Aula 23

4/12/2025

FPS 7 (b) Se A é diagonalizável então existe P invertível e D diagonal tal que $A = PDP^{-1}$.
Logo, $A^k = PD^kP^{-1}$ (ver Cap. 5.1. slide 15) sendo P invertível, por hipótese, e $D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$ diagonal em que $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ são os valores próprios de A.
Assim, A^k é diagonalizável.

$Q(X) = X^TAX$ é uma **forma quadrática** onde $X \in \mathbb{R}^n$ (é um vetor) e $A_{n\times n}$ é a matriz simétrica da forma quadrática.

Exemplo

$$Q(x_1, x_2) = X^TAX = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}}_{\text{simétrica!}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ -x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}$$

$$= x_1(x_1 - x_2) + x_2(x_2 + 3x_2) = x_1^2 - x_1x_2 - x_2x_1 + 3x_2^2 = 1x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2$$

Exemplo $Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$\div 2$

Exemplo $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 1x_1x_2 + 6x_1x_3$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 3 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$\div 2$ $\quad \div 2$

⚠ Temos termos ao quadrado e termos cruzados!

Mudança de variável / Diagonalização

Como A é simétrica então é diagonalizável ortogonalmente, isto é, existe P ortogonal ($P^{-1} = P^T$) e D diagonal tal que $D = P^TAP$.

Aplicando a mudança de variável $\boxed{X = PY}$ onde $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ temos que:

$$Q(X) = X^TAX = (PY)^TA(PY) = Y^T\underbrace{P^TAP}_{=D}Y = \begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n^2 y_n^2$$

Assim, eliminamos os termos cruzados!!

Exemplo (aula anterior)

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 + \cancel{\underbrace{4x_1x_2}_{2x_1x_2 + 2x_2x_1}} + x_2^2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{simétrica!}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$ temos que $D = P^TAP$

em que: $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ← valores próprios de A

$\downarrow$ vetor próprio do 3 $\qquad$ $\downarrow$ vetor próprio do -1

Mudança de variável $X = PY$ em que $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ temos que

$$Q(X) = X^TAX = Y^TDY = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 3y_1^2 - y_2^2$$

Eliminamos o termo cruzado (x_1x_2)!!

Classificação de uma forma quadrática $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ em que $Q(X) = X^TAX$ é:

		Critério de Sylvester
definida positiva se $Q(X) > 0\ \forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Por exemplo: $Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 5x_2^2$	⟺ Todos os valores de A são positivos	⟺ Todos os m.p.d. são positivos
semi-definida positiva se $Q(X) \geq 0\ \forall X \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Por exemplo: $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2$ temos $Q(0, 0, \underbrace{1}_{\neq 0}) = 0$	⟺ Todos os valores de A são não negativos (≥ 0)	⟺ Todos os m.p. são não negativos (≥ 0)
definida negativa se $Q(X) < 0\ \forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Por exemplo: $Q(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$	⟺ Todos os valores de A são negativos	⟺ Todos os m.p.d. de ordem par são positivos e os de ordem ímpar negativos
semi-definida negativa se $Q(X) \leq 0\ \forall X \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Por exemplo: $Q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2$ temos $Q(0, \underbrace{1}_{\neq 0}, \underbrace{1}_{\neq 0}) = 0$	⟺ Todos os valores de A são não positivos (≤ 0)	⟺ Todos os m.p. de ordem par são não negativos (≥ 0) e os de ordem ímpar são não positivos (≤ 0)
indefinida se nenhuma das anteriores se verifica. Por exemplo, $Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 2x_2^2$, $Q(0,1) = -2$, $Q(1,0) = 2$, $Q(1,1) = 0$	⟺ Se nenhuma das anteriores se verifica	⟺ Nenhuma das anteriores

Critério de Sylvester: classificar uma forma quadrática $Q(x) = x^T A x$ $(= Y^T D Y)$ <u>sem</u> calcular os valores próprios de A. Usando:

Menores principais (m.p.) o determinante da matriz quando eliminamos linhas e colunas em pares correspondentes

Menores principais dominantes de ordem k, denotado por Δ_k, é o determinante quando eliminamos as últimas $n-k$ linhas e colunas.

