

Álgebra Linear e Geometria Analítica - A

Exame Final

19 de Janeiro de 2024

Justifique devidamente as respostas a todas as questões

Duração total do exame: 2h30m

(2 val.) 1) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, o vetor $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e o sistema de equações lineares $AX = b$, onde $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ é o vetor das incógnitas. Resolva o sistema $AX = b$, através do método de fatorização $A = LU$.

(Nota: em alternativa pode resolver o sistema pelo método de eliminação de Gauss, mas neste caso a questão terá a cotação de 1 valor).

(2 val.) 2) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, o vetor $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e o sistema de equações lineares $AX = b$, onde $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ é o vetor das incógnitas. Justifique que o sistema $AX = b$ é um sistema de Cramer e determine o valor da incógnita z pela regra de Cramer.

Tema de auto-estudo

(2 val.) 3) Determine a matriz A tal que $(A + I_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

(4 val.) 4) Considere o subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 , F , com base $\mathcal{B} = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), (0, 0, 1) \right)$.

- Mostre que \mathcal{B} é uma base ortonormada de F .
- Determine a projeção ortogonal do vetor $(1, 2, 3)$ sobre F .
- Encontre a solução dos mínimos quadrados do sistema

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

e calcule o erro dos mínimos quadrados.

(v.s.f.f)

(2 val.) **5)** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & 2 \end{bmatrix}$, onde a é um parâmetro real.

- a) Calcule os valores próprios de A .
- b) Determine os valores de a para os quais a matriz A é diagonalizável.

(1,5 val.) **6)** Considere a matriz simétrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 20 \end{bmatrix}$.

- a) Usando o Critério de Sylvester, justifique que a forma quadrática $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $Q(X) = X^T A X$, para $X \in \mathbb{R}^3$, é definida positiva.
- b) O que pode dizer acerca dos valores próprios de A ?

(2,5 val.) **7)** Considere a cónica de equação

$$5x^2 - 4xy + 5y^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0.$$

Obtenha uma equação reduzida da cónica e classifique-a.

(3 val.) **8)** Considere a aplicação linear $L : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ definida por

$$L(x, y, z) = (x - z, -y + 2z, x - y + z).$$

- a) ~~Determine uma base do núcleo de L e a sua dimensão. L é injetiva?~~
- b) Determine a matriz de representativa de L relativamente à base $\mathcal{B} = ((1, -1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1))$ de \mathbb{R}^3 , $[L]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$.

(1 val.) **9)** Justifique as seguintes afirmações (verdadeiras).

- a) ~~Considere a aplicação linear $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se L é injetiva então $n \geq 4$.~~
- b) Seja $\{u, v, w\}$ um conjunto ortogonal de vetores de \mathbb{R}^n . Então $\{u, \alpha v + \beta w\}$ é também um conjunto ortogonal, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

② $Ax = b$ é um sistema de Cramer porque A é uma matriz quadrada e $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 2 \times (-2) = 4 \neq 0$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Estamos a calcular a 3ª incógnita, z , assim temos o det. de A substituindo a 3ª coluna por b .

Pela Regra de Cramer, $z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{4} = -\frac{1}{4}$

④ (a) $\mathcal{B} = \left(\underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)}_{=X_1}, \underbrace{\left(0, 0, 1 \right)}_{=X_2} \right)$ é uma base de \mathbb{F}

$$X_1 \cdot X_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \cdot (0, 0, 1) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \times 0 + 0 \times 1 = 0$$

X_1 e X_2
não
ortogonais

$$X_1 \cdot X_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 1, X_1 \text{ tem norma } 1$$

$$X_2 \cdot X_2 = (0, 0, 1) \cdot (0, 0, 1) = 1, X_2 \text{ tem norma } 1$$

Assim, como $X_1 \cdot X_2 = 0$ e $X_1 \cdot X_1 = X_2 \cdot X_2 = 1$, segue que \mathcal{B} é uma base ortonormal de \mathbb{F} .

(b) Como $\mathcal{B} = \left(\underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)}_{=X_1}, \underbrace{\left(0, 0, 1 \right)}_{=X_2} \right)$ é uma base ortonormal de \mathbb{F} então: (ver Teorema do Cap. 4 slide 10)

$$\begin{aligned} \text{Proj}_{\mathbb{F}}(1, 2, 3) &= ((1, 2, 3) \cdot X_1) X_1 + ((1, 2, 3) \cdot X_2) X_2 \\ &= ((1, 2, 3) \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)) X_1 + ((1, 2, 3) \cdot (0, 0, 1)) X_2 \\ &= (\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}) X_1 + 3 X_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) + 3(0, 0, 1) \\ &= (3/2, 3/2, 0) + (0, 0, 3) = (3/2, 3/2, 3) \end{aligned}$$

(c) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 2 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A X = b \text{ é impossível logo vamos usar o método dos mínimos quadrados}$

Equações Normais:

$$A^T A X = A^T b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolver as equações normais:

$$\begin{bmatrix} A^T A & | & A^T b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_2=L_2+L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{L_1=L_1+2L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{L_1=\frac{L_1}{2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9/2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = [C | D]$$

$$A^T A X = A^T b \Leftrightarrow X = D \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/2 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ y = 3 \end{cases} \text{ e' a solucao dos minimos quadrados}$$

O erro é: $\| b - A \begin{bmatrix} 9/2 \\ 3 \end{bmatrix} \| = \| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9/2 \\ 3 \end{bmatrix} \| = \| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 3 \end{bmatrix} \|$

$$= \| \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \| = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 + 0^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(5) (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & 2 \end{bmatrix}$ é uma matriz triangular inferior logo os valores próprios são os elementos da diagonal principal: 1 e 2.

ou

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & a & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ a & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 2 \text{ são os valores próprios de } A.$$

(b) $A_{3 \times 3}$ é diagonalizável se e só se A possui 3 vetores próprios l.i.

Pela alínea (a), $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = (1-\lambda)^1(2-\lambda)^2$ logo, $1 \leq \dim U_1 \leq 1 \Rightarrow \dim U_1 = 1$ e $1 \leq \dim U_2 \leq 2$ (Teorema do Cap. 5.1. slide 4).

1 e 2 são valores próprios de A logo A possui $\dim U_1 + \dim U_2$ vetores próprios l.i. (Teorema do Cap. 5.1. slide 11)

Assim, A $_{3 \times 3}$ é diagonalizável $\Leftrightarrow \dim U_1 + \dim U_2 = 3 \Leftrightarrow 1 + \dim U_2 = 3$
 $\Leftrightarrow \dim U_2 = 2$

Cap. 5.1. \leftarrow slide 12 \Leftrightarrow n.º de colunas de A - Car(A - 2I₃) = 2
 $\Leftrightarrow 3 - \text{Car}(A - 2I_3) = 2$
 $\Leftrightarrow \text{Car}(A - 2I_3) = 1$
 $\Leftrightarrow a = 0$

C.A.

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \end{bmatrix} \underset{L_2=L_2+L_1}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

escalonada
 $\text{Car}(A - 2I_3) = 1 \Leftrightarrow a = 0$

ou $A_{3 \times 3}$ é diagonalizável $\Leftrightarrow A$ possui 3 vetores próprios l.i.

(vamos calcular os vetores próprios de A e ver para que valores de a é que a matriz A possui 3 vetores próprios l.i.)

Subespaço próprio associado ao valor próprio 1:

$$\begin{aligned} U_1 &= \left\{ X \in \mathbb{R}^3 : (A - 1I_3)X = 0 \right\} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} 0=0 \\ x+y=0 \\ x+ay+z=0 \end{cases} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{C.A.} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0 \\ x+y=0 \\ x+ay+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ -y+ay+z=0 \\ -y(1-a)+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ z=y(1-a) \end{cases} \end{array} \\ &= \left\{ (-y, y, y(1-a)), y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ y(-1, 1, 1-a), y \in \mathbb{R} \right\} = \langle (-1, 1, 1-a) \rangle \end{aligned}$$

$(-1, 1, 1-a)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 1. (já temos 1 vetor
próprio faltam
mais 2.)

Subespaço próprio associado ao valor próprio 2:

$$\begin{aligned} U_2 &= \left\{ X \in \mathbb{R}^3 : (A - 2I_3)X = 0 \right\} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} -x=0 \\ x=0 \\ x+ay=0 \end{cases} \right\} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x=0 \\ ay=0 \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x=0 \\ y=0 \text{ ou } a=0 \end{cases} \right\} \end{aligned}$$

Se $a \neq 0$ $U_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x=0 \text{ e } y=0 \right\} = \{(0, 0, z), z \in \mathbb{R}\}$
então $y=0$
 $= \{z(0, 0, 1), z \in \mathbb{R}\} = \langle (0, 0, 1) \rangle$

$(0, 0, 1)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 2. Neste caso, A só tem 2 vetores próprios l.i., $(0, 0, 1)$ e $(-1, 1, a-1)$ e por isso não é diagonalizável.

Se $a=0$ $U_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x=0 \right\} = \{(0, y, z), y, z \in \mathbb{R}\}$
 $= \{(0, y, 0) + (0, 0, z), y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1), y, z \in \mathbb{R}\}$
 $= \langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$

$(0, 1, 0), (0, 0, 1)$ são vetores próprios associados ao valor próprio 2. Portanto,

$A_{3 \times 3}$ é diagonalizável $\Leftrightarrow A$ possui 3 vetores próprios l.i. e isso acontece apenas quando $a=0$, sendo os vetores próprios $(-1, 1, 1-a), (0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

⑥ (a) Os menores principais dominantes são:

$$\Delta_1 = |1| = 1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2, \Delta_3 = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 20 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 20 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 60 - 1 - (20 + 3) - 3(1+9) = 6$$

Como todos os menores principais dominantes são positivos, isto é, $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 > 0$, pelo critério de Sylvester, a forma quadrática Q é definida positiva. (Cap. 5.2. slide 10)

(b) Pela alínea (a), como $Q(X) = X^T A X$ é definida positiva então todos os valores próprios de A são positivos. (Cap. 5.2. slide 7)

$$(7) \quad 5x^2 - 4xy + 5y^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [\sqrt{2} \quad \sqrt{2}] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$$(\mathbb{R}^2)$$

$$\Leftrightarrow X^T A X + BX = 0$$

Eliminar o termo cruzado $-4xy$:

Calcular os valores próprios de A :

$$|A - \lambda I_2| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (5-\lambda)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 21}}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{10 \pm \sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow \lambda = 7 \text{ ou } \lambda = 3 \quad \text{são os valores próprios de } A$$

Calcular os vetores próprios de A :

$$U_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (A - 7I_2)X = 0\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -y\} = \{(-y, y), y \in \mathbb{R}\} = \{y(-1, 1), y \in \mathbb{R}\} = \langle (-1, 1) \rangle$$

$(-1, 1)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 7.

$$U_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (A - 3I_2)X = 0\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\} = \{(y, y), y \in \mathbb{R}\} = \{y(1, 1), y \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1) \rangle$$

$(1, 1)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 3.

Dividir cada vetor próprio pela sua norma:

$$\frac{(-1,1)}{\|(-1,1)\|} = \frac{(-1,1)}{\sqrt{(-1)^2+1^2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ e } \frac{(1,1)}{\|(1,1)\|} = \frac{(1,1)}{\sqrt{1^2+1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Construir P e D: $P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

vetor próprio do 7 vetor próprio do 2

Mudança de variável: $X = P\hat{X}$ em que $\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}$ e calcular $\hat{B} = BP = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$

Assim, $X^TAX + BX = 0 \Leftrightarrow \hat{X}^T D \hat{X} + \hat{B} \hat{X} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow 7\hat{x}^2 + 2\hat{y}^2 + 2\hat{y} = 0$$

