

Folha Prática 4

Atenção: Estas notas não constituem uma resolução formal e rigorosa dos exercícios das Folhas Práticas.

Última atualização: 12 de novembro de 2025

Notas sobre os exercícios: 1(f), 1(h), 16(c), 16(d), 24.4.

1(f) $u = (1, -2, 1)$ e $v = (-1, 1, 0)$

1º Encontrar os vetores ortogonais a v .

Queremos saber quais são os vetores ortogonais a v para usarmos esses vetores no próximo passo. Um vetor (x, y, z) é ortogonal a v se e só se $(x, y, z) \cdot v = 0$.

$$\begin{aligned}(x, y, z) \cdot v &= 0 \\ \Leftrightarrow (x, y, z) \cdot (-1, 1, 0) &= 0 \\ \Leftrightarrow -x + y &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= y\end{aligned}$$

Logo todos os vetores (x, y, z) tal que $x = y$ são ortogonais a v , isto é,

$$\begin{aligned}(x, x, z), \quad x, z \in \mathbb{R} \\ \text{Separar em dois vetores: um com os } x\text{'s outro com os } z\text{'s} \\ =(x, x, 0) + (0, 0, z), \quad x, z \in \mathbb{R} \\ \text{Colocar o } x \text{ e o } z \text{ em evidência} \\ =x(1, 1, 0) + z(0, 0, 1), \quad x, z \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Ou seja, todos os vetores ortogonais a v são combinação linear dos vetores $(1, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

2º Escrever o vetor u como C.L. de v e de um vetor ortogonal a v .

Vamos tentar escrever u à custa do vetor v e de um vetor que é ortogonal a v . Nós já conhecemos o vetor v e também já sabemos que todos os vetores ortogonais a v são combinação linear de $(1, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$. Assim sendo o objetivo é escrever o vetor u à custa de v e de $(1, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.ⁱ

$$\begin{aligned}u &= \alpha_1 v + \alpha_2 (1, 1, 0) + \alpha_3 (0, 0, 1) \\ \Leftrightarrow (1, -2, 1) &= \alpha_1(-1, 1, 0) + \alpha_2 (1, 1, 0) + \alpha_3 (0, 0, 1) \\ \dots \text{fazer contas ...} \\ \Leftrightarrow (1, -2, 1) &= -3/2(-1, 1, 0) - 1/2 (1, 1, 0) + 1(0, 0, 1) \\ \text{Juntar o } (1, 1, 0) \text{ e } (0, 0, 1) \\ \Leftrightarrow (1, -2, 1) &= -3/2(-1, 1, 0) + -(-1/2, -1/2, 1) \\ \Leftrightarrow u &= -3/2 v + \underbrace{(-1/2, -1/2, 1)}_{\text{ortogonal a } v}\end{aligned}$$

1(h) Um vetor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é ortogonal/perpendicular ao vetor u se e só se $(x, y, