6/11/2025

Aula 16

⚠ ver e-learning - estudo autónomo Regra de Cramer.

FP3 8 (a)

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} \underset{(L_1=L_1+L_3)}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a+b+c)\times 1 & (a+b+c)\times 1 & (a+b+c)\times 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = (a+b+c).0 = 0$$

A matriz tem 2 linhas iguais logo o determinante é zero.

17 A é singular/não tem inversa $\Leftrightarrow \det(A) = 0$ Cap. 3.1. Slide 10

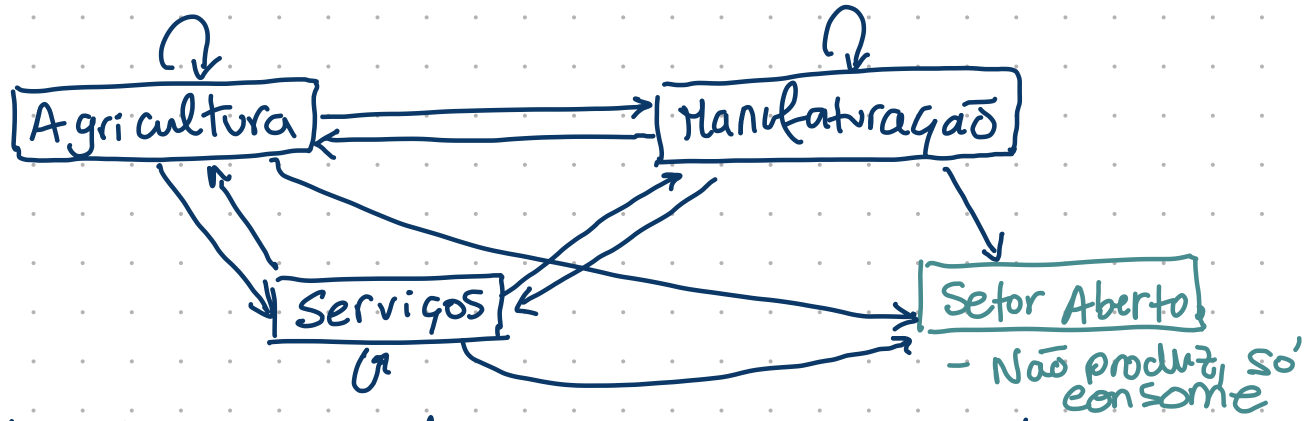
$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha-4 & 0 & 10 \\ 4 & \alpha+5 & 1 \\ 2 & 0 & \alpha-3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\alpha+5)\begin{vmatrix} \alpha-4 & 10 \\ 2 & \alpha-3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\alpha+5)\big((\alpha-4)(\alpha-3)-20\big)=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha+5=0 \text{ ou } \big((\alpha-4)(\alpha-3)-20\big)=0 \Leftrightarrow \alpha=-5 \text{ ou } \alpha^2-7\alpha-8=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha=-5 \text{ ou } \alpha=\frac{7\pm\sqrt{7^2+4.8}}{2} = 8 \text{ ou } -1.$$

Modelo de Leontief:

- Economia dividida em n setores



- Cada setor precisa de consumo intermédio/input.
- Cada setor precisa de satisfazer as necessidades do setor aberto, isto é, a demanda externa/consumo final.

- Assim, cada setor i tem de produzir/output x_i tal que satisfaça o consumo de todos os setores mais a demanda do setor aberto.

FP3 23 (a) Manufaturação (M), Agricultura (A) e Serviços (S)

comprado de: \ input consumido por unidade	M	A	S
M	0.1	0.6	0.6
A	0.3	0.2	0
S	0.3	0.1	0.1

Serviços consomem 0.6 da Manufaturação

coluna de consumo da M.

Logo, a **matriz de consumo** é $C = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.6 \\ 0.3 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$.

Qual é a **demanda interna/input** necessário para a A. produzir 100 unidades?

$$\underset{\text{output}}{100} \cdot \underset{\text{Coluna Consumo de A}}{\begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 60 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} M \\ A \\ S \end{matrix}$$

Logo, vai precisar de 60 unidades da M, 20 do próprio setor e 10 unidades dos serviços.

Total de necessidades intermédias na economia:

$$\underbrace{x_1 C_1}_{\text{input para o setor 1}} + \underbrace{x_2 C_2}_{\text{input para o setor 2}} + \underbrace{x_3 C_3}_{\text{input para o setor 3}} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{C}_{\text{matriz consumo}} \overbrace{X}^{\text{vetor com o output de cada setor}}$$

Modelo de Leontief

$$\boxed{\underbrace{X}_{\text{Vetor de produção}} = \underbrace{CX}_{\text{vetor com inputs}} + \underbrace{d}_{\text{vetor com consumo final}}} \Leftrightarrow IX - CX = d \Leftrightarrow \underbrace{(I-C)X = d}_{\text{Sistema Linear}}$$

Cada setor irá produzir tanto quanto for necessário para satisfazer as necessidades da economia (as suas próprias e a dos outros setores) e para satisfazer as do setor aberto (consumo final).

