27/11/2025

Aula 22

FP3 20 (d) Se A é não singular / tem inversa, $|A|\neq 0$, e $A^2=A$, então $|A^2|=|A| \Leftrightarrow |A||A|=|A|$, como $|A|\neq 0$ temos que $|A|=\frac{|A|}{|A|}=1$.

(e) Se $A=A^{-1}$ então $|A|=|A^{-1}| \Leftrightarrow |A|=\frac{1}{|A|} \Leftrightarrow |A|^2=1 \Leftrightarrow |A|=\pm 1$.

(f) $A_{3\times 3}$ invertível, $|A|\neq 0$ e, pelo Cap. 3 slide 10, $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\operatorname{adj} A$.

Logo, $|A^{-1}|=\left|\underbrace{\frac{1}{|A|}}_{\in\mathbb{R}}\operatorname{adj} A_{3\times 3}\right| \Leftrightarrow \frac{1}{|A|}=\frac{1}{|A|^3}|\operatorname{adj} A| \Leftrightarrow \frac{|A|^3}{|A|}=|\operatorname{adj} A| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\operatorname{adj} A|=|A|^{3-1} \Leftrightarrow |\operatorname{adj} A|=|A|^2 \Leftrightarrow |\operatorname{adj} A|=\underbrace{|A||A|}_{=|AA|} \Leftrightarrow |\operatorname{adj} A|=|A^2|$ ■

FP5 8 $A=\begin{bmatrix}2 & -2 & 3\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$

(a) Calcular Valores Próprios: $\det(A-\lambda I_3)=0 \Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix}2-\lambda & -2 & 3\\ 0 & 3-\lambda & -2\\ 0 & -1 & 2-\lambda\end{bmatrix}\right)=0$

$\Leftrightarrow (2-\lambda)\det\left(\begin{bmatrix}3-\lambda & -2\\ -1 & 2-\lambda\end{bmatrix}\right)=0 \Leftrightarrow (2-\lambda)\left((3-\lambda)(2-\lambda)-2\right)=0 \Leftrightarrow 2-\lambda=0$ ou $(3-\lambda)(2-\lambda)-2=0$

$\Leftrightarrow \lambda=2$ ou $\lambda^2-5\lambda+4=0 \Leftrightarrow \lambda=2$ ou $\lambda=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4.4}}{2} \Leftrightarrow \lambda=2$ ou $\lambda=4$ ou $\lambda=1$

os valores próprios são 2, 4 e 1. Assim, $A_{3\times 3}$ é diagonalizável porque tem 3 valores próprios distintos.

Subespaços próprios:

$\mathcal{U}_2=\{X\in\mathbb{R}^3: (A-2I_3)X=0\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: \begin{bmatrix}2-2 & -2 & 3\\ 0 & 3-2 & -2\\ 0 & -1 & 2-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$

$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: \begin{bmatrix}0 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: \begin{cases}-2y+3z=0\\ y-2z=0\\ -y=0\end{cases}\right\}$

$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: y=0 \text{ e } z=0\}=\{(x,0,0), x\in\mathbb{R}\}$

$=\{x(1,0,0), x\in\mathbb{R}\}=\langle(1,0,0)\rangle$

C.A.
$\begin{cases}-2y+3z=0\\ y-2z=0\\ -y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2.0+3z=0\\ 0-2z=0\\ y=0\end{cases}$
$\Leftrightarrow y=0$ e $z=0$

$(1,0,0)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 2.

$\mathcal{U}_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: (A-1I_3)X=0\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: \begin{bmatrix}2-1 & -2 & 3\\ 0 & 3-1 & -2\\ 0 & -1 & 2-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \right\}$$

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = -z \text{ e } y = z \}$$

$$= \{ (-z, z, z),\ z \in \mathbb{R} \} = \{ z(-1,1,1),\ z \in \mathbb{R} \}$$

C.A.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3y = 0 \\ y = z \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases}$$

$= \langle (-1,1,1) \rangle$ $(-1,1,1)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 1.

$$\mathcal{U}_4 = \{ X \in \mathbb{R}^3 : (A - 4I_3)X = 0 \} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 2-4 & -2 & 3 \\ 0 & 3-4 & -2 \\ 0 & -1 & 2-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} -2x - 2y + 3z = 0 \\ -y - 2z = 0 \\ -y - 2z = 0 \end{cases} \right\}$$

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 7/2\, z \text{ e } y = -2z \}$$

$$= \{ (7/2\, z, -2z, z),\ z \in \mathbb{R} \} = \{ z(7/2, -2, 1), z \in \mathbb{R} \}$$

$$= \langle (7/2, -2, 1) \rangle \underset{(\times 2)}{=} \langle (7, -4, 2) \rangle$$

C.A.

$$\begin{cases} -2x - 2y + 3z = 0 \\ -y - 2z = 0 \\ -y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4z + 3z = 0 \\ y = -2z \\ y = -2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = -7z \\ y = -2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7/2\, z \\ y = -2z \end{cases}$$

($(7/2, -2, 1)$ ou) $(7, -4, 2)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 4.

(b) Como $A_{3\times3}$ tem 3 valores próprios distintos temos que A é diagonalizável.

— ou —

Como $A_{3\times3}$ tem 3 vetores próprios l.i., o $(1,0,0)$, $(-1,1,1)$ e $(7,-4,2)$, temos que A é diagonalizável.

