

Folha Prática 2

Atenção: Estas notas não constituem uma resolução formal e rigorosa dos exercícios das Folhas Práticas. Os exercícios com um grau de dificuldade acrescido encontram-se assinalados com (★).

Última atualização: 8 de outubro de 2025

Notas sobre os exercícios: 1(a), 1(b), 1(c), 2(c)i., 2(c)iii. 2(d)i., 5(e), 14, 18(b), 19(b), 21, 24(b) e 24(f).

1(a). $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y = 0 \text{ e } z = 1\} = \{(-2, 1, 1), (4, -2, 1), \dots\}$

S é um subespaço de \mathbb{R}^3 ?

- $(0, 0, 0) \in S$? Não, porque os vetores que estão no conjunto S têm de ter a terceira coordenada igual a 1 e o vetor nulo, $(0, 0, 0)$, tem a terceira coordenada igual a 0 ($0 \neq 1$).

Assim, S não é um subespaço de \mathbb{R}^3 .

1(b). Um vetor ser colinear a outro quer dizer que é múltiplo desse vetor. Assim,

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \text{ é colinear a } (1, 2, 3)\} \\ &= \{(x, y, z) = \alpha(1, 2, 3) : \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(0, 0, 0), (1, 2, 3), (-1, -2, -3), (2, 4, 6), \dots\} \end{aligned}$$

S é um subespaço de \mathbb{R}^3 ?

- $(0, 0, 0) \in S$? Sim, porque o vetor nulo de \mathbb{R}^3 é múltiplo de $(1, 2, 3)$, isto é, $(0, 0, 0) = 0(1, 2, 3)$.
- Seja $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ temos que os vetores $\alpha(1, 2, 3)$ e $\alpha'(1, 2, 3)$ são vetores que estão no conjunto S . Será que a soma destes vetores é ainda um vetor em S ?

$$\begin{aligned} \alpha(1, 2, 3) + \alpha'(1, 2, 3) &= (\alpha, 2\alpha, 3\alpha) + (\alpha', 2\alpha', 3\alpha') \\ &= (\alpha + \alpha', 2\alpha + 2\alpha', 3\alpha + 3\alpha') \\ &= ((\alpha + \alpha') \times 1, (\alpha + \alpha') \times 2, (\alpha + \alpha') \times 3) \\ &= \underbrace{(\alpha + \alpha')}_{\in \mathbb{R}} (1, 2, 3) \in S \end{aligned}$$

Assim, S é fechado para a soma, isto é, dados dois vetores múltiplos/colineares a $(1, 2, 3)$ a sua soma continua a ser um vetor múltiplo de $(1, 2, 3)$.

- Seja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ temos que o vetor $\alpha(1, 2, 3) \in S$. Será que $\beta\alpha(1, 2, 3) \in S$? Sim, porque o vetor $\underbrace{\beta\alpha}_{\in \mathbb{R}} (1, 2, 3)$ é colinear a $(1, 2, 3)$. Logo, S é fechado para a multiplicação por escalar.

Portanto, S é um subespaço de \mathbb{R}^3 .

1(c). (★) O conjunto S das funções reais de variável real que são pares é:

$$S = \{f \text{ é uma função real} : f \text{ é par}\} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = f(-x)\}$$

S é um subespaço vetorial das funções reais?

- O elemento neutro das funções reais é a função nula $N(x) = 0$ que envia qualquer número real x para 0.

A função nula é par, isto é, $N \in S$? Sim, porque $N(x) = 0 = N(-x)$. Seja lá qual for o número x , a função nula envia tanto x como $-x$ para 0, assim a função nula é par.

- Sejam $f, g \in S$, temos que f e g são funções pares, ou seja, $f(x) = f(-x)$ e $g(x) = g(-x)$. Será que a soma de duas funções pares é ainda uma função par? Será que $(f + g) \in S$?

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) && \text{pelas propriedades das funções reais} \\ &= f(-x) + g(-x) && f \text{ e } g \text{ são pares temos } f(x) = f(-x) \text{ e } g(x) = g(-x) \\ &= (f + g)(-x) && \text{propriedade das funções reais} \end{aligned}$$

Assim, $(f + g)(x) = (f + g)(-x)$ logo $(f + g)$ é uma função par e por isso está em S !

- Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in S$ uma função par. Será que $(\alpha f) \in S$? Isto é, será que (αf) é par?

$$\begin{aligned}(\alpha f)(x) &= \alpha f(x) && \text{pelas propriedades das funções reais} \\ &= \alpha f(-x) && \text{como } f \text{ é par temos que } f(x) = f(-x) \\ &= (\alpha f)(-x) && \text{propriedade das funções reais}\end{aligned}$$

Assim, $(\alpha f)(x) = (\alpha f)(-x)$ logo (αf) é par e por isso pertence a S .

Portanto, S é um subespaço vetorial para as funções reais porque contém o elemento neutro (a matriz nula), é fechado para a soma e para a multiplicação por um escalar.

- 2(c)i. No espaço vetorial \mathcal{P}_2 dos polinômios em x com grau não superior a 2, o conjunto S de polinômios $ax^2 + bx + c$ com $c = 0$ é o conjunto de polinômios com grau não superior a 2 cujo coeficiente do termo de grau 0 é igual a 0.

$$S = \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 \mid c = 0\} = \{ax^2 + bx \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \{x^2, 2x^2, x^2 + x, x, \dots\}$$

Por exemplo, temos que $x^2 + 3 \notin S$ porque não conseguimos arranjar números reais a e b tal que $ax^2 + bx = x^2 + 3$, por outras palavras, o coeficiente do termo de grau 0 é 3 e não 0 como queríamos! S é um subespaço vetorial de \mathcal{P}_2 ?

