Folha Prática 2

Atenção: Estas notas não constituem uma resolução formal e rigorosa dos exercícios das Folhas Práticas. Os exercícios com um grau de dificuldade acrescido encontram-se assinalados com ($\star$).

Última atualização: 28 de outubro de 2025

Notas sobre os exercícios: 1(a), 1(b), 1(c), 2(c)i., 2(c)iii. 2(d)i., 2(d)ii, 2(e), 4(c), 5(e), 6, 9(d), 14, 18(b), 19(b), 21, 24(b) e 24(f).

1(a). $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y = 0 \text{ e } z = 1\} = \{(-2,1,1),(4,-2,1),\ldots\}$

S é um subespaço de $\mathbb{R}^3$?

- $(0,0,0) \in S$? Não, porque os vetores que estão no conjunto S têm de ter a terceira coordenada igual a 1 e o vetor nulo, $(0,0,0)$, tem a terceira coordenada igual a 0 ($0 \neq 1$).

Assim, S não é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

1(b). Um vetor ser colinear a outro quer dizer que é múltiplo desse vetor. Assim,

$$\begin{aligned} S &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \text{ é colinear a } (1,2,3)\} \\ &= \{\alpha(1,2,3) : \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(0,0,0),(1,2,3),(-1,-2,-3),(2,4,6),\ldots\} \end{aligned}$$

S é um subespaço de $\mathbb{R}^3$?

- $(0,0,0) \in S$? Sim, porque o vetor nulo de $\mathbb{R}^3$ é múltiplo de $(1,2,3)$, isto é, $(0,0,0) = 0(1,2,3)$.
- Seja $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ temos que os vetores $\alpha(1,2,3)$ e $\alpha'(1,2,3)$ são vetores que estão no conjunto S. Será que a soma destes vetores é ainda um vetor em S?

$$\begin{aligned} \alpha(1,2,3) + \alpha'(1,2,3) &= (\alpha, 2\alpha, 3\alpha) + (\alpha', 2\alpha', 3\alpha') \\ &= (\alpha + \alpha', 2\alpha + 2\alpha', 3\alpha + 3\alpha') \\ &= ((\alpha+\alpha') \times 1, (\alpha+\alpha') \times 2, (\alpha+\alpha') \times 3) \\ &= \underbrace{(\alpha+\alpha')}_{\in \mathbb{R}}(1,2,3) \ \in S \end{aligned}$$

  Assim, S é fechado para a soma, isto é, dados dois vetores múltiplos/colineares a $(1,2,3)$ a sua soma continua a ser um vetor múltiplo de $(1,2,3)$.
- Seja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ temos que o vetor $\alpha(1,2,3) \in S$. Será que $\beta\alpha(1,2,3) \in S$? Sim, porque o vetor $\underbrace{\beta\alpha}_{\in \mathbb{R}}(1,2,3)$ é colinear a $(1,2,3)$. Logo, S é fechado para a multiplicação por escalar.

Portanto, S é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

1(c). ($\star$) O conjunto S das funções reais de variável real que são pares é:

$$\boxed{S = \{f \text{ é uma função real} : f \text{ é par}\} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = f(-x)\}}$$

S é um subespaço vetorial das funções reais?

- O elemento neutro das funções reais é a função nula $N(x) = 0$ que envia qualquer número real x para 0.
  A função nula é par, isto é, $N \in S$? Sim, porque $N(x) = 0 = N(-x)$. Seja lá qual for o número x, a função nula envia tanto x como $-x$ para 0, assim a função nula é par.
- Sejam f, $g \in S$, temos que f e g são funções pares, ou seja, $f(x) = f(-x)$ e $g(x) = g(-x)$. Será que a soma de duas funções pares é ainda uma função par? Será que $(f+g) \in S$?

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) && \text{pelas propriedades das funções reais} \\ &= f(-x) + g(-x) && f \text{ e } g \text{ são pares temos } f(x) = f(-x) \text{ e } g(x) = g(-x) \\ &= (f+g)(-x) && \text{propriedade das funções reais} \end{aligned}$$

  Assim, $(f+g)(x) = (f+g)(-x)$ logo $(f+g)$ é uma função par e por isso está em S!

– Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in S$ uma função par. Será que $(\alpha f) \in S$? Isto é, será que (αf) é par?

$$\begin{aligned}(\alpha f)(x) =& \alpha\, f(x) && \text{pelas propriedades das funções reais}\\ =& \alpha\, f(-x) && \text{como } f \text{ é par temos que } f(x) = f(-x)\\ =& (\alpha f)(-x) && \text{propriedade das funções reais}\end{aligned}$$

Assim, $(\alpha f)(x) = (\alpha f)(-x)$ logo (αf) é par e por isso pertence a S.

Portanto, S é um subespaço vetorial para as funções reais porque contêm o elemento neutro (a matriz nula), é fechado para a soma e para a multiplicação por um escalar.

2(c)i. No espaço vetorial $\mathcal{P}_2$ dos polinómios em x com grau não superior a 2, o conjunto S de polinómios $a^2 + bx + c$ com $c = 0$ é o conjunto de polinómios com grau não superior a 2 cujo coeficiente do termo de grau 0 é igual a 0.

$$\boxed{S \;=\; \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 \,|\, c = 0\} \;=\; \{ax^2 + bx \,|\, a, b \in \mathbb{R}\} \;=\; \{x^2, 2x^2, x^2 + x, x, \ldots\}}$$

Por exemplo, temos que $x^2 + 3 \notin S$ porque não conseguimos arranjar números reais a e b tal que $ax^2+bx = x^2+3$, por outras palavras, o coeficiente do termo de grau 0 é 3 e não 0 como queriamos!

S é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2$?

– Será que 0 (polinómio nulo) $\in S$? Isto é, será que existe $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $ax^2 + bx = 0$? Sim, quando $a = b = 0$ temos que $ax^2 + bx \;=\; 0x^2 + 0x \;=\; 0 \in S$.

– Será que S é fechado para a soma? Dados quaisqueres dois polinómios de S, a sua soma ainda está em S? Isto é, para quaisqueres ax^2+bx, $a'x^2+b'x \in S$, será que $ax^2+bx+ a'x^2+b'x \in S$?

$$ax^2 + bx + a'x^2 + b'x \;=\; \underset{\in\mathbb{R}}{(a + a')}x^2 + \underset{\in\mathbb{R}}{(b + b')}x \in S$$

Sim, a soma de dois polinómios de S é ainda um polinómio de S porque dados dois polinómios de grau não superior a 2, cujo termo de grau 0 tem coeficiente igual a 0, a sua soma continua a ser um polinómio de grau não superior a 2 cujo termo de grau 0 tem coeficiente igual a 0. [i]

– Será que S é fechado para a multiplicação por um escalar? Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $ax^2 + bx \in S$, será que $\alpha(ax^2 + bx) \in S$?

$$\alpha(ax^2 + bx) \;=\; \underset{\in\mathbb{R}}{(\alpha a)}x^2 + \underset{\in\mathbb{R}}{(\alpha b)}x \in S$$

Sim, a multiplicação por um escalar de um polinómio em S é ainda um polinómio em S. Dado um número real qualquer α e um polinómio de grau não superior a 2, cujo termo de grau 0 tem coeficiente igual a 0, o produto desse polinómio por α continua a ser um polinómio de grau não superior a 2 cujo coeficiente do termo de grau 0 é ainda igual a 0.[ii]

Assim, S é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2$ porque contêm o elemento neutro, é fechado para a soma e é fechado para a multiplicação por escalar.

