

## Folha Prática 2

Atenção: Estas notas não constituem uma resolução formal e rigorosa dos exercícios das Folhas Práticas. Os exercícios com um grau de dificuldade acrescido encontram-se assinalados com (\*).

---

### Última atualização: 14 de outubro de 2025

Notas sobre os exercícios: 1(a), 1(b), 1(c), 2(c)i., 2(c)iii. 2(d)i., 2(d)ii, 2(e), 4(c), 5(e), 14, 18(b), 19(b), 21, 24(b) e 24(f).

---

1(a).  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y = 0 \text{ e } z = 1\} = \{(-2, 1, 1), (4, -2, 1), \dots\}$

$S$  é um subespaço de  $\mathbb{R}^3$ ?

- $(0, 0, 0) \in S$ ? Não, porque os vetores que estão no conjunto  $S$  têm de ter a terceira coordenada igual a 1 e o vetor nulo,  $(0, 0, 0)$ , tem a terceira coordenada igual a 0 ( $0 \neq 1$ ).

Assim,  $S$  não é um subespaço de  $\mathbb{R}^3$ .

1(b). Um vetor ser colinear a outro quer dizer que é múltiplo desse vetor. Assim,

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \text{ é colinear a } (1, 2, 3)\} \\ &= \{\alpha(1, 2, 3) : \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(0, 0, 0), (1, 2, 3), (-1, -2, -3), (2, 4, 6), \dots\} \end{aligned}$$

$S$  é um subespaço de  $\mathbb{R}^3$ ?

- $(0, 0, 0) \in S$ ? Sim, porque o vetor nulo de  $\mathbb{R}^3$  é múltiplo de  $(1, 2, 3)$ , isto é,  $(0, 0, 0) = 0(1, 2, 3)$ .
- Seja  $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$  temos que os vetores  $\alpha(1, 2, 3)$  e  $\alpha'(1, 2, 3)$  são vetores que estão no conjunto  $S$ . Será que a soma destes vetores é ainda um vetor em  $S$ ?

$$\begin{aligned} \alpha(1, 2, 3) + \alpha'(1, 2, 3) &= (\alpha, 2\alpha, 3\alpha) + (\alpha', 2\alpha', 3\alpha') \\ &= (\alpha + \alpha', 2\alpha + 2\alpha', 3\alpha + 3\alpha') \\ &= ((\alpha + \alpha') \times 1, (\alpha + \alpha') \times 2, (\alpha + \alpha') \times 3) \\ &= \underbrace{(\alpha + \alpha')}_{\in \mathbb{R}} (1, 2, 3) \in S \end{aligned}$$

Assim,  $S$  é fechado para a soma, isto é, dados dois vetores múltiplos/colineares a  $(1, 2, 3)$  a sua soma continua a ser um vetor múltiplo de  $(1, 2, 3)$ .

- Seja  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  temos que o vetor  $\alpha(1, 2, 3) \in S$ . Será que  $\beta\alpha(1, 2, 3) \in S$ ? Sim, porque o vetor  $\underbrace{\beta\alpha}_{\in \mathbb{R}} (1, 2, 3)$  é colinear a  $(1, 2, 3)$ . Logo,  $S$  é fechado para a multiplicação por escalar.

Portanto,  $S$  é um subespaço de  $\mathbb{R}^3$ .

1(c). (\*) O conjunto  $S$  das funções reais de variável real que são pares é:

$$S = \{f \text{ é uma função real} : f \text{ é par}\} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = f(-x)\}$$

$S$  é um subespaço vetorial das funções reais?

- O elemento neutro das funções reais é a função nula  $N(x) = 0$  que envia qualquer número real  $x$  para 0.

A função nula é par, isto é,  $N \in S$ ? Sim, porque  $N(x) = 0 = N(-x)$ . Seja lá qual for o número  $x$ , a função nula envia tanto  $x$  como  $-x$  para 0, assim a função nula é par.

- Sejam  $f, g \in S$ , temos que  $f$  e  $g$  são funções pares, ou seja,  $f(x) = f(-x)$  e  $g(x) = g(-x)$ . Será que a soma de duas funções pares é ainda uma função par? Será que  $(f + g) \in S$ ?

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) && \text{pelas propriedades das funções reais} \\ &= f(-x) + g(-x) && f \text{ e } g \text{ são pares temos } f(x) = f(-x) \text{ e } g(x) = g(-x) \\ &= (f + g)(-x) && \text{propriedade das funções reais} \end{aligned}$$

Assim,  $(f + g)(x) = (f + g)(-x)$  logo  $(f + g)$  é uma função par e por isso está em  $S$ !

- Seja  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $f \in S$  uma função par. Será que  $(\alpha f) \in S$ ? Isto é, será que  $(\alpha f)$  é par?

$$\begin{aligned} (\alpha f)(x) &= \alpha f(x) && \text{pelas propriedades das funções reais} \\ &= \alpha f(-x) && \text{como } f \text{ é par temos que } f(x) = f(-x) \\ &= (\alpha f)(-x) && \text{propriedade das funções reais} \end{aligned}$$

Assim,  $(\alpha f)(x) = (\alpha f)(-x)$  logo  $(\alpha f)$  é par e por isso pertence a  $S$ .

Portanto,  $S$  é um subespaço vetorial para as funções reais porque contém o elemento neutro (a matriz nula), é fechado para a soma e para a multiplicação por um escalar.

- 2(c)i. No espaço vetorial  $\mathcal{P}_2$  dos polinômios em  $x$  com grau não superior a 2, o conjunto  $S$  de polinômios  $ax^2 + bx + c$  com  $c = 0$  é o conjunto de polinômios com grau não superior a 2 cujo coeficiente do termo de grau 0 é igual a 0.

$$S = \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 \mid c = 0\} = \{ax^2 + bx \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \{x^2, 2x^2, x^2 + x, x, \dots\}$$

Por exemplo, temos que  $x^2 + 3 \notin S$  porque não conseguimos arranjar números reais  $a$  e  $b$  tal que  $ax^2 + bx = x^2 + 3$ , por outras palavras, o coeficiente do termo de grau 0 é 3 e não 0 como queríamos!

$S$  é um subespaço vetorial de  $\mathcal{P}_2$ ?

