15/10/2025

Aula 10

(13) (b) $K=\{(1,-1,1),(0,2,1),(1,1,2)\}$

$S=\langle K\rangle \; (=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: 3x+y-2z=0\})$

Este cálculo não é necessário para o exercício, ver última página.

K gera S, se K for l.i. então K é uma base de S.

$\boxed{K \text{ é l.i.?}}$ $(0,0,0)=\alpha_1(1,-1,1)+\alpha_2(0,2,1)+\alpha_3(1,1,2) \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&0&1\\-1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow AX=0$

$[A|0]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\-1&2&1&0\\1&1&2&0\end{array}\right] \underset{\substack{L_2=L_2+L_1\\L_3=L_3-L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&2&2&0\\0&1&1&0\end{array}\right] \underset{L_3=L_3-\frac{L_2}{2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&2&2&0\\0&0&0&0\end{array}\right] \underset{L_2=L_2/2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]=[C|0]$

$AX=0 \Leftrightarrow CX=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=-\alpha_3\\\alpha_2=-\alpha_3\end{cases}$ Poss. Ind.

K é l.d.: $(0,0,0)=-\alpha_3(1,-1,1)-\alpha_3(0,2,1)+\alpha_3(1,1,2)$, $\alpha_3\in\mathbb{R}$

Por exemplo, $(1,1,2)$ é C.L. de $(1,-1,1)$ e $(0,2,1)$, se $\alpha_3=1$, $(1,1,2)=(1,-1,1)+(0,2,1)$.

Pelo Teorema do slide 8, $S=\langle K\rangle=\langle K\setminus\{(1,1,2)\}\rangle$.

Assim, $K\setminus\{(1,1,2)\}=\{(1,-1,1),(0,2,1)\}$ gera S e se for l.i. é uma base.

(NOTA: Vamos tirar o vetor (1,1,2) e ver se o conjunto é uma base de S, podíamos tirar qualquer vetor, é uma escolha).

$\boxed{K\setminus\{(1,1,2)\} \text{ é l.i.?}}$ $(0,0,0)=\alpha_1(1,-1,1)+\alpha_2(0,2,1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&0\\-1&2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow DX=0$

$[D|0]=\left[\begin{array}{cc|c}1&0&0\\-1&2&0\\1&1&0\end{array}\right] \underset{\substack{L_1=L_1+L_2\\L_3=L_3-L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&2&0\\0&1&0\end{array}\right] \underset{L_3=L_3-\frac{1}{2}L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{array}\right] \underset{L_2=\frac{L_2}{2}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{array}\right]=[E|0]$

$DX=0 \Leftrightarrow EX=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=0\\\alpha_2=0\end{cases}$ Poss. Det.

$K\setminus\{(1,1,2)\}$ é l.i. e gera S. Logo, $((1,-1,1),(0,2,1))$ é uma base de S.

Teorema: 2 bases de um e.v. $\mathcal{V}$ têm o mesmo nº de elementos.

Dimensão de $\mathcal{V}$, $\dim \mathcal{V}$, é o nº de elementos de qualquer base.

Exp. $\dim\{0_{\mathcal{V}}\}=0$ porque tem base $\emptyset$ que tem 0 elementos

$\dim \mathbb{R}^n=n$

$\dim M_{m\times n}=mn$

$\dim \mathcal{P}_n=n+1$

(13) (b) $((1,-1,1),(0,2,1))$ é uma base de S, tem 2 vetores, logo $\dim S=2$.

Teorema (slide 12): $\dim \mathcal{V}=n$ e $K=\{x_1,\dots,x_r\}$ tem r vetores

(i) Se $r>n \Rightarrow$ K é l.d. e não é base de $\mathcal{V}$.

(ii) Se $r<n \Rightarrow$ K não gera $\mathcal{V}$ e não é base de $\mathcal{V}$.

Exp dim $\mathbb{R}^2 = 2$, isto é, qualquer base tem 2 vetores.

(i) $K_1 = ((2,0),(2,2),(0,3))$ tem 3 vetores logo não é uma base de $\mathbb{R}^2$ (K_1 é l.d.)

(ii) $K_2 = ((1,0))$ tem 1 vetor logo não é uma base de $\mathbb{R}^2$ ($\langle K_2 \rangle \neq \mathbb{R}^2$)

NOTA $K_3 = ((2,0),(1,0))$ tem 2 vetores mas não é uma base de $\mathbb{R}^2$ porque é l.d.

Corolário: $\dim V = n$ e $K = (x_1, \dots, x_n)$ tem n elementos então:

Se K é l.i. $\Rightarrow$
ou $\quad$ K é base de V.
Se K gera $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$

Exp. $K = ((1,2),(2,1))$ é base de $\mathbb{R}^2$?

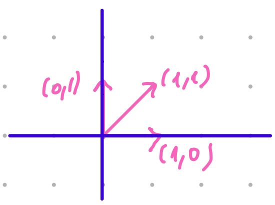
Pelo corolário do slide 12, como K tem 2 vetores e $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ basta ver se K é l.i. ou gera $\mathbb{R}^2$ que automaticamente é uma base de $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{\langle K \rangle = \mathbb{R}^2 ?}$ $\quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$ é sempre possível?

$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 2 & 1 & y \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2 - 2L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & -3 & y - 2x \end{array}\right]$ Sim, porque $car(A) = car([A|B])$

Logo $\langle K \rangle = \mathbb{R}^2$, assim K é uma base de $\mathbb{R}^2$.

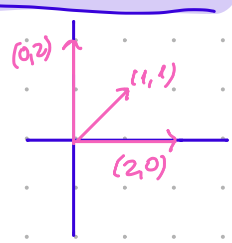
Coordenadas de um vetor numa base: (em $\mathbb{R}^2$)



$B_c = ((1,0),(0,1))$ base canónica de $\mathbb{R}^2$

$(1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$

$[(1,1)]_{B_c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$



$B = ((2,0),(0,2))$ base de $\mathbb{R}^2$

$(1,1) = \frac{1}{2}(2,0) + \frac{1}{2}(0,2)$

$[(1,1)]_B = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

Matriz Mudança de base:

Se $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ e S bases de V.

$$\boxed{[X]_S = M_{S \leftarrow \gamma} [X]_\gamma}$$

($M_{S,\gamma}$ é tipo um tradutor da base γ pra S)

onde $M_{S \leftarrow \gamma} = \begin{bmatrix} | & & | \\ [\gamma_1]_S & \cdots & [\gamma_n]_S \\ | & & | \end{bmatrix}$ é a matriz de base γ para S.
As colunas são os vetores de γ nas coordenadas da base S.

Teorema $M_{S \leftarrow \gamma}$ é invertível e $M^{-1}_{S \leftarrow \gamma} = M_{\gamma \leftarrow S}$

(20) $S=((1,2),(0,1))$ e $T=((1,1),(2,3))$

(a) $[(1,5)]_T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ tal que $(1,5) = a_1(1,1) + a_2(2,3) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{array}\right] \underset{L_2=L_2-L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \underset{L_1=L_1-2L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -7 \\ a_2 = 4 \end{cases}$

$[x]_T = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix}$

(b) $[z]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, isto é, $z = 1(1,1) - 3(2,3) = (-5,-8)$

(c) $P = M_{S \leftarrow T} = \begin{bmatrix} [(1,1)]_S & [(2,3)]_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

$(1,1) = a_1(1,2) + a_2(0,1) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = -1 \end{cases}$ 1ª coluna de P

bases S

$(2,3) = b_1(1,2) + b_2(0,1) \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 2 \\ b_2 = -1 \end{cases}$ 2ª coluna de P

Acabamos na próx. aula

(d) $[x]_S = \underbrace{M_{S \leftarrow T}}_{\text{alínea (c)}} \underbrace{[x]_T}_{\text{alínea (a)}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ || verificar $(1,5) = 1(1,2) + 3(0,1)$ ✓ bases S

(e) $[x]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ tal que $(1,5) = a_1(1,2) + a_2(0,1) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 3 \end{cases}$

$= \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

(f) $Q = M_{T \leftarrow S} = M_{S \leftarrow T}^{-1}$ $\quad [M_{S \leftarrow T} \mid I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2=L_2+L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim$

$\underset{L_1=L_1-2L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] = [I_2 \mid M_{S \leftarrow T}^{-1}]$

Logo, $Q = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(g) $[x]_T = \underbrace{M_{T \leftarrow S}}_{(f)} \underbrace{[x]_S}_{(d)} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix}$

FP2 até ao ex. 22

Recomendo 14, 15, 16, 19, 21

13 (b) Calcular o espaço gerado pelos vetores $(1,-1,1)$, $(0,2,1)$ e $(1,1,2)$.

$$\langle (1,-1,1),(0,2,1),(1,1,2)\rangle = \{(x,y,z) = \alpha_1(1,-1,1)+\alpha_2(0,2,1)+\alpha_3(1,1,2),\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}\}$$
$$= \left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&1\\-1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix},\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}\right\}$$

Quando é que o sistema $AX=B \Leftrightarrow \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&1\\-1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix}$ é possível / $car(A)=car([A|B])$?

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&x\\-1&2&1&y\\1&1&2&z\end{array}\right] \underset{\substack{L_2=L_2+L_1\\L_3=L_3-L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&x\\0&2&2&y+x\\0&1&1&z-x\end{array}\right] \underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&x\\0&1&1&z-x\\0&2&2&y+x\end{array}\right] \underset{L_3=L_3-2L_2}{\sim}$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&x\\0&1&1&z-x\\0&0&0&3x+y-2z\end{array}\right]$$

$car(A)=2$ para o sistema $AX=B$ ser possível temos de ter que $car(A)=car([A|B])$ isto é, $car([A|B])=2$ logo $3x+y-2z=0$.

Em suma, todos os vetores $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tal que $3x+y-2z=0$ são C.L. dos vetores $(1,-1,1)$, $(0,2,1)$ e $(1,1,2)$.

$$\langle (1,-1,1),(0,2,1),(1,1,2)\rangle = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 3x+y-2z=0\}$$