Departamento de Matemática **Universidade de Aveiro**

Álgebra Linear e Geometria Analítica - A

1^o Teste **30 de Outubro de 2024**

Justifique devidamente as respostas a todas as questões

Duração total do teste: 1h30m

---

*(4 val.)***1)** Considere o sistema de equações lineares nas variáveis x, y, z e w,

$$\begin{cases} x - y + 2z + 3w = 2 \\ 2x + 2z + 4w = 6 \\ -2y + z = -2 \end{cases}$$

Resolva o sistema usando a decomposição $A = LU$.

*(7,5 val.)***2)** Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ \alpha & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

onde α é um parâmetro real.

a) Verifique que A é invertível se e só se $\alpha \neq 1$.

b) Considere $\alpha = 2$.

  i) Calcule a inversa de A.

  ii) Determine a matrix X do tipo 3×3 tal que $A^T X + 5B = DC$, onde

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

*(6 val.)***3)** Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e o subconjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 7y + 3z = 0\}.$$

a) Verifique que S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

b) Determine uma base e a dimensão de S.

*(2,5 val.)***4)** Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e os vetores $(1, a, 2a), (0, 1, 0), (a, 0, 8a)$, onde a é um parâmetro real. Determine os valores de a para os quais $\mathscr{B} = ((1, a, 2a), (0, 1, 0), (a, 0, 8a))$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Estas notas não constituem uma resolução formal e rigorosa do Exame.

① $\begin{cases} x - y + 2z + 3w = 2 \\ 2x + 2z + 4w = 6 \\ -2y + z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = B$

1º Escalonar $A \sim U$ (sem trocar linhas nem multiplicar uma linha por um escalar)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_2 = L_2 - 2L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_3 = L_3 + L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} = U \text{ escalonada}$$

2º Construir L

$$\begin{array}{c|c|c} 1 & & \\ 2 & 2 & \\ 0 & -2 & -1 \\ \hline \div 1 & \div 2 & \div(-1) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|c|c} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 0 & -1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Assim, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ é triangular inferior com 1's na diagonal principal.

Temos que $A = LU = \underset{(3\times3)}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}} \underset{(3\times4)}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}} = \underset{(3\times4)}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}}$

Logo $AX = B \Leftrightarrow L\underbrace{UX}_{=Y} = B \Leftrightarrow LY = B$

3º Resolver $LY = B$ $\quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

$$[L|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2 - 2L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 + L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = [C|D]$$

$LY = B \Leftrightarrow CY = D \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = 2 \\ y_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow Y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

4º Resolver $UX = Y$

$$[U|Y] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3 = -L_3}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 = L_2 + 2L_3 \\ L_1 = L_1 - 2L_3}}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2/2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{L_1 = L_1 + L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] = [E|F]$$

escalonada e reduzida

⚠ $car(U) = car([U|Y]) <$ nº de colunas logo o sistema é Poss. ind.

$$UX=Y \Leftrightarrow EX=F \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y+w=1 \\ z+2w=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1-w \\ z=-2w \end{cases}$$

O sistema $AX=B$ é poss. ind. e o conjunto de soluções é:

$\{(3,1-w,-2w,w),\ w \in \mathbb{R}\}$

2 (a) A é invertível $\Leftrightarrow$ car(A) = 3 = nº de colunas de A

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ \alpha & 0 & 3 \end{bmatrix} \underset{L_3=L_3-\alpha L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 3-2\alpha \end{bmatrix} \underset{L_3=L_3-\alpha L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3-3\alpha \end{bmatrix}$$

A tem inversa $\Leftrightarrow$ car(A) = 3, isto é, $3-3\alpha \neq 0 \Leftrightarrow 3\alpha \neq 3 \Leftrightarrow \alpha \neq 1$.

(b) $\alpha=2$

(i)

$$[A\,|\,I_3]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_3=L_3-2L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_3=L_3-2L_2}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right] \underset{L_1=L_1+L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right] \underset{L_1=L_1+L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\underset{L_3=\frac{L_3}{(-3)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right] \underset{L_2=L_2-L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right] = [I_3\,/\,A^{-1}]$$

(ii) $X_{3\times 3}=?$

$$A^TX+5B=DC \Leftrightarrow A^TX=DC-5B \Leftrightarrow \underbrace{(A^T)^{-1}A^T}_{=I_3}X=(A^T)^{-1}(DC-5B)$$

$$\Leftrightarrow X=(A^T)^{-1}(DC-5B) \Leftrightarrow X=\underbrace{(A^{-1})}_{\substack{\text{alínea}\\ 2(b)(i)}}{}^T(DC-5B)$$

$$\Leftrightarrow X=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}^T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 \end{bmatrix}-5\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -1 & -2/3 & 2/3 \\ -1 & 1/3 & 2/3 \\ 1 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 10 & -10 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 5 & -5 & 10 \\ 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix} -1 & -2/3 & 2/3 \\ -1 & 1/3 & 2/3 \\ 1 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -5 & -10 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 & 35/3 & 20/3 \\ -5 & 5/3 & 20/3 \\ 5 & -25/3 & -25/3 \end{bmatrix}$$

③ (a) $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \underbrace{x-7y+3z=0}_{\Leftrightarrow\ x = 7y-3z}\}$

$= \{(7y-3z, y, z),\ y,z\in\mathbb{R}\}$

• $(0,0,0)\in S$? Sim porque a primeira coordenada é igual a 7 vezes a segunda menos 3 vezes a terceira, isto é, $0=7\cdot 0-3\cdot 0$.