- Será que 0 (polinómio nulo)  $\in S$ ? Isto é, será que existe  $a, b \in \mathbb{R}$  tal que  $ax^2 + bx = 0$ ?  
Sim, quando  $a = b = 0$  temos que  $ax^2 + bx = 0x^2 + 0x = 0 \in S$ .
- Será que  $S$  é fechado para a soma? Dados quaisquer dois polinómios de  $S$ , a sua soma ainda está em  $S$ ? Isto é, para quaisquer  $ax^2 + bx, a'x^2 + b'x \in S$ , será que  $ax^2 + bx + a'x^2 + b'x \in S$ ?

$$ax^2 + bx + a'x^2 + b'x = \underbrace{(a + a')}_{\in \mathbb{R}}x^2 + \underbrace{(b + b')}_{\in \mathbb{R}}x \in S$$

Sim, a soma de dois polinómios de  $S$  é ainda um polinómio de  $S$  porque dados dois polinómios de grau não superior a 2, cujo termo de grau 0 tem coeficiente igual a 0, a sua soma continua a ser um polinómio de grau não superior a 2 cujo termo de grau 0 tem coeficiente igual a 0.<sup>i</sup>

- Será que  $S$  é fechado para a multiplicação por um escalar? Seja  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $ax^2 + bx \in S$ , será que  $\alpha(ax^2 + bx) \in S$ ?

$$\alpha(ax^2 + bx) = \underbrace{(\alpha a)}_{\in \mathbb{R}}x^2 + \underbrace{(\alpha b)}_{\in \mathbb{R}}x \in S$$

Sim, a multiplicação por um escalar de um polinómio em  $S$  é ainda um polinómio em  $S$ . Dado um número real qualquer  $\alpha$  e um polinómio de grau não superior a 2, cujo termo de grau 0 tem coeficiente igual a 0, o produto desse polinómio por  $\alpha$  continua a ser um polinómio de grau não superior a 2 cujo coeficiente do termo de grau 0 é ainda igual a 0.<sup>ii</sup>

Assim,  $S$  é um subespaço vetorial de  $\mathcal{P}_2$  porque contém o elemento neutro, é fechado para a soma e é fechado para a multiplicação por escalar.

- 2(c)iii. No espaço vetorial  $\mathcal{P}_2$  dos polinómios em  $x$  com grau não superior a 2, o conjunto  $S$  de polinómios  $ax^2 + bx + c$  com  $bc = 0$  é o conjunto de polinómios com grau não superior a 2 cujo coeficiente do termo de grau 1 vezes o coeficiente do termo de grau 0 é igual a 0.

$$\begin{aligned} S &= \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 \mid bc = 0\} = \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 \mid b = 0 \text{ ou } c = 0\} \\ &= \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 \mid b = 0\} \cup \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 \mid c = 0\} \\ &= \{x, 1, x^2 + x, x^2 + 1, x^2, \dots\} \end{aligned}$$

Por exemplo, temos que  $x^2 + 2x + 3 \notin S$  porque o produto do coeficiente do termo de grau 2 (o 1) com o coeficiente do termo de grau 0 (o 3) dá 6 que é diferente de 0. Em contrapartida o polinómio  $1 = 0x^2 + 0x + 1$  pertence ao conjunto  $S$  porque o coeficiente do termo de grau 1 é igual a 0.

$S$  é um subespaço vetorial de  $\mathcal{P}_2$ ?

<sup>i</sup>Por exemplo,  $x^2$  e  $x$  são elementos de  $S$ , e a sua soma  $x^2 + x$  é ainda um elemento de  $S$ , o termo de grau 0 não deixa de ser diferente de 0. Atenção que um exemplo não é o mesmo que uma prova!

<sup>ii</sup>Por exemplo,  $2x^2$  é um polinómio em  $S$  e se o multiplicarmos pelo número real 3 temos o polinómio  $6x^2$  que continua a ser um polinómio em  $S$ .

- Será que o polinómio nulo pertence a  $S$ ,  $0 \in S$ ? Isto é, será que o coeficiente do termo de grau 1 ou o do termo de grau 0 do polinómio nulo é igual a 0?

Sim, o polinómio nulo tem todos os coeficientes iguais a 0. É de notar que o polinómio nulo pode ser escrito como  $0 = 0x^2 + \underbrace{0}_b x + \underbrace{0}_c$  e assim temos que  $bc = 0 \times 0 = 0$ .

- Será que  $S$  é fechado para a soma? Dados quaisquer dois polinómios de  $S$ , a sua soma ainda está em  $S$ ? Isto é, para quaisquer polinómios  $ax^2 + bx + c$ ,  $a'x^2 + b'x + c' \in S$  em que  $bc = 0$  e  $b'c' = 0$  será que:  $ax^2 + bx + c + a'x^2 + b'x + c' = (a + a')x^2 + (b + b')x + (c + c')$  será que ainda temos que  $(b + b') \times (c + c') = 0$ ?

(Neste caso, isto não se verifica. O que acontece é que conseguimos arranjar um polinómio em que  $b = 0$  e  $c \neq 0$ , e outro em que  $b' \neq 0$  e  $c' = 0$ . Ambos estão em  $S$ , porque  $bc = 0$  e  $b'c' = 0$ , mas quando os somamos como  $b + b' \neq 0$  e  $c + c' \neq 0$  obtemos que  $(b + b') \times (c + c') \neq 0$  e assim o polinómio resultante já não pertence a  $S$ . O truque está em notar que o conjunto  $S$  pode ser escrito como a união de dois subconjuntos (não mutuamente exclusivos): os polinómios cujo coeficiente do termo de grau 1 é nulo ( $b = 0$ ), e os polinómios cujo coeficiente do termo de grau 0 é nulo ( $c = 0$ ). Assim, conseguimos encontrar um polinómio que está no primeiro conjunto mas não no segundo, e outro que está no segundo mas não no primeiro. Quando os somamos, o resultado não pertence a nenhum dos dois subconjuntos. Como esta propriedade falha, basta apresentarmos um contraexemplo: se não se verifica para alguns polinómios, então a propriedade não se verifica em geral. O exercício 2(d)(ii) tem um raciocínio semelhante, mas usa matrizes.)

