

Aula 6

(FP1) (30) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boxed{AXB = C} \Leftrightarrow \underbrace{A^{-1}AXB}_{=I_2} = A^{-1}C \Leftrightarrow \boxed{XB} = \boxed{A^{-1}C} \Leftrightarrow \boxed{XBB^{-1}} = \boxed{A^{-1}CB^{-1}} = I_2$
 $\Leftrightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$

Calcular A^{-1} : $[A | I_2] \xrightarrow[L_2 \leftarrow -L_2]{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = [I_2 | A^{-1}]$

Calcular B^{-1} : $[B | I_2] \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1]{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - L_2]{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} = [I_2 | B^{-1}]$

Assim, $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

Exame Recurso 24/25
① (c) $\boxed{MXM^{-1}} = \boxed{MB + AM} \Leftrightarrow \underbrace{M^{-1}M}_{=I} XM^{-1} = M^{-1}(MB + AM)$
 $\Leftrightarrow XM^{-1} = \underbrace{M^{-1}MB}_{=I} + M^{-1}AM \Leftrightarrow \boxed{XM^{-1}} = \boxed{B + M^{-1}AM}$
 $\Leftrightarrow \underbrace{XM^{-1}M}_{=I} = (B + M^{-1}AM)M \Leftrightarrow X = BM + M^{-1}AM^2$

Aula de hoje:

- (1) Matrizes elementares
- (2) Dada A , como calcular $A = LU$?
- (3) Como resolver $AX = B$ quando $A = LU$?

(1) Matriz elementar; é equivalente à matriz identidade por uma única operação elementar (é sempre invertível)

Ex $I_2 \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1]{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = E$ é uma matriz elementar

Corresponde à operação elementar $L_2 = L_2 + 3L_1$, isto é, seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ temos que:

$$A \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1]{\sim} \begin{bmatrix} a & b \\ c+3a & d+3b \end{bmatrix} = EA$$

(2) Como factorizar $A = LU$?

$$A_{m \times n} = \underbrace{\begin{matrix} ? \\ m \times m \\ \text{triang. inf.} \\ \text{com 1's na} \\ \text{diagonal:} \end{matrix}}_{=L} \quad \underbrace{\begin{matrix} ? \\ m \times n \\ \text{escalonada} \\ \text{A} \sim U \\ \text{sem trocar linhas!} \end{matrix}}_{=U}$$

Sejam E_1, \dots, E_p matrizes elementares que correspondem às operações elementares de escalarizar $A \sim U$.

$$E_p \dots E_1 A = U \text{ então } A = \underbrace{(E_p \dots E_1)}_{=L}^{-1} U$$

Assim, L é a inversa de $E_p \dots E_1$. Logo,

$$L \xrightarrow{\text{fazer as mesmas op. elementares } A \sim U} I$$

Exp. Fatorizar $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix} = LU?$

1º Escalonar A ~ U ($L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i = \alpha L_i (\alpha \neq 0)$)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}} \sim \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 10 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = U \text{ escalonada } \checkmark$$

2º Construir L

$$\begin{array}{c|c|c} 2 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{array} \xrightarrow{\begin{array}{l} \div 2 \\ \div (-2) \\ \div (-6) \end{array}} \begin{array}{c|c|c} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 3/2 & -5 & 1 \end{array}$$

assim $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ trans: inf. com 1's na diagonal

Podem confirmar:

- $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & -5 & 1 \end{bmatrix}$
- $L_2 \leftarrow L_2 - L_1/2$
- $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$
- $A = LU \checkmark$

(3) Quando $A = LU$, resolver $AX = B \Leftrightarrow LUX = B \Leftrightarrow LY = B$

Assim, 1º Resolver $LY = B$

2º Resolver $UX = Y$, o X é a solução de $AX = B$.

Exp anterior: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = LU$, resolver $AX = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} = B$

$$AX = B \Leftrightarrow LUX = B \Leftrightarrow LY = B \text{ em que } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

1º Resolver $LY = B$

$$\begin{bmatrix} L & | & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & | & -5 \\ 3/2 & -5 & 1 & | & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1/2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 \\ 0 & -5 & 1 & | & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 \\ 0 & 0 & 1 & | & -18 \end{bmatrix} = [E|F]$$

$$LY = B \Leftrightarrow EY = F \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = -5 \\ y_3 = -18 \end{cases} \Leftrightarrow Y = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -18 \end{bmatrix}$$

2º Resolver $UX = Y$

$$\begin{bmatrix} U & | & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & -5 \\ 0 & 0 & -6 & | & -18 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow -L_3/6} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & | & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & -5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3 \end{array}} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & | & -12 \\ 0 & -2 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & | & -12 \\ 0 & -2 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} = [G|H]$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & | & -12 \\ 0 & -2 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1/2 \\ L_2 \leftarrow L_2/(-2) \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} = [G|H]$$

$$UX = Y \Leftrightarrow GX = H \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ é a solução de } AX = B.$$

Resumo

Resolver $AX = B$ com decomposição LU:

- (1) Escalonar $A \setminus U$ (sem trocar linhas, nem multiplicar linhas por um escalar)
- (2) Construir L
- (3) Resolver $Ly = B$
- (4) Resolver $Ux = y$, x é a solução de $AX = B$.

F.P.1

36

(b)

(1) Escalonar $A \setminus U$ ($L_i \leftrightarrow L_j \iff L_i = \alpha L_j, \alpha \neq 0$)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 \\ -4 & 8 & 0 \\ 0 & -4 & 6 \end{bmatrix} \sim L_2 = L_2 + 2L_1 \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & -4 & 6 \end{bmatrix} \sim L_3 = L_3 - L_2 \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = U \text{ escalonada} \checkmark$$

(2) Construir L

$$\begin{array}{c|c|c} 2 & -6 & 4 \\ -4 & 8 & 0 \\ 0 & -4 & 6 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|c|c} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \text{ assim } L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ triang. inf. com 1's na diagonal}$$

[ver que $A = LU$). Como $A = LU$ temos $AX = B \iff LUX = B \iff Ly = B$

(3) Resolver $Ly = B$ em que $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

$$[L|B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \sim L_2 = L_2 + 2L_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \sim L_3 = L_3 - L_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} = [E|F]$$

$$Ly = B \iff E y = F \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 6 \end{cases} \iff y = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(4) Resolver $Ux = y$

$$[U|Y] = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \sim L_2 = L_2 + 4L_3 \begin{bmatrix} 2 & -6 & 0 & 14 \\ 0 & -4 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \sim L_1 = L_1/2 \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim L_1 = L_1 + 3L_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} = [G|H]$$

$$UX = Y \iff Gx = H \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 = -11 \\ x_2 = -6 \\ x_3 = -3 \end{cases} \iff x = \begin{bmatrix} -11 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ é a solução de } AX = B$$

(Confirmar que $AX = B$)

Decomposição LDU

$$A = LU \iff \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 \\ -4 & 8 & 0 \\ 0 & -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{l} L_1 = L_1/2 \\ L_2 = L_2/(-4) \\ L_3 = L_3/(-2) \end{array} \sim \begin{array}{l} L_1 = L_1/2 \\ L_2 = L_2/(-4) \\ L_3 = L_3/(-2) \end{array}$$

$$A = LDU \iff \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 \\ -4 & 8 & 0 \\ 0 & -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

↓ triangular diagonal ↓ escalonar c/ 1's na diagonal

triangular com 1's na diagonal

F.P.1 toda!

Recomenda 16(c), 18, 32, 36(a).