Aula 3

23/09/2025

Matrizes equivalentes $A \sim C$ se C resulta de A por operações elementares nas linhas de A

Operações elementares:

NOTA: Têm sempre de indicar as operações elementares.

1. Trocar linhas $L_i \leftrightarrow L_j$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

escalonada ✗ — escalonada ✓

2. Multiplicar uma linha por um escalar $\alpha \neq 0$, $L_i = \alpha L_i$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_1 = L_1/3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

reduzida ✗ — reduzida ✓

3. Somar a uma linha um múltiplo de outra, $L_i = L_i + \beta L_j$, $\beta \in \mathbb{R}$

FP1 15(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_2 = L_2 - 3L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3-3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_2 = L_2 - 3L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_2 = L_2/3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

escalonada ✗ — escalonada ✓ — reduzida ✓

A nível do sistema linear: $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = 6 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ \cancel{x_1} + x_2 - \cancel{x_1} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{array}\right] \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{L_1 = L_1/3}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2 - L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 1-1 & 1-0 & 0-3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

escalonada reduzida $= [C|D]$

Teorema: $[A|B] \sim [C|D]$ então os sistemas $AX = B$ e $CX = D$ são equivalentes

Teorema: Qualquer matriz é equivalente por linhas a uma matriz escalonada por linhas (reduzida)

Ex. ilustrativo

(d)

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \underset{L_3 \leftrightarrow L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \underset{L_4 = L_4 + 2L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \underset{L_4 = L_4 + 2L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \underset{L_4 = L_4 - 6L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ escalonada! (1)

$$\underset{\substack{L_3 = L_3/2 \\ L_2 = L_2/(-2)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 = L_2 + 2L_3 \\ L_1 = L_1 + L_3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_1 = L_1 - L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ reduzida!

15 (c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{escalonada}} \underset{L_2 = L_2/5}{\sim} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{reduzida}}$$

(d)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 10 & 14 & 25 & 10 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{escalonada}} (1) \underset{L_1 = L_1 - 7L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 11 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1 = L_1/10 \\ L_2 = L_2/2}}{\sim} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1.1 & 0.3 \\ 0 & 1 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}}_{\text{reduzida}}$$

Resolver sistema $AX \overset{?}{=} B$

Método de Gauss:

(1) Escrever $[A|B]$

(2) Escalonar $[A|B] \sim [C|D]$

(3) Escrever o sistema $CX = D$ e resolver por substituição ascendente

ou

Método de Gauss-Jordan:

(1) Escrever $[A|B]$

(2) Escalonar e reduzir $[A|B] \sim [E|F]$

(3) Resolver $EX = F$

Exp $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow AX = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{Gauss}}$ (1) + (2) Escrever e escalonar $[A|B]$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2 - \frac{2}{3} L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{5}{3} & 5/3 \end{array}\right] = [C|D] \text{ escalonada}$$

(3) Resolver por substituição ascendente

$$CX = D \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -5/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5/3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 \\ -\frac{5}{3} x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5/3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 2 \\ -\frac{5}{3} x_2 = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + (-1) = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$ Solução é $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{Gauss-Jordan}}$ (1)+(2) Escrever e escalonar e reduzir $[A|B]$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{array}\right] \underset{L_2=L_2-2/3L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{array}\right] \underset{L_2=-\frac{3}{5}L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \underset{L_1=L_1-L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_1=L_1/3}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] = [E|F] \text{ reduzida}$$

(3) Resolver $EX=F \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$ Solução é $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

A característica de $A_{m\times n}$, car(A), é o nº de pivots da matriz escalonada por linhas equivalente a A.

⚠ Para contar a característica a matriz tem de estar escalonada!

Exp: $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, car(A) = 1

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_3=L_3-2L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_3=L_3-L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ car(B) = 2$$

$[C|D] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, car(C) = 1 e car([C|D]) = 2

Classificação de um sistema $AX=B$: (Slide 32)

1. Impossível $\Leftrightarrow$ car(A) < car([A|B])

Exp $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - x_2 \\ 2 = 0 \end{cases}$ impossível

$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{L_2=L_2-L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$ car(A) = 1 < car([A|B]) = 2

2. Possível Determinado $\Leftrightarrow$ car(A) = car([A|B]) = nº de colunas de A

Exp $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$ Possível Determinado, solução $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \underset{L_2=L_2-L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$, car(A) = car([A|B]) = 2 = nº de colunas de A

3. Possível Indeterminado $\Leftrightarrow$ car(A) = car([A|B]) < nº de colunas de A

Exp $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - x_2 \end{cases}$ Possível Indeterminado

Conjunto de soluções: $\{(1-x_2, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\}$

$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$, $car(A) = car([A|B]) = 1 <$ nº de colunas de A

Além disso,

$\boxed{\text{grau de indeterminação / nº de variáveis livres} = \text{nº de colunas de } A - car(A)}$

grau de ind. $= 2 - 1 = 1$ ✓ existe uma variável livre (o x_2)

FP1 até ao ex. 20

Recomendo 16 (a), (d), 17, 18