Não! Por exemplo, temos que  $x^2 + 1 \in S$ , porque  $b = 0$  e  $c = 1$  assim  $bc = 0$ , e  $x^2 + x \in S$ , porque  $b' = 1$  e  $c' = 0$  assim  $b'c' = 0$ . Mas a sua soma não é um polinómio de  $S$ ,

$$(x^2 + 1) + (x^2 + x) = 2x^2 + \textcolor{red}{1}x + \textcolor{blue}{1} \notin S$$

porque  $(b + b') \times (c + c') = \textcolor{red}{1} \times \textcolor{blue}{1} = 1 \neq 0$ .

- (Já agora,  $S$  é fechado para a multiplicação por escalar, pois se  $bc = 0$ , ao multiplicar por qualquer escalar/número real o resultado continua a dar 0. Mas não vale a pena estarem a verificar esta propriedade: como  $S$  não é fechado para a soma, o exercício termina logo com o contraexemplo acima).

Assim, como não é fechado para a soma,  $S$  não é um subespaço vetorial de  $\mathcal{P}_2$ .

2(d)i. No espaço  $M_{n \times n}$  das matrizes quadradas de ordem  $n$ , o conjunto  $S$  das matrizes simétricas<sup>iii</sup> é:

$$S = \{A \in M_{n \times n} : A \text{ é simétrica}\} = \{A \in M_{n \times n} : \textcolor{red}{A} = \textcolor{red}{A}^T\}$$

$S$  é um subespaço de  $M_{n \times n}$ ?

- $O_{n \times n}$  (matriz nula de ordem  $n$ )  $\in S$ ? Sim, porque  $O = O^T$ , isto é, a matriz nula é simétrica porque é igual à sua transposta.
- Sejam  $A$  e  $B$  duas matrizes  $n \times n$  simétricas, ou seja,  $A = A^T$  e  $B = B^T$ . Assim,  $A, B \in S$ . Será que  $A + B \in S$ ? Será que  $A + B$  é ainda uma matriz simétrica, isto é,  $(A + B) = (A + B)^T$ ?

$$\begin{aligned} (A + B)^T &= A^T + B^T && \text{pela Prop 5 slide 14 Cap.1.1} \\ &= A + B && \text{como } A \text{ e } B \text{ são simétricas temos que } A = A^T \text{ e } B = B^T \end{aligned}$$

Logo,  $A + B \in S$ , a soma de duas matrizes simétricas é ainda uma matriz simétrica.

- Dado um escalar qualquer,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , e uma matriz quadrada de ordem  $n$  simétrica,  $A \in S$ . Será que  $\alpha A$  é ainda uma matriz simétrica? Isto é, será que  $\alpha A = (\alpha A)^T$ ?

$$\begin{aligned} (\alpha A)^T &= \alpha A^T && \text{pela Prop. 9 slide 14 Cap.1.1} \\ &= \alpha A && \text{como } A \text{ é simétrica temos que } A = A^T \end{aligned}$$

Logo,  $\alpha A \in S$ , a multiplicação por um escalar de uma matriz simétrica é ainda uma matriz simétrica.

Assim,  $S$  é um subespaço de  $M_{n \times n}$  porque contém o elemento neutro (a matriz nula), é fechado para a soma e fechado para a multiplicação por um escalar.

<sup>iii</sup>Ver a definição de matriz simétrica no Cap.1 slide 12

- 2(d)ii. No espaço  $M_{n \times n}$  das matrizes quadradas de ordem  $n$ , o conjunto  $S$  das matrizes triangulares (superiores e inferiores) é:

$$S = \{A \in M_{n \times n} : A \text{ é triangular}\} \\ = \{A \in M_{n \times n} : A \text{ é triangular superior}\} \cup \{A \in M_{n \times n} : A \text{ é triangular inferior}\}$$

em que uma matriz é triangular superior se abaixo da diagonal principal só temos zeros e é triangular inferior se acima da diagonal principal só temos zeros (ver definições do Cap.1 slide 11).

$S$  é um subespaço de  $M_{n \times n}$ ?

- A matriz nula  $O_{n \times n}$  está no conjunto  $S$ ? Por outras palavras, a matriz nula é uma matriz triangular? Sim, a matriz nula é uma matriz triangular superior: porque abaixo da diagonal principal só temos zeros e também é uma matriz triangular inferior porque acima da diagonal principal só temos zeros.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{O_{n \times n} \text{ é triangular superior}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{O_{n \times n} \text{ é triangular inferior}}$$

- $S$  é fechado para a soma? Dadas duas matrizes triangulares a soma é sempre uma matriz triangular? Se somarmos duas matrizes triangulares superiores é verdade que obtemos uma matriz triangular superior:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{\in S} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & 0 & a'_{23} & \dots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{\in S} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a_{12} + a'_{12} & a_{13} + a'_{13} & \dots & a_{1n} + a'_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} + a'_{23} & \dots & a_{2n} + a'_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{3n} + a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{\in S}$$

E se somarmos duas matrizes triang. inf. é verdade que obtemos uma matriz triangular inf.:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{\in S} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a'_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a'_{31} & a'_{32} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & a'_{n3} & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{\in S} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} + a'_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} + a'_{31} & a_{32} + a'_{32} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + a'_{n1} & a_{n2} + a'_{n2} & a_{n3} + a'_{n3} & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{\in S}$$

Mas, e se somarmos uma matriz triangular superior com uma inferior? Não obtemos necessariamente uma matriz triangular. Por exemplo,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{\in S \text{ porque é triang. sup.}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{\in S \text{ porque é triang. inf.}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{\notin S \text{ porque não é triangular!}}$$

Assim,  $S$  não é fechado para a soma e por isso  $S$  não é um subespaço de  $M_{n \times n}$ .

- 2(e). (\*) Dada uma matriz qualquer com ordem  $m \times n$ ,  $A \in M_{m \times n}$ , será que o conjunto

$$S = \{AX : X \in \mathbb{R}^n\} \\ = \{B \in \mathbb{R}^m : \exists X \in \mathbb{R}^n, B = AX\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

é um subespaço vetorial?

