Departamento de Matemática **Universidade de Aveiro**

Álgebra Linear e Geometria Analítica - A

Exame de Recurso **7 de Fevereiro de 2024**

Justifique devidamente as respostas a todas as questões

Duração total do exame: 2h30m

(3,5 val.) **1)** Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

onde a é um parâmetro real.

(a) Mostre que A é invertível se e só se $a \neq \frac{1}{3}$.

(b) Considere $a = 1$. Justifique que o sistema de equações lineares $AX = b$ é possível e determinado, onde $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$ é o vetor das incógnitas e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Determine o valor da incógnita w pela regra de Cramer. → Tema de auto-estudo

~~(c) Considere $a = 1$. Encontre uma decomposição LU da matriz A.~~

~~*(1,5 val.)* **2)** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ invertível e a matriz $C = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$. Determine a matriz X tal que $2A^T X + C = 0$, onde 0 denota a matriz nula do tipo 3×3.~~

(2,5 val.) **3)** Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e $B = ((1,0,1),(0,1,1),(0,0,1))$.

~~(a) Mostre que B é uma base de $\mathbb{R}^3$.~~

(b) Determine a matriz de mudança da base canónica para a base B e o ~~vetor das coordenadas de $(2,-1,1)$ na base B~~.

(2 val.) **4)** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 13 \end{bmatrix}$. Mostre que $\lambda = 10$ é o único valor próprio da matriz A. Obtenha o subespaço próprio U_{10} associado ao valor próprio 10 e verifique se A é diagonalizável.

(v.s.f.f)

(1,5 val.) **5)** Mostre que $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \end{bmatrix}$ é solução dos mínimos quadrados do sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(2 val.) **6)** Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e os vetores $u = (1, 1, 0)$ e $v = (0, a, 1)$, onde a é um parâmetro real.

a) Determine a de modo que u e v sejam ortogonais.

b) Determine a de modo que a área do paralelogramo definido por u e v seja igual a 2.

(2,5 val.) **7)** Considere a cónica de equação

$$x^2 - 8xy - 5y^2 + 2x - y + 1 = 0.$$

Obtenha uma equação reduzida da cónica e classifique-a.

(2,5 val.) **8)** Considere a aplicação linear $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por $L(1, 0, 0) = (1, -1, 0, 1)$, $L(0, 1, 0) = (0, 0, 0, 0)$ e $L(0, 0, 1) = (0, 1, 2, 3)$.

(a) Determine $L(x, y, z)$.

~~(b) Verifique se L é injetiva.~~

~~(c) Verifique se L é sobrejetiva.~~

(2 val.) **9)** Justifique as seguintes afirmações (verdadeiras).

~~a) Considere o espaço vetorial $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ das matrizes do tipo 2×2. O subconjunto~~

$$\cancel{S = \{A \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) : det(A) = 0\},}$$

~~das matrizes de $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ com determinante igual a zero, não é um subespaço de $M_{2\times2}(\mathbb{R})$.~~

b) Seja A uma matriz quadrada do tipo $n \times n$ com valores próprios distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Então o determinante de A é $\lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n$.

Estas notas não constituem uma resolução formal e rigorosa dos exercícios do Exame.

1 (a) A é invertível $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ a & 2 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ a & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ a & 2 \end{vmatrix} - \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -2-2+1-a-2-2a-(-1-2-2(1+1)+2-1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -3a+1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{1}{3}$$

(b) Seja $a=1$, pela alínea (a), temos que A é invertível logo o sistema $Ax=b$ é possível determinado com solução $x=A^{-1}b$. (Cap. 1.1. slide 37)

Como A é quadrada e $|A| = -3a+1 = -3\times1+1 = -2 \neq 0$ podemos usar a regra de Cramer para determinar w.

$$w = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2(2-1)}{-2} = -1$$

Estamos a calcular a 4ª incógnita, w, assim no numerador está o determinante da matriz A substituindo a 4ª coluna pela coluna dos termos independentes $b = [0\ 0\ 0\ 2]^T$.

3 (b) $B=((1,0,1),(0,1,1),(0,0,1))$ base de $\mathbb{R}^3$.
$B_c = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ base canónica de $\mathbb{R}^3$.

$$M_{B\leftarrow B_c} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ [(1,0,0)]_B & [(0,1,0)]_B & [(0,0,1)]_B \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

Cap. 2.1. slide 14 - as colunas são os vetores da base canónica escritos nas coordenadas da base B.