- Será que 0 (polinômio nulo) $\in S$? Isto é, será que existe $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $ax^2 + bx = 0$?
Sim, quando $a = b = 0$ temos que $ax^2 + bx = 0x^2 + 0x = 0 \in S$.
- Será que S é fechado para a soma? Dados quaisquer dois polinômios de S , a sua soma ainda está em S ? Isto é, para quaisquer $ax^2 + bx, a'x^2 + b'x \in S$, será que $ax^2 + bx + a'x^2 + b'x \in S$?

$$ax^2 + bx + a'x^2 + b'x = \underset{\in \mathbb{R}}{(a + a')}x^2 + \underset{\in \mathbb{R}}{(b + b')}x \in S$$

Sim, a soma de dois polinômios de S é ainda um polinômio de S . Isto é, dados dois polinômios de grau não superior a 2, cujo termo de grau 0 tem coeficiente igual a 0, a sua soma continua a ser um polinômio de grau não superior a 2 cujo termo de grau 0 tem coeficiente igual a 0.ⁱ

- Será que S é fechado para a multiplicação por um escalar? Isto é, seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $ax^2 + bx \in S$, será que $\alpha(ax^2 + bx) \in S$?

$$\alpha(ax^2 + bx) = \underset{\in \mathbb{R}}{(\alpha a)}x^2 + \underset{\in \mathbb{R}}{(\alpha b)}x \in S$$

Sim, a multiplicação por um escalar de um polinômio em S é ainda um polinômio em S . Isto é, dado um número real qualquer α e um polinômio de grau não superior a 2, cujo termo de grau 0 tem coeficiente igual a 0, o produto desse polinômio por α continua a ser um polinômio de grau não superior a 2 cujo coeficiente do termo de grau 0 é ainda igual a 0.ⁱⁱ

Assim, S é um subespaço vetorial de \mathcal{P}_2 porque contém o elemento neutro, é fechado para a soma e é fechado para a multiplicação por escalar.

- 2(c)iii. No espaço vetorial \mathcal{P}_2 dos polinômios em x com grau não superior a 2, o conjunto S de polinômios $ax^2 + bx + c$ com $bc = 0$ é o conjunto de polinômios com grau não superior a 2 cujo coeficiente do termo de grau 1 vezes o coeficiente do termo de grau 0 é igual a 0.

$$\begin{aligned}S &= \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 \mid bc = 0\} = \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 \mid b = 0 \text{ ou } c = 0\} \\ &= \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 \mid b = 0\} \cup \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 \mid c = 0\} \\ &= \{x, 1, x^2 + x, x^2 + 1, x^2, \dots\}\end{aligned}$$

Por exemplo, temos que $x^2 + 2x + 3 \notin S$ porque o produto do coeficiente do termo de grau 2 (o 1) com o coeficiente do termo de grau 0 (o 3) dá 6 que é diferente de 0. Em contrapartida o polinômio $1 = 0x^2 + 0x + 1$ pertence ao conjunto S porque o coeficiente do termo de grau 1 é igual a 0.

S é um subespaço vetorial de \mathcal{P}_2 ?

ⁱPor exemplo, x^2 e x são elementos de S , e a sua soma $x^2 + x$ é ainda um elemento de S , o termo de grau 0 não deixa de ser diferente de 0. Atenção que um exemplo não é o mesmo que uma prova!

ⁱⁱPor exemplo, $2x^2$ é um polinômio em S e se o multiplicarmos pelo número real 3 temos o polinômio $6x^2$ que continua a ser um polinômio em S .

- Será que o polinómio nulo pertence a S , $0 \in S$? Isto é, será que o coeficiente do termo de grau 1 ou o do termo de grau 0 do polinómio nulo é igual a 0?

Sim, o polinómio nulo tem todos os coeficientes iguais a 0. É de notar que o polinómio nulo pode ser escrito como $0 = 0x^2 + \underbrace{0}_b x + \underbrace{0}_c$ e assim temos que $bc = 0 \times 0 = 0$.

- Será que S é fechado para a soma? Dados quaisquer dois polinómios de S , a sua soma ainda está em S ? Isto é, para quaisquer polinómios $ax^2 + bx + c$, $a'x^2 + b'x + c' \in S$ em que $bc = 0$ e $b'c' = 0$ será que: $ax^2 + bx + c + a'x^2 + b'x + c' = (a + a')x^2 + (b + b')x + (c + c')$ será que ainda temos que $(b + b') \times (c + c') = 0$?

