Aula 1

15/09/2025

juliana.cunha@ua.pt

Avaliação

Discreta

Teste 1 (50%) 29 out.

⊕

Teste 2 (50%) Época Exames

ou

Exame Final (100%) Época de Exames

< 9.5 ou Melhoria de Nota (100%)

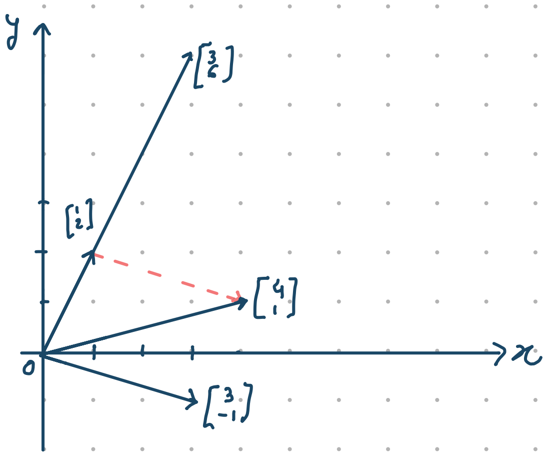
↓

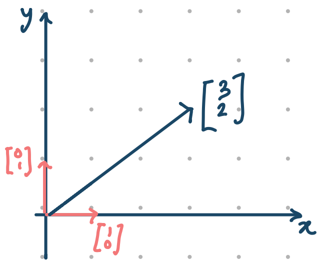
Época de Recurso

Vetores em $\mathbb{R}^2$: $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+1 \\ -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 1 \\ 3 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$





$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ é combinação linear de $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\{(1,0), (0,1)\}$ são uma base de $\mathbb{R}^2$ (Cap. 2)

Matrizes

$A_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$ tem dimensão/ordem 3×2

nº de linhas — nº de colunas

$a_{21} = 4$ elemento na linha 2 e coluna 1 de A

$a_{32} = 9$ elemento na linha 3 e coluna 2 de A

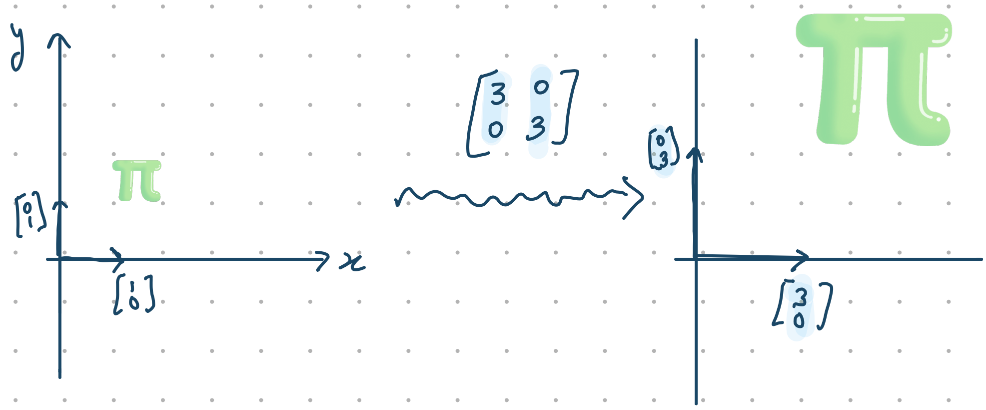
$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 7 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ tem ordem 2×4

$b_{13} = 1$, $b_{21} = 0$ e $b_{11} = 3$

Intuição

Matrizes são transformações (funções) lineares no espaço tal que:

- origem é sempre fixa e
- linhas são sempre linhas



Matriz Nula

só tem zeros

$$O_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad O_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dots$$

Matriz linha

tem ordem $1 \times n$, $n \in \mathbb{R}$

$$L_{1\times 5} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz coluna

$m \times 1$, $m \in \mathbb{R}$

$$C_{4\times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Matriz quadrada

nº de linhas = nº de colunas

$$E_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 3 \\ 16 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

diagonal principal

Matriz diagonal

(quadrada)

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Matriz identidade

tens 1's na diag. principal e o resto é 0's.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots$$

Matriz triangular superior

quadradas abaixo da diag. principal só 0's

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular inferior

quadradas acima da diag. principal só 0's

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Operações com Matrizes

Transposta de uma matriz

$$A_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad A^T_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B_{2\times 4} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 7 & 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad B^T_{4\times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 7 \\ 1 & 0 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Prop: $(A^T)^T = A$

Def. A é simétrica se $A = A^T$. **Exp:** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^T$