Escrever os vetores de B_c como combinação linear dos vetores de B:

$(1,0,0) = \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(0,1,1) + \alpha_3(0,0,1)$

$\Leftrightarrow (1,0,0) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = -1 \end{cases} \quad [(1,0,0)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$(0,1,0) = \beta_1(1,0,1) + \beta_2(0,1,1) + \beta_3(0,0,1)$

$\Leftrightarrow (0,1,0) = (\beta_1, \beta_2, \beta_1+\beta_2+\beta_3) \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = 1 \\ \beta_1+\beta_2+\beta_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = 1 \\ \beta_3 = -1 \end{cases} \quad [(0,1,0)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$(0,0,1) = \gamma_1(1,0,1) + \gamma_2(0,1,1) + \gamma_3(0,0,1)$

$\Leftrightarrow (0,0,1) = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3) \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_1 = 0 \\ \gamma_2 = 0 \\ \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_1 = 0 \\ \gamma_2 = 0 \\ \gamma_3 = 1 \end{cases}$ $\quad [(0,0,1)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Logo, $M_{B \leftarrow B_C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

4 Calcular os valores próprios de A:

$\det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 7-\lambda & 3 \\ -3 & 13-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow (7-\lambda)(13-\lambda)+9 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 91 - 7\lambda - 13\lambda + \lambda^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 20\lambda + 100 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \times 100}}{2}$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{20 \pm \sqrt{\cancel{400} - \cancel{400}}}{2} \Leftrightarrow \lambda = 10$ é o único valor próprio de A

Determinar o subspaço próprio associado ao valor próprio 10:

$U_{10} = \{X \in \mathbb{R}^2 : (A - 10 I_2)X = 0\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} 7-10 & 3 \\ -3 & 13-10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{-3x+3y=0}_{\Leftrightarrow x = y}\}$

$= \{(x,x), x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,1), x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1) \rangle$

$A_{2\times2}$ possui apenas um vetor próprio l.i., o $(1,1)$, logo A não é diagonalizável.

5 $Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

1º Equações normais:

$A^TAX = A^Tb \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$

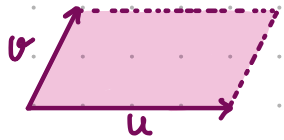
2º Resolver as equações normais:

$[A^TA | A^Tb] = \left[\begin{array}{cc|c} 15 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 = \frac{L_2}{3} \\ L_1 = \frac{L_1}{15}}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$ logo $\begin{bmatrix} 1/3 \\ -1 \end{bmatrix}$ é a solução dos mínimos quadrados

6 (a) $u = (1,1,0)$ e $v = (0,a,1)$

u e v são ortogonais $\Leftrightarrow u \cdot v = 0 \Leftrightarrow (1,1,0)\cdot(0,a,1) = 0 \Leftrightarrow 1\times0 + 1\times a + 0\times1 = 0$
$\Leftrightarrow a = 0$

(b)



(Cap. 4. slide 14)

$A = \|u \times v\|$

$\Leftrightarrow 2 = \|u \times v\|$

C.A. $u \times v = (1,1,0) \times (0,a,1) = \begin{vmatrix} \overset{+}{i} & \overset{-}{j} & \overset{+}{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix}$

$= i \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix}}_{=1-0\times a} - j \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{=1} + k \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix}}_{=a} = 1i - j + ak$

$= (1,0,0) - (0,1,0) + a(0,0,1) = (1,-1,a)$

$\Leftrightarrow 2 = \|(1,-1,a)\| \Leftrightarrow 2 = \sqrt{1^2+(-1)^2+a^2} \Leftrightarrow 4 = 2 + a^2 \Leftrightarrow a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2}$

7 $(\mathbb{R}^2)$ $1x^2 - 8xy - 5y^2 + 2x - 1y + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow X^T A X + BX + 1 = 0$

Eliminar o termo cruzado $-8xy$:

Calcular os valores próprios de A: $|A - \lambda I_2| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ -4 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1-\lambda)(-5-\lambda) - 16 = 0 \Leftrightarrow -5 - \lambda + 5\lambda + \lambda^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 4\lambda - 21 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-21)}}{2}$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{-4 \pm 10}{2} \Leftrightarrow \lambda = -7$ ou $\lambda = 3$ são os valores próprios

Calcular os vetores próprios de A:

$U_{-7} = \{X \in \mathbb{R}^2 : (A - (-7) I_2) X = 0\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} 8x - 4y = 0 \\ -4x + 2y = 0 \end{cases}\right\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y/2\}$

$= \{(y/2, y), y \in \mathbb{R}\}$

$= \{y(\frac{1}{2}, 1), y \in \mathbb{R}\} = \langle(\frac{1}{2}, 1)\rangle = \langle(1,2)\rangle$ (x2) (Opcional) Lema ii. do Cap 2.2. Slide 3