(Neste caso, isto não se verifica. O que acontece é que conseguimos arranjar um polinómio em que $b = 0$ e $c \neq 0$, e outro em que $b' \neq 0$ e $c' = 0$. Ambos estão em S , porque $bc = 0$ e $b'c' = 0$, mas quando os somamos como $b + b' \neq 0$ e $c + c' \neq 0$ obtemos que $(b + b') \times (c + c') \neq 0$ e assim o polinómio resultante já não pertence a S . O truque está em notar que o conjunto S pode ser escrito como a união de dois subconjuntos (não mutuamente exclusivos): os polinómios cujo coeficiente do termo de grau 1 é nulo ($b = 0$), e os polinómios cujo coeficiente do termo de grau 0 é nulo ($c = 0$). Assim, conseguimos encontrar um polinómio que está no primeiro conjunto mas não no segundo, e outro que está no segundo mas não no primeiro. Quando os somamos, o resultado não pertence a nenhum dos dois subconjuntos. Como esta propriedade falha, basta apresentarmos um contraexemplo: se não se verifica para alguns polinómios, então a propriedade não se verifica em geral. O exercício 2(d)(ii) tem um raciocínio semelhante, mas usa matrizes.)

Não! Por exemplo, temos que $x^2 + 1 \in S$, porque $b = 0$ e $c = 1$ assim $bc = 0$, e $x^2 + x \in S$, porque $b' = 1$ e $c' = 0$ assim $b'c' = 0$. Mas a sua soma não é um polinómio de S ,

$$(x^2 + 1) + (x^2 + x) = 2x^2 + \textcolor{red}{1}x + \textcolor{blue}{1} \notin S$$

porque $(b + b') \times (c + c') = \textcolor{red}{1} \times \textcolor{blue}{1} = 1 \neq 0$.

- (Já agora, S é fechado para a multiplicação por escalar, pois se $bc = 0$, ao multiplicar por qualquer escalar/número real o resultado continua a dar 0. Mas não vale a pena estarem a verificar esta propriedade: como S não é fechado para a soma, o exercício termina logo com o contraexemplo acima).

Assim, como não é fechado para a soma, S não é um subespaço vetorial de \mathcal{P}_2 .

2(d)i. No espaço $M_{n \times n}$ das matrizes quadradas de ordem n , o conjunto S das matrizes simétricasⁱⁱⁱ é:

$$S = \{A \in M_{n \times n} : A \text{ é simétrica}\} = \{A \in M_{n \times n} : \textcolor{red}{A} = \textcolor{red}{A}^T\}$$

S é um subespaço de $M_{n \times n}$?

- $O_{n \times n}$ (matriz nula de ordem n) $\in S$? Sim, porque $O = O^T$, isto é, a matriz nula é simétrica porque é igual à sua transposta.
- Sejam A e B duas matrizes $n \times n$ simétricas, ou seja, $A = A^T$ e $B = B^T$. Assim, $A, B \in S$. Será que $A + B \in S$? Será que $A + B$ é ainda uma matriz simétrica, isto é, $(A + B) = (A + B)^T$?

$$\begin{aligned} (A + B)^T &= A^T + B^T && \text{pela Prop 5 slide 14 Cap.1.1} \\ &= A + B && \text{como } A \text{ e } B \text{ são simétricas temos que } A = A^T \text{ e } B = B^T \end{aligned}$$

Logo, $A + B \in S$, a soma de duas matrizes simétricas é ainda uma matriz simétrica.

- Dado um escalar qualquer, $\alpha \in \mathbb{R}$, e uma matriz quadrada de ordem n simétrica, $A \in S$. Será que αA é ainda uma matriz simétrica? Isto é, será que $\alpha A = (\alpha A)^T$?

$$\begin{aligned} (\alpha A)^T &= \alpha A^T && \text{pela Prop. 9 slide 14 Cap.1.1} \\ &= \alpha A && \text{como } A \text{ é simétrica temos que } A = A^T \end{aligned}$$

Logo, $\alpha A \in S$, a multiplicação por um escalar de uma matriz simétrica é ainda uma matriz simétrica.

Assim, S é um subespaço de $M_{n \times n}$ porque contém o elemento neutro (a matriz nula), é fechado para a soma e fechado para a multiplicação por um escalar.

ⁱⁱⁱVer a definição de matriz simétrica no Cap.1 slide 12

5(e). (★) Estamos no espaço vetorial \mathcal{P}_2 dos polinómios em t com grau não superior a 2^{iv}. Qual é o espaço gerado pelo conjunto $\{t^2 + 1, t^2 + t, t + 1\}$? O espaço gerado pelos polinómios indicados é denotado por $\langle t^2 + 1, t^2 + t, t + 1 \rangle$ e consiste em todos os polinómios da forma $at^2 + bt + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, que conseguimos escrever como combinação linear dos polinómios $t^2 + 1$, $t^2 + t$ e $t + 1$?

Nós apenas queremos saber quais são os polinómios $at^2 + bt + c$ que conseguimos escrever à custa dos polinómios $t^2 + 1$, $t^2 + t$ e $t + 1$. Isto implica que temos de ver quando é que o seguinte sistema é possível:

$$at^2 + bt + c = \alpha_1(t^2 + 1) + \alpha_2(t^2 + t) + \alpha_3(t + 1), \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$$

Nestes exercícios as nossas incógnitas são a, b e c , não nos interessa saber quem são α_1, α_2 e α_3 ! De novo, nós queremos saber quais são os polinómios que são combinação linear de $t^2 + 1$, $t^2 + t$ e $t + 1$; não estamos interessados em como é que são combinação linear daqueles polinómios, só quais é que são.

O espaço gerado pelos polinómios indicados é:

$$\langle t^2 + 1, t^2 + t, t + 1 \rangle = \{at^2 + bt + c \in \mathcal{P}_2 : at^2 + bt + c = \alpha_1(t^2 + 1) + \alpha_2(t^2 + t) + \alpha_3(t + 1), \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$$

Do lado direito da equação vamos agrupar os termos t^2 , t e os termos independentes

$$= \{at^2 + bt + c \in \mathcal{P}_2 : at^2 + bt + c = (\alpha_1 + \alpha_2)t^2 + (\alpha_2 + \alpha_3)t + (\alpha_1 + \alpha_3), \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$$

Quero que as cores/coeficientes do lado esquerdo sejam iguais às do lado direito

$$= \left\{ at^2 + bt + c \in \mathcal{P}_2 : \begin{cases} (\alpha_1 + \alpha_2) = a \\ (\alpha_2 + \alpha_3) = b \\ (\alpha_1 + \alpha_3) = c \end{cases}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Vamos escrever o sistema com matrizes porque somos fortes

$$= \left\{ at^2 + bt + c \in \mathcal{P}_2 : \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{\text{Quando é que este sistema é possível?}}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

O sistema^v:

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

é possível se e só se $\text{car}(A) = \text{car}([A|B])$. Vamos escalonar a matriz ampliada $[A|B]$:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 & c \end{array} \right] \xrightarrow{L_3=L_3-L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & -1 & 1 & c-a \end{array} \right] \xrightarrow{L_3=L_3+L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 & c-a+b \end{array} \right]$$

Os pivots estão marcados **nesta cor**. Temos sempre que $\text{car}(A) = \text{car}([A|B])$, ou seja, o sistema $AX = B$ é sempre possível. Logo, seja lá qual for o polinómio $at^2 + bt + c \in \mathcal{P}_2$ conseguimos sempre escrevê-lo como combinação linear dos polinómios $t^2 + 1$, $t^2 + t$ e $t + 1$. Portanto, não existe um único polinómio em \mathcal{P}_2 que não pode ser escrito como combinação linear dos polinómios indicados, isso é o mesmo que dizer que o espaço gerado por esses polinómios corresponde a todos os polinómios em t de grau não superior a 2.

$$\langle t^2 + 1, t^2 + t, t + 1 \rangle = \mathcal{P}_2$$

14. ^{vi} $K = \{(a^2, 0, 1), (0, a, 2), (1, 0, 1)\}$

Qualquer base de \mathbb{R}^3 é um conjunto com 3 vetores, porque a dimensão de \mathbb{R}^3 é 3, que é linearmente independente e gera \mathbb{R}^3 . Pelo Teorema do Cap.2 slide 13, como K tem exatamente 3 vetores e

^{iv} Até agora os termos dos polinómios são x mas nesta alínea são t , não importa a letra funciona da mesma forma!

^v Reparem que o que fazemos com os vetores também fazemos aqui: os coeficientes dos polinómios estão nas colunas da matriz A . Por exemplo, o primeiro polinómio $t^2 + 0t + 1$ tem coeficientes 1, 0, 1 o que corresponde à primeira coluna de A ...

^{vi} Este exercício é semelhante à questão 4 do Teste 1 de 2024/2025.

$\dim \mathbb{R}^3 = 3$ basta ver para que valores de a é que K é um conjunto l.i. ou para que valores de a é que K gera \mathbb{R}^3 que automaticamente satisfaz a outra condição e forma uma base de \mathbb{R}^3 .

Para que valores de a é que K é l.i.? O conjunto K é l.i. se

$$\alpha_1(a^2, 0, 1) + \alpha_2(0, a, 2) + \alpha_3(1, 0, 1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = B$$

implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ (ver a definição do Cap.2 slide 9).

Ou seja, isto é o mesmo que dizer que o conjunto K é l.i. quando o sistema acima $AX = B$ é possível e determinado (tem uma única solução quando os α 's são todos iguais a 0). O sistema $AX = B$ é possível e determinado se e só se $\text{car}(A) = \text{car}([A|B]) = \text{n}^\circ$ de colunas de $A = 3$.

$$\begin{aligned} [A|B] &= \left[\begin{array}{ccc|c} a^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 = L_3 - a^2 L_1} \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & -2a^2 & 1 - a^2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 = L_3 + 2aL_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - a^2 & 0 \end{array} \right] \text{ (escalonada)} \end{aligned}$$

Assim, temos $\text{car}(A) = \text{car}([A|B]) = 3$ se e só se o pivot da L_2 é o a e o pivot da L_3 é o $1 - a^2$, ou seja, $a \neq 0$ e $1 - a^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ e $a \neq \pm 1$.

Para que valores de a é que K gera \mathbb{R}^3 ? O conjunto K gera \mathbb{R}^3 se for possível escrever qualquer vetor (x, y, z) de \mathbb{R}^3 como combinação linear dos vetores de K .

Vamos ver para que valores de a é que K gera \mathbb{R}^3 .

$$\alpha_1(a^2, 0, 1) + \alpha_2(0, a, 2) + \alpha_3(1, 0, 1) = (x, y, z) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow CX = D$$

(Nesta parte, queremos determinar para que valores de a é possível escrever todos os vetores de \mathbb{R}^3 como combinação linear dos vetores de K . Ou seja, queremos saber quando é que o sistema é possível, não nos interessa como isso é feito, isto é, os valores específicos dos α 's não importam.)

$CX = D$ é possível se e só se $\text{car}(C) = \text{car}([C|D])$. Vamos escalonar a matriz ampliada $[C|D]$ ^{vii}.

$$\begin{aligned} [C|D] &= \left[\begin{array}{ccc|c} a^2 & 0 & 1 & x \\ 0 & a & 0 & y \\ 1 & 2 & 1 & z \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & z \\ 0 & a & 0 & y \\ a^2 & 0 & 1 & x \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 = L_3 - a^2 L_1} \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & z \\ 0 & a & 0 & y \\ 0 & -2a^2 & 1 - a^2 & x - a^2 z \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 = L_3 + 2aL_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & z \\ 0 & a & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 - a^2 & x - a^2 z + 2ay \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 = \frac{L_2}{a}, a \neq 0} \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & z \\ 0 & 1 & 0 & y/a \\ 0 & 0 & 1 - a^2 & x - a^2 z + 2ay \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 = \frac{L_3}{1 - a^2}, a \neq \pm 1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & z \\ 0 & 1 & 0 & y/a \\ 0 & 0 & 1 & (x - a^2 z + 2ay)/(1 - a^2) \end{array} \right] \end{aligned}$$

Como a $\text{car}(C) = \text{car}([C|D])$ temos que o sistema $CX = D$ é sempre possível quando $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Vamos ver o que acontece quando $a = 0$, $a = 1$ e $a = -1$:

Se $a = 0$ temos que

$$[C|D] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 1 & 2 & 1 & z \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & x \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & y \end{array} \right]$$

o sistema $CX = D$ é possível se e só se $\text{car}(C) = \text{car}([C|D]) = 2$, isto é, $y = 0$! Portanto, se $a = 0$ o conjunto K gera apenas os vetores (x, y, z) de \mathbb{R}^3 cuja segunda coordenada é nula. Neste caso, o espaço gerado por K não é \mathbb{R}^3 , $\langle K \rangle \neq \mathbb{R}^3$, e por isso não pode ser uma base de \mathbb{R}^3 .

^{vii}Vou fazer algo semelhante ao exercício 17 da FP1.

Se $a = 1$ temos que

$$[C|D] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 1 & 2 & 1 & z \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 = \widetilde{L}_3 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 2 & 0 & z - x \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 = \widetilde{L}_3 - 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & z - x - 2y \end{array} \right]$$

o espaço gerado por K são os vetores de \mathbb{R}^3 tal que $z - x - 2y = 0$. Assim, para $a = 1$, $\langle K \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - x - 2y = 0\} \neq \mathbb{R}^3$ e por isso não pode ser uma base de \mathbb{R}^3 .

De um modo semelhante, se $a = -1$

$$[C|D] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & -1 & 0 & y \\ 1 & 2 & 1 & z \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 = \widetilde{L}_3 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & -1 & 0 & y \\ 0 & 2 & 0 & z - x \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 = \widetilde{L}_3 + 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & -1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & z - x + 2y \end{array} \right]$$

o espaço gerado por K são os vetores de \mathbb{R}^3 tal que $z - x + 2y = 0$. Assim, para $a = -1$, $\langle K \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - x + 2y = 0\} \neq \mathbb{R}^3$.

Assim sabemos que o conjunto K gera todos os vetores de \mathbb{R}^3 se e só se $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

Em suma, o conjunto K é uma base de \mathbb{R}^3 , é l.i. e gera \mathbb{R}^3 , se e só se $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

(Nota: Como indicado no início, podem usar o Teorema do slide 13 e verificar apenas quando é que K é linearmente independente ou quando é que K gera \mathbb{R}^3 . Só precisam de mostrar uma das duas condições, o que vos poupa algum tempo na resolução. Contudo, se utilizarem esse teorema, têm de explicar **muitooooo** bem que compreendem que um conjunto, para ser base de um espaço, tem de ser linearmente independente e gerar o espaço. Caso essa explicação não seja suficientemente detalhada e apenas verifiquem uma das condições, podem perder mais de metade da cotação. Se não se sentirem confiantes com a justificação, é preferível verificar ambas as condições.)

- 18(b). $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ é uma base de \mathbb{R}^4 . Queremos escrever as coordenadas do vetor $(2, 1, 0, 0)$ na base \mathcal{B} , por outras palavras, queremos escrever o vetor $(2, 1, 0, 0)$ como combinação linear dos vetores da base \mathcal{B} . Vamos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} (2, 1, 0, 0) &= \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4 \\ \Leftrightarrow (2, 1, 0, 0) &= \alpha_1(1, 1, 0, 0) + \alpha_2(1, 0, 0, 0) + \alpha_3(1, 1, 1, 0) + \alpha_4(1, 1, 1, 1) \\ \Leftrightarrow (2, 1, 0, 0) &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2 \\ \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(Reparem que os vetores da base \mathcal{B} ficam nas colunas da matriz)

Depois de resolvermos o sistema, o vetor das coordenadas de $(2, 1, 0, 0)$ na base \mathcal{B} é:

$$[(2, 1, 0, 0)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}$$

Usando o método de Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 = \widetilde{L}_2 - L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{L_3 = \widetilde{L}_3 - L_4 \\ L_1 = \widetilde{L}_1 - L_4}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 = \widetilde{L}_1 - L_3} \\ &\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 = \widetilde{L}_1 + L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 = -L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Temos que o vetor $(2, 1, 0, 0)$ é C.L. dos vetores da base \mathcal{B} da seguinte forma^{viii}:

$$(2, 1, 0, 0) = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4 \Leftrightarrow (2, 1, 0, 0) = 1X_1 + 1X_2 + 0X_3 + 0X_4$$

Logo, o vetor das coordenadas de $(2, 1, 0, 0)$ na base \mathcal{B} é:

$$[(2, 1, 0, 0)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

19(b) $\mathcal{B}_1 = ((1, 2, 1), (0, 2, 0), (0, 0, -1))$ e $\mathcal{B}_2 = (\underbrace{(1, 0, -1)}_{=X_1}, \underbrace{(1, 1, 1)}_{=X_2}, \underbrace{(2, 3, -1)}_{=X_3})$ são bases de \mathbb{R}^3 .

A matriz P de mudança da base \mathcal{B}_1 para a base \mathcal{B}_2 é a matriz cujas colunas são os vetores de \mathcal{B}_1 escritos nas coordenadas da base \mathcal{B}_2 .

$$P = M_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} \left| \begin{smallmatrix} (1, 2, 1) \\ \hline \end{smallmatrix} \right|_{\mathcal{B}_2} & \left| \begin{smallmatrix} (0, 2, 0) \\ \hline \end{smallmatrix} \right|_{\mathcal{B}_2} & \left| \begin{smallmatrix} (0, 0, -1) \\ \hline \end{smallmatrix} \right|_{\mathcal{B}_2} \end{bmatrix}$$

Vamos escrever cada um dos vetores $(1, 2, 1)$, $(0, 2, 0)$ e $(0, 0, -1)$ à custa dos vetores da base \mathcal{B}_2 :

$$(1, 2, 1) = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 \Leftrightarrow (1, 2, 1) = \alpha_1(1, 0, -1) + \alpha_2(1, 1, 1) + \alpha_3(2, 3, -1)$$

... resolver o sistema, devem apresentar as contas ...

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -3/5 \\ \alpha_2 = 4/5 \\ \alpha_3 = 2/5 \end{cases} \quad \text{Assim, } [(1, 2, 1)]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/5 \\ 4/5 \\ 2/5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{1^a \text{ Coluna de } P}$$

$$(0, 2, 0) = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 \Leftrightarrow (0, 2, 0) = \beta_1(1, 0, -1) + \beta_2(1, 1, 1) + \beta_3(2, 3, -1)$$

... resolver o sistema, devem apresentar as contas ...

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 = -6/5 \\ \beta_2 = -2/5 \\ \beta_3 = 4/5 \end{cases} \quad \text{Assim, } [(0, 2, 0)]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6/5 \\ -2/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{2^a \text{ Coluna de } P}$$

$$(0, 0, -1) = \theta_1 X_1 + \theta_2 X_2 + \theta_3 X_3 \Leftrightarrow (0, 0, -1) = \theta_1(1, 0, -1) + \theta_2(1, 1, 1) + \theta_3(2, 3, -1)$$

... resolver o sistema, devem apresentar as contas ...

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \theta_1 = 1/5 \\ \theta_2 = -3/5 \\ \theta_3 = 1/5 \end{cases} \quad \text{Assim, } [(0, 0, -1)]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 \\ -3/5 \\ 1/5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{3^a \text{ Coluna de } P}$$

Logo,

$$P = M_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} -3/5 & -6/5 & 1/5 \\ 4/5 & -2/5 & -3/5 \\ 2/5 & 4/5 & 1/5 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & -6 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

21. Seja $\mathcal{S} = ((-1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1))$ e $\mathcal{T} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ bases ordenadas. Determine Y_1 , Y_2 e Y_3 , sabendo que

$$M_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

^{viii} Podem e devem confirmar que a seguinte equação está certa

A matriz $M_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{T}}$ é uma matriz de mudança de base da base \mathcal{T} para a base \mathcal{S} . As colunas da matriz são os vetores da base \mathcal{T} escritos nas coordenadas da base \mathcal{S} , isto é, temos que $[Y_1]_{\mathcal{S}}$ é igual à primeira coluna, $[Y_2]_{\mathcal{S}}$ é igual à segunda coluna e $[Y_3]_{\mathcal{S}}$ é igual à terceira coluna.

$$M_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ [Y_1]_{\mathcal{S}} & [Y_2]_{\mathcal{S}} & [Y_3]_{\mathcal{S}} \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

Sabemos que:

$$[Y_1]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

são as coordenadas do vetor Y_1 na base \mathcal{S} . Isso quer dizer que o vetor Y_1 é 1 vez o primeiro vetor da base \mathcal{S} , 2 vezes o segundo vetor da base \mathcal{S} e -1 vez o terceiro vetor da base \mathcal{S} . Como conhecemos os vetores da base \mathcal{S} conseguimos à custa deles determinar o vetor Y_1 .

$$Y_1 = \underbrace{1}_{1^{\text{º}} \text{vetor da base } \mathcal{S}} (-1, 1, 0) + \underbrace{2}_{2^{\text{º}} \text{vetor da base } \mathcal{S}} (1, 0, 1) - \underbrace{1}_{3^{\text{º}} \text{vetor da base } \mathcal{S}} (0, 0, 1) = (-1, 1, 0) + (2, 0, 2) + (0, 0, -1) = (1, 1, 1)$$

Também sabemos que:

$$[Y_2]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

são as coordenadas do vetor Y_2 na base \mathcal{S} . Isso quer dizer que o vetor Y_2 é 1 vez o primeiro vetor da base \mathcal{S} , 1 vez o segundo vetor da base \mathcal{S} e -1 vez o terceiro vetor da base \mathcal{S} . Como conhecemos os vetores da base \mathcal{S} conseguimos à custa deles calcular o vetor Y_2 .

$$Y_2 = \underbrace{1}_{1^{\text{º}} \text{vetor da base } \mathcal{S}} (-1, 1, 0) + \underbrace{1}_{2^{\text{º}} \text{vetor da base } \mathcal{S}} (1, 0, 1) - \underbrace{1}_{3^{\text{º}} \text{vetor da base } \mathcal{S}} (0, 0, 1) = (-1, 1, 0) + (1, 0, 1) + (0, 0, -1) = (0, 1, 0)$$

Finalmente, sabemos que:

$$[Y_3]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

são as coordenadas do vetor Y_3 na base \mathcal{S} . Isso quer dizer que o vetor Y_3 é 2 vezes o primeiro vetor da base \mathcal{S} , 1 vez o segundo vetor da base \mathcal{S} e 1 vez o terceiro vetor da base \mathcal{S} .

$$Y_3 = \underbrace{2}_{1^{\text{º}} \text{vetor da base } \mathcal{S}} (-1, 1, 0) + \underbrace{1}_{2^{\text{º}} \text{vetor da base } \mathcal{S}} (1, 0, 1) + \underbrace{1}_{3^{\text{º}} \text{vetor da base } \mathcal{S}} (0, 0, 1) = (-2, 2, 0) + (1, 0, 1) + (0, 0, 1) = (-1, 2, 2)$$

Assim, chegamos à conclusão que $\mathcal{T} = ((1, 1, 1), (0, 1, 0), (-1, 2, 2))$.

24(b). O primeiro passo é escalonar e reduzir a matriz A .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2=L_2-3L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & -5 \end{bmatrix} = \mathbf{A_e} \xrightarrow{L_2=\frac{L_2}{4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -7/4 & -5/4 \end{bmatrix} = \mathbf{A_r}$$

- i. Determinar uma base para o espaço nulo

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}(A) &= \{X \in \mathbb{R}^4 : \mathbf{A}_r X = 0\} \\
 &= \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -7/4 & -5/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
 &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2z + w = 0 \text{ e } y - 7z/4 - 5w/4 = 0\} \\
 &\quad \text{Vamos escrever tudo em relação a } z \text{ e } w \\
 &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = -2z - w \text{ e } y = 7z/4 + 5w/4\} \\
 &= \{(-2z - w, 7z/4 + 5w/4, z, w), z, w \in \mathbb{R}\} \\
 &\quad \text{Separar em dois vetores: um que tem os } z\text{'s outro que tem os } w\text{'s} \\
 &= \{(-2z, 7z/4, z, 0) + (-w, 5w/4, 0, w), z, w \in \mathbb{R}\} \\
 &\quad \text{Meter o } z \text{ e o } w \text{ em evidência} \\
 &= \{z(-2, 7/4, 1, 0) + w(-1, 5/4, 0, 1), z, w \in \mathbb{R}\} \\
 &= \langle (-2, 7/4, 1, 0), (-1, 5/4, 0, 1) \rangle \\
 &\quad \text{Opcional: multiplicar cada um dos vetores por 4 para não termos frações} \\
 &= \langle (-8, 7, 4, 0), (-4, 5, 0, 4) \rangle
 \end{aligned}$$

Assim, uma base para o espaço nulo é $\{(-8, 7, 4, 0), (-4, 5, 0, 4)\}$.

- ii. determine bases para o espaço das linhas e o espaço das colunas de A

As linhas não nulas de \mathbf{A}_e ou de \mathbf{A}_r formam uma base para o espaço das linhas de A . Assim, uma base para o espaço das linhas pode ser as linhas (não nulas) de \mathbf{A}_e :

$$\{(1, 0, 2, 1), (0, 4, -7, -5)\}$$

ou as linhas não nulas de \mathbf{A}_r :

$$\{(1, 0, 2, 1), (0, 1, -7/4, -5/4)\}$$

Para calcular uma base para o espaço das colunas podemos fazer de duas formas diferentes:

1. as colunas com os pivots da forma escalonada \mathbf{A}_e formam uma base para $\mathcal{C}(A)$.

$$\mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & -5 \end{bmatrix}$$

O pivot da L_1 está na coluna 1 e o pivot da L_2 está na coluna 2. Assim, a coluna 1 e 2 da matriz A formam uma base para $\mathcal{C}(A)$:

$$\{(1, 3), (0, 4)\}$$

OU

2. $B = (a, b) \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow AX = B$ é possível. Um sistema $AX = B$ é possível se e só se $\text{car}(A) = \text{car}([A|B])$. Vamos escalonar $[A|B]$ para contar a característica:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & a \\ 3 & 4 & -1 & -2 & b \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 = L_2 - 3L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & a \\ 0 & 4 & -7 & -5 & b - 3a \end{array} \right]$$

Com a $\text{car}(A) = \text{car}([A|B])$ o sistema $AX = B$ é sempre possível, ou seja, todos os vetores $B = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ pertencem ao espaço das colunas de A . Portanto, $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^2$ e uma base para este espaço é, por exemplo, a base canônica de \mathbb{R}^2

$$\{(1, 0), (0, 1)\}$$

A base que obtemos para $\mathcal{C}(A)$ no ponto 1. e 2. são diferentes, mas não tem problema.