Exemplo $A = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Os m.p. de ordem 2 são: $\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 5$, $\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 26$ e $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5$

$L_3\ C_3$ $\qquad L_2\ C_2$ $\qquad L_1, C_1$

Os m.p.d. são: $\Delta_1 = |10| = 10$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$; $\Delta_3 = |A| = 3$

L_2, C_2 / L_3, C_3 $\qquad L_3, C_3$ $\qquad$ (não eliminados nada)

Assim, pelo critério de Sylvester $Q(x) = x^T A x$ é definida positiva porque os m.p.d. são todos positivos Δ_1, Δ_2 e $\Delta_3 \geq 0$. Logo, todos os valores próprios de A são positivos.

FP5 16 (d) $A = \begin{bmatrix} -10 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ M.p.d são:

$\Delta_1 = |-10| = -10$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -10 & -5 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = 5$ e $\Delta_3 = |A| = -3$

Q é definida negativa porque os m.p.d. de ordem par são positivos $\Delta_2 > 0$ e os de ordem ímpar são negativos $\Delta_1, \Delta_3 < 0$. Logo, todos os valores próprios de A são negativos.

FP5 16 (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ (m.p.d. são: $\Delta_1 = |1| = 1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ e $\Delta_3 = |A| = 0$)

M.p. de ordem 1: $|1| = 1$, $|1| = 1$, $|4| = 4$

L_2, C_2 / L_3, C_3 $\qquad L_1, C_1$ / L_3, C_3 $\qquad L_1, C_1$ / L_2, C_2

M.p. de ordem 2: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

L_1, C_1 $\qquad L_2, C_2$ $\qquad L_3, C_3$

M.p. de ordem 3: $\Delta_3 = |A| = 0$
(não eliminamos nada)

Todos os m.p. são não negativos logo Q é semi-definida positiva e A tem valores próprios não negativos (≥ 0)

FP5 16 (a) $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

m.p. de ordem 1: $\Delta_1 = |-1| = -1$, $|-1| = -1$, $|-4| = -4$ ≤ 0

L2, C2 L3, C3 L1, C1 L3, C3 L2, C2 L1, C1

m.p. de ordem 2: $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 4$, $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 4$ ≥ 0

L3, C3 L1, C1 L2, C2

m.p. de ordem 3: $\Delta_3 = |A| = 0$ ≤ 0

Q é semi-definida negativa porque os menores principais de ordem par são não negativos (≥ 0) e os de ordem ímpar são não positivos (≤ 0). Logo, A tem valores próprios não positivos (≤ 0).

FP5 até ao ex. 16. Recomendo 16(b)

O que saber do Cap. 5.2:

- Dada uma forma quadrática $Q(X)$ escrever a matriz simétrica A associada

Por exemplo: $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 8x_2^2 + 3x_3^2 + \underset{(\div 2)}{8}x_1x_2 + \underset{(\div 2)}{4}x_2x_3$ pode ser escrita como $Q(X) = X^TAX$ em que

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad e \quad A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (x_1) & (x_2) & (x_3) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} (x_1) \\ (x_2) \\ (x_3) \end{array}$$

- Dada uma matriz simétrica A escrever a forma quadrática $Q(X) = X^TAX$.

Por exemplo: Seja $A = \begin{bmatrix} -10 & -5 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$ (simétrica) qual é a forma quadrática $Q(X) = X^TAX$?

$$Q(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 & -5 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10x_1 - 5x_2 \\ -5x_1 - 3x_2 \end{bmatrix} = x_1(-10x_1 - 5x_2) + x_2(-5x_1 - 3x_2)$$

$$= -10x_1^2 - 3x_2^2 - 10x_1x_2$$

- classificar uma forma quadrática $Q(x) = X^TAX$:

				Critério de Sylvester
definida positiva	⇔	todos os valores próprios de A são positivos	⇔	os menores principais **dominantes** de A são positivos
semi-definida positiva	⇔	todos os valores próprios de A são não negativos	⇔	todos os menores principais de A são não negativos
definida negativa	⇔	todos os valores próprios de A são negativos	⇔	os menores principais **dominantes** de A de ordem par são positivos e os de ordem ímpar são negativos
semi-definida negativa	⇔	todos os valores próprios de A são não positivos	⇔	os menores principais de A de ordem par são não negativos e os de ordem ímpar são não positivos
indefinida	⇔	nenhuma das anteriores se verifica	⇔	nenhuma das anteriores se verifica

- Fluxograma para classificar $Q(X)$ usando o Critério de Sylvester: