Aula 26

18/12/2025

Aplicação linear: é uma função $L: V \to W$ tal que $X, X' \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

(1) $L(X+X') = L(X) + L(X')$

(2) $L(\alpha X) = \alpha L(X)$

Teorema: Se $L: V \to W$ é uma aplicação linear $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $L(0_V) = 0_W$

Exemplo $L(x,y) = (x,-y)$

(1) Queremos mostrar que $L((x,y)+(x',y')) = L(x,y) + L(x',y')$

$L((x,y)+(x',y')) = L(x+x', y+y') = (x+x', -(y+y'))$
$= (x+x', -y-y') = (x,-y) + (x',-y')$ (separamos o x e y do x' e y'.)
$= L(x,y) + L(x',y')$

(2) Queremos mostrar que $L(\alpha(x,y)) = \alpha L(x,y)$

$L(\alpha(x,y)) = L(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x, -\alpha y) = \alpha(x,-y) = \alpha L(x,y)$

Logo, L é uma aplicação linear.

Exemplo: $L: P_n \to P_{n-1}$, $p(x) \mapsto p'(x)$ é uma função que dado um polinómio calcula a sua derivada.

(1) $L(p(x)+q(x)) = (p(x)+q(x))' = p'(x) + q'(x) = L(p(x)) + L(q(x))$
(Por exemplo, $(x + x^2)' = x' + (x^2)'$).

(2) $L(\alpha p(x)) = (\alpha p(x))' = \alpha p'(x) = \alpha L(p(x))$
(Por exemplo, $(3x^2)' = 3(x^2)'$)

Logo, a derivada é uma aplicação linear.

FP6 1 (d) $L(x,y,z) = (x+y, 0, 2x-z)$ é uma função que envia um vetor do $\mathbb{R}^3$ noutro

(1) $L((x,y,z)+(x',y',z')) = L(x+x', y+y', z+z')$ (somar vetores)
$= (x+x'+y+y', 0, 2(x+x') - (z+z'))$ (Aplicar L)
$= (x+x'+y+y', 0, 2x+2x'-z-z')$
$= \underbrace{(x+y, 0, 2x-z)}_{\text{"vetor das não linhas"}} + \underbrace{(x'+y', 0, 2x'-z')}_{\text{"vetor das linhas"}}$
$= L(x,y,z) + L(x',y',z')$

(2) $L(\alpha(x,y,z)) = L(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x + \alpha y, 0, 2(\alpha x) - (\alpha z))$ (Aplicar L)
$= (\alpha(x+y), 0, \alpha(2x - z))$ (colocar α em evidência)
$= \alpha(x+y, 0, 2x - z)$ (Puxar o α para trás)
$= \alpha L(x,y,z)$

Logo, L é uma aplicação linear.

Exemplo: $L(x,y) = (x+1, y)$

$L((x,y)+(x',y')) = L(x+x', y+y') = (x+x'+1, y+y')$

$\neq$

$L(x,y) + L(x',y') = (x+1, y) + (x'+1, y') = (x+x'+2, y+y')$

Como, $L((x,y)+(x',y')) \neq L(x,y) + L(x',y')$ temos que L não é uma aplicação linear.

ou

Contraexemplo: $L(1,0) + L(0,1) = (2,0) + (1,1) = (3,1)$
$L((1,0)+(0,1)) = L(1,1) = (2,1) \neq$

Como, $L(1,0) + L(0,1) \neq L((1,0)+(0,1))$ temos que L não é uma aplicação linear.

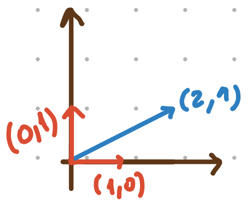
Teorema: $L: V \to W$ é uma aplicação linear então

$L(c_1X_1 + \dots + c_kX_k) = L(c_1X_1) + \dots + L(c_kX_k) = c_1L(X_1) + \dots + c_kL(X_k)$

para $X_1, \dots, X_k \in V$ e $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$.

