Aula 21

24/11/2025

FP3 20 (a) $\det(AA^T) = \det(A)\underbrace{\det(A^T)}_{=\det(A)} = \det^2(A) \geq 0$

(b) Se $AB = I_n$ então $|AB| = |I_n| \Leftrightarrow |A||B| = 1$ logo $|A| \neq 0$ e $|B| \neq 0$

(c) Se A é singular / não tem inversa $|A| = 0$ então $|AB| = |A||B| = 0$, isto é, AB é singular

Teorema: (slide 4) $A_{n\times n}$ com k valores valores distintos e

$$\boxed{P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_{\lambda_1}} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{n_{\lambda_k}}}$$

então $1 \leq \dim \mathcal{U}_{\lambda_i} \leq n_{\lambda_i}$

slide 11

Lema: vetores próprios de valores próprios distintos são l.i. ("não se misturam")

Teorema: $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ são valores próprios distintos então temos $\dim \mathcal{U}_{\lambda_1} + \ldots + \dim \mathcal{U}_{\lambda_k}$ vetores próprios l.i. ("cada um contribui com vetores")

Exemplo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Como A é triangular inferior os valores próprios são os elementos na diagonal, isto é, o 1 e o 2.

$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0 \Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)\det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$

$\Leftrightarrow (1-\lambda)^2(2-\lambda)^1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = 2$ são os valores próprios de A

Pelo Teorema slide 4, $1 \leq \dim \mathcal{U}_2 \leq 1 \Rightarrow \dim \mathcal{U}_2 = 1$ e $1 \leq \dim \mathcal{U}_1 \leq 2$.

$\mathcal{U}_2 = \{X \in \mathbb{R}^3 : (A - 2I_3)X = 0\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 1-2 & 0 & 0 \\ -2 & 2-2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \text{ e } z = 0\}$

$= \{(0,y,0), y \in \mathbb{R}\} = \{y(0,1,0), y \in \mathbb{R}\} = \langle (0,1,0) \rangle$ $\dim \mathcal{U}_2 = 1$

$\mathcal{U}_1 = \{X \in \mathbb{R}^3 : (A - 1I_3)X = 0\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ -2 & 2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -2x + y = 0\}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y$

$= \{(\tfrac{1}{2}y, y, z), y,z \in \mathbb{R}\} = \{(\tfrac{1}{2}y, y, 0) + (0,0,z), y,z \in \mathbb{R}\}$

$= \{y(1/2,1,0) + z(0,0,1), y,z \in \mathbb{R}\} = \langle \underbrace{(1/2,1,0)}_{(\times 2)}, (0,0,1) \rangle$

Cap. 2.2.
Lema 11 · Slide 3

$= \langle (1,2,0), (0,0,1) \rangle$ dim $U_2 = 2$

Temos dim U_1 + dim $U_2 = 1+2 = 3$ vetores próprios l.i. o $(0,1,0)$ associado ao valor próprio 2 e o $(1,2,0)$ e $(0,0,1)$ ambos associados ao valor próprio 1.

A e B são semelhantes se existe P invertível tal que $\boxed{A = PBP^{-1}}$

A e B são semelhantes $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ Tem os mesmos valores próprios

prova: Os valores próprios de uma matriz são as raízes reais do seu polinómio característico. Assim, basta provar que o polinómio característico de A, $P_A(\lambda)$, é igual ao polinómio característico de B, $P_B(\lambda)$.

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I_n) \quad \text{, como } \det(P)\det(P^{-1}) = 1 \\ &= \det(P)\det(B - \lambda I_n)\det(P^{-1}) \\ &= \det(P(B - \lambda I_n)P^{-1}) \\ &= \det(PBP^{-1} - P\lambda I_n P^{-1}) \\ &= \det(PBP^{-1} - \lambda PP^{-1}) \quad \text{, como } PP^{-1} = I_n \text{ e } A = PBP^{-1} \\ &= \det(A - \lambda I_n) = P_A(\lambda) \end{aligned}$$

A é diagonalizável se existe P invertível e D diagonal tal que
$$\boxed{P^{-1}AP = D \Leftrightarrow A = PDP^{-1}}$$

Neste caso,
- as colunas de P (matriz diagonalizante) são os vetores próprios (l.i.) de A
- a diagonal principal de D são os valores próprios de A.

⚠ **Atenção:** a ordem dos vetores e valores próprios deve ser igual.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $(0,1,0)$ vetor próprio associado ao valor próprio 2
$(1,2,0)$ e $(0,0,1)$ vetores próprios associados ao valor próprio 1.

A é diagonalizável porque existe P - invertível e D - diagonal tal que $A = PDP^{-1}$ sendo:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

"mudança de base"

Quando é que uma matriz é diagonalizável?

$A_{n \times n}$ com polinómio característico $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_{\lambda_1}} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{n_{\lambda_k}}$

$\boxed{\text{A possui } n \text{ vetores próprios l.i. ou } \dim(U_{\lambda_i}) = n_{\lambda_i},\ i = 1, \dots, k}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\text{A é diagonalizável}}$

$\boxed{\text{A possui } n \text{ valores próprios distintos}}$ $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $\boxed{\text{A é diagonalizável}}$

NOTA: Se A tem $K < n$ valores próprios distintos então para ser diagonalizável $\dim(U_{\lambda_i}) = n_{\lambda_i}$.

Exemplo (aula anterior) $A_{2\times2} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $U_3 = \langle(1,0)\rangle$ e $U_2 = \langle(-1,1)\rangle$

Como $A_{2\times2}$ tem 2 valores próprios distintos então é diagonalizável. Assim, existe P invertível e D diagonal tal que $A = PDP^{-1}$ sendo:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo (aula hoje) $A_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $U_2 = \langle(0,1,0)\rangle$ e $U_1 = \langle(1,2,1),(0,0,1)\rangle$

A é diagonalizável porque tem 3 vetores próprios l.i.

Exemplo (aula anterior) $A_{3\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $U_0 = \langle(1,0,0),(0,1,0)\rangle$

A não é diagonalizável porque só temos $2 < 3$ vetores próprios l.i.

FPS - Recomendo 1(b), 2 e 9.