Igualdade $A = B$ se tem a mesma ordem e as entradas são iguais

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Soma Tem de ser a mesma ordem ⚠

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 8 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 3+2 & 4+4 \\ 8+5 & 0+2 & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 13 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicar por um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$

$$2\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 3 & 2\times 0 \\ 2\times 8 & 2\times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 16 & 8 \end{bmatrix}$$

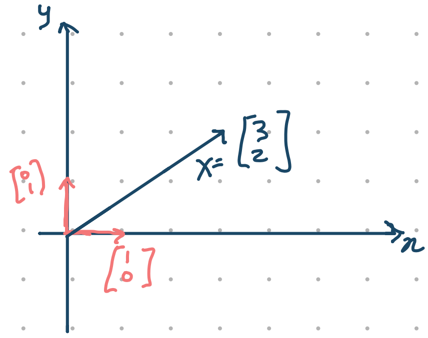
Prop. (slide 14) $A + O = A$ (O: matriz nula)

$A - A = O$

$(A+B)^T = A^T + B^T$

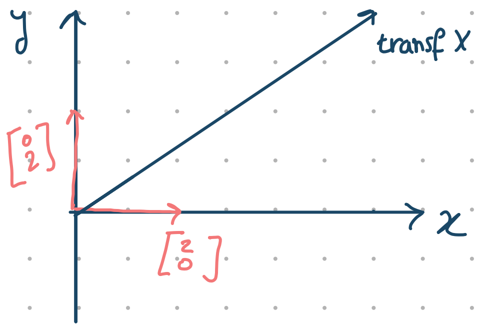
$(\alpha A)^T = \alpha A^T$

Multiplicação de matrizes (intuição)



Ampliação ×2

$\rightsquigarrow$ $\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$



$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$\text{transf } X = 3 \text{ transf}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 2 \text{ transf.}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$= 3\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix}$

Isto é, X após A é:

$AX = \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\times 0+3\times 2\\0\times 3+2\times 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix}$

$AB = \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 3\\8 & 0\end{bmatrix}}\underset{2\times 2}{\begin{bmatrix}3 & 4\\0 & 7\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}2\times 3+3\times 0 & 2\times 4+3\times 7\\4\times 3+0\times 3 & 4\times 4+3\times 7\\8\times 3+0\times 0 & 8\times 4+0\times 7\end{bmatrix} = \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix}6 & 29\\12 & 37\\24 & 32\end{bmatrix}}$

nº de colunas = nº de linhas ✓

$BA = \underset{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2}{\begin{bmatrix}3 & 4\\0 & 7\end{bmatrix}}\underset{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3}{\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 3\\8 & 0\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}3\times 2+4\times 4+8\times ?\ \ldots\end{bmatrix}$ ✗

Este produto não está definido

Não podem fazer isto porque o nº de colunas de B ≠ nº de linhas de A

Prop. (slide 17) $\quad A \underset{\uparrow \text{identidade}}{I} = A$

$\alpha(AB) = A\alpha B$

⚠ $(AB)^T = B^T A^T \neq A^T B^T$

⚠ ⚠ $AB \neq BA$ (tipo as funções $f \circ g \neq g \circ f$) -
(ver ex.6 FP1)

Potência $\quad A^0 = I$

$p \in \mathbb{N} \quad A^p = \underbrace{A \dots A}_{p \text{ vezes}}$

FP1 (2) $\quad 2(A+B) - AB$

$$= 2\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right) - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 12 & 1 \\ 5 & 11 & 1 \\ 1 & 7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 8 & 12 & 4 \\ 8 & 6 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 12 & 1 \\ 5 & 11 & 1 \\ 1 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & -8 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 7 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

(4)

$$\underset{3 \times 4}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \underset{4 \times 2}{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{3 \times 2}{\begin{bmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 1 + (-4 \cdot 0) + (-1) \cdot 0 & ?\ 8 \\ 2 \times 1 + 0 \times 1 + 0 \times 1 + (-1)(-1) & 2 \times 3 + 0 \times 1 + 1 \times (-1) + (-1)(1) \\ 2 \times 1 + 0 \times 1 + 0 \times 1 + 0 \times (-1) & ?\ 5 \end{bmatrix}}$$

Assim, a 1ª coluna é $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ e a 2ª linha $\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$

6. $$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 11 & 15 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Somamos à linha 2 da matriz A 3 vezes a linha 1

$$\neq$$

$$AE = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 19 & 5 & 6 \\ 31 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Somamos à coluna 1 de A 3 vezes a coluna 2.

FP1 até ao ex. 14

Recomendo o ex. 1, 4, 5