2(c)iii. No espaço vetorial $\mathcal{P}_2$ dos polinómios em x com grau não superior a 2, o conjunto S de polinómios $a^2 + bx + c$ com $bc = 0$ é o conjunto de polinómios com grau não superior a 2 cujo coeficiente do termo de grau 1vezes o coeficiente do termo de grau 0 é igual a 0.

$$\begin{aligned}S \;&=\; \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 \,|\, bc = 0\} \;=\; \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 \,|\, b = 0 \text{ ou } c = 0\}\\ &=\; \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 \,|\, b = 0\} \cup \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 \,|\, c = 0\}\\ &=\; \{x,\, 1\,, x^2 + x,\, x^2 + 1\,, x^2 \;\ldots\}\end{aligned}$$

Por exemplo, temos que $x^2 + 2x + 3 \notin S$ porque o produto do coeficiente do termo de grau 2 (o 1) com o coeficiente do termo de grau 0 (o 3) dá 6 que é diferente de 0. Em contrapartida o polinómio $1 \;=\; 0x^2 + 0x + 1$ pertence ao conjunto S porque o coeficiente do termo de grau 1 é igual a 0.

S é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2$?

[i] Por exemplo, x^2 e x são elementos de S, e a sua soma $x^2 + x$ é ainda um elemento de S, o termo de grau 0 não deixa de ser diferente de 0. Atenção que um exemplo não é o mesmo que uma prova!

[ii] Por exemplo, $2x^2$ é um polinómio em S e se o multiplicarmos pelo número real 3 temos o polinómio $6x^2$ que continua a ser um polinómio em S.

- Será que o polinómio nulo pertence a S, $0 \in S$? Isto é, será que o coeficiente do termo de grau 1 ou o do termo de grau 0 do polinómio nulo é igual a 0?

  Sim, o polinómio nulo tem todos os coeficientes iguais a 0. É de notar que o polinómio nulo pode ser escrito como $0 = 0x^2 + \underbrace{0}_{b}x + \underbrace{0}_{c}$ e assim temos que $bc = 0 \times 0 = 0$.

- Será que S é fechado para a soma? Dados quaisqueres dois polinómios de S, a sua soma ainda está em S? Isto é, para quaisqueres polinómios ax^2+bx+c, $a'x^2+b'x+c' \in S$ em que $bc = 0$ e $b'c' = 0$ será que: $ax^2 + bx + c + a'x^2 + b'x + c' = (a + a')x^2 + (b + b')x + (c + c')$ será que ainda temos que $(b + b') \times (c + c') = 0$?

  (Neste caso, isto não se verifica. O que acontece é que conseguimos arranjar um polinómio em que $b = 0$ e $c \neq 0$, e outro em que $b' \neq 0$ e $c' = 0$. Ambos estão em S, porque $bc = 0$ e $b'c' = 0$, mas quando os somamos como $b+b' \neq 0$ e $c+c' \neq 0$ obtemos que $(b+b') \times (c+c') \neq 0$ e assim o polinómio resultante já não pertence a S. O truque está em notar que o conjunto S pode ser escrito como a união de dois subconjuntos (não mutuamente exclusivos): os polinómios cujo coeficiente do termo de grau 1 é nulo ($b = 0$), e os polinómios cujo coeficiente do termo de grau 0 é nulo ($c = 0$). Assim, conseguimos encontrar um polinómio que está no primeiro conjunto mas não no segundo, e outro que está no segundo mas não no primeiro. Quando os somamos, o resultado não pertence a nenhum dos dois subconjuntos. Como esta propriedade falha, basta apresentarmos um contraexemplo: se não se verifica para alguns polinómios, então a propriedade não se verifica em geral. O exercício 2(d)(ii) tem um raciocínio semelhante, mas usa matrizes.)

  Não! Por exemplo, temos que $x^2 + 1 \in S$, porque $b = 0$ e $c = 1$ assim $bc = 0$, e $x^2 + x \in S$, porque $b' = 1$ e $c' = 0$ assim $b'c' = 0$. Mas a sua soma não é um polinómio de S,

  $$(x^2 + 1) + (x^2 + x) = 2x^2 + 1x + 1 \notin S$$

  porque $(b + b') \times (c + c') = 1 \times 1 = 1 \neq 0$.

- (Já agora, S é fechado para a multiplicação por escalar, pois se $bc = 0$, ao multiplicar por qualquer escalar/número real o resultado continua a dar 0. Mas não vale a pena estarem a verificar esta propriedade: como S não é fechado para a soma, o exercício termina logo com o contraexemplo acima).

Assim, como não é fechado para a soma, S não é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2$.

2(d)i. No espaço $M_{n\times n}$ das matrizes quadradas de ordem n, o conjunto S das matrizes simétricas[iii] é:

$$\boxed{S = \{A \in M_{n\times n} : A \text{ é simétrica}\} = \{A \in M_{n\times n} : A = A^T\}}$$

S é um subespaço de $M_{n\times n}$?

- $O_{n\times n}$ (matriz nula de ordem n) $\in S$? Sim, porque $O = O^T$, isto é, a matriz nula é simétrica porque é igual à sua transposta.

- Sejam A e B duas matrizes $n \times n$ simétricas, ou seja, $A = A^T$ e $B = B^T$. Assim, $A, B \in S$. Será que $A+B \in S$? Será que $A+B$ é ainda uma matriz simétrica, isto é, $(A+B) = (A+B)^T$?

  $$\begin{aligned}(A + B)^T =& A^T + B^T && \text{pela Prop 5 slide 14 Cap.1.1}\\ =& A + B && \text{como } A \text{ e } B \text{ são simétricas temos que } A = A^T \text{ e } B = B^T\end{aligned}$$

  Logo, $A + B \in S$, a soma de duas matrizes simétricas é ainda uma matriz simétrica.

