Departamento de Matemática **Universidade de Aveiro**

Álgebra Linear e Geometria Analítica - A

Exame de recurso **28 de Janeiro de 2025**

Duração total do teste: 2h30m

Nome: ____

N^o mecanográfico: ______________ **Curso** ______________________________

Número de folhas suplementares: ____________________

Declaro que desisto: ____

Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5	Questão 6	Classificação final

PARTE I

Escolha múltipla

*(4 val.)***1)** Selecione a (única) afirmação verdadeira em cada uma das seguintes questões. Cada resposta certa será cotada com $0,5$ valores.

(a) Considere o sistema de equações lineares $AX = b$ nas variáveis x, y e z e no parâmetro real a representado pela matriz do sistema $A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & a-3 \\ 0 & a & 3 & 2 \\ 0 & 0 & a+2 & 4 \end{array}\right]$. Escolha a opção correta:

☐ O sistema é possível e determinado para todo $a \in \mathbb{R}$.

☐ O sistema é possível e determinado se e só se $a \neq 0$ e $a \neq -2$ e $a \neq 3$.

☐ O sistema é possível e determinado se e só se $a \neq -2$.

☐ O sistema é possível e determinado se e só se $a \neq 0$ e $a \neq -2$.

(b) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. O elemento $(2, 1)$ da matriz AB é:

☐ 0.

☐ -1.

☐ 1.

☐ 9.

(c) Sabendo que as matrizes A, B, M e X, do tipo $n \times n$, são matrizes invertíveis tais que $MXM^{-1} = MB + AM$, verifica-se que:

- ☐ $X = M^{-1}B + AM^{-1}$.
- ☐ $X = BM + M^{-1}AM^2$.
- ☐ $X = MB + AM$.
- ☐ $X = BM + AM$.

(d) Seja $\mathscr{B}$ uma base de $\mathbb{R}^2$. Sabendo-se que a matriz de mudança de base de $\mathscr{B}$ para a base canónica de $\mathbb{R}^2$ é dada por $S = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, pode concluir-se que:

- ☐ $\mathscr{B} = ((4,1),(1,3))$.
- ☐ $\mathscr{B} = ((1,3),(4,1))$.
- ☐ $\mathscr{B} = ((3,1),(1,4))$.
- ☐ $\mathscr{B} = ((1,4),(3,1))$.

(e) Seja A uma matriz do tipo 4×4. Sabendo que o elemento $(2,4)$ da matriz A^{-1} é igual a 5 e que o determinante de A é 2, conclui-se que:

- ☐ o elemento $(4,2)$ da matriz de A é igual a 10.
- ☐ o elemento $(2,4)$ da matriz A é igual a 10.
- ☐ o elemento $(4,2)$ da matriz adjunta de A é igual a 10.
- ☐ o elemento $(2,4)$ da matriz adjunta de A é igual a 10.

(f) Encontre todos os valores de β para os quais a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & \beta \end{bmatrix}$ é invertível.

- ☐ $\beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
- ☐ $\beta \in \{1,3\}$.
- ☐ $\beta \in \{-3,3\}$.
- ☐ $\beta \in \mathbb{R}$.

(g) Considere o espaço vetorial $\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes do tipo 2×2 com entradas em $\mathbb{R}$. Qual dos seguintes subconjuntos é subespaço de $\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$?

- ☐ $S = \{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\}$.
- ☐ $S = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : 2a - b = c\}$.
- ☐ $S = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : b \geq 0\}$.
- ☐ $S = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : 2a - b = 2\}$.

(h) Seja $\mathscr{B} = (u_1, u_2)$ uma base de $\mathbb{R}^2$ e $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear definida por $L(u_1) = (1, 2)$ e $L(u_2) = (1, 0)$. Se v é um vetor de $\mathbb{R}^2$ com vetor das coordenadas na base $\mathscr{B}$, $[v]_{\mathscr{B}} = (1, 2)$, então:

- ☐ $L(v) = (1, 2)$.
- ☐ $L(v) = (1, 0)$.
- ☐ $L(v) = (3, 2)$.
- ☐ $L(v) = u_1 + u_2$.

PARTE II

As seguintes questões devem ser resolvidas nas folhas de prova (folhas suplementares). Justifique devidamente as suas respostas.

(2,5 val.) **2)** Considere uma economia com dois setores, Setor 1 e Setor 2. As relações de consumo entre os setores são representadas pela seguinte matriz de consumo

$$C = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,5 \end{bmatrix},$$

ou seja,

- para produzir um unidade, o primeiro setor utiliza $0,4$ unidades da produção do próprio setor e $0,3$ unidades da produção do segundo setor.
- para produzir um unidade, o segundo setor utiliza $0,2$ unidades da produção do primeiro setor e $0,5$ da produção do segundo setor.

Calcule o vetor de produção que representa a produção necessária para satisfazer o consumo final $d = \begin{bmatrix} 100 \\ 110 \end{bmatrix}$.

(5 val.) **3)** Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido de produto interno e o subespaço de $\mathbb{R}^3$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y + z = 0\}.$$

(a) Mostre que $\mathscr{B} = ((-1, 1, 0), (1, 1, -2))$ é uma base ortogonal de F.

(b) Determine a projeção ortogonal do vetor $(1, 0, 0)$ sobre F.

(c) Determine um vetor unitário de $\mathbb{R}^3$ ortogonal a F.

(3 val.) **4)** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule o determinante de A.

