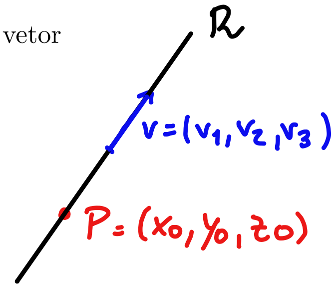
Reta $\mathcal{R}$ em $\mathbb{R}^3$



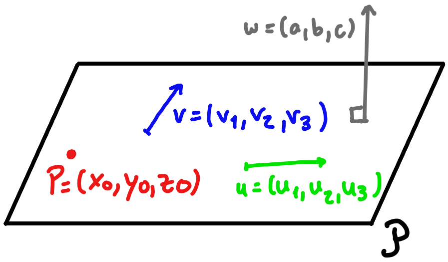
Seja $\mathcal{R}$ uma reta em $\mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ e tem vetor diretor (não nulo) $v = (v_1, v_2, v_3)$.

Equação vetorial: $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \alpha(v_1, v_2, v_3),\ \alpha \in \mathbb{R}$

Equação paramétrica: $\begin{cases} x = x_0 + \alpha v_1 \\ y = y_0 + \alpha v_2 \\ z = z_0 + \alpha v_3 \end{cases} \quad , \alpha \in \mathbb{R}$

Eliminando o α do sistema anterior obtemos a **equação cartesiana:** $\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$

Plano $\mathcal{P}$ em $\mathbb{R}^3$



Seja $\mathcal{P}$ um plano em $\mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ e tem vetores diretores $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ (não colineares).

Equação vetorial: $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \alpha(u_1, u_2, u_3) + \beta(v_1, v_2, v_3), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Equação paramétrica: $\begin{cases} x = x_0 + \alpha u_1 + \beta v_1 \\ y = y_0 + \alpha u_2 + \beta v_2 \\ z = z_0 + \alpha u_3 + \beta v_3 \end{cases} \quad , \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Eliminando os parâmetros α e β do sistema anterior obtemos a **equação cartesiana (geral):**

$$ax + by + cz + d = 0$$

em que $w = (a, b, c)$ é um vetor não nulo ortogonal a $\mathcal{P}$.
Seja $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ dois pontos quaisqueres de $\mathcal{P}$ que satisfazem a equação cartesiana, isto é,

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$$
$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$$

Temos que

$$\begin{aligned} & (ax_1 + by_1 + cz_1 + d) - (ax_0 + by_0 + cz_0 + d) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (a, b, c) \cdot (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & w \cdot (P_1 - P_0) = 0 \Leftrightarrow w \cdot \overrightarrow{P_0P_1} = 0 \end{aligned}$$

ou seja, qualquer vetor $\overrightarrow{P_0P_1}$ do plano $\mathcal{P}$ é ortogonal a w.

Distâncias

Dados um ponto, reta ou plano $\mathcal{F}$ e um ponto, reta ou plano $\mathcal{G}$, a distância entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ é:

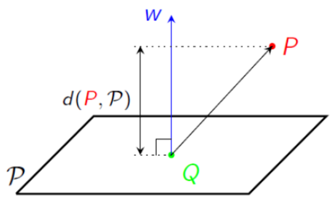
$$d(\mathcal{F},\mathcal{G}) \;=\; \min\{d(P,Q) : P \in \mathcal{F},\, Q \in \mathcal{G}\}$$

Nota: Se $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ então intersetam-se e por isso $d(\mathcal{F},\mathcal{G}) = 0$.

Entre dois pontos $Q = (x_1, \ldots, x_n)$ e $P = (y_1, \ldots, y_n)$

$$\boxed{d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}}$$

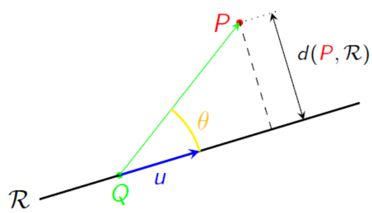
De um ponto a um plano Dado um plano $\mathcal{P}$ que passa pelo ponto Q e cujo vetor não nulo $w = (a,b,c)$ é ortogonal a $\mathcal{P}$. Seja $P = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto tal que $P \notin \mathcal{P}$.



Seja $ax + by + cz + d = 0$ a equação cartesiana de $\mathcal{P}$, tem-se que

$$\boxed{d(P,\mathcal{P}) \;=\; \frac{\left|\overrightarrow{QP}\cdot w\right|}{\|w\|} \;=\; \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

De um ponto a reta Dada uma reta $\mathcal{R}$ que passa pelo ponto Q e que tem vetor diretor u.



e dado um ponto $P \notin \mathcal{R}$, tem-se que

$$\boxed{d(P,\mathcal{R}) \;=\; \left\|\overrightarrow{QP}\right\| \left|\sin(\theta)\right| \;=\; \frac{\left\|u \times \overrightarrow{QP}\right\|}{\|u\|}}$$