• $(7y-3z,y,z), (7y'-3z',y',z')\in S$. Será que $(7y-3z,y,z)+(7y'-3z',y',z')\in S$?

$(7y-3z,y,z)+(7y'-3z',y',z')=(7y-3z+7y'-3z', y+y', z+z')\in S$ porque a primeira coordenada é igual a 7 vezes a segunda menos 3 vezes a terceira, isto é, $\underbrace{7y-3z+7y'-3z'}_{1^{a}\text{ coordenada}} = 7\underbrace{(y+y')}_{2^{a}\text{ coordenada}} - 3\underbrace{(z+z')}_{3^{a}\text{ coordenada}}$

S é fechado para a soma.

• $\alpha\in\mathbb{R}$, $(7y-3z,y,z)\in S$. Será que $\alpha(7y-3z,y,z)\in S$?

$\alpha(7y-3z,y,z)=(\alpha(7y-3z),\alpha y,\alpha z) = (7\alpha y-3\alpha z, \alpha y, \alpha z)\in S$ porque a primeira coordenada, $7\alpha y-3\alpha z$, é igual a 7 vezes a segunda coordenada, αy, menos 3 vezes a terceira coordenada, αz.

S é fechado para a multiplicação por escalar.

Portanto, S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

(b) $S=\{(7y-3z,y,z),\ y,z\in\mathbb{R}\}$

$=\{(7y,y,0)+(-3z,0,z),\ y,z\in\mathbb{R}\}$

$=\{y(7,1,0)+z(-3,0,1),\ y,z\in\mathbb{R}\}$

$=\{$vetores que são C.L. de $(7,1,0)$ e $(-3,0,1)\}$

$=\langle(7,1,0),(-3,0,1)\rangle$

Logo, o conjunto $K=\{(7,1,0),(-3,0,1)\}$ gera S. Se K é l.i. então temos que K forma uma base de S.

$\boxed{K=\{(7,1,0),(-3,0,1)\} \text{ é l.i.?}}$ $(0,0,0)=\alpha_1(7,0,1)+\alpha_2(-3,0,1)$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&-3\\0&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix} \Leftrightarrow 0=AX$

$$[A|0] = \left[\begin{array}{cc|c} 7 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{L_2 \leftrightarrow L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 7 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3 \leftrightarrow L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - 7L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\underset{L_3 = L_3 + 3L_2}{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [C|0]$$

$AX=0 \Leftrightarrow CX=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$ Poss. Det.

Logo, K é l.i. e gera S. Portanto $((7,1,0),(-3,0,1))$ é uma base de S.

A dimensão de S é o número de vetores de uma base qualquer de S. Como $((7,1,0),(-3,0,1))$ é uma base de S e tem 2 vetores temos que
dim S = 2

(4) $B = ((1,a,2a),(0,1,0),(a,0,8a))$

Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ temos que qualquer base de $\mathbb{R}^3$ é um conjunto (ordenado) com exatamente 3 vetores que são l.i. e geram $\mathbb{R}^3$. Como o conjunto B tem 3 vetores, igual à dimensão de $\mathbb{R}^3$, basta ver para que valores de a é que os vetores de B são l.i. ou geram $\mathbb{R}^3$. (vou ver para que valores de a é que os vetores de B são l.i. porque é a condição mais simples de testar).

Para que valores de a é que os vetores $\{(1,a,2a),(0,1,0),(a,0,8a)\}$ são l.i.? Isto é, para que valores de a é que o sistema:

$$(0,0,0) = \alpha_1(1,a,2a) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(a,0,8a)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \\ 2a & 0 & 8a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 0 = AX$$

é possível determinado com a única solução $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$?

$$[A|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 2a & 0 & 8a & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 = L_2 - aL_1 \\ L_3 = L_3 - 2aL_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 8a-2a^2 & 0 \end{array}\right]$$

O sistema $AX=0$ é possível determinado se e só se $car(A) = car([A|0]) = 3 = n^{o}$ de colunas de A, isto é, $8a - 2a^2 \neq 0$ $\Leftrightarrow a(8-2a) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ ou $8 - 2a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ ou $a \neq 4$.

Portanto, B é uma base de $\mathbb{R}^3$ se e só se $a \in \mathbb{R} \setminus \{0,4\}$.