FP2 ex.24

Seja $\mathcal{S} = ((-1,1,0),(1,0,1),(0,0,1))$ e $\mathcal{T} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ bases ordenadas. Determine Y_1, Y_2 e Y_3, sabendo que

$$M_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz $M_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{T}}$ é uma matriz de mudança de base da base $\mathcal{T}$ para a base $\mathcal{S}$. As colunas da matriz são os vetores da base $\mathcal{T}$ escritos nas coordenadas da base $\mathcal{S}$, isto é,

$$M_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ [Y_1]_{\mathcal{S}} & [Y_2]_{\mathcal{S}} & [Y_3]_{\mathcal{S}} \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

Assim, temos que $[Y_1]_{\mathcal{S}}$ é igual à primeira coluna, $[Y_2]_{\mathcal{S}}$ é igual à segunda coluna e $[Y_3]_{\mathcal{S}}$ é igual à terceira coluna.

$$[Y_1]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

são as coordenadas do vetor Y_1 na base $\mathcal{S}$. Isso quer dizer que o vetor Y_1 é 1 vez o primeiro vetor da base $\mathcal{S}$, 2 vezes o segundo vetor da base $\mathcal{S}$ e -1 vez o terceiro vetor da base $\mathcal{S}$. Como conhecemos os vetores da base $\mathcal{S}$ conseguimos à custa deles calcular o vetor Y_1.

$$\begin{aligned} Y_1 &= 1\underbrace{(-1,1,0)}_{\substack{1^{\text{o}}\text{vetor} \\ \text{da base } \mathcal{S}}} + 2\underbrace{(1,0,1)}_{\substack{2^{\text{o}}\text{vetor} \\ \text{da base } \mathcal{S}}} - 1\underbrace{(0,0,1)}_{\substack{3^{\text{o}}\text{vetor} \\ \text{da base } \mathcal{S}}} \\ &= (-1,1,0) + (2,0,2) + (0,0,-1) \\ &= (1,1,1) \end{aligned}$$

$$[Y_2]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

são as coordenadas do vetor Y_2 na base $\mathcal{S}$. Isso quer dizer que o vetor Y_2 é 1 vez o primeiro vetor da base $\mathcal{S}$, 1 vez o segundo vetor da base $\mathcal{S}$ e -1 vez o terceiro vetor da base $\mathcal{S}$. Como conhecemos os vetores da base $\mathcal{S}$ conseguimos à custa deles calcular o vetor Y_2.

$$Y_2 = 1\underbrace{(-1,1,0)}_{\substack{1^{\text{o}}\text{vetor} \\ \text{da base } \mathcal{S}}} + 1\underbrace{(1,0,1)}_{\substack{2^{\text{o}}\text{vetor} \\ \text{da base } \mathcal{S}}} - 1\underbrace{(0,0,1)}_{\substack{3^{\text{o}}\text{vetor} \\ \text{da base } \mathcal{S}}} = (0,1,0)$$

$$[Y_3]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

são as coordenadas do vetor Y_3 na base $\mathcal{S}$. Isso quer dizer que o vetor Y_3 é 2 vezes o primeiro vetor da base $\mathcal{S}$, 1 vez o segundo vetor da base $\mathcal{S}$ e 1 vez o terceiro vetor da base $\mathcal{S}$. $Y_3 = 2\underbrace{(-1,1,0)}_{\substack{1^{\text{o}}\text{vetor} \\ \text{da base } \mathcal{S}}} + 1\underbrace{(1,0,1)}_{\substack{2^{\text{o}}\text{vetor} \\ \text{da base } \mathcal{S}}} + 1\underbrace{(0,0,1)}_{\substack{3^{\text{o}}\text{vetor} \\ \text{da base } \mathcal{S}}} = (0,1,0)$