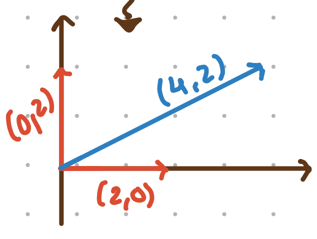
Corolário: $L: V \to W$ é uma aplicação linear. Seja $B = (X_1, \dots, X_n)$ uma base de V. Para qualquer $X \in V$, X é C.L. dos vetores de B logo podemos calcular $L(X)$ sabendo $L(X_1), \dots, L(X_n)$.

Intuição:



- Base (canónica) é $(1,0)$ e $(0,1)$.
- O $(2,1)$ é C.L. de $(1,0)$ e $(0,1)$: é 2 vezes o vetor $(1,0)$ + 1 vez o $(0,1)$:
$(2,1) = 2(1,0) + 1(0,1)$
- Logo, se algo acontecer ao $(1,0)$ e $(0,1)$ isso vai influenciar o $(2,1)$.

$L(x,y) = (2x, 2y)$ vamos aplicar uma transformação linear que pega num vetor e envia-o num vetor 2 vezes maior.



- Base agora é $(2,0)$ e $(0,2)$
- O vetor $(4,2)$ ainda é 2 vezes o 1º vetor da base + 1 vez o 2º vetor da base mas agora os vetores da base são diferentes!

Assim, $(2,1) = 2(1,0) + 1(0,1) \Rightarrow L(2,1) = 2L(1,0) + 2L(0,1)$
$= 2(2,0) + 2(0,2)$
$= (4,2)$

$(2,1)$ é enviado para $(4,2)$ por L.

Moral da história: Se soubermos o que acontece aos vetores da base conseguimos calcular o que acontece a qualquer outro vetor.

Exemplo: $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $L(1,1) = (2,-3)$ e $L(0,1) = (1,2)$.

$\boxed{L(2,3) = ?}$

1º Escrever $(2,3)$ como C.L. de $(1,1)$ e $(0,1)$:

$$(2,3) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(0,1) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

2º Aplicar L

$(2,3) = 2(1,1) + 1(0,1)$ logo $L(2,3) = 2L(1,1) + 1L(0,1)$

$$= 2(2,-3) + 1(1,2) = (5,-4)$$

(*) $\boxed{L(x,y) = ?}$

1º Escrever (x,y) como C.L. de $(1,1)$ e $(0,1)$:

$$(x,y) = \overset{?}{\alpha_1}(1,1) + \overset{?}{\alpha_2}(0,1) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = x \\ \alpha_1 + \alpha_2 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = x \\ \alpha_2 = y - x \end{cases}$$

2º Aplicar L

$(x,y) = x(1,1) + (y-x)(1,1)$ logo $L(x,y) = x\,L(1,1) + (y-x)\,L(1,1)$

$$= x(2,-3) + (y-x)(1,2)$$
$$= (2x, -3x) + (y-x, 2y-2x)$$
$$= (2x - x + y, -3x + 2y - 2x)$$
$$= (x + y, -5x + 2y)$$

Matriz de uma aplicação linear $L: V \to W$

Seja $S = (x_1, \dots, x_n)$ e T bases de V e W, respetivamente.

$$\begin{tikzcd} V & X \arrow[r, "\text{Mudança de}", "\text{base}"'] \arrow[d, "L"'] & {[X]_S} \arrow[d, dashed] \\ W & L(X) \arrow[r, "\text{Mudança de}", "\text{base}"'] & {[L(X)]_T} \end{tikzcd}$$

$$[L(X)]_T = [L]_{S,T}\,[X]_S$$

em que $[L]_{S,T} = \begin{bmatrix} | & & | \\ [L(x_1)]_T & \dots & [L(x_n)]_T \\ | & & | \end{bmatrix}$ é a matriz representativa de L relativamente às bases S e T.

