Aula 25

15/12/2025

Equação geral de uma cónica: $X^TA_{2\times 2}X + B_{1\times 2}X + \mu = 0$
em que $X \in \mathbb{R}^2$ e A é simétrica

Equação geral de uma quádrica: $X^TA_{3\times 3}X + B_{1\times 3}X + \mu = 0$
em que $X \in \mathbb{R}^3$ e A é simétrica

As quádricas generalizam as cónicas em $\mathbb{R}^3$.

Equações reduzidas das quádricas:

elipsoide	hiperbolóide	parabolóide
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	1 folha $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	elíptico $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$
	2 folhas $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	hiperbólico $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$

Simplificamos a equação de uma quádrica pelo mesmo processo das cónicas. Assim,

Processo para simplificar $X^TAX+BX+\mu=0$:

- Se temos termos cruzados (xy, yz, xz) então:
  - Calcular os valores próprios de A
  - Calcular os vetores próprios de A
  - Dividir cada vetor próprio pela sua norma
  - construir P e D
  - Mudança de variável $X=P\hat{X}$ e calcular $\hat{B}=BP$
  - $X^TAX+BX+\mu=0 \Leftrightarrow \hat{X}^TD\hat{X}+\hat{B}\hat{X}+\mu=0$
- Translação dos eixos (se necessário):
  - caso 1 ($\mathbb{R}^3$): $x^2+3y^2-6y+z^2=6 \Leftrightarrow x^2+3(y-2y)+z^2=6$

$$\Leftrightarrow x^2+3\left(y-2y+(2/2)^2-(2/2)^2\right)+z^2=6$$
$$\Leftrightarrow x^2+3(y^2-2y+1^2)-3+z^2=6$$
$$\Leftrightarrow x^2+3(\underbrace{y-1}_{=\tilde{y}})^2+z^2=9 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{\tilde{y}^2}{3}+\frac{z^2}{9}=1$$

elipsoide

  - caso 2 ($\mathbb{R}^3$) $-x^2+3y^2-6y-18z=6 \Leftrightarrow -x^2+3(\underbrace{y-1}_{=\tilde{y}})^2-18z=9$

$$\Leftrightarrow -x^2+3\tilde{y}^2-18z-9=0 \Leftrightarrow -x^2+3\tilde{y}^2-18(\underbrace{z+1/2}_{=\tilde{z}})=0$$
$$\Leftrightarrow \tilde{z}=-\frac{x^2}{18}+\frac{\tilde{y}^2}{6}$$

Parabolóide hiperbólico

- Classificar a cónica ($\mathbb{R}^2$) ou quádrica ($\mathbb{R}^3$)

FPS 18 (e) $3y^2+4xz+6y+1=0$

($\mathbb{R}^3$)

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&2\\0&3&0\\2&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&6&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}+1=0$$

$$\Leftrightarrow X^TAX+BX+1=0$$

• Eliminar 4xz.

• Calcular os valores próprios de A

$\det(A-\lambda I_3)=0 \Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}\right)=0 \Leftrightarrow (3-\lambda)\det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{bmatrix}\right)=0$

$\Leftrightarrow (3-\lambda)(\lambda^2-4)=0 \Leftrightarrow \lambda=3$ ou $\lambda^2-4=0 \Leftrightarrow \lambda=3$ ou $\lambda=2$ ou $\lambda=-2$

Os valores próprios de A são 3, -2 e 2.

• calcular os vetores próprios de A.

$U_3=\{X\in\mathbb{R}^3:(A-3I_3)X=0\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\begin{cases} -3x+2z=0 \\ 2x-3z=0 \end{cases}\right\}$

C.A. $\begin{cases} -3x+2z=0 \\ 2x-3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{9}{2}z+2z=0 \\ x=\frac{3}{2}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ x=0 \end{cases}$

$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x=0 \text{ e } z=0\}$

$=\{(0,y,0), y\in\mathbb{R}\}=\{y(0,1,0), y\in\mathbb{R}\}$

$=\langle(0,1,0)\rangle$ (0,1,0) é um vetor próprio associado ao valor próprio 3

$U_2=\{X\in\mathbb{R}^3:(A-2I_3)X=0\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\begin{cases} -2x+2z=0 \\ y=0 \\ 2x-2z=0 \end{cases}\right\}$

C.A. $\begin{cases} -2x+2z=0 \\ y=0 \\ 2x-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=0 \end{cases}$

$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: y=0 \text{ e } x=z\}$

$=\{(z,0,z), z\in\mathbb{R}\}=\{z(1,0,1), z\in\mathbb{R}\}=\langle(1,0,1)\rangle$

(1,0,1) é um vetor próprio associado ao valor próprio 2.

$U_{-2}=\{X\in\mathbb{R}^3:(A-(-2)I_3)X=0\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\begin{cases} 2x+2z=0 \\ y=0 \\ 2x+2z=0 \end{cases}\right\}$

C.A. $\begin{cases} 2x+2z=0 \\ y=0 \\ 2x+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=0 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=0 \end{cases}$

$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: y=0 \text{ e } x=-z\}=\{(-z,0,z), z\in\mathbb{R}\}$

$=\{z(-1,0,1), z\in\mathbb{R}\}=\langle(-1,0,1)\rangle$ (-1,0,1) é um vetor próprio associado ao valor próprio -2.