Completar o quadrado

$$\Leftrightarrow 7\hat{x}^2 + 2(\hat{y}^2 + 1\hat{y}) = 0 \Leftrightarrow 7\hat{x}^2 + 2(\hat{y}^2 + \hat{y} + (\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 7\hat{x}^2 + 2(\hat{y}^2 + \hat{y} + (1/2)^2) - 2 \times (1/2)^2 = 0 \Leftrightarrow 7\hat{x}^2 + 2(\underbrace{\hat{y}^2 + \hat{y} + (1/2)^2}_{= \hat{y}^2}) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 14\hat{x}^2 + 4\hat{y}^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{\hat{x}^2}{1/14} + \frac{\hat{y}^2}{1/4} = 1 \quad \text{elipsóide}$$

(8)(b) $L(x,y,z) = (x-z, -y+2z, x-y+z)$ e $B = ((1,-1,0), (1,0,1), (0,0,1))$

$$[L]_{B,B} = \begin{bmatrix} [L(1,-1,0)]_B & [L(1,0,1)]_B & [L(0,0,1)]_B \end{bmatrix}$$

1º Calcular $L(1,-1,0)$, $L(1,0,1)$ e $L(0,0,1)$

$$L(1,-1,0) = (1-0, -(-1)+2 \cdot 0, 1-(-1)+0) = (1, 1, 2)$$

$$L(1,0,1) = (0, 2, 2) \text{ e } L(0,0,1) = (-1, 2, 1)$$

2º Escrever $L(1,-1,0)$, $L(1,0,1)$ e $L(0,0,1)$ como combinação linear de B

$$L(1,-1,0) = (1, 1, 2) = \alpha_1(1, -1, 0) + \alpha_2(1, 0, 1) + \alpha_3(0, 0, 1)$$

$$\Leftrightarrow (1, 1, 2) = (\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ -\alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 2 \\ \alpha_1 = -1 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases} \text{ assim } [L(1, -1, 0)]_{B_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L(1, 0, 1) = (0, 2, 2) = \beta_1(1, -1, 0) + \beta_2(1, 0, 1) + \beta_3(0, 0, 1)$$

$$\Leftrightarrow (0, 2, 2) = (\beta_1 + \beta_2, -\beta_1, \beta_2 + \beta_3) \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = 0 \\ -\beta_1 = 2 \\ \beta_2 + \beta_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_2 = 2 \\ \beta_1 = -2 \\ \beta_3 = 0 \end{cases} \text{ assim } [L(1, 0, 1)]_{B_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L(0, 0, 1) = (-1, 2, 1) = \gamma_1(1, -1, 0) + \gamma_2(1, 0, 1) + \gamma_3(0, 0, 1)$$

$$\Leftrightarrow (-1, 2, 1) = (\gamma_1 + \gamma_2, -\gamma_1, \gamma_2 + \gamma_3) \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 = -1 \\ -\gamma_1 = 2 \\ \gamma_2 + \gamma_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_2 = 1 \\ \gamma_1 = -2 \\ \gamma_3 = 0 \end{cases} \text{ assim } [L(0, 0, 1)]_{B_3} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Logo, } [L]_{B_1 B_2} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

⑨ (b) $\{u, v, w\}$ é ortogonal $\Rightarrow \{u, \alpha v + \beta w\}$ é ortogonal, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Se $\{u, v, w\}$ é ortogonal então $u \cdot v = 0$, $v \cdot w = 0$ e $u \cdot w = 0$. Nestas condições queremos mostrar que $\{u, \alpha v + \beta w\}$ é ortogonal, isto é, $u \cdot (\alpha v + \beta w) = 0$

$$u \cdot (\alpha v + \beta w) = u \cdot (\underbrace{\alpha v}_{=0}) + u \cdot (\underbrace{\beta w}_{=0}) = \alpha(u \cdot v) + \beta(u \cdot w) = 0$$

Logo, u e $\alpha v + \beta w$ são ortogonais, isto é, $\{u, \alpha v + \beta w\}$ é ortogonal.