(b) Sejam B e C matrizes invertíveis do tipo 4×4 e tais que $(2A)^T = C^{-1}B^{-1}C$. Calcule o determinante de B. [Se não calculou o determinante de A na alínea anterior, considere $\det(A) = 3$.]

(4 val.) **5)** Determine uma equação reduzida e classifique a quádrica definida pela equação

$$x^2 + y^2 + 2z^2 - 4xy + 4z + 1 = 0.$$

(1,5 val.) **6)** Considere $\Delta = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 \end{bmatrix}$. Mostre que $\Delta = 0$ se e só se $n \geq 3$.

Estas notas não constituem uma resolução formal e rigorosa do Exame.

observação: nas escolhas múltiplas só tinham de assinalar a opção correta.

1 (a)

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a-3 \\ 0 & a & 3 & 2 \\ 0 & 0 & a+2 & 4 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 = L_2/a,\ a\neq 0 \\ L_3 = L_3/a+2,\ a\neq -2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a-3 \\ 0 & 1 & 3/a & 2/a \\ 0 & 0 & 1 & 4/(a+2) \end{array}\right]$$

$Ax=b$ é possível det. $\Leftrightarrow car(A) = car([A|b]) = 3 = n^{\circ}$ de colunas, isto é, $a \neq 0$ e $a \neq -2$.

NOTA:

Se $a=0$, $[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - \frac{2}{3}L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8/3 \end{array}\right]$ $car(A)=2 < car([A|b])=3$ impossível.

Se $a=-2$, $[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$ $car(A)=2 < car([A|b])=3$ impossível.

(b) O elemento (2,1) é o que está na linha 2 coluna 1.

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4\times1-1\times3+2\times0 & 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 32 \end{bmatrix}$$

(2×3) (3×2) (2×2)

Resposta: 1

(c) $X=?$

$$MXM^{-1} = MB + AM \Leftrightarrow \underbrace{M^{-1}M}_{=I_n} XM^{-1} = M^{-1}(MB+AM) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow XM^{-1} = M^{-1}(MB+AM) \Leftrightarrow XM^{-1} = \underbrace{M^{-1}M}_{=I_n}B + M^{-1}AM \Leftrightarrow XM^{-1} = B + M^{-1}AM$$

$$\Leftrightarrow X\underbrace{M^{-1}M}_{=I_n} = (B+M^{-1}AM)M \Leftrightarrow X = BM + M^{-1}AMM \Leftrightarrow \boxed{X = BM + M^{-1}AM^2}$$

(f) A tem inversa $\Leftrightarrow car(A)=3=$ número de colunas de A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & \beta \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & \beta \end{bmatrix} \underset{L_3 = L_3 - L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \underset{L_2 = L_2 - L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

A tem inversa $\Leftrightarrow car(A)=3 \Leftrightarrow \beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

(g) $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ - matrizes com entradas reais e com 2 linhas e 2 colunas.
Vamos ver todas as opções:

$S=\left\{\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\right\}$ não é um subespaço porque não é fechado para a soma.

Por exemplo, $\underbrace{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}}_{\in S}+\underbrace{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}}_{\in S}=\underbrace{\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}}_{\notin S}$

$S=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}: b\geq 0\right\}$ não é um subespaço vetorial porque não é fechado para a multiplicação por escalar.

Por exemplo, $\begin{bmatrix}1&\overset{\geq 0}{2}\\0&1\end{bmatrix}\in S$ porque o elemento $(\underset{\text{linha}}{1},\underset{\text{coluna}}{2})$ é maior que 0.

Mas, se multiplicarmos esta matriz por um número real negativo, por exemplo -3, o resultado é uma matriz cuja entrada (1,2) não é maior ou igual a 0.

$$-3\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&\overset{<0}{-6}\\0&-1\end{bmatrix}$$

$S=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}: 2a-b=2\right\}$ não é um subespaço vetorial porque não contém o elemento neutro.

Em $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ o elemento neutro é a matriz nula de ordem 2×2 $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ e esta matriz não pertence a S porque 2 vezes a entrada (1,1) menos a entrada (1,2) dá zero e não 2, isto é, $2.0-0=0\neq 2$.

Por exclusão de partes temos que o subconjunto
$S=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}: 2a-b=c\right\}=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\2a-b&d\end{bmatrix}, a,b,d\in\mathbb{R}\right\}$
é um subespaço. Vamos aproveitar e verificar isso:

- $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\in S$? Sim porque 2 vezes a entrada (1,1) menos a entrada (1,2) é igual à entrada (2,1), isto é, $2\times 0-0=0$.

- $\begin{bmatrix}a&b\\2a-b&d\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a'&b'\\2a'-b'&d'\end{bmatrix}\in S$. S é fechado para a soma?

$\begin{bmatrix}a&b\\2a-b&d\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a'&b'\\2a'-b'&d'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+a'&b+b'\\2a-b+2a'-b'&d+d'\end{bmatrix}\in S$ porque
$2a-b+2a'-b'=2(a+a')-(b+b')$
$=2a+2a'-b-b'$

é fechado para a soma.

• $\alpha \in \mathbb{R}$, $\begin{bmatrix} a & b \\ 2a-b & d \end{bmatrix} \in S$. S é fechado para a multiplicação por escalar?

$$\alpha \begin{bmatrix} a & b \\ 2a-b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\alpha & b\alpha \\ \alpha(2a-b) & \alpha d \end{bmatrix} \in S \text{ porque } \underbrace{\alpha(2a-b)}_{=2a\alpha-\alpha b} = 2(a\alpha) - b\alpha$$

S é fechado para a multiplicação por escalar.