Aula 8

09/10/2025

(2) (d)(v) $S = \{X \in M_{n\times n} : AX = I_n\}$ n - é fixo, A é uma matriz fixa.

(Se A tem inversa então $S = \{A^{-1}\}$, senão $S = \emptyset$.)

- $0_{n\times n} \in S$? Não, porque $A0 = 0 \neq I_n$.

Assim, S não é um subespaço.

(d)(iv) $S = \{X \in M_{n\times n} : AX = 0\} = \mathcal{N}(A)$ espaço nulo de A (Cap. 1. slide 34)

- $0_{n\times n} \in S$? Sim porque $A0 = 0$.
- $X, X' \in S$, isto é, $AX = 0$ e $AX' = 0$. Será que $X + X' \in S$, isto é, temos que $A(X+X') = 0$?

$$A(X+X') = AX + AX' \underset{X,X' \in S}{=} 0 + 0 = 0$$

Logo, $X + X' \in S$. S é fechado para a soma.

- $\alpha \in \mathbb{R}$, $X \in S$, isto é, $AX = 0$. Será que $\alpha X \in S$?

$$A(\alpha X) = \alpha AX \underset{X \in S}{=} \alpha . 0 = 0$$

Logo, $\alpha X \in S$. S é fechado para a multiplicação por escalar.

Portanto o espaço nulo, S, é um subespaço

X é **combinação linear** (C.L.) de $X_1, \dots, X_k$ se existirem $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tal que:

$$X = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k$$

(X é escrito à custa de $X_1, \dots, X_k$, os α's podem ser quaisqueres)

Exp. Qualquer vetor em $\mathbb{R}^2$ é C.L. de (1,0) e (0,1).

$$(2,1) = 2(1,0) + 1(0,1).$$
$$(x,y) = x(1,0) + y(0,1).$$

Exp (3,5,7) é C.L. de (2,2,3), (−1,−2,1) e (0,1,0)?

$$(3,5,7) = \overset{?}{\alpha_1}(2,2,3) + \overset{?}{\alpha_2}(-1,-2,1) + \overset{?}{\alpha_3}(0,1,0).$$

$$\Leftrightarrow (3,5,7) = (2\alpha_1, 2\alpha_1, 3\alpha_1) + (-\alpha_2, -2\alpha_2, \alpha_2) + (0, \alpha_3, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 = 3 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 5 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow AX = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 - \frac{3L_1}{2}}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5/2 & 0 & 5/2 \end{array}\right] \underset{\substack{L_1 = L_1 - L_2 \\ L_3 = \frac{2}{5}L_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_3 = L_3 + L_2 \\ L_1 = L_1/2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{L_2 = L_2 + L_3 \\ L_1 = L_1 + \frac{L_3}{2}}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] = [E|F]$$

$$AX = B \Leftrightarrow EX = F \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = 3 \end{cases}$$

Verificar que:

$(3,5,7) = 2(2,2,3) + 1(-1,-2,1) + 3(0,1,0)$ ✓

Exp $(3,5,7)$ é C.L. de $(2,2,2)$ e $(0,1,0)$?

$(3,5,7) = \alpha_1(2,2,2) + \alpha_2(0,1,0) \iff \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \iff AX=B$

$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 - L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$ $car(A) = 2 < car([A|B]) = 3$ então $AX=B$ é impossível.

Logo, $(3,5,7)$ não é C.L. de $(2,2,2)$ e $(0,1,0)$.

Seja $K = \{X_1, \dots, X_k\}$ o espaço gerado por K é o conjunto de todas as C.L. de $X_1, \dots, X_k$.

$$\langle K \rangle = \langle X_1, \dots, X_k \rangle = \{X = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}$$

K gera / conjunto gerador de $\langle K \rangle$.

Teorema: $\langle K \rangle$ é (sempre) um subespaço

Prova: (Tipo o ex. 3 da FP2)

$0_v \in S$? Sim, porque existe $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tal que X é C.L. de $X_1, \dots, X_k$

$0X_1 + \dots + 0X_k = 0_v + \dots + 0_v = 0_v \in \langle K \rangle$

- $X = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k \in \langle K \rangle$

  $X' = \alpha_1' X_1 + \dots + \alpha_k' X_k \in \langle K \rangle$ Assim é fechado para a soma.

