Aula 2

18/09/2025

- Seja $A_{3\times2} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B_{2\times1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$(AB)^T = \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}_{3\times2}\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{2\times1}\right)^T = \begin{bmatrix} 1\times0+(-2)\times1 \\ 1\times0+0\times1 \\ 2\times0+3\times1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B^TA^T = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{1\times2}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{2\times3} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^TB^T = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{2\times3}\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{1\times2} \times$$

O produto A^TB^T não está bem definido porque o nº de colunas de A^T é diferente do nº de linhas de B^T.

Assim temos que, $\boxed{(AB)^T = B^TA^T \neq A^TB^T}$

FP1 1 (d)

$$DA = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{2\times3}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}_{3\times2} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}}_{=2\times2}$$

$= \checkmark$

nº de linhas de D
×
nº de col. de A
$= 2 \times 2$

(f) $\frac{1}{5}\left(I_2 - (DA)^2\right)$

$$= \frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}^2\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 15 & 16 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1-1 & 0-0 \\ 0-15 & 1-16 \end{bmatrix}$$

$$= 1/5\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -15 & -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -15/5 & -15/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$$

(ver os slides de revisão de sistemas lineares)

Sistema de equações lineares / sistema linear:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

é uma coleção de eq. lineares em que $x_1 \dots x_n$ são as variáveis/incógnitas, $b_1 \dots b_n$ os termos independentes e a_{ij}, $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$, o coeficiente da equação i a multiplicar por x_j

O sistema é homogéneo se e só se $b_1 = \dots = b_m = 0$

Exp.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

é homogéneo: os termos independentes são todos 0.

$a_{21} = 2 \rightarrow$ 2ª eq. coeficiente de x_1
$a_{12} = 1 \rightarrow$ 1ª eq. coeficiente de x_2
$a_{13} = 0 \rightarrow$ 1ª eq. coef. de x_3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ 2(-x_2) + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ -2x_2 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ -x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = -x_2 \end{cases}$$

O sistema é possível indeterminado. O conjunto de soluções é:
$\{(-x_2, x_2, -x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\}$.

Forma matricial de um sistema linear:

m - nº de equações e n - nº de incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{A}_{\substack{\text{matriz dos} \\ \text{coeficientes} \\ (m \times n)}} \; \underbrace{X}_{\substack{\text{coluna das} \\ \text{incógnitas} \\ (n \times 1)}} = \underbrace{B}_{\substack{\text{coluna} \\ \text{dos termos} \\ \text{independentes} \\ (m \times 1)}}$$

$=$

Exp:

(1)
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ \quad 2x_2 - 8x_3 = 5 \\ 5x_1 - \quad 5x_3 = 10 \end{cases}, \quad X_{3\times 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad A_{3\times 3} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 1^a\ eq. \\ 2^a\ eq. \\ 3^a\ eq \end{array}$$

(2)
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underset{2\times 2}{A}\ \underset{2\times 1}{X} = \underset{2\times 1}{B} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \\ 1^a eq. \\ 2^a eq. \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 2x_1 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \checkmark$$

A matriz $[A|B]$ é a matriz ampliada e tem ordem $m \times (n+1)$

Exp.
$$\begin{cases} x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow AX = B \Leftrightarrow \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} = \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right]$$ é a matriz ampliada

Pivot: é a 1ª entrada não nula de cada linha

Exp.
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
Pivot da linha 1 : 1
" " linha 2 : 1
" " linha 3 : 2

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
" " linha 1 : 2
linha 2 não tem

Matriz escalonada por linhas

escalonar

- Abaixo de cada pivot só temos 0's
- Dadas 2 linhas consecutivas, não nulas, o pivot da linha mais acima está mais à direita do pivot da linha mais abaixo
- Se existem linhas nulas estão no fundo da matriz.

Exp: Quem está na forma escalonada por linhas?

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ✓, $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ✓, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ✗ abaixo do pivot L_2 não estão 0's, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ✗ pivot da L_2 está mais à direita do que da L_1, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ✓

◯ → os pivots de cada linha estão sublinhados

Abreviação: L_1 - linha 1, L_2 - linha 2, L_3 - linha 3...

Matriz escalonada por linhas reduzida:

- Escalonada por linhas
- Pivots são todos iguais a 1
- Acima de cada pivot só temos zeros.

Exp Quem está na forma escalonada por linhas reduzida?

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ✓ $= I_2$ identidade de ordem 2, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ ✗ O pivot de L_2 e L_4 são $\neq$ de 1, $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ✓, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ✓, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ✓, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ✗ acima do pivot de L_2 está um 1.

Nos próximos episódios:

Sistema $\xrightarrow{✓}$ forma matricial $\xrightarrow[\text{aula}]{\text{Próxima}}$ Escalonar (e reduzir) $[A|B]$ $\xrightarrow[\text{aula}]{\text{Próxima}}$ método para encontrar a solução de um sistema

FP1 até ao ex: 15

Recomendo o ex. 15 (só indicar)