Exemplo (anterior): Seja $L(1,1) = (2,-3)$ e $L(0,1) = (1,2)$ e $S = ((1,1),(0,1))$ base de $\mathbb{R}^2$ e $Bc = ((1,0),(0,1))$ a base canónica de $\mathbb{R}^2$

Como $(x,y) = x\underbrace{(1,1)}_{\text{base } S} + (y-x)\underbrace{(1,1)}_{\text{base } S}$ temos que $[(x,y)]_S = \begin{bmatrix} x \\ y-x \end{bmatrix}$

E temos que: $[L]_{S,Bc} = \begin{bmatrix} | & | \\ [L(1,1)]_{Bc} & [L(0,1)]_{Bc} \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ [(2,-3)]_{Bc} & [(1,2)]_{Bc} \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

matriz cujas colunas são a imagem por L dos vetores de S escritos na base canónica.

NOTA: $[(2,-3)]_{Bc} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ porque $(2,-3) = 2(1,0) - 3(0,1)$ Bc

Logo, $[L(x,y)]_{Bc} = L(x,y) = [L]_{S,Bc}\,[(x,y)]_S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y-x \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2x+y-x \\ -3x+2y-2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ -5x+2y \end{bmatrix}$

Basicamente fizemos o mesmo que em (*) mas com matrizes!

FP6 7 $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \\ x+2y \end{bmatrix}$

(b) $S = ((1,-1),(0,1))$ base de $\mathbb{R}^2$ e $T = ((1,1,0),(0,1,1),(1,-1,1))$ base de $\mathbb{R}^3$

$[L]_{S,T} = \begin{bmatrix} | & | \\ [L(1,-1)]_T & [L(0,1)]_T \\ | & | \end{bmatrix}$

1º Calcular $L(1,-1)$ e $L(0,1)$

$L(1,-1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ 1+1 \\ 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $L(0,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

2º Escrever $L(1,-1)$ e $L(0,1)$ como c.l. dos vetores de T

$L(1,-1) = (0,2,-1) = \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(0,1,1) + \alpha_3(1,-1,1)$

$\Leftrightarrow (0,2,-1) = (\alpha_1+\alpha_3,\ \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3,\ \alpha_2+\alpha_3)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1+\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3 = 2 \\ \alpha_2+\alpha_3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_3 \\ -\alpha_3 - 1 - \alpha_3 - \alpha_3 = 2 \\ \alpha_2 = -1-\alpha_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_3 = -1 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$

Logo, $[L(1,-1)]_T = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$L(0,1) = (1,-1,2) = \beta_1(1,1,0) + \beta_2(0,1,1) + \beta_3(1,-1,1)$

$\Leftrightarrow (1,-1,2) = (\beta_1+\beta_3,\ \beta_1+\beta_2-\beta_3,\ \beta_2+\beta_3)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1+\beta_3 = 1 \\ \beta_1+\beta_2-\beta_3 = -1 \\ \beta_2+\beta_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 = 1-\beta_3 \\ 1-\beta_3+2-\beta_3-\beta_3 = -1 \\ \beta_2 = 2-\beta_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 = -1/3 \\ \beta_3 = 4/3 \\ \beta_2 = 2/3 \end{cases}$

Logo, $[L(0,1)]_T = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$

Assim, $[L]_{S,T} = \begin{bmatrix} | & | \\ [L(1,-1)]_T & [L(0,1)]_T \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & 2/3 \\ -1 & 4/3 \end{bmatrix}$

(c) $L(2,-3) = ?$ $\left(= (2-3, 2+3, 2-2.3) = (-1, 5, -4)\right)$

$$[L(2,-3)]_T = [L]_{S,T}\,[(2,-3)]_S$$

1º Escrever $(2,-3)$ como C.L. dos vetores de S

$(2,-3) = \alpha_1(1,-1) + \alpha_2(0,1) \Leftrightarrow (2,-3) = (\alpha_1, -\alpha_1 + \alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -3 + \alpha_1 = -1 \end{cases}$

Logo, $[(2,-3)]_S = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

2º Calcular $[L(2,-3)]_T = [L]_{S,T}\,[(2,-3)]_S = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & 2/3 \\ -1 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 7/3 \\ -2/3 \\ -10/3 \end{bmatrix}$$

Assim, $L(2,-3) = \frac{7}{3}(1,1,0) - \frac{2}{3}(0,1,1) - \frac{10}{3}(1,-1,1) = (-1,5,-4)$

base T

FP6. Recomendo 1(b)(c), 4 e 16.