- Dado um escalar qualquer, $\alpha \in \mathbb{R}$, e uma matriz quadrada de ordem n simétrica, $A \in S$. Será que αA é ainda uma matriz simétrica? Isto é, será que $\alpha A = (\alpha A)^T$?

  $$\begin{aligned}(\alpha A)^T =& \alpha A^T && \text{pela Prop. 9 slide 14 Cap.1.1}\\ =& \alpha A && \text{como } A \text{ é simétrica temos que } A = A^T\end{aligned}$$

  Logo, $\alpha A \in S$, a multiplicação por um escalar de uma matriz simétrica é ainda uma matriz simétrica.

Assim, S é um subespaço de $M_{n\times n}$ porque contêm o elemento neutro (a matriz nula), é fechado para a soma e fechado para a multiplicação por um escalar.

[iii] Ver a definição de matriz simétrica no Cap.1 slide 12

2(d)ii. No espaço $M_{n\times n}$ das matrizes quadradas de ordem n, o conjunto S das matrizes triangulares (superiores e inferiores) é:

$$\begin{aligned} S &= \{A \in M_{n\times n} \,:\, A \text{ é triangular}\} \\ &= \{A \in M_{n\times n} \,:\, A \text{ é triangular superior}\} \cup \{A \in M_{n\times n} \,:\, A \text{ é triangular inferior}\} \end{aligned}$$

em que uma matriz é triangular superior se abaixo da diagonal principal só temos zeros e é triangular inferior se acima da diagonal principal só temos zeros (ver definições do Cap.1 slide 11).

S é um subespaço de $M_{n\times n}$?

- A matriz nula $O_{n\times n}$ está no conjunto S? Por outras palavras, a matriz nula é uma matriz triangular? Sim, a matriz nula é uma matriz triangular superior: porque abaixo da diagonal principal só temos zeros e também é uma matriz triangular inferior porque acima da diagonal principal só temos zeros.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{O_{n\times n} \text{ é triangular superior}} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{O_{n\times n} \text{ é triangular inferior}}$$

- S é fechado para a soma? Dadas duas matrizes triangulares a soma é sempre uma matriz triangular? Se somarmos duas matrizes triangulares superiores é verdade que obtemos uma matriz triangular superior:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{\in S} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & 0 & a'_{23} & \dots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{\in S} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a_{12}+a'_{12} & a_{13}+a'_{13} & \dots & a_{1n}+a'_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23}+a'_{23} & \dots & a_{2n}+a'_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{3n}+a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{\in S}$$

E se somarmos duas matrizes triang. inf. é verdade que obtemos uma matriz triangular inf.:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{\in S} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a'_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a'_{31} & a'_{32} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & a'_{n3} & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{\in S} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21}+a'_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31}+a'_{31} & a_{32}+a'_{32} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+a'_{n1} & a_{n2}+a'_{n2} & a_{n3}+a'_{n3} & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{\in S}$$

Mas, e se somarmos uma matriz triangular superior com uma inferior? Não obtemos necessariamente uma matriz triangular. Por exemplo,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{\in S \text{ porque é triang. sup.}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{\in S \text{ porque é triang. inf.}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{\notin S \text{ porque não é triangular!}}$$

Assim, S não é fechado para a soma e por isso S não é um subespaço de $M_{n\times n}$.

2(e). ($\star$) Dada uma matriz qualquer com ordem $m\times n$, $A \in M_{m\times n}$, será que o conjunto

$$\begin{aligned} S &= \{AX \,:\, X \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{B \in \mathbb{R}^m \,:\, \exists X \in \mathbb{R}^n,\, B = AX\} \subseteq \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

é um subespaço vetorial?

(Nota: basicamente o conjunto S são todos os vetores B tal que existe um X que multiplicado mais à direita por A dá o vetor B, ou seja, para provarmos que um vetor $B \in \mathbb{R}^m$ pertence a S temos de encontrar $X \in \mathbb{R}^n$ tal que $B = AX$.

Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ temos que S é:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ldots \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \ldots \right\}$$

Assim, dado um vetor qualquer $X \in \mathbb{R}^n$, o vetor que resulta da multiplicação AX é um vetor que está em S.)

– $O_{m\times 1}$ (o vetor nulo) $\in S$? Sim, porque existe $X \in \mathbb{R}^n$ tal que $AX = O_{m\times 1}$. Seja $X = O_{n\times 1}$ temos que $AO_{n\times 1} = O_{m\times 1}$.
– Dados dois vetores de $\mathbb{R}^m$ que estão no conjunto S será que a soma desses vetores é ainda um vetor que está no conjunto S? Por outras palavras, para quaisqueres vetores $B = AX$, $B' = AX'$ será que $B + B' \in S$?

$$B + B' = AX + AX' = A(X + X')$$

Assim, existe um vetor, o $X + X'$, que multiplicado mais à direita de A dá o vetor $B + B'$. Logo, $B + B' \in S$. S é fechado para a soma.

– Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e dado um vetor de $B \in S$, isto é existe X tal que $AX = B$. Será que αB ainda é um vetor de S? Para mostrar que $\alpha B \in S$ temos de encontrar um X' tal que $AX' = \alpha B$.

$$\alpha\, B \underset{\substack{B\in S \text{ i.e.,} \\ B=AX}}{=} \alpha AX = A(\alpha X)$$

Assim, o vetor αX quando multilplicado mais à direita de A dá o vetor αB. Portanto, o vetor $\alpha B \in S$. S é fechado para a multiplicação por escalar.

S contêm o elemento neutro de $\mathbb{R}^m$, é fechado para a soma e para a multiplicação por escalar e por isso S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$.

4(c). Queremos escrever $-t^2 + t + 4$ como combinação linear de $t^2 + 2t + 1$, $t^2 + 3$ e $t - 1$, ou seja, queremos encontrar $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{aligned} -t^2 + t + 4 &= \alpha_1(t^2 + 2t + 1) + \alpha_2(t^2 + 3) + \alpha_3(t - 1) \\ &= \alpha_1 t^2 + 2\alpha_1 t + \alpha_1 + \alpha_2 t^2 + 3\alpha_2 + \alpha_3 t - \alpha_3 \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2)t^2 + (2\alpha_1 + \alpha_3)t + (\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3) \end{aligned}$$

Do lado direito e do lado esquerdo temos dois polinómios que queremos que sejam iguais! Portanto queremos que o coeficiente do t^2 seja igual, $\alpha_1 + \alpha_2 = -1$, o coeficiente do t seja igual, $2\alpha_1 + \alpha_3 = 1$, e o coeficiente do termo de grau 0 seja igual, $\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 4$.

$$-1t^2 + +1t + 4 = (\alpha_1 + \alpha_2)t^2 + (2\alpha_1 + \alpha_3)t + (\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 = 2\alpha_1 + \alpha_3 \\ 4 = \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = B$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 = L_2 - 2L_1 \\ L_3 = L_3 - L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 + L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right]$$

Como $car(A) = 2 < car([A|B]) = 3$, o sistema $AX = B$ é impossível o que quer dizer que não conseguimos escrever o polinómio $-t^2 + t + 4$ como combinação linear de $t^2 + 2t + 1$, $t^2 + 3$ e $t - 1$.