(Nota: basicamente o conjunto  $S$  são todos os vetores  $B$  tal que existe um  $X$  que multiplicado mais à direita por  $A$  dá o vetor  $B$ , ou seja, para provarmos que um vetor  $B \in \mathbb{R}^m$  pertence a  $S$  temos de encontrar  $X \in \mathbb{R}^n$  tal que  $B = AX$ .)

Por exemplo, se  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$  temos que  $S$  é:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \dots \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots \right\}$$

Assim, dado um vetor qualquer  $X \in \mathbb{R}^n$ , o vetor que resulta da multiplicação  $AX$  é um vetor que está em  $S$ .)

- $O_{m \times 1}$  (o vetor nulo)  $\in S$ ? Sim, porque existe  $X \in \mathbb{R}^n$  tal que  $AX = O_{m \times 1}$ . Seja  $X = O_{n \times 1}$  temos que  $AO_{n \times 1} = O_{m \times 1}$ .
- Dados dois vetores de  $\mathbb{R}^m$  que estão no conjunto  $S$  será que a soma desses vetores é ainda um vetor que está no conjunto  $S$ ? Por outras palavras, para quaisquer vetores  $B = AX$ ,  $B' = AX'$  será que  $B + B' \in S$ ?

$$B + B' = AX + AX' = A(X + X')$$

Assim, existe um vetor, o  $X + X'$ , que multiplicado mais à direita de  $A$  dá o vetor  $B + B'$ . Logo,  $B + B' \in S$ .  $S$  é fechado para a soma.

- Seja  $\alpha \in \mathbb{R}$  e dado um vetor de  $B \in S$ , isto é existe  $X$  tal que  $AX = B$ . Será que  $\alpha B$  ainda é um vetor de  $S$ ? Para mostrar que  $\alpha B \in S$  temos de encontrar um  $X'$  tal que  $AX' = \alpha B$ .

$$\alpha B \stackrel{B \in S \text{ i.e., } B=AX}{=} \alpha AX = A(\alpha X)$$

Assim, o vetor  $\alpha X$  quando multiplicado mais à direita de  $A$  dá o vetor  $\alpha B$ . Portanto, o vetor  $\alpha B \in S$ .  $S$  é fechado para a multiplicação por escalar.

$S$  contém o elemento neutro de  $\mathbb{R}^m$ , é fechado para a soma e para a multiplicação por escalar e por isso  $S$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^m$ .

- 4(c). Queremos escrever  $-t^2 + t + 4$  como combinação linear de  $t^2 + 2t + 1$ ,  $t^2 + 3$  e  $t - 1$ , ou seja, queremos encontrar  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$  tal que:

$$\begin{aligned} -t^2 + t + 4 &= \alpha_1(t^2 + 2t + 1) + \alpha_2(t^2 + 3) + \alpha_3(t - 1) \\ &= \alpha_1 t^2 + 2\alpha_1 t + \alpha_1 + \alpha_2 t^2 + 3\alpha_2 + \alpha_3 t - \alpha_3 \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2)t^2 + (2\alpha_1 + \alpha_3)t + (\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3) \end{aligned}$$

Do lado direito e do lado esquerdo temos dois polinómios que queremos que sejam iguais! Portanto queremos que o coeficiente do  $t^2$  seja igual,  $\alpha_1 + \alpha_2 = -1$ , o coeficiente do  $t$  seja igual,  $2\alpha_1 + \alpha_3 = 1$ , e o coeficiente do termo de grau 0 seja igual,  $\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 4$ .

$$\begin{aligned} -1t^2 + 1t + 4 &= (\alpha_1 + \alpha_2)t^2 + (2\alpha_1 + \alpha_3)t + (\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -1 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 &= 2\alpha_1 + \alpha_3 \\ 4 &= \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = B \end{aligned}$$

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow[L_3=L_3-L_1]{L_2=L_2-2L_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3=L_3+L_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array} \right]$$

Como  $\text{car}(A) = 2 < \text{car}([A|B]) = 3$ , o sistema  $AX = B$  é impossível o que quer dizer que não conseguimos escrever o polinómio  $-t^2 + t + 4$  como combinação linear de  $t^2 + 2t + 1$ ,  $t^2 + 3$  e  $t - 1$ .

- 5(e). Estamos no espaço vetorial  $\mathcal{P}_2$  dos polinómios em  $t$  com grau não superior a 2. Qual é o espaço gerado pelo conjunto  $\{t^2 + 1, t^2 + t, t + 1\}$ ? O espaço gerado pelos polinómios indicados é denotado por  $\langle t^2 + 1, t^2 + t, t + 1 \rangle$  e consiste em todos os polinómios da forma  $at^2 + bt + c$ , com  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , que conseguimos escrever como combinação linear dos polinómios  $t^2 + 1$ ,  $t^2 + t$  e  $t + 1$ ?

Nós apenas queremos saber quais são os polinómios  $at^2 + bt + c$  que conseguimos escrever à custa dos polinómios  $t^2 + 1$ ,  $t^2 + t$  e  $t + 1$ . Isto implica que temos de ver quando é que o seguinte sistema é possível:

$$at^2 + bt + c = \alpha_1(t^2 + 1) + \alpha_2(t^2 + t) + \alpha_3(t + 1), \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$$

Nestes exercícios as nossas incógnitas são  $a, b$  e  $c$ , não nos interessa saber quem são  $\alpha_1, \alpha_2$  e  $\alpha_3$ ! De novo, nós queremos saber quais são os polinómios que são combinação linear de  $t^2 + 1$ ,  $t^2 + t$  e  $t + 1$ ; não estamos interessados em como é que são combinação linear daqueles polinómios, só quais é que são.