O que saber do Cap. 6:

FP6 ex. 1(b) 1(c)

- Mostrar se uma função $L: \mathcal{V} \to W$ é uma aplicação linear
  - Se é então tem de mostrar que para quaisqueres vetores $X, X' \in \mathcal{V}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que:
    (1) $L(X+X') = L(X) + L(X')$ e (2) $L(\alpha X) = \alpha L(X)$
  - se não é então podem dar um exemplo de $X, X' \in \mathcal{V}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $L(X+X') \neq L(X) + L(X')$ ou $L(\alpha X) \neq \alpha L(X)$

FP6 ex. 4

- Dada uma aplicação linear $L: \mathcal{V} \to W$ e uma base $S = (X_1, \dots, X_n)$ de $\mathcal{V}$. Sabendo $L(X_1), \dots, L(X_n)$ saber calcular para qualquer $X \in \mathcal{V}$ $L(X)$ para isso:
  - 1º Escrever X como c.L. de $X_1, \dots, X_n$
    $X = \overset{?}{\alpha_1} X_1 + \dots + \overset{?}{\alpha_n} X_n$
  - 2º Aplicar a função L e sabendo $L(X_1), \dots, L(X_n)$ obtemos $L(X)$:
    $L(X) = \alpha_1 L(X_1) + \dots + \alpha_n L(X_n)$

FP6 ex. 13(b) e 15(a)

- Dada uma aplicação linear $L: \mathcal{V} \to W$ e uma base $S = (X_1, \dots, X_n)$ de $\mathcal{V}$ e uma base $T = (Y_1, \dots, Y_n)$ escrever a matriz representativa de L relativamente às bases S e T, $[L]_{S,T}$.
  - 1º Calcular a imagem por L dos vetores de S, $L(X_1), \dots, L(X_n)$
  - 2º Escrever cada vetor do ponto anterior, $L(X_1), \dots, L(X_n)$ como c.L. dos vetores da base T

$$\left.\begin{array}{l} L(X_1) = \overset{?}{\alpha_1} Y_1 + \dots + \overset{?}{\alpha_n} Y_n \\ \vdots \\ L(X_n) = \overset{?}{\beta_1} Y_1 + \dots + \overset{?}{\beta_n} Y_n \end{array}\right\} \text{resolver cada uma destas equações}$$

  - 3º Construir $[L]_{S,T}$ colocando o valor das incógnitas do ponto anterior nas colunas da matriz, isto é:

$$[L]_{S,T} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & \beta_1 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_n & & \beta_n \end{bmatrix}$$

FP6 ex. 15(b) e 16(c)

- Dada uma aplicação linear $L: \mathcal{V} \to W$ e $S = (X_1, \dots, X_n)$ uma base de S e $T = (Y_1, \dots, Y_n)$ uma base de W saber aplicar a fórmula:

$$[L(X)]_T = [L]_{S,T} [X]_S$$

em que a matriz $[L]_{S,T}$ é a matriz representativa de L relativamente às bases S e T (ver o ponto anterior)

$[X]_S$ são as coordenadas de X na base S, isto é, se $X = \alpha_1 \underbrace{X_1}_{} + \dots + \alpha_n \underbrace{X_n}_{}$ então

bases S

$$[X]_S = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

$[L(X)]_T$ são as coordenadas de $L(X)$ na base T, isto é, se $[L(X)]_T = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$ então

$$L(X) = \beta_1 \underbrace{Y_1}_{} + \dots + \beta_n \underbrace{Y_n}_{}$$

base T