C.A. $\begin{cases} 8x - 4y = 0 \\ -4x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}y \\ -2y + 2y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y/2 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y/2$

$U_3 = \{X \in \mathbb{R}^2 : (A - 3 I_2) X = 0\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} -2x - 4y = 0 \\ -4x - 8y = 0 \end{cases}\right\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = -2y\}$

$= \{(-2y, y), y \in \mathbb{R}\}$

$= \{y(-2, 1), y \in \mathbb{R}\} = \langle(-2,1)\rangle$

C.A. $\begin{cases} -2x - 4y = 0 \\ -4x - 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ 8y - 8y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = -2y$

Dividir cada vetor próprio pela sua norma:

$$\frac{(1,2)}{\|(1,2)\|} = \frac{(1,2)}{\sqrt{1^2+2^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \text{ e } \frac{(-2,1)}{\|(-2,1)\|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

Construir P e D: $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Mudança de variável: $X = P\hat{X}$ onde $\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}$

e calcular $\hat{B} = BP = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{5} \end{bmatrix}$

Assim, $X^TAX + BX + 1 = 0 \Leftrightarrow \hat{X}^T D \hat{X} + \hat{B}\hat{X} + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -7\hat{x}^2 + 3\hat{y}^2 - \sqrt{5}\,\hat{y} + 1 = 0$$

Completar quadrado:

$$\Leftrightarrow -7\hat{x}^2 + 3\left(\hat{y}^2 - \frac{\sqrt{5}}{3}\hat{y}\right) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -7\hat{x}^2 + 3\left(\hat{y}^2 - \frac{\sqrt{5}}{3}\hat{y} + \left(\frac{\sqrt{5}}{6}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{6}\right)^2\right) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -7\hat{x}^2 + 3\underbrace{(\hat{y} + \sqrt{5}/6)}_{=\tilde{y}}{}^2 - \underbrace{3(\sqrt{5}/6)^2}_{=-3\times\frac{5}{6^2} = -5/12} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -7\hat{x}^2 + 3\tilde{y}^2 = \frac{7}{12} \Leftrightarrow -12\hat{x}^2 + \frac{36}{7}\tilde{y}^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\hat{x}^2}{1/12} + \frac{\tilde{y}^2}{7/36} = 1 \quad \text{hipérbole}$$

8 (a) $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $L(1,0,0) = (1,-1,0,1)$, $L(0,1,0) = (0,0,0,0)$ e $L(0,0,1) = (0,1,2,3)$

1º Escrever (x,y,z) como combinação linear de $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$

$$(x,y,z) = \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = x \\ \alpha_2 = y \\ \alpha_3 = z \end{cases}$$

2º Aplicar L

Como $(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$ então:

$$
\begin{aligned}
L(x,y,z) &= x\,L(1,0,0) + y\,L(0,1,0) + z\,L(0,0,1)\\
&= x(1,-1,0,1) + y(0,0,0,0) + (0,1,2,3)\\
&= (x,-x,0,x) + (0,z,2z,3z)\\
&= (x,-x+z,2z,x+3z)
\end{aligned}
$$

9 (b)

$$\boxed{\text{$A_{n\times n}$ tem n valores próprios distintos } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} \Longrightarrow \boxed{|A| = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$$

Como $A_{n\times n}$ tem n valores próprios distintos então A é diagonalizável.
(observações do Cap 5.1. slide 12)

Isto é, existe P invertível e D diagonal tal que $A = PDP^{-1}$ (Cap. 5.1 slide 9) sendo que na diagonal principal de D estão os valores próprios de A $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ e nas colunas de P estão os vetores próprios de A.
(Cap. 5.1. Slide 10)

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} | & & | \\ X_1 & \cdots & X_n \\ | & & | \end{bmatrix}$$ em que X_i é o vetor próprio associado a λ_i, $i = 1, \dots, n$

Como $A = PDP^{-1}$ então

$$|A| = |PDP^{-1}| \Leftrightarrow |A| = |P||D||P^{-1}| \Leftrightarrow |A| = |P||P^{-1}||D| \Leftrightarrow |A| = \underbrace{|P|\frac{1}{|P|}}_{=1}|D|$$

$$\Leftrightarrow |A| = |D| \Leftrightarrow |A| = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} \underset{(*)}{\Leftrightarrow} |A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

(*) O determinante de uma matriz diagonal é igual ao produto dos elementos da diagonal principal - Corolário do Cap. 3.1. slide 6.
Por exemplo,

$$|D| = \begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{0} & \overset{+}{0} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 3 = 6$$