- iii. calcule a característica e a nulidade, e verifique que $\text{car}(A) + \text{nul}(A) = n$

A característica de A é igual à dimensão de $\mathcal{C}(A)$ e dimensão de $\mathcal{L}(A)$. Assim, $\text{car}(A) = 2$. A nulidade de A é igual à dimensão do espaço nulo. Assim, $\text{nul}(A) = 2$. E n é o número de colunas de A . Portanto verificamos que,

$$\text{car}(A) + \text{nul}(A) = n \Leftrightarrow 2 + 2 = 4$$

- iv. A característica de uma matriz é o máximo número de linhas l.i.. Como a $\text{car}(A) = 2$ sabemos que as 2 linhas de A são l.i.

- 24(f). O primeiro passo é escalonar e reduzir a matriz A (este passo é necessário para determinar uma base para o espaço das linhas e para o espaço nulo).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 + L_1}]{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 = -\frac{L_2}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 = -L_3 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_e \text{ (escalonada)}$$

$$\xrightarrow[\substack{L_2 = L_2 - 2L_3 \\ L_1 = L_1 - 3L_3}]{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 = L_1 - 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_r \text{ (escalonada e reduzida)}$$

- i. Determinar uma base para o espaço nulo

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A) &= \{X \in \mathbb{R}^3 : AX = 0\} \\ &= \{X \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{A}_r X = 0\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \text{ e } y = 0 \text{ e } z = 0\} \\ &= \{(0, 0, 0)\} \end{aligned}$$

O espaço nulo de A contém apenas o vetor nulo de \mathbb{R}^3 e a base para o espaço $\{(0, 0, 0)\}$ é o conjunto vazio, denotado por \emptyset . (ver a nota do slide 11 do Capítulo 2)

- ii. determine bases para o espaço das linhas e o espaço das colunas de A

As linhas não nulas de \mathbf{A}_e ou de \mathbf{A}_r formam uma base para o espaço das linhas de A . Assim, uma base para o espaço das linhas pode ser as linhas (não nulas) de \mathbf{A}_e :

$$\{(1, 2, 3), (0, 1, 2), (0, 0, 1)\}$$

ou as linhas (não nulas) de \mathbf{A}_r :

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

Para determinar uma base para o espaço das colunas podemos fazer de duas formas diferentes:

1. as colunas com os pivots da forma escalonada \mathbf{A}_e formam uma base para $\mathcal{C}(A)$.

$$\mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

O pivot da L_1 está na coluna 1, o pivot da L_2 está na coluna 2 e o pivot da L_3 está na coluna 3. Assim, a coluna 1, 2 e 3 da matriz A formam uma base para $\mathcal{C}(A)$:

$$\{(1, 1, -1), (2, 0, -1), (3, -1, 0)\}$$

OU

2. $B = (a, b, c) \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow AX = B$ é possível. Vamos ver quais são os vetores $B = (a, b, c)$ que estão no espaço das colunas de A e assim determinamos uma base para o espaço. Um sistema $AX = B$ é possível se e só se $\text{car}(A) = \text{car}([A|B])$. Vamos escalonar $[A|B]$ para contar a característica:

$$\begin{aligned}
 [A|B] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 1 & 0 & -1 & b \\ -1 & -1 & 0 & c \end{array} \right] \xrightarrow[L_3=L_3+L_1]{L_2=L_2-L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -2 & -4 & b-a \\ 0 & 1 & 3 & c+a \end{array} \right] \xrightarrow{L_2=-\frac{L_2}{2}} \\
 &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 2 & (b-a)/2 \\ 0 & 1 & 3 & c+a \end{array} \right] \xrightarrow{L_3=L_3-L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 2 & (b-a)/2 \\ 0 & 0 & 1 & c+a-(b-a)/2 \end{array} \right] \text{ (escalonada) }
 \end{aligned}$$

Com a $\text{car}(A) = \text{car}([A|B]) = 3$ o sistema $AX = B$ é sempre possível, ou seja, todos os vetores $B = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pertencem ao espaço das colunas de A . Portanto, $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^3$ e uma base para este espaço é, por exemplo, a base canônica de \mathbb{R}^3

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

Neste caso, a base que obtemos para $\mathcal{C}(A)$ no ponto 1. e 2. são diferentes mas não tem problema! Os espaços vetoriais tem infinitas bases diferentes.

- iii. calcule a característica e a nulidade, e verifique que $\text{car}(A) + \text{nul}(A) = n$

A característica de A é igual ao número de pivots da sua forma escalonada, que por sua vez é igual à dimensão de $\mathcal{L}(A)$ e à dimensão de $\mathcal{C}(A)$. A dimensão consiste no número de elementos de qualquer base. Assim, $\text{car}(A) = 3$.

A nulidade de A é igual à dimensão do espaço nulo. Na alínea i, vimos que a base do espaço nulo era o conjunto vazio que tem 0 elementos. Assim, $\text{nul}(A) = 0$.

n é o número de colunas de A . Portanto verificamos que,

$$\text{car}(A) + \text{nul}(A) = n \Leftrightarrow 3 + 0 = 3$$

- iv. A característica de uma matriz é o número máximo de linhas (colunas) l.i.. Como a $\text{car}(A) = 3$ sabemos que as 3 linhas de A são l.i.