6. Temos de determinar um conjunto de geradores para o espaço nulo da matriz A, denotado por $\mathcal{N}(A)$.

$$\mathcal{N}(A) = \{X \in \mathbb{R}^4 : AX = 0\}$$

Primeiro vamos começar por determinar os vetores $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ que estão no espaço nulo, isto é, são enviados por A no vetor nulo.

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vou usar o método de Guass-Jordan para resolver o sistema

$$[A|0] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2=L_2-L_1 \\ L_3=L_3-2L_1 \\ L_4=L_4-L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$$
$$\underset{\substack{L_2=L_2/2 \\ L_4=L_4-L_3}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3=L_3-L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [E|0]$$

Assim,

$$AX = 0 \Leftrightarrow EX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 - x_4 \end{cases}$$

Daqui concluimos que todos os vetores $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ tal que $x_1 = -x_3$ e $x_2 = -x_3 - x_4$ são enviados por A no vetor nulo, ou seja, estão no espaço nulo de A.

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A) &= \{X \in \mathbb{R}^4 \,:\, AX = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x_1 = -x_3 \text{ e } x_2 = -x_3 - x_4\} \\ &\quad \text{Vamos substituir } x_1 \text{ e } x_2 \\ &= \{(-x_3, -x_3 - x_4, x_3, x_4),\ x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &\quad \text{Vamos separar aquele vetor em 2 vetores: um que tem o } x_3 \text{ e outro que tem o } x_4 \\ &= \{(-x_3, -x_3, x_3, 0) + (0, -x_4, 0, x_4),\ x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &\quad \text{Puxar o } x_3 \text{ e } x_4 \text{ para trás} \\ &= \{x_3(-1, -1, 1, 0) + x_4(0, -1, 0, 1),\ x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\text{Vetores de } \mathbb{R}^4 \text{ que são C.L. de } (-1, -1, 1, 0) \text{ e } (0, -1, 0, 1)\} \\ &= \langle (-1, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 1) \rangle \end{aligned}$$

O espaço nulo de A são todos os vetores em $\mathbb{R}^4$ que são C.L. de $(-1, -1, 1, 0)$ e $(0, -1, 0, 1)$. Portanto, o conjunto $\{(-1, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 1)\}$ é um conjunto gerador de $\mathcal{N}(A)$.

5(e). Estamos no espaço vetorial $\mathcal{P}_2$ dos polinómios em t com grau não superior a 2. Qual é o espaço gerado pelo conjunto $\{t^2 + 1, t^2 + t, t + 1\}$? O espaço gerado pelos polinómios indicados é denotado por $\langle t^2 + 1, t^2 + t, t + 1 \rangle$ e consiste em todos os polinómios da forma $at^2 + bt + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, que conseguimos escrever como combinação linear dos polinómios $t^2 + 1$, $t^2 + t$ e $t + 1$?

Nós apenas queremos saber quais são os polinómios $at^2 + bt + c$ que conseguimos escrever à custa dos polinómios $t^2 + 1$, $t^2 + t$ e $t + 1$. Isto implica que temos de ver quando é que o seguinte sistema é possível:

$$at^2 + bt + c = \alpha_1(t^2 + 1) + \alpha_2(t^2 + t) + \alpha_3(t + 1), \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$$

Nestes exercícios as nossas incógnitas são a, b e c, não nos interessa saber quem são α_1, α_2 e α_3! De novo, nós queremos saber quais são os polinómios que são combinação linear de $t^2 + 1$, $t^2 + t$ e $t + 1$; não estamos interessados em como é que são combinação linear daqueles polinómios, só quais é que são.

O espaço gerado pelos polinómios indicados é:

$$\begin{aligned}
\langle t^2+1, t^2+t, t+1\rangle =& \{at^2+bt+c \in \mathcal{P}_2 \,:\, at^2+bt+c \;=\; \alpha_1(t^2+1)+\alpha_2(t^2+t)+\alpha_3(t+1),\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}\} \\
& \text{Do lado direito da equação vamos agrupar os termos } t^2,\ t \text{ e os termos independentes} \\
=& \{at^2+bt+c \in \mathcal{P}_2 \,:\, at^2+bt+c = (\alpha_1+\alpha_2)t^2+(\alpha_2+\alpha_3)t+(\alpha_1+\alpha_3),\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}\} \\
& \text{Quero que as cores/coeficientes do lado esquerdo sejam iguais às do lado direito} \\
=& \left\{ at^2+bt+c \in \mathcal{P}_2 \,:\, \begin{cases} (\alpha_1+\alpha_2) = a \\ (\alpha_2+\alpha_3) = b \\ (\alpha_1+\alpha_3) = c \end{cases},\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R} \right\} \\
& \text{Vamos escrever o sistema com matrizes porque somos fortes} \\
=& \left\{ at^2+bt+c \in \mathcal{P}_2 \,:\, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{\text{Quando é que este sistema é possível?}},\quad \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

O sistema[iv]:

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

é possível se e só se $car(A) = car([A|B])$. Vamos escalonar a matriz ampliada $[A|B]$:

$$[A|B] \;=\; \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 & c \end{array}\right] \underset{L_3=L_3-L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & -1 & 1 & c-a \end{array}\right] \underset{L_3=L_3+L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 & c-a+b \end{array}\right]$$

Os pivots estão marcados nesta cor. Temos sempre que $car(A) = car([A|B])$, ou seja, o sistema $AX = B$ é sempre possível. Logo, seja lá qual for o polinómio $at^2+bt+c \in \mathcal{P}_2$ conseguimos sempre escrevê-lo como combinação linear dos polinómios t^2+1, t^2+t e $t+1$. Portanto, não existe um único polinómio em $\mathcal{P}_2$ que não pode ser escrito como combinação linear dos polinómios indicados, isso é o mesmo que dizer que o espaço gerado por esses polinómios corresponde a todos os polinómios em t de grau não superior a 2.

$$\langle t^2+1, t^2+t, t+1\rangle \;=\; \mathcal{P}_2$$

9(d). Os polinómios $2t^2+1$, $t-2$ e $t+3$ são linearmente independentes se e só se a única forma de escrever o polinómio nulo 0 à custa desses polinómios é se os multiplicarmos por 0. Por outras palavras, se o seguinte sistema $0 \;=\; \alpha_1(2t^2+1)+\alpha_2(t-2)+\alpha_3(t+3)$ é possível determinado ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$) então os polinómios são linearmente independentes, se for possível indeterminado os polinómios são linearmente dependentes. Vamos resolver o sistema:

$$\begin{aligned}
& 0 \;=\; \alpha_1(2t^2+1)+\alpha_2(t-2)+\alpha_3(t+3) \\
& \text{Usando distribuição} \\
\Leftrightarrow\ & 0 \;=\; 2\alpha_1 t^2+\alpha_1+\alpha_2 t-2\alpha_2+\alpha_3 t+3\alpha_3 \\
& \text{Vamos agrupar tudo o que está a mulitplicar por } t^2 \text{ e } t \\
\Leftrightarrow\ & 0 \;=\; (2\alpha_1)t^2+(\alpha_2+\alpha_3)t+(\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3) \\
& \text{O polinómio nulo pode ser escrito como } 0 = 0t^2+0t+0 \\
\Leftrightarrow\ & 0t^2+0t+0 \;=\; (2\alpha_1)t^2+(\alpha_2+\alpha_3)t+(\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3) \\
& \text{Queremos que as cores/coeficientes do lado esquerdo sejam iguais às do lado direito} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} 0 = 2\alpha_1 \\ 0 = \alpha_2+\alpha_3 \\ 0 = \alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = 0
\end{aligned}$$

[iv] Reparem que o que fazemos com os vetores também fazemos aqui: os coeficientes dos polinómios estão nas colunas da matriz A. Por exemplo, o primeiro polinómio t^2+0t+1 tem coeficientes $1, 0, 1$ o que corresponde à primeira coluna de A...

(Reparem que o que fazemos com os vetores também fazemos aqui: os coeficientes dos polinómios estão nas colunas da matriz A. Por exemplo, o primeiro polinómio é $2t^2 + 0t + 1$ tem coeficientes $2, 0, 1$ o que corresponde à primeira coluna da matriz A.)

Usando o método de Guass-Jordan para resolver o sistema $AX = 0$:

$$[A|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right] \underset{L_1 = L_1/2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\underset{L_3 = L_3 + 2L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3/5}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2 - L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = [C|0]$$

Como $car(A) = car([A|0]) = 3 = \text{n}^{\text{o}}$ de colunas de A temos que o sistema é possível determinado, ou seja, os polinómios são l.i..

$$AX = 0 \Leftrightarrow CX = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases} \quad \text{Poss. Det., são l.i.}$$

14. [v] $K = \{(a^2, 0, 1), (0, a, 2), (1, 0, 1)\}$

Qualquer base de $\mathbb{R}^3$ é um conjunto com 3 vetores, porque a dimensão de $\mathbb{R}^3$ é 3, que é linearmente independente e gera $\mathbb{R}^3$. Como K tem exatamente 3 vetores e dim $\mathbb{R}^3 = 3$ basta ver para que valores de a é que K é um conjunto l.i. <u>ou</u> para que valores de a é que K gera $\mathbb{R}^3$ que automaticamente satisfaz a outra condição e forma uma base de $\mathbb{R}^3$[vi].

<u>**Para que valores de a é que K é l.i.?**</u> O conjunto K é l.i. se

$$\alpha_1(a^2, 0, 1) + \alpha_2(0, a, 2) + \alpha_3(1, 0, 1)) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = B$$

implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ (ver a definição do Cap.2 slide 9).

Ou seja, isto é o mesmo que dizer que o conjunto K é l.i. quando o sistema acima $AX = B$ é possível e determinado (tem uma única solução quando os α's são todos iguais a 0). O sistema $AX = B$ é possivel e determinado se e só se $car(A) = car([A|B]) = \text{n}^{\text{o}}$ de colunas de $A = 3$.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} a^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - a^2 L_1}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & -2a^2 & 1 - a^2 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 + 2aL_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - a^2 & 0 \end{array}\right] \text{(escalonada)}$$

Assim, temos $car(A) = car([A|B]) = 3$ se e só se o pivot da L_2 é o a e o pivot da L_3 é o $1 - a^2$, ou seja, $a \neq 0$ e $1 - a^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ e $a \neq \pm 1$.

<u>**Para que valores de a é que K gera $\mathbb{R}^3$?**</u> O conjunto K gera $\mathbb{R}^3$ se for possível escrever qualquer vetor (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ como combinação linear dos vetores de K.

Vamos ver para que valores de a é que K gera $\mathbb{R}^3$.

$$\alpha_1(a^2, 0, 1) + \alpha_2(0, a, 2) + \alpha_3(1, 0, 1)) = (x, y, z) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow CX = D$$

(Nesta parte, queremos determinar para que valores de a é possível escrever todos os vetores de $\mathbb{R}^3$ como combinação linear dos vetores de K. Ou seja, queremos saber <u>quando</u> é que o sistema é possível, <u>não nos interessa como isso é feito</u>, isto é, os valores específicos dos α's não importam.)

[v] Este exercício é semelhante à questão 4 do Teste 1 de 2024/2025.
[vi] Isto é o Corolário do Cap.2 slide 12

$CX = D$ é possível se e só se $car(C) = car([C|D])$. Vamos escalonar a matriz ampliada $[C|D]$[vii].

$$[C|D] = \left[\begin{array}{ccc|c} a^2 & 0 & 1 & x \\ 0 & a & 0 & y \\ 1 & 2 & 1 & z \end{array}\right] \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & z \\ 0 & a & 0 & y \\ a^2 & 0 & 1 & x \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - a^2 L_1}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & z \\ 0 & a & 0 & y \\ 0 & -2a^2 & 1-a^2 & x - a^2 z \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 + 2aL_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & z \\ 0 & a & 0 & y \\ 0 & 0 & 1-a^2 & x - a^2 z + 2ay \end{array}\right] \underset{L_2 = \frac{L_2}{a},\, a \neq 0}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & z \\ 0 & 1 & 0 & y/a \\ 0 & 0 & 1-a^2 & x - a^2 z + 2ay \end{array}\right] \underset{L_3 = \frac{L_2}{1-a^2},\, a \neq \pm 1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & z \\ 0 & 1 & 0 & y/a \\ 0 & 0 & 1 & (x - a^2 z + 2ay)/1-a^2 \end{array}\right]$$

Como a $car(C) = car([C|D])$ temos que o sistema $CX = D$ é sempre possível quando $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Vamos ver o que acontece quando $a = 0$, $a = 1$ e $a = -1$:

Se $a = 0$ temos que

$$[C|D] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 1 & 2 & 1 & z \end{array}\right] \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & x \end{array}\right] \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & y \end{array}\right]$$

o sistema $CX = D$ é possível se e só se $car(C) = car([C|D]) = 2$, isto é, $y = 0$! Portanto, se $a = 0$ o conjunto K gera apenas os vetores (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ cuja segunda coordenada é nula. Neste caso, o espaço gerado por K não é $\mathbb{R}^3$, $\langle K \rangle \neq \mathbb{R}^3$, e por isso não pode ser uma base de $\mathbb{R}^3$.

Se $a = 1$ temos que

$$[C|D] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 1 & 2 & 1 & z \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 2 & 0 & z - x \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - 2L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & z - x - 2y \end{array}\right]$$

o espaço gerado por K são os vetores de $\mathbb{R}^3$ tal que $z - x - 2y = 0$. Assim, para $a = 1$, $\langle K \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - x - 2y = 0\} \neq \mathbb{R}^3$ e por isso não pode ser uma base de $\mathbb{R}^3$.

De um modo semelhante, se $a = -1$

$$[C|D] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & -1 & 0 & y \\ 1 & 2 & 1 & z \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & -1 & 0 & y \\ 0 & 2 & 0 & z - x \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 + 2L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & -1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & z - x + 2y \end{array}\right]$$

o espaço gerado por K são os vetores de $\mathbb{R}^3$ tal que $z - x + 2y = 0$. Assim, para $a = -1$, $\langle K \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - x + 2y = 0\} \neq \mathbb{R}^3$.

Assim sabemos que o conjunto K gera todos os vetores de $\mathbb{R}^3$ se e só se $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

Em suma, o conjunto K é uma base de $\mathbb{R}^3$, é l.i. e gera $\mathbb{R}^3$, se e só se $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

(Nota: Como indicado no início, podem usar o Coroláro do slide 12 e verificar apenas quando é que K é linearmente independente ou quando é que K gera $\mathbb{R}^3$. Só precisam de mostrar uma das duas condições, o que vos poupa algum tempo na resolução. Contudo, se utilizarem esse corolário, têm de explicar **muito** bem que compreendem que um conjunto, para ser base de um espaço, tem de ser linearmente independente e gerar o espaço. Caso essa explicação não seja suficientemente detalhada e apenas verifiquem uma das condições, podem perder mais de metade da cotação. Se não se sentirem confiantes com a justificação, é preferível verificar ambas as condições.)

18(b). $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ é uma base de $\mathbb{R}^4$. Queremos escrever as coordenadas do vetor $(2, 1, 0, 0)$ na base $\mathcal{B}$, por outras palavras, queremos escrever o vetor $(2, 1, 0, 0)$ como combinação linear dos vetores da base $\mathcal{B}$. Vamos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} & (2,1,0,0) = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4 \\ \Leftrightarrow & (2,1,0,0) = \alpha_1(1,1,0,0) + \alpha_2(1,0,0,0) + \alpha_3(1,1,1,0) + \alpha_4(1,1,1,1) \\ \Leftrightarrow & (2,1,0,0) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2 \\ \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}$$

[vii] Vou fazer algo semelhante ao exercício 17 da FP1.

(Reparem que os vetores da base $\mathcal{B}$ ficam nas colunas da matriz)

Depois de resolvermos o sistema, o vetor das coordenadas de $(2,1,0,0)$ na base $\mathcal{B}$ é:

$$[(2,1,0,0)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{bmatrix}$$

Usando o método de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&2\\1&0&1&1&1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&0\end{array}\right] \underset{L_2=L_2-L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&2\\0&-1&0&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&0\end{array}\right] \underset{\substack{L_3=L_3-L_4\\ L_1=L_1-L_4}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&0&2\\0&-1&0&0&-1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{array}\right] \underset{L_1=L_1-L_3}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&2\\0&-1&0&0&-1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{array}\right] \underset{L_1=L_1+L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&1\\0&-1&0&0&-1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{array}\right] \underset{L_2=-L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{array}\right]$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&0&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=\alpha_2=1\\ \alpha_3=\alpha_4=0\end{cases}$$

Temos que o vetor $(2,1,0,0)$ é C.L. dos vetores da base $\mathcal{B}$ da seguinte forma[viii]:

$$(2,1,0,0) = \alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\alpha_3X_3+\alpha_4X_4 \Leftrightarrow (2,1,0,0) = 1X_1+1X_2+0X_3+0X_4$$

Logo, o vetor das coordenadas de $(2,1,0,0)$ na base $\mathcal{B}$ é:

$$[(2,1,0,0)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

19(b) $\mathcal{B}_1 = ((1,2,1),(0,2,0),(0,0,-1))$ e $\mathcal{B}_2 = (\underbrace{(1,0,-1)}_{=X_1},\underbrace{(1,1,1)}_{=X_2},\underbrace{(2,3,-1)}_{=X_3})$ são bases de $\mathbb{R}^3$.

A matriz P de mudança da base $\mathcal{B}_1$ para a base $\mathcal{B}_2$ é a matriz cujas colunas são os vetores de $\mathcal{B}_1$ escritos nas coordenadas da base $\mathcal{B}_2$.

$$P = M_{\mathcal{B}_2\leftarrow\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix}|&|&|\\ [(1,2,1)]_{\mathcal{B}_2} & [(0,2,0)]_{\mathcal{B}_2} & [(0,0,-1)]_{\mathcal{B}_2}\\ |&|&|\end{bmatrix}$$

Vamos escrever cada um dos vetores $(1,2,1),(0,2,0)$ e $(0,0,-1)$ à custa dos vetores da base $\mathcal{B}_2$:

$$(1,2,1) = \alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\alpha_3X_3 \Leftrightarrow (1,2,1) = \alpha_1(1,0,-1)+\alpha_2(1,1,1)+\alpha_3(2,3,-1)$$

... resolver o sistema, devem apresentar as contas ...

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1 = -3/5\\ \alpha_2 = 4/5\\ \alpha_3 = 2/5\end{cases} \qquad \text{Assim, } [(1,2,1)]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3/5\\ 4/5\\ 2/5\end{bmatrix}\ \textbf{1ªColuna de } P$$

$$(0,2,0) = \beta_1X_1+\beta_2X_2+\beta_3X_3 \Leftrightarrow (0,2,0) = \beta_1(1,0,-1)+\beta_2(1,1,1)+\beta_3(2,3,-1)$$

... resolver o sistema, devem apresentar as contas ...

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\beta_1 = -6/5\\ \beta_2 = -2/5\\ \beta_3 = 4/5\end{cases} \qquad \text{Assim, } [(0,2,0)]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6/5\\ -2/5\\ 4/5\end{bmatrix}\ \textbf{2ªColuna de } P$$

[viii] Podem e devem confirmar que a seguinte equação está certa

$$(0,0,-1) = \theta_1 X_1 + \theta_2 X_2 + \theta_3 X_3 \Leftrightarrow (0,0,-1) = \theta_1(1,0,-1) + \theta_2(1,1,1) + \theta_3(2,3,-1)$$

... resolver o sistema, devem apresentar as contas ...

