Departamento de Matemática **Universidade de Aveiro**

Álgebra Linear e Geometria Analítica - A

Exame Final **19 de Janeiro de 2024**

Justifique devidamente as respostas a todas as questões

Duração total do exame: 2h30m

---

*(2 val.)***1)** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, o vetor $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e o sistema de equações lineares $AX = b$, onde $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ é o vetor das incógnitas. Resolva o sistema $AX = b$, através do método de fatorização $A = LU$.

(Nota: em alternativa pode resolver o sistema pelo método de eliminação de Gauss, mas neste caso a questão terá a cotação de 1 valor).

*(2 val.)***2)** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, o vetor $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e o sistema de equações lineares $AX = b$, onde $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ é o vetor das incógnitas. Justifique que o sistema $AX = b$ é um sistema de Cramer e determine o valor da incógnita z pela regra de Cramer.

*(2 val.)***3)** Determine a matriz A tal que $(A + I_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

*(4 val.)***4)** Considere o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$, F, com base $\mathscr{B} = \left((\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0), (0, 0, 1) \right)$.

a) Mostre que $\mathscr{B}$ é uma base ortonormada de F.

b) Determine a projeção ortogonal do vetor $(1, 2, 3)$ sobre F.

c) Encontre a solução dos mínimos quadrados do sistema

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

e calcule o erro dos mínimos quadrados.

(v.s.f.f)

(2 val.) **5)** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & 2 \end{bmatrix}$, onde a é um parâmatro real.

a) Calcule os valores próprios de A.

b) Determine os valores de a para os quais a matriz A é diagonalizável.

(1,5 val.) **6)** Considere a matriz simétrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 20 \end{bmatrix}$.

a) Usando o Critério de Sylvester, justifique que a forma quadrática $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $Q(X) = X^T AX$, para $X \in \mathbb{R}^3$, é definida positiva.

b) O que pode dizer acerca dos valores próprios de A?

(2,5 val.) **7)** Considere a cónica de equação

$$5x^2 - 4xy + 5y^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0.$$

Obtenha uma equação reduzida da cónica e classifique-a.

(3 val.) **8)** Considere a aplicação linear $L : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ definida por

$$L(x, y, z) = (x - z, -y + 2z, x - y + z).$$

a) Determine uma base do núcleo de L e a sua dimensão. L é injetiva?

b) Determine a matriz de representativa de L relativamente à base $\mathscr{B} = ((1, -1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1))$ de $\mathscr{R}^3$, $[L]_{\mathscr{B},\mathscr{B}}$.

(1 val.) **9)** Justifique as seguintes afirmações (verdadeiras).

a) Considere a aplicação linear $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^n$. Se L é injetiva então $n \geq 4$.

b) Seja $\{u, v, w\}$ um conjunto ortogonal de vetores de $\mathbb{R}^n$. Então $\{u, \alpha v + \beta w\}$ é também um conjunto ortogonal, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Estas notas não constituem uma resolução formal dos exercícios do Exame.

1 1º Escalonar $A \sim U$ (sem trocar linhas nem multiplicar linhas por um escalar)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{L_2 = L_2 + 2L_1}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{L_3 = L_3 - L_2}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = U \text{ escalonada}$$

2º construir L

$$\begin{bmatrix} -1 & & \\ 2 & 1 & \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}_{\div(-1) \,|\, \div 1 \,|\, \div(-4)} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é triangular inferior com 1's na diagonal principal.

Temos que $A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Assim, $AX = b \Leftrightarrow L\underbrace{UX}_{=Y} = b$
$\Leftrightarrow LY = b$.

3º Resolver $LY = b$, $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

$$[L|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2 + 2L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right] = [C|D]$$

$$LY = b \Leftrightarrow CY = D \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 3 \\ y_3 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

4º Resolver $UX = Y$

$$[U|Y] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right] \underset{\substack{L_3 = -\frac{L_3}{4} \\ L_1 = L_1 - L_2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 = L_2 - 3L_3 \\ L_1 = L_1 + 2L_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] = [E|F]$$

$$UX = Y \Leftrightarrow EX = F \Leftrightarrow \begin{cases} -x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ é a solução do sistema $AX = B$.

3 $(A + I_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow ((A + I_2)^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \Leftrightarrow A + I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} - I_2$

Calcular a inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2 - 2L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right] \underset{L_1 = L_1 + 2L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2 = -L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

Logo, $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - I_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$