O espaço gerado pelos polinómios indicados é:

$$\begin{aligned} \langle t^2 + 1, t^2 + t, t + 1 \rangle &= \{at^2 + bt + c \in \mathcal{P}_2 : at^2 + bt + c = \alpha_1(t^2 + 1) + \alpha_2(t^2 + t) + \alpha_3(t + 1), \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\} \\ &\quad \text{Do lado direito da equação vamos agrupar os termos } t^2, t \text{ e os termos independentes} \\ &= \{at^2 + bt + c \in \mathcal{P}_2 : at^2 + bt + c = (\alpha_1 + \alpha_2)t^2 + (\alpha_2 + \alpha_3)t + (\alpha_1 + \alpha_3), \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\} \\ &\quad \text{Quero que as cores/coeficientes do lado esquerdo sejam iguais às do lado direito} \\ &= \left\{ at^2 + bt + c \in \mathcal{P}_2 : \begin{cases} (\alpha_1 + \alpha_2) = a \\ (\alpha_2 + \alpha_3) = b \\ (\alpha_1 + \alpha_3) = c \end{cases}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &\quad \text{Vamos escrever o sistema com matrizes porque somos fortes} \\ &= \left\{ at^2 + bt + c \in \mathcal{P}_2 : \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{\text{Quando é que este sistema é possível?}}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

O sistema<sup>iv</sup>:

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

é possível se e só se  $\text{car}(A) = \text{car}([A|B])$ . Vamos escalonar a matriz ampliada  $[A|B]$ :

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 & c \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 = L_3 - L_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & -1 & 1 & c - a \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 = L_3 + L_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 & c - a + b \end{array} \right]$$

Os pivots estão marcados **nesta cor**. Temos sempre que  $\text{car}(A) = \text{car}([A|B])$ , ou seja, o sistema  $AX = B$  é sempre possível. Logo, seja lá qual for o polinómio  $at^2 + bt + c \in \mathcal{P}_2$  conseguimos sempre escrevê-lo como combinação linear dos polinómios  $t^2 + 1$ ,  $t^2 + t$  e  $t + 1$ . Portanto, não existe um único polinómio em  $\mathcal{P}_2$  que não pode ser escrito como combinação linear dos polinómios indicados, isso é o mesmo que dizer que o espaço gerado por esses polinómios corresponde a todos os polinómios em  $t$  de grau não superior a 2.

$$\langle t^2 + 1, t^2 + t, t + 1 \rangle = \mathcal{P}_2$$

14. <sup>v</sup>  $K = \{(a^2, 0, 1), (0, a, 2), (1, 0, 1)\}$

Qualquer base de  $\mathbb{R}^3$  é um conjunto com 3 vetores, porque a dimensão de  $\mathbb{R}^3$  é 3, que é linearmente independente e gera  $\mathbb{R}^3$ . Pelo Teorema do Cap.2 slide 13, como  $K$  tem exatamente 3 vetores e  $\dim \mathbb{R}^3 = 3$  basta ver para que valores de  $a$  é que  $K$  é um conjunto l.i. ou para que valores de  $a$  é que  $K$  gera  $\mathbb{R}^3$  que automaticamente satisfaz a outra condição e forma uma base de  $\mathbb{R}^3$ .

Para que valores de  $a$  é que  $K$  é l.i.? O conjunto  $K$  é l.i. se

$$\alpha_1(a^2, 0, 1) + \alpha_2(0, a, 2) + \alpha_3(1, 0, 1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = B$$

implica que  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$  (ver a definição do Cap.2 slide 9).

<sup>iv</sup> Reparem que o que fazemos com os vetores também fazemos aqui: os coeficientes dos polinómios estão nas colunas da matriz  $A$ . Por exemplo, o primeiro polinómio  $t^2 + 0t + 1$  tem coeficientes 1, 0, 1 o que corresponde à primeira coluna de  $A$ ...

<sup>v</sup> Este exercício é semelhante à questão 4 do Teste 1 de 2024/2025.

Ou seja, isto é o mesmo que dizer que o conjunto  $K$  é l.i. quando o sistema acima  $AX = B$  é possível e determinado (tem uma única solução quando os  $\alpha$ 's são todos iguais a 0). O sistema  $AX = B$  é possível e determinado se e só se  $\text{car}(A) = \text{car}([A|B]) = n^o$  de colunas de  $A = 3$ .

$$\begin{aligned} [A|B] &= \left[ \begin{array}{ccc|c} a^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 = L_3 - a^2 L_1} \\ &\sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & -2a^2 & 1 - a^2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 = L_3 + 2aL_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - a^2 & 0 \end{array} \right] \text{ (escalonada)} \end{aligned}$$

Assim, temos  $\text{car}(A) = \text{car}([A|B]) = 3$  se e só se o pivot da  $L_2$  é o  $a$  e o pivot da  $L_3$  é o  $1 - a^2$ , ou seja,  $a \neq 0$  e  $1 - a^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$  e  $a \neq \pm 1$ .

**Para que valores de  $a$  é que  $K$  gera  $\mathbb{R}^3$ ?** O conjunto  $K$  gera  $\mathbb{R}^3$  se for possível escrever qualquer vetor  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  como combinação linear dos vetores de  $K$ .

Vamos ver para que valores de  $a$  é que  $K$  gera  $\mathbb{R}^3$ .

$$\alpha_1(a^2, 0, 1) + \alpha_2(0, a, 2) + \alpha_3(1, 0, 1) = (x, y, z) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow CX = D$$

(Nesta parte, queremos determinar para que valores de  $a$  é possível escrever todos os vetores de  $\mathbb{R}^3$  como combinação linear dos vetores de  $K$ . Ou seja, queremos saber quando é que o sistema é possível, não nos interessa como isso é feito, isto é, os valores específicos dos  $\alpha$ 's não importam.)

$CX = D$  é possível se e só se  $\text{car}(C) = \text{car}([C|D])$ . Vamos escalonar a matriz ampliada  $[C|D]^{\text{vi}}$ .

$$\begin{aligned} [C|D] &= \left[ \begin{array}{ccc|c} a^2 & 0 & 1 & x \\ 0 & a & 0 & y \\ 1 & 2 & 1 & z \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & z \\ 0 & a & 0 & y \\ a^2 & 0 & 1 & x \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 = L_3 - a^2 L_1} \\ &\sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & z \\ 0 & a & 0 & y \\ 0 & -2a^2 & 1 - a^2 & x - a^2 z \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 = L_3 + 2aL_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & z \\ 0 & a & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 - a^2 & x - a^2 z + 2ay \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 = \frac{L_2}{a}, a \neq 0} \\ &\sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & z \\ 0 & 1 & 0 & y/a \\ 0 & 0 & 1 - a^2 & x - a^2 z + 2ay \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 = \frac{L_3}{1 - a^2}, a \neq \pm 1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & z \\ 0 & 1 & 0 & y/a \\ 0 & 0 & 1 & (x - a^2 z + 2ay)/(1 - a^2) \end{array} \right] \end{aligned}$$

Como a  $\text{car}(C) = \text{car}([C|D])$  temos que o sistema  $CX = D$  é sempre possível quando  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ . Vamos ver o que acontece quando  $a = 0$ ,  $a = 1$  e  $a = -1$ :

Se  $a = 0$  temos que

$$[C|D] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 1 & 2 & 1 & z \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & x \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & y \end{array} \right]$$

o sistema  $CX = D$  é possível se e só se  $\text{car}(C) = \text{car}([C|D]) = 2$ , isto é,  $y = 0$ ! Portanto, se  $a = 0$  o conjunto  $K$  gera apenas os vetores  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  cuja segunda coordenada é nula. Neste caso, o espaço gerado por  $K$  não é  $\mathbb{R}^3$ ,  $\langle K \rangle \neq \mathbb{R}^3$ , e por isso não pode ser uma base de  $\mathbb{R}^3$ .

Se  $a = 1$  temos que

$$[C|D] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 1 & 2 & 1 & z \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 = L_3 - L_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 2 & 0 & z - x \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 = L_3 - 2L_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & z - x - 2y \end{array} \right]$$

o espaço gerado por  $K$  são os vetores de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $z - x - 2y = 0$ . Assim, para  $a = 1$ ,  $\langle K \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - x - 2y = 0\} \neq \mathbb{R}^3$  e por isso não pode ser uma base de  $\mathbb{R}^3$ .

<sup>vi</sup>Vou fazer algo semelhante ao exercício 17 da FP1.





Logo, o vetor das coordenadas de  $(2, 1, 0, 0)$  na base  $\mathcal{B}$  é:

$$[(2, 1, 0, 0)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

19(b)  $\mathcal{B}_1 = ((1, 2, 1), (0, 2, 0), (0, 0, -1))$  e  $\mathcal{B}_2 = (\underbrace{(1, 0, -1)}_{=X_1}, \underbrace{(1, 1, 1)}_{=X_2}, \underbrace{(2, 3, -1)}_{=X_3})$  são bases de  $\mathbb{R}^3$ .

A matriz  $P$  de mudança da base  $\mathcal{B}_1$  para a base  $\mathcal{B}_2$  é a matriz cujas colunas são os vetores de  $\mathcal{B}_1$  escritos nas coordenadas da base  $\mathcal{B}_2$ .

$$P = M_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ [(1, 2, 1)]_{\mathcal{B}_2} & [(0, 2, 0)]_{\mathcal{B}_2} & [(0, 0, -1)]_{\mathcal{B}_2} \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

Vamos escrever cada um dos vetores  $(1, 2, 1)$ ,  $(0, 2, 0)$  e  $(0, 0, -1)$  à custa dos vetores da base  $\mathcal{B}_2$ :

$$(1, 2, 1) = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 \Leftrightarrow (1, 2, 1) = \alpha_1(1, 0, -1) + \alpha_2(1, 1, 1) + \alpha_3(2, 3, -1)$$

... resolver o sistema, devem apresentar as contas ...

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -3/5 \\ \alpha_2 = 4/5 \\ \alpha_3 = 2/5 \end{cases} \quad \text{Assim, } [(1, 2, 1)]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/5 \\ 4/5 \\ 2/5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{1^a \text{ Coluna de } P}$$

$$(0, 2, 0) = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 \Leftrightarrow (0, 2, 0) = \beta_1(1, 0, -1) + \beta_2(1, 1, 1) + \beta_3(2, 3, -1)$$

... resolver o sistema, devem apresentar as contas ...

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 = -6/5 \\ \beta_2 = -2/5 \\ \beta_3 = 4/5 \end{cases} \quad \text{Assim, } [(0, 2, 0)]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6/5 \\ -2/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{2^a \text{ Coluna de } P}$$

$$(0, 0, -1) = \theta_1 X_1 + \theta_2 X_2 + \theta_3 X_3 \Leftrightarrow (0, 0, -1) = \theta_1(1, 0, -1) + \theta_2(1, 1, 1) + \theta_3(2, 3, -1)$$

... resolver o sistema, devem apresentar as contas ...

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \theta_1 = 1/5 \\ \theta_2 = -3/5 \\ \theta_3 = 1/5 \end{cases} \quad \text{Assim, } [(0, 0, -1)]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 \\ -3/5 \\ 1/5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{3^a \text{ Coluna de } P}$$

Logo,

$$P = M_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} -3/5 & -6/5 & 1/5 \\ 4/5 & -2/5 & -3/5 \\ 2/5 & 4/5 & 1/5 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & -6 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

21. Seja  $\mathcal{S} = ((-1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1))$  e  $\mathcal{T} = (Y_1, Y_2, Y_3)$  bases ordenadas. Determine  $Y_1$ ,  $Y_2$  e  $Y_3$ , sabendo que

$$M_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz  $M_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{T}}$  é uma matriz de mudança de base da base  $\mathcal{T}$  para a base  $\mathcal{S}$ . As colunas da matriz são os vetores da base  $\mathcal{T}$  escritos nas coordenadas da base  $\mathcal{S}$ , isto é, temos que  $[Y_1]_{\mathcal{S}}$  é igual à primeira coluna,  $[Y_2]_{\mathcal{S}}$  é igual à segunda coluna e  $[Y_3]_{\mathcal{S}}$  é igual à terceira coluna.

$$M_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ [Y_1]_{\mathcal{S}} & [Y_2]_{\mathcal{S}} & [Y_3]_{\mathcal{S}} \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

Sabemos que:

$$[Y_1]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

são as coordenadas do vetor  $Y_1$  na base  $\mathcal{S}$ . Isso quer dizer que o vetor  $Y_1$  é **1** vez o primeiro vetor da base  $\mathcal{S}$ , **2** vezes o segundo vetor da base  $\mathcal{S}$  e **-1** vez o terceiro vetor da base  $\mathcal{S}$ . Como conhecemos os vetores da base  $\mathcal{S}$  conseguimos à custa deles determinar o vetor  $Y_1$ .