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \theta_1 = 1/5 \\ \theta_2 = -3/5 \\ \theta_3 = 1/5 \end{cases} \qquad \text{Assim, } [(0,2,0)]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 \\ -3/5 \\ 1/5 \end{bmatrix} \; \textbf{3ªColuna de } P$$

Logo,

$$P = M_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} -3/5 & -6/5 & 1/5 \\ 4/5 & -2/5 & -3/5 \\ 2/5 & 4/5 & 1/5 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & -6 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

21. Seja $\mathcal{S} = ((-1,1,0),(1,0,1),(0,0,1))$ e $\mathcal{T} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ bases ordenadas. Determine Y_1, Y_2 e Y_3, sabendo que

$$M_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz $M_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{T}}$ é uma matriz de mudança de base da base $\mathcal{T}$ para a base $\mathcal{S}$. As colunas da matriz são os vetores da base $\mathcal{T}$ escritos nas coordenadas da base $\mathcal{S}$, isto é,temos que $[Y_1]_{\mathcal{S}}$ é igual à primeira coluna, $[Y_2]_{\mathcal{S}}$ é igual à segunda coluna e $[Y_3]_{\mathcal{S}}$ é igual à terceira coluna.

$$M_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ [Y_1]_{\mathcal{S}} & [Y_2]_{\mathcal{S}} & [Y_3]_{\mathcal{S}} \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

Sabemos que:

$$[Y_1]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

são as coordenadas do vetor Y_1 na base $\mathcal{S}$. Isso quer dizer que o vetor Y_1 é 1 vez o primeiro vetor da base $\mathcal{S}$, 2 vezes o segundo vetor da base $\mathcal{S}$ e -1 vez o terceiro vetor da base $\mathcal{S}$. Como conhecemos os vetores da base $\mathcal{S}$ conseguimos à custa deles determinar o vetor Y_1.

$$Y_1 = 1\underbrace{(-1,1,0)}_{\substack{1^{\text{o}}\text{vetor} \\ \text{da base } \mathcal{S}}} + 2\underbrace{(1,0,1)}_{\substack{2^{\text{o}}\text{vetor} \\ \text{da base } \mathcal{S}}} - 1\underbrace{(0,0,1)}_{\substack{3^{\text{o}}\text{vetor} \\ \text{da base } \mathcal{S}}} = (-1,1,0) + (2,0,2) + (0,0,-1) = (1,1,1)$$

Também sabemos que:

$$[Y_2]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

são as coordenadas do vetor Y_2 na base $\mathcal{S}$. Isso quer dizer que o vetor Y_2 é 1 vez o primeiro vetor da base $\mathcal{S}$, 1 vez o segundo vetor da base $\mathcal{S}$ e -1 vez o terceiro vetor da base $\mathcal{S}$. Como conhecemos os vetores da base $\mathcal{S}$ conseguimos à custa deles calcular o vetor Y_2.

$$Y_2 = 1\underbrace{(-1,1,0)}_{\substack{1^{\text{o}}\text{vetor} \\ \text{da base } \mathcal{S}}} + 1\underbrace{(1,0,1)}_{\substack{2^{\text{o}}\text{vetor} \\ \text{da base } \mathcal{S}}} - 1\underbrace{(0,0,1)}_{\substack{3^{\text{o}}\text{vetor} \\ \text{da base } \mathcal{S}}} = (-1,1,0) + (1,0,1) + (0,0,-1) = (0,1,0)$$

Finalmente, sabemos que:

$$[Y_3]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

são as coordenadas do vetor Y_3 na base $\mathcal{S}$. Isso quer dizer que o vetor Y_3 é 2 vezes o primeiro vetor da base $\mathcal{S}$, 1 vez o segundo vetor da base $\mathcal{S}$ e 1 vez o terceiro vetor da base $\mathcal{S}$.

$$Y_3 = 2\underbrace{(-1,1,0)}_{\substack{1^{\text{o}}\text{vetor} \\ \text{da base } \mathcal{S}}} + 1\underbrace{(1,0,1)}_{\substack{2^{\text{o}}\text{vetor} \\ \text{da base } \mathcal{S}}} + 1\underbrace{(0,0,1)}_{\substack{3^{\text{o}}\text{vetor} \\ \text{da base } \mathcal{S}}} = (-2,2,0) + (1,0,1) + (0,0,1) = (-1,2,2)$$

Assim, chegamos à conclusão que $\mathcal{T} = ((1,1,1),(0,1,0),(-1,2,2))$.

24(b). O primeiro passo é escalonar e reduzir a matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} \underset{L_2 = L_2 - 3L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & -5 \end{bmatrix} = \mathbf{A_e} \underset{L_2 = \frac{L_2}{4}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -7/4 & -5/4 \end{bmatrix} = \mathbf{A_r}$$

i. Determinar uma base para o espaço nulo

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(A) =& \{X \in \mathbb{R}^4 \,:\, \mathbf{A_r} X = 0\} \\
=& \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -7/4 & -5/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
=& \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x + 2z + w = 0 \text{ e } y - 7z/4 - 5w/4 = 0\} \\
& \text{Vamos escrever tudo em relação a } z \text{ e } w \\
=& \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x = -2z - w \text{ e } y = 7z/4 + 5w/4\} \\
=& \{(-2z - w, 7z/4 + 5w/4, z, w), \; z, w \in \mathbb{R}\} \\
& \text{Separar em dois vetores: um que tem os z's outro que tem os w's} \\
=& \{(-2z, 7z/4, z, 0) + (-w, 5w/4, 0, w), \; z, w \in \mathbb{R}\} \\
& \text{Meter o } z \text{ e o } w \text{ em evidência} \\
=& \{z(-2, 7/4, 1, 0) + w(-1, 5/4, 0, 1), \; z, w \in \mathbb{R}\} \\
=& \langle (-2, 7/4, 1, 0), (-1, 5/4, 0, 1) \rangle \\
& \text{Opcional: multiplicar cada um dos vetores por 4 para não termos frações} \\
=& \langle (-8, 7, 4, 0), (-4, 5, 0, 4) \rangle
\end{aligned}$$

Assim, uma base para o espaço nulo é $\{(-8,7,4,0), (-4,5,0,4)\}$.

ii. determine bases para o espaço das linhas e o espaço das colunas de A

As linhas não nulas de $\mathbf{A_e}$ ou de $\mathbf{A_r}$ formam uma base para o espaço das linhas de A. Assim, uma base para o espaço das linhas pode ser as linhas (não nulas) de $\mathbf{A_e}$:

$$\{(1,0,2,1), (0,4,-7,-5)\}$$

ou as linhas não nulas de $\mathbf{A_r}$:

$$\{(1,0,2,1), (0,1,-7/4,-5/4)\}$$

Para calcular uma base para o espaço das colunas podemos fazer de duas formas diferentes:

