), z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{z(0,0,1), z \in \mathbb{R}\} = \langle (0,0,1) \rangle$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x-2y=0 \\ -2x-y=0 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y \\ 4y-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$U_{-1} = \{X \in \mathbb{R}^3 : (A-(-1)I_3)X = 0\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y \text{ e } z = 0\} = \{(y,y,0), y \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{y(1,1,0), y \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1,0) \rangle$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y=0 \\ -2x+2y=0 \\ 4z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 0=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases}$$

$$U_3 = \{X \in \mathbb{R}^3 : (A-3I_3)X = 0\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = -y \text{ e } z = 0\} = \{(-y,y,0), y \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{y(-1,1,0), y \in \mathbb{R}\} = \langle (-1,1,0) \rangle$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x-2y=0 \\ -2x-2y=0 \\ 5z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ z=0 \end{cases}$$

Dividir cada vetor pela sua norma:

$$\frac{(0,0,1)}{\|(0,0,1)\|}=(0,0,1),\quad \frac{(1,1,0)}{\|(1,1,0)\|}=\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},0\right) \text{ e } \frac{(-1,1,0)}{\|(1,1,0)\|}=\left(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},0\right)$$

Construir $P=\begin{bmatrix}0 & 1/\sqrt2 & -1/\sqrt2\\ 0 & 1/\sqrt2 & 1/\sqrt2\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ e $D=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{bmatrix}$.

Mudança de variável $X=P\hat X$ onde $\hat X=\begin{bmatrix}\hat x\\ \hat y\\ \hat z\end{bmatrix}$

e calcular $\hat B = BP = [0\ 0\ 4]\begin{bmatrix}0 & 1/\sqrt2 & -1/\sqrt2\\ 0 & 1/\sqrt2 & 1/\sqrt2\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}=[4\ 0\ 0]$

Assim, $X^TAX+BX+1=0 \Leftrightarrow \hat X^T D\hat X+\hat B\hat X+1=0$

$$\Leftrightarrow [\hat x\ \hat y\ \hat z]\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat x\\ \hat y\\ \hat z\end{bmatrix}+[4\ 0\ 0]\begin{bmatrix}\hat x\\ \hat y\\ \hat z\end{bmatrix}+1=0$$

$$\Leftrightarrow 2\hat x^2-\hat y^2+3\hat z^2+4\hat x+1=0$$

Completar quadrado:

$$\Leftrightarrow 2\left(\hat x^2+2\hat x+\left(\frac22\right)^2-\left(\frac22\right)^2\right)-\hat y^2+3\hat z^2+1=0$$

$$\Leftrightarrow 2(\hat x^2+2\hat x+1^2)-\hat y^2+3\hat z^2-2+1=0$$

$$\Leftrightarrow 2\underbrace{(\hat x+1)}_{=\tilde x}{}^2-\hat y^2+3\hat z^2=1 \Leftrightarrow \frac{\tilde x^2}{1/2}-\hat y^2+\frac{\hat z^2}{1/3}=1$$

hiperbolóide de uma folha

6

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&\cdots&n\\2&3&4&\cdots&n+1\\3&4&5&\cdots&n+2\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ n&n+1&n+2&\cdots&2n-1\end{bmatrix}$$

Queremos mostrar que: $\boxed{|A|=0} \Leftrightarrow \boxed{n\geq 3}$

Ou seja temos de mostrar duas implicações: $\boxed{|A|=0}\Rightarrow\boxed{n\geq3}$ e $\boxed{n\geq3}\Rightarrow\boxed{|A|=0}$.

$\boxed{n\geq3}\Rightarrow\boxed{|A|=0}$ Vamos assumir que $n\geq3$ e chegar à conclusão que isso implica que $|A|=0$.

Por exemplo, se $n=3$ temos

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{vmatrix}\underset{\substack{L_2=L_2-2L_1\\L_3=L_3-3L_1}}{=}\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\0&-2&-4\end{vmatrix}\underset{(L_3=L_3-2L_2)}{=}\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\0&0&0\end{vmatrix}=0$$ porque a L3 é nula!

Por exemplo, se $n=4$ temos

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{vmatrix}\underset{\substack{L_2=L_2-2L_1\\L_3=L_3-3L_1}}{=}\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&-2&-4&-6\\4&5&6&7\end{vmatrix}\underset{(L_3=L_3-2L_2)}{=}\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&0&0&0\\4&5&6&7\end{vmatrix}=0$$ porque a L3 é nula!

Seja lá qual for o $n \geq 3$ vamos ter sempre que a $L_3 = 2L_2 - L_1$!

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 = L_2 - 2L_1 \\ L_3 = L_3 - 3L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & -1 & -2 & \cdots & n+1-2n \\ 0 & -2 & -4 & \cdots & n+2-3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & -1 & -2 & \cdots & -n+1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 \end{vmatrix}$$

$(L_3 = L_3 - 2L_2)$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & -1 & -2 & \cdots & -n+1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2n+2-2(-n+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & -1 & -2 & \cdots & -n+1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 \end{vmatrix}$$

Como a L_3 é nula então $|A| = 0$. (Propriedade 2 do Cap. 3.1. Slide 8)

Portanto se $n \geq 3 \Rightarrow |A| = 0$. E se $n < 3$?

Se $n = 1$, $|A| = |1| = 1 \neq 0$

Se $n = 2$, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0$

Ou seja, se $n < 3 \Rightarrow |A| \neq 0$ (que é equivalente a $\boxed{|A| = 0} \Rightarrow \boxed{n \geq 3}$)

Assim, provamos que $|A| = 0$ se e só se $n \geq 3$.

contrapositiva
$A \Rightarrow B$
é equivalente a
não $B \Rightarrow$ não A