Aula 2

18/09/2025

· Seja $A_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$(AB)^T = \left(\underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}} \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \right)^T = \begin{bmatrix} 1\times 0 + (-2)\times 1 \\ 1\times 0 + 0\times 1 \\ 2\times 0 + 3\times 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B^T A^T = \underset{1\times 2}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T B^T = \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}} \underset{1\times 2}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}} \times$$

O produto $A^T B^T$ não está bem definido porque o nº de colunas de A^T é diferente do nº de linhas de B^T.

Assim temos que, $\boxed{(AB)^T = B^T A^T \neq A^T B^T}$

FP1 ① (d)

$$DA = \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}} \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}}$$

nº de linhas de D × nº de col. de A = 2 × 2

(f) $\frac{1}{5}\left(I_2 - (DA)^2\right)$

$$= \frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 15 & 16 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1-1 & 0-0 \\ 0-15 & 1-16 \end{bmatrix}$$

$$= 1/5 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -15 & -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -15/5 & -15/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$$

(ver os slides de revisão de sistemas lineares)

Sistema de equações lineares / Sistema linear:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

é uma coleção de eq. lineares em que $x_1 \dots x_n$ são as variáveis/incógnitas, $b_1 \dots b_n$ os termos independentes e a_{ij}, $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$, o coeficiente da equação i a multiplicar por x_j

O sistema é homogéneo se e só se $b_1 = \dots = b_m$

Exp.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

é homogéneo: os termos independentes são todos 0.

$a_{21} = 2 \rightarrow 2^a$ eq. coeficiente de x_1

$a_{12} = 1 \rightarrow 1^a$ eq. coeficiente de x_2

Forma matricial de um sistema linear:

m - nº de eq. do sistema e n - nº de incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{A}_{\substack{\text{matriz dos coeficientes} \\ (m \times n)}} \; \underbrace{X}_{\substack{\text{coluna das incógnitas} \\ (n \times 1)}} = \underbrace{B}_{\substack{\text{coluna dos termos independentes} \\ (m \times 1)}}$$

$= \checkmark$

Exp:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ \quad 2x_2 - 8x_3 = 5 \\ 5x_1 - \quad 5x_3 = 10 \end{cases}, \; X_{3\times 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \; B_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}, \; A_{3\times 3} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ & \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1^a \text{ eq.} \\ 2^a \text{ eq.} \\ 3^a \text{ eq} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underset{2\times 2}{A}\ \underset{2\times 1}{X} = \underset{2\times 1}{B} \Leftrightarrow \begin{array}{c|cc} & x_1 & x_2 \\ \hline 1^{a} eq. & 3 & 1 \\ 2^{a} eq. & 2 & -1 \end{array} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 2x_1 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \checkmark$$

A matriz $[A|B]$ é a <u>matriz ampliada</u> e tem ordem $m \times (n+1)$

EXP.

$$\begin{cases} x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow AX = B \Leftrightarrow \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} = \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$=\checkmark$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right]$$ é a matriz ampliada

<u>Pivot</u>: é a 1ª entrada não nula de cada linha

EXP.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Pivot da linha 1 : 1
" " linha 2 : 1
" " linha 3 : 2

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

" " linha 1 : 2
linha 2 não tem

escalonar

<u>Matriz escalonada por linhas</u>

- Abaixo de cada pivot só temos 0's
- Dadas 2 linhas consecutivas, não nulas, o pivot da linha mais acima está mais à direita do pivot da linha mais abaixo
- Se existem linhas nulas estão no fundo da matriz.

<u>EXP.</u> Quem está na forma escalonada por linhas?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \checkmark, \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \checkmark, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

✗ abaixo do pivot L2 não estão 0's,

✗ pivot da L2 está mais à direita do que da L1

○ → os pivots de cada linha estão sublinhados

<u>Abreviação</u>: L_1 - linha 1, L_2 - linha 2, L_3 - linha 3...

Matriz escalonada por linhas reduzida:

- Escalonada por linhas
- Pivots são todos iguais a 1
- Acima de cada pivot só temos zeros.

Exº Quem está na forma escalonada por linhas reduzida?

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ✓ $= I_2$ identidade de ordem 2

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ ✗ O pivot de L_2 e L_4 são ≠ de 1

$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ✓

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ✓

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ✓

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ✗ acima do pivot de L_2 está um 1.

Nos próximos episódios:

Sistema $\xrightarrow{\checkmark}$ forma matricial $\xrightarrow[\text{aula}]{\text{Próxima}}$ Escalonar (e reduzir) [A|B] $\xrightarrow[\text{aula}]{\text{Próxima}}$ método para encontrar a solução de um sistema

FP1 até ao ex: 15
Recomendo 2, 15