$$Y_1 = \underbrace{1}_{1^\circ \text{vetor da base } \mathcal{S}} \underbrace{(-1, 1, 0)} + \underbrace{2}_{2^\circ \text{vetor da base } \mathcal{S}} \underbrace{(1, 0, 1)} - \underbrace{1}_{3^\circ \text{vetor da base } \mathcal{S}} \underbrace{(0, 0, 1)} = (-1, 1, 0) + (2, 0, 2) + (0, 0, -1) = (1, 1, 1)$$

Também sabemos que:

$$[Y_2]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

são as coordenadas do vetor  $Y_2$  na base  $\mathcal{S}$ . Isso quer dizer que o vetor  $Y_2$  é **1** vez o primeiro vetor da base  $\mathcal{S}$ , **1** vez o segundo vetor da base  $\mathcal{S}$  e **-1** vez o terceiro vetor da base  $\mathcal{S}$ . Como conhecemos os vetores da base  $\mathcal{S}$  conseguimos à custa deles calcular o vetor  $Y_2$ .

$$Y_2 = \underbrace{1}_{1^\circ \text{vetor da base } \mathcal{S}} \underbrace{(-1, 1, 0)} + \underbrace{1}_{2^\circ \text{vetor da base } \mathcal{S}} \underbrace{(1, 0, 1)} - \underbrace{1}_{3^\circ \text{vetor da base } \mathcal{S}} \underbrace{(0, 0, 1)} = (-1, 1, 0) + (1, 0, 1) + (0, 0, -1) = (0, 1, 0)$$

Finalmente, sabemos que:

$$[Y_3]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

são as coordenadas do vetor  $Y_3$  na base  $\mathcal{S}$ . Isso quer dizer que o vetor  $Y_3$  é **2** vezes o primeiro vetor da base  $\mathcal{S}$ , **1** vez o segundo vetor da base  $\mathcal{S}$  e **1** vez o terceiro vetor da base  $\mathcal{S}$ .

$$Y_3 = \underbrace{2}_{1^\circ \text{vetor da base } \mathcal{S}} \underbrace{(-1, 1, 0)} + \underbrace{1}_{2^\circ \text{vetor da base } \mathcal{S}} \underbrace{(1, 0, 1)} + \underbrace{1}_{3^\circ \text{vetor da base } \mathcal{S}} \underbrace{(0, 0, 1)} = (-2, 2, 0) + (1, 0, 1) + (0, 0, 1) = (-1, 2, 2)$$

Assim, chegamos à conclusão que  $\mathcal{T} = ((1, 1, 1), (0, 1, 0), (-1, 2, 2))$ .

24(b). O primeiro passo é escalonar e reduzir a matriz  $A$ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2=L_2-3L_1]{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & -5 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_e \xrightarrow[L_2=\frac{L_2}{4}]{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -7/4 & -5/4 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_r$$

i. Determinar uma base para o espaço nulo

$$\mathcal{N}(A) = \{X \in \mathbb{R}^4 : \mathbf{A}_r X = 0\}$$

$$= \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -7/4 & -5/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2z + w = 0 \text{ e } y - 7z/4 - 5w/4 = 0\}$$

Vamos escrever tudo em relação a  $z$  e  $w$

$$= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = -2z - w \text{ e } y = 7z/4 + 5w/4\}$$

$$= \{(-2z - w, 7z/4 + 5w/4, z, w), z, w \in \mathbb{R}\}$$

Separar em dois vetores: um que tem os  $z$ 's outro que tem os  $w$ 's

$$= \{(-2z, 7z/4, z, 0) + (-w, 5w/4, 0, w), z, w \in \mathbb{R}\}$$

Meter o  $z$  e o  $w$  em evidência

$$= \{z(-2, 7/4, 1, 0) + w(-1, 5/4, 0, 1), z, w \in \mathbb{R}\}$$

$$= \langle (-2, 7/4, 1, 0), (-1, 5/4, 0, 1) \rangle$$

Opcional: multiplicar cada um dos vetores por 4 para não termos frações

$$= \langle (-8, 7, 4, 0), (-4, 5, 0, 4) \rangle$$

Assim, uma base para o espaço nulo é  $\{(-8, 7, 4, 0), (-4, 5, 0, 4)\}$ .

- ii. determine bases para o espaço das linhas e o espaço das colunas de  $A$

As linhas não nulas de  $\mathbf{A}_e$  ou de  $\mathbf{A}_r$  formam uma base para o espaço das linhas de  $A$ . Assim, uma base para o espaço das linhas pode ser as linhas (não nulas) de  $\mathbf{A}_e$ :

$$\{(1, 0, 2, 1), (0, 4, -7, -5)\}$$

ou as linhas não nulas de  $\mathbf{A}_r$ :

$$\{(1, 0, 2, 1), (0, 1, -7/4, -5/4)\}$$

Para calcular uma base para o espaço das colunas podemos fazer de duas formas diferentes:

1. as colunas com os pivots da forma escalonada  $\mathbf{A}_e$  formam uma base para  $\mathcal{C}(A)$ .

$$\mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} \textcolor{red}{1} & 0 & 2 & 1 \\ 0 & \textcolor{red}{4} & -7 & -5 \end{bmatrix}$$

O pivot da  $L_1$  está na coluna 1 e o pivot da  $L_2$  está na coluna 2. Assim, a coluna 1 e 2 da matriz  $A$  formam uma base para  $\mathcal{C}(A)$ :

$$\{(1, 3), (0, 4)\}$$

OU

2.  $B = (a, b) \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow AX = B$  é possível. Um sistema  $AX = B$  é possível se e só se  $\text{car}(A) = \text{car}([A|B])$ . Vamos escalonar  $[A|B]$  para contar a característica:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & a \\ 3 & 4 & -1 & -2 & b \end{array} \right] \xrightarrow[L_2=L_2-3L_1]{\sim} \left[ \begin{array}{cccc|c} \textcolor{red}{1} & 0 & 2 & 1 & a \\ 0 & \textcolor{red}{4} & -7 & -5 & b-3a \end{array} \right]$$

Com a  $\text{car}(A) = \text{car}([A|B])$  o sistema  $AX = B$  é sempre possível, ou seja, todos os vetores  $B = (a, b) \in \mathbb{R}^2$  pertencem ao espaço das colunas de  $A$ . Portanto,  $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^2$  e uma base para este espaço é, por exemplo, a base canônica de  $\mathbb{R}^2$

$$\{(1, 0), (0, 1)\}$$

A base que obtemos para  $\mathcal{C}(A)$  no ponto 1. e 2. são diferentes, mas não tem problema.