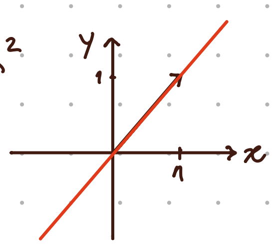
  $(X + X') = (\alpha_1 + \alpha_1')X_1 + \dots + (\alpha_k + \alpha_k')X_k \in \langle K \rangle$

- $\beta \in \mathbb{R}$ e $X \in S$

  $\beta X = \beta(\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k) = (\beta\alpha_1)X_1 + \dots + (\beta\alpha_k)X_k \in \langle K \rangle$. Assim é fechado para a multiplicação por escalar.

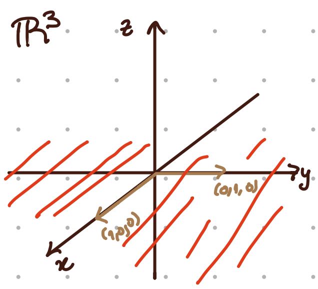
Geometricamente:

$\mathbb{R}^2$



$\langle (1,1) \rangle = \{(x,y) = \alpha(1,1) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ - Reta

$\mathbb{R}^3$



$\langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle = \{(x,y,z) = \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0), \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ - Plano

Exp. $<(1,0,0),(0,1,1)> = ?$

$= \{(x,y,z) \overset{?}{=} \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,1),\ \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}\}$

Quais são os vetores (x,y,z) que são C.L de $(1,0,0)$ e $(0,1,1)$?

$\Leftrightarrow$ Quando é que o sistema $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \Leftrightarrow AX=B$ é possível? $car(A)=car([A|B])$

$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c}1&0&x\\0&1&y\\0&1&z\end{array}\right] \underset{L_3=L_3-L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c}1&0&x\\0&1&y\\0&0&z-y\end{array}\right]$ escalonada.

$car(A)=2$ e para $car([A|B])=2$ temos de ter $z-y=0$.

$<(1,0,0),(0,1,1)> = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z-y=0\}$

Exp $<(1,1),(0,1)> = \{(x,y) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(0,1),\ \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}\}$

$AX=B \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ Quando é que é possível / $car(A)=car([A|B])$?

$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c}1&0&x\\1&1&y\end{array}\right] \underset{L_2=L_2-L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c}1&0&x\\0&1&y-x\end{array}\right]$ escalonada!

Como $car(A)=car([A|B])$ o sistema $AX=B$ é <u>sempre</u> possível, ou seja, seja lá qual for o vetor de $\mathbb{R}^2$ é <u>sempre</u> possível escrevê-lo como C.L. de $(1,1)$ e $(0,1)$.

Assim, $<(1,1),(0,1)> = \mathbb{R}^2$.

Exp $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x+2y-3z=0}_{\Leftrightarrow\, x=-2y+3z}\}$

$= \{(-2y+3z, y, z) : y,z \in \mathbb{R}\}$

$= \{(-2y,y,0) + (3z,0,z) : y,z \in \mathbb{R}\}$

$= \{y(-2,1,0) + z(3,0,1) : y,z \in \mathbb{R}\}$

$= \{\text{C.L. de } (-2,1,0) \text{ e } (3,0,1)\}$

$= <(-2,1,0),(3,0,1)>$

Assim, $\{(-2,1,0),(3,0,1)\}$ é um exemplo de um gerador de S.

Próximos episódios:

- $(2,0) = 2(1,0)$, isto é, $(2,0)$ é C.L. de $(1,0)$
- $<(1,0),(2,0)> = <(1,0)>$ - eixo Ox
- $\{(1,0)\}$ é uma <u>base</u> do eixo Ox.

FP2 até 8

Recomendo o 4(a)(b), 5(b)(d)