23 (b) $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = ?$, $d = \begin{bmatrix} 0 \\ 18 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} M \\ A \\ S \end{matrix}$

$$X + CX = d \Leftrightarrow (I_3 - C)X = d \Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.6 \\ 0.3 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 18 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0.9 & -0.6 & -0.6 \\ -0.3 & 0.8 & 0 \\ -0.3 & -0.1 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 18 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[I_3 - C \mid d] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0.9 & -0.6 & -0.6 & 0 \\ -0.3 & 0.8 & 0 & 18 \\ -0.3 & -0.1 & 0.9 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{L_1 = 10L_1 \\ L_2 = 10L_2 \\ L_3 = 10L_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & -6 & -6 & 0 \\ -3 & 8 & 0 & 180 \\ -3 & -1 & 9 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 = L_2 + L_1/3 \\ L_3 = L_3 + L_1/3}}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 180 \\ 0 & -3 & 7 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{L_3 = L_3 + \frac{1}{2}L_2 \\ L_1 = L_1 + L_2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 0 & -8 & 180 \\ 0 & 6 & -2 & 180 \\ 0 & 0 & 6 & 90 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3/6}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 0 & -8 & 180 \\ 0 & 6 & -2 & 180 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{L_2=L_2+2L_3\\L_1=L_1+8L_3}}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}9&0&0&300\\0&6&0&210\\0&0&1&15\end{array}\right]\underset{\substack{L_2=L_2/6\\L_1=L_1/9}}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&100/3\\0&1&0&35\\0&0&1&15\end{array}\right]=[E|F]$$

$$(I_3-C)X=d \Leftrightarrow EX=F \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}100/3\\35\\15\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=100/3 & M\\x_2=35 & A\\x_3=15 & S\end{cases}$$

Para satisfazer a demanda externa a M. deve produzir $100/3 \approx 33$ unidades, a A. deve produzir 35 e os S. 15 unidades.

Teorema (slide 8) Se todas as entradas de C e d são ≥ 0 e a soma de cada coluna de $C < 1$ então $I-C$ tem inversa e a única solução é economicamente viável.

$$(I-C)X=d \Leftrightarrow X=(I-C)^{-1}d.$$

23 (d)

$$d=\begin{bmatrix}18\\18\\0\end{bmatrix}\begin{matrix}M\\A\\S\end{matrix} \text{ e } C=\begin{bmatrix}0.1&0.6&0.6\\0.3&0.2&0\\0.3&0.1&0.1\end{bmatrix}$$
$$\begin{matrix}0.7 & 0.9 & 0.7\end{matrix}$$

Como d e C tem entradas ≥ 0 e a soma de cada coluna de $C < 1$ então $I-C$ tem inversa e existe uma solução do modelo que é economicamente viável.

$$X=(I-C)^{-1}d$$

$$[I-C|I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}0.9&-0.6&-0.6&1&0&0\\-0.3&0.8&0&0&1&0\\-0.3&-0.1&0.9&0&0&1\end{array}\right]\underset{\substack{L_1=10L_1\\L_2=10L_2\\L_3=10L_3}}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|ccc}9&-6&-6&10&0&0\\-3&8&0&0&10&0\\-3&-1&9&0&0&10\end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{L_2=L_2+\frac{1}{3}L_1\\L_3=L_3+\frac{1}{3}L_1}}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|ccc}9&-6&-6&10&0&0\\0&6&-2&10/3&10&0\\0&-3&7&10/3&0&10\end{array}\right]\underset{\substack{L_3=L_3+1/2L_2\\L_1=L_1+L_2}}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|ccc}9&0&-8&40/3&10&0\\0&6&-2&10/3&10&0\\0&0&6&5&5&10\end{array}\right]\sim$$

$$\underset{L_3=\frac{L_3}{6}}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|ccc}9&0&-8&40/3&10&0\\0&6&-2&10/3&10&0\\0&0&1&5/6&5/6&5/3\end{array}\right]\underset{\substack{L_1=L_1+8L_3\\L_2=L_2+2L_3}}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|ccc}9&0&0&20&50/3&40/3\\0&6&0&5&35/3&10/3\\0&0&1&5/6&5/6&5/3\end{array}\right]\underset{\substack{L_1=L_1/9\\L_2=L_2/6}}{\sim}$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&20/9&50/27&40/27\\0&1&0&5/6&35/18&5/9\\0&0&1&5/6&5/6&5/3\end{array}\right]=[I_3|(I-C)^{-1}]$$

Logo, $X=(I-C)^{-1}\begin{bmatrix}18\\18\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}220/3\\50\\30\end{bmatrix}.$

Modelo de Leontief - o que saber:

- Construir o modelo $x = Cx + d$. Quem é C, x, d?
- Resolver $x = Cx + d \Leftrightarrow (I - C)x = d$.
- Teorema do slide 8: $C, d \geq 0$ e a soma de cada coluna de C $< 1 \Rightarrow$ existe uma única solução economicamente viável. Nestes casos, resolver $x = (I-C)^{-1}d$.

⊕ Calcular a demanda intermédia de um setor: output do setor * [coluna consumo do setor]

FP3 toda. Recomendo o 24.