- Dividir cada vetor próprio pela sua norma

$$\frac{(0,1,0)}{\|(0,1,0)\|} = \frac{(0,1,0)}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}} = (0,1,0)$$

$$\frac{(1,0,1)}{\|(1,0,1)\|} = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{(-1,0,1)}{\|(-1,0,1)\|} = \frac{(-1,0,1)}{\|(-1,0,1)\|} = \frac{(-1,0,1)}{\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

- construir P e D tal que $A = PDP^T$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad e \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

- Seja $X = P\hat{X}$ em que $\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix}$ e $\hat{B} = BP = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- Assim, $X^TAX + BX + 1 = 0 \Leftrightarrow \hat{X}^T D \hat{X} + \hat{B}\hat{X} + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\hat{x}^2 + 2\hat{y}^2 - 2\hat{z}^2 + 6\hat{x} = -1$$

- Eliminar o $6\hat{x}$: completar o quadrado

$$\Leftrightarrow 3(\hat{x}^2 + 2\hat{x}) + 2\hat{y}^2 - 2\hat{z}^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow 3(\hat{x}^2 + 2\hat{x} + (2/2)^2 - (2/2)^2) + 2\hat{y}^2 - 2\hat{z}^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow 3(\hat{x}^2 + 2\hat{x} + 1^2) + 2\hat{y}^2 - 2\hat{z}^2 - 3 = -1$$

$$\Leftrightarrow 3\underbrace{(\hat{x}+1)^2}_{=\tilde{x}^2} + 2\hat{y}^2 - 2\hat{z}^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\tilde{x}^2}{2} + \hat{y}^2 - \hat{z}^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{\tilde{x}^2}{2/3} + \hat{y}^2 - \hat{z}^2 = 1$$

(termos ao quadrado com 1 sinal negativo e constante)

hiperbolóide de uma folha

C.A. $\tilde{x}^2 \times \frac{3}{2} = \tilde{x}^2 \div \frac{2}{3} = \frac{\tilde{x}^2}{2/3}$

FP5 toda. Recomendo 18(a).

O que saber do Cap. 5.3.:

- Equações reduzidas das cónicas ($\mathbb{R}^2$)
elipse ($x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$), hipérbole ($x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$), parábola ($y^2 = ax$)

- Equações reduzidas das quádricas ($\mathbb{R}^3$)
elipsoide ($x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$), hiperbolóide de 1 folha ($x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$), hiperbolóide 2 folhas ($x^2/a^2 - y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$), parabolóide elíptico ($z = x^2/a^2 + y^2/b^2$), parabolóide hiperbólico ($z = x^2/a^2 - y^2/b^2$)

- Simplificar $X^T A X + BX + \mu = 0$ com $X \in \mathbb{R}^n$:
  - se existem termos cruzados (xy, yz, xz) então:
    - calcular os valores próprios de A: $\det(A - \lambda I_n) = 0$
    - calcular os vetores próprios de A: $\mathcal{U}_{\lambda_i} = \{X \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda_i I_n)X = 0\}$
    - Dividir cada vetor próprio pela sua norma
    - construir P e D tal que $A = PDP^T$. Na diagonal principal de D estão os valores próprios de A e os vetores próprios normalizados estão pela mesma ordem nas colunas de P.
    - Mudança de variável $X = P\hat{X}$ e calcular $\hat{B} = BP$
    - Assim, $X^T A X + BX + \mu = 0 \Leftrightarrow \hat{X}^T D \hat{X} + \hat{B}\hat{X} + \mu = 0$
  - Se necessário fazer uma translação dos eixos
    - caso 1 ($\mathbb{R}^2$): $2x^2 + y^2 + 12x - 4y + 18 = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 + 6x) + (y^2 - 4y) + 18 = 0$
    $\Leftrightarrow 2(x^2 + 6x + (6/2)^2 - (6/2)^2) + (y^2 - 4y + (4/2)^2 - (4/2)^2) + 18 = 0$
    $\Leftrightarrow 2(x^2 + 6x + 3^2) + (y^2 - 4y + 2^2) - 2 \times 3^2 - 2^2 + 18 = 0$
    $\Leftrightarrow 2\underbrace{(x+3)}_{=\tilde{x}}{}^2 + \underbrace{(y-2)}_{=\tilde{y}}{}^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{\tilde{x}^2}{2} + \frac{\tilde{y}^2}{4} = 1$ elipse
    - caso 2 ($\mathbb{R}^3$): $-x^2 + 3y^2 - 6y - 18z = 6 \Leftrightarrow -x^2 + 3(y^2 - 2y) - 18z = 6$
    $\Leftrightarrow -x^2 + 3(y^2 - 2y + (2/2)^2 - (2/2)^2) - 18z = 6$
    $\Leftrightarrow -x^2 + 3(y^2 - 2y + 1^2) - 18z - 3 = 6$
    $\Leftrightarrow -x^2 + 3\underbrace{(y-1)}_{=\tilde{y}}{}^2 - 18z - 9 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 3\tilde{y}^2 - 18\underbrace{(z + 1/2)}_{=\tilde{z}} = 0$
    $\Leftrightarrow -x^2 + 3\tilde{y}^2 - 18\tilde{z} = 0 \Leftrightarrow 18\tilde{z} = -x^2 + 3\tilde{y}^2$
    $\Leftrightarrow \tilde{z} = \frac{-x^2}{18} + \frac{\tilde{y}^2}{6}$ parabolóide hiperbólico.
  - Por fim, classificar a cónica ($\mathbb{R}^2$) ou quádrica ($\mathbb{R}^3$)

FP5. Recomendo 17(a) e 18(a).