- iii. calcule a característica e a nulidade, e verifique que  $\text{car}(A) + \text{nul}(A) = n$

A característica de  $A$  é igual à dimensão de  $\mathcal{C}(A)$  e dimensão de  $\mathcal{L}(A)$ . Assim,  $\text{car}(A) = 2$ . A nulidade de  $A$  é igual à dimensão do espaço nulo. Assim,  $\text{nul}(A) = 2$ . E  $n$  é o número de colunas de  $A$ . Portanto verificamos que,

$$\text{car}(A) + \text{nul}(A) = n \Leftrightarrow 2 + 2 = 4$$

- iv. A característica de uma matriz é o máximo número de linhas l.i.. Como a  $\text{car}(A) = 2$  sabemos que as 2 linhas de  $A$  são l.i.

24(f). O primeiro passo é escalonar e reduzir a matriz  $A$  (este passo é necessário para determinar uma base para o espaço das linhas e para o espaço nulo).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3=L_3+L_1]{L_2=L_2-L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2=-\frac{L_2}{2}]{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3=-L_3-L_2]{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_e \text{ (escalonada)}$$

$$\xrightarrow[L_1=L_1-3L_3]{L_2=L_2-2L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1=L_1-2L_2]{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_r \left( \begin{array}{c} \text{escalonada e} \\ \text{reduzida} \end{array} \right)$$

- i. Determinar uma base para o espaço nulo

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}(A) &= \{X \in \mathbb{R}^3 : AX = 0\} \\
 &= \{X \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{A}_r X = 0\} \\
 &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \text{ e } y = 0 \text{ e } z = 0\} \\
 &= \{(0, 0, 0)\}
 \end{aligned}$$

O espaço nulo de  $A$  contém apenas o vetor nulo de  $\mathbb{R}^3$  e a base para o espaço  $\{(0, 0, 0)\}$  é o conjunto vazio, denotado por  $\emptyset$ . (ver a nota do slide 11 do Capítulo 2)

- ii. determine bases para o espaço das linhas e o espaço das colunas de  $A$

As linhas não nulas de  $\mathbf{A}_e$  ou de  $\mathbf{A}_r$  formam uma base para o espaço das linhas de  $A$ . Assim, uma base para o espaço das linhas pode ser as linhas (não nulas) de  $\mathbf{A}_e$ :

$$\{(1, 2, 3), (0, 1, 2), (0, 0, 1)\}$$

ou as linhas (não nulas) de  $\mathbf{A}_r$ :

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

Para determinar uma base para o espaço das colunas podemos fazer de duas formas diferentes:

1. as colunas com os pivots da forma escalonada  $\mathbf{A}_e$  formam uma base para  $\mathcal{C}(A)$ .

$$\mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} \color{red}{1} & 2 & 3 \\ 0 & \color{red}{1} & 2 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} \end{bmatrix}$$

O pivot da  $L_1$  está na coluna 1, o pivot da  $L_2$  está na coluna 2 e o pivot da  $L_3$  está na coluna 3. Assim, a coluna 1, 2 e 3 da matriz  $A$  formam uma base para  $\mathcal{C}(A)$ :

$$\{(1, 1, -1), (2, 0, -1), (3, -1, 0)\}$$

OU

2.  $B = (a, b, c) \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow AX = B$  é possível. Vamos ver quais são os vetores  $B = (a, b, c)$  que estão no espaço das colunas de  $A$  e assim determinamos uma base para o espaço. Um sistema  $AX = B$  é possível se e só se  $\text{car}(A) = \text{car}([A|B])$ . Vamos escalonar  $[A|B]$  para contar a característica:

$$\begin{aligned}
 [A|B] &= \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 1 & 0 & -1 & b \\ -1 & -1 & 0 & c \end{array} \right] \xrightarrow[L_3=L_3+L_1]{L_2=L_2-L_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -2 & -4 & b-a \\ 0 & 1 & 3 & c+a \end{array} \right] \xrightarrow{L_2=-\frac{L_2}{2}} \\
 &\sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 2 & (b-a)/2 \\ 0 & 1 & 3 & c+a \end{array} \right] \xrightarrow{L_3=L_3-L_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 2 & 3 & a \\ 0 & \color{red}{1} & 2 & (b-a)/2 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & c+a-(b-a)/2 \end{array} \right] \text{ (escalonada)}
 \end{aligned}$$

Com a  $\text{car}(A) = \text{car}([A|B]) = 3$  o sistema  $AX = B$  é sempre possível, ou seja, todos os vetores  $B = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  pertencem ao espaço das colunas de  $A$ . Portanto,  $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^3$  e uma base para este espaço é, por exemplo, a base canônica de  $\mathbb{R}^3$

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

Neste caso, a base que obtemos para  $\mathcal{C}(A)$  no ponto 1. e 2. são diferentes mas não tem problema! Os espaços vetoriais tem infinitas bases diferentes.

- iii. calcule a característica e a nulidade, e verifique que  $\text{car}(A) + \text{nul}(A) = n$

A característica de  $A$  é igual ao número de pivots da sua forma escalonada, que por sua vez é igual à dimensão de  $\mathcal{L}(A)$  e à dimensão de  $\mathcal{C}(A)$ . A dimensão consiste no número de elementos de qualquer base. Assim,  $\text{car}(A) = 3$ .

A nulidade de  $A$  é igual à dimensão do espaço nulo. Na alínea i, vimos que a base do espaço nulo era o conjunto vazio que tem 0 elementos. Assim,  $\text{nul}(A) = 0$ .

$n$  é o número de colunas de  $A$ . Portanto verificamos que,

$$\text{car}(A) + \text{nul}(A) = n \Leftrightarrow 3 + 0 = 3$$

- iv. A característica de uma matriz é o número máximo de linhas (colunas) l.i.. Como a  $\text{car}(A) = 3$  sabemos que as 3 linhas de  $A$  são l.i.