1. as colunas com os pivots da forma escalonada $\mathbf{A_e}$ formam uma base para $\mathcal{C}(A)$.

$$\mathbf{A_e} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & -5 \end{bmatrix}$$

O pivot da L_1 está na coluna 1 e o pivot da L_2 está na coluna 2. Assim, a coluna 1 e 2 da matriz A formam uma base para $\mathcal{C}(A)$:

$$\{(1,3), (0,4)\}$$

OU

2. $B = (a,b) \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow AX = B$ é possível. Um sistema $AX = B$ é possível se e só se $car(A) = car([A|B])$. Vamos escalonar $[A|B]$ para contar a característica:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & a \\ 3 & 4 & -1 & -2 & b \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2 - 3L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & a \\ 0 & 4 & -7 & -5 & b - 3a \end{array}\right]$$

Com a $car(A) = car([A|B])$ o sistema $AX = B$ é sempre possível, ou seja, todos os vetores $B = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ pertencem ao espaço das colunas de A. Portanto, $\mathcal{C}(\mathcal{A}) = \mathbb{R}^2$ e uma base para este espaço é, por exemplo, a base canónica de $\mathbb{R}^2$

$$\{(1,0), (0,1)\}$$

A base que obtemos para $\mathcal{C}(A)$ no ponto 1. e 2. são diferentes, mas não tem problema.

iii. calcule a caracteristica e a nulidade, e verifique que $car(A) + nul(A) = n$

A característica de A é igual à dimensao de $\mathcal{C}(A)$ e dimensao de $\mathcal{L}(A)$.Assim, $car(A) = 2$. A nulidade de A é igual à dimensão do espaço nulo. Assim, $nul(A) = 2$. E n é o número de colunas de A. Portanto verificamos que,

$$car(A) + nul(A) = n \Leftrightarrow 2 + 2 = 4$$

iv. A característica de uma matriz é o máximo número de linhas l.i.. Como a $car(A) = 2$ sabemos que as 2 linhas de A são l.i.

24(f). O primeiro passo é escalonar e reduzir a matriz A (este passo é necessário para determinar uma base para o espaço das linhas e para o espaço nulo).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 + L_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{L_2 = -\frac{L_2}{2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{L_3 = -L_3 - L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A_e}^{(\text{escalonada})}$$

$$\underset{\substack{L_2 = L_2 - 2L_3 \\ L_1 = L_1 - 3L_3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_1 = L_1 - 2L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A_r} \left(\substack{\text{escalonada e} \\ \text{reduzida}} \right)$$

i. Determinar uma base para o espaço nulo

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A) &= \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, AX = 0\} \\ &= \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, \mathbf{A_r} X = 0\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = 0 \text{ e } y = 0 \text{ e } z = 0\} \\ &= \{(0, 0, 0)\} \end{aligned}$$

O espaço nulo de A contêm apenas o vetor nulo de $\mathbb{R}^3$ e a base para o espaço $\{(0, 0, 0)\}$ é o conjunto vazio, denotado por $\emptyset$. (ver a nota do slide 11 do Capítulo 2)

ii. determine bases para o espaço das linhas e o espaço das colunas de A

As linhas não nulas de $\mathbf{A_e}$ ou de $\mathbf{A_r}$ formam uma base para o espaço das linhas de A. Assim, uma base para o espaço das linhas pode ser as linhas (não nulas) de $\mathbf{A_e}$:

$$\{(1, 2, 3), (0, 1, 2), (0, 0, 1)\}$$

ou as linhas (não nulas) de $\mathbf{A_r}$:

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

Para determinar uma base para o espaço das colunas podemos fazer de duas formas diferentes:

1. as colunas com os pivots da forma escalonada $\mathbf{A_e}$ formam uma base para $\mathcal{C}(A)$.

$$\mathbf{A_e} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O pivot da L_1 está na coluna 1, o pivot da L_2 está na coluna 2 e o pivot da L_3 está na coluna 3. Assim, a coluna 1,2 e 3 da matriz A formam uma base para $\mathcal{C}(A)$:

$$\{(1, 1, -1), (2, 0, -1), (3, -1, 0)\}$$

OU

2. $B=(a,b,c)\in\mathcal{C}(A) \Leftrightarrow AX=B$ é possível. Vamos ver quais são os vetores $B=(a,b,c)$ que estão no espaço das colunas de A e assim determinamos uma base para o espaço. Um sistema $AX=B$ é possível se e só se $car(A)=car([A|B])$. Vamos escalonar $[A|B]$ para contar a característica:

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & a\\ 1 & 0 & -1 & b\\ -1 & -1 & 0 & c\end{array}\right]\underset{\substack{L_2=L_2-L_1\\ L_3=L_3+L_1}}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & a\\ 0 & -2 & -4 & b-a\\ 0 & 1 & 3 & c+a\end{array}\right]\underset{L_2=-\frac{L_2}{2}}{\sim}$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & a\\ 0 & 1 & 2 & (b-a)/2\\ 0 & 1 & 3 & c+a\end{array}\right]\underset{L_3=L_3-L_2}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & a\\ 0 & 1 & 2 & (b-a)/2\\ 0 & 0 & 1 & c+a-(b-a)/2\end{array}\right]\text{(escalonada)}$$

Com a $car(A)=car([A|B])=3$ o sistema $AX=B$ é sempre possível, ou seja, todos os vetores $B=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ pertencem ao espaço das colunas de A. Portanto, $\mathcal{C}(\mathcal{A})=\mathbb{R}^3$ e uma base para este espaço é, por exemplo, a base canónica de $\mathbb{R}^3$

$$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

Neste caso, a base que obtemos para $\mathcal{C}(A)$ no ponto 1. e 2. são diferentes mas não tem problema! Os espaços vetoriais tem infinitas bases diferentes.

iii. calcule a caracteristica e a nulidade, e verifique que $car(A)+nul(A)=n$

A característica de A é igual ao número de pivots da sua forma escalonada, que por sua vez é igual à dimensão de $\mathcal{L}(A)$ e à dimensao de $\mathcal{C}(A)$. A dimensão consiste no número de elementos de qualquer base. Assim, $car(A)=3$.

A nulidade de A é igual à dimensão do espaço nulo. Na alínea i, vimos que a base do espaço nulo era o conjunto vazio que tem 0 elementos. Assim, $nul(A)=0$.

n é o número de colunas de A. Portanto verificamos que,

$$car(A)+nul(A)=n \Leftrightarrow 3+0=3$$

iv. A característica de uma matriz é o número máximo de linhas (colunas) l.i.. Como a $car(A)=3$ sabemos que as 3 linhas de A são l.i.