Logo, existe P - invertível e D - diagonal tal que $P^{-1}AP = D$ sendo:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(c) Como $A = PDP^{-1}$ temos que:

$$A^5 = AAAAA = PD\underbrace{P^{-1}P}_{=I_3}D\underbrace{P^{-1}P}_{=I_3}D\underbrace{P^{-1}P}_{=I_3}D\underbrace{P^{-1}P}_{=I_3}DP^{-1} = PD^5P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^5 & 0 & 0 \\ 0 & 1^5 & 0 \\ 0 & 0 & 4^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & -1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 32 & 48 & -16 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & -512/3 & 512/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & -1147 & 1178 \\ 0 & 683 & -682 \\ 0 & -341 & 342 \end{bmatrix}$$

C.A. - Inversa de P:

$$[P|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_3 = L_3 - L_2 \\ L_1 = L_1 + L_2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3/6}{\sim} \dots$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/6 & 1/6 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 = L_2 + 4L_3 \\ L_1 = L_1 - 3L_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/6 & 1/6 \end{array}\right] = [I_3 | P^{-1}]$$

Aplicação ao cálculo da inversa e potência: Se A é diagonalizável, isto é existe P invertível e D diagonal tal que $A = PDP^{-1}$ ∴

$$A^K = \underbrace{PD\cancel{P^{-1}} \dots \cancel{P}DP^{-1}}_{K \text{ vezes}} = PD^KP^{-1}$$

$$A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}D^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$$

NOTA: $\dim \mathcal{U}_{\lambda_i} = \dim \mathcal{N}(A - \lambda_i I) = \text{nul}(A - \lambda_i I) = \text{nº de colunas de } A - \text{car}(A - \lambda_i I)$

slide 4 — "espaço nulo" — Cap. 1.1 Slide 33 — "nulidade"

Exemplo $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ é diagonalizável?

$\det(A - \lambda I_2) = 0 \iff \det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \iff (3-\lambda)^2 = 0$

$\iff \lambda = 3$ valor próprio de A

Pelo Teorema do Slide 4, $1 \leq \dim \mathcal{U}_3 \leq 2$. A é diagonalizável se e só se $\dim \mathcal{U}_3 = 2$.

$\dim \mathcal{U}_3 = \text{nº de colunas de } A - \text{car}(A - 3I_2) = 2 - 1 = 1 \neq 2$

logo não é diagonalizável.

C.A.

$A - 3I_2 = \begin{bmatrix} 3-3 & 3 \\ 0 & 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

escalonada e $\text{car}(A - 3I_2) = 1$

— ou —

$\mathcal{U}_3 = \{X \in \mathbb{R}^2 : (A - 3I_2)X = 0\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} = \{(x,0), x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0), x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0) \rangle$

como $(1,0)$ é o único vetor próprio (l.i.) de $A_{2\times 2}$ a matriz não é diagonalizável (para ser teríamos de ter 2 vetores próprios l.i.)

A é simétrica ($A = A^T$) $\iff$ A é ortogonalmente diagonalizável, isto é, P é ortogonal:

$$A = PDP^{-1} = PDP^T$$

e as colunas de P são os vetores próprios de A normalizados formando uma base o.n. de $\mathbb{R}^n$.

$\Downarrow$

os vetores próprios associados a valores próprios distintos são ortogonais.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica $\Rightarrow$ é ortogonalmente diagonalizável

1º Calcular os valores próprios: $\det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$

$\Leftrightarrow (1-\lambda)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = \dfrac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 + 4 \cdot 1}}{2} \Leftrightarrow \lambda = 3$ ou $\lambda = -1$ são os valores próprios de A

2º Calcular os vetores próprios

$\mathcal{U}_3 = \{X \in \mathbb{R}^2 : (A - 3I_2)X = 0\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\} = \{(x,x), x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,1), x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1) \rangle$

$\mathcal{U}_{-1} = \{X \in \mathbb{R}^2 : (A - (-1)I_2)X = 0\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = -y\} = \{(-y,y), y \in \mathbb{R}\} = \{y(-1,1), y \in \mathbb{R}\} = \langle (-1,1) \rangle$

3º Normalizar os vetores

$\dfrac{(1,1)}{\|(1,1)\|} = \dfrac{(1,1)}{\sqrt{1^2+1^2}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\dfrac{(-1,1)}{\|(-1,1)\|} = \dfrac{(-1,1)}{\sqrt{(-1)^2+1^2}} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

4º Construir P e D: $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

FP5 até ao ex. 15.

O que saber do Cap. 5.1:

- Calcular valores próprios

  $\det(A-\lambda I_n)=0$

- Calcular vetores próprios associados a um valor próprio λ_i:

  $\mathcal{U}_{\lambda_i} = \{X \in \mathbb{R}^n : (A-\lambda_i I_n)X=0\}$

- Quando é que uma matriz é diagonalizável?

$A_{n\times n}$ com polinómio característico $p_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_n)=(\lambda_1-\lambda)^{n_{\lambda_1}}\cdots(\lambda_k-\lambda)^{n_{\lambda_k}}$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{A possui } n \text{ vetores próprios l.i.}\\ \text{ou}\\ \dim(\mathcal{U}_{\lambda_i})=n_{\lambda_i},\ i=1,\dots,k\end{array}} \iff \boxed{\text{A é diagonalizável}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{A possui } n \text{ valores próprios}\\ \text{distintos}\end{array}} \begin{array}{c}\Rightarrow\\ \not\Leftarrow\end{array} \boxed{\text{A é diagonalizável}}$$

- Se A é diagonalizável então construir P (as colunas são os vetores próprios de A) e D (a diagonal principal são os valores próprios) tal que $A=PDP^{-1}$.

FP5 Recomendo 1(a) e 1(b).

- Diagonalizar ortogonalmente uma matriz simétrica, isto é, as colunas de P são os vetores próprios a dividir pela sua norma e a matriz diagonal D tem os valores próprios pela mesma ordem que escrevemos os vetores próprios em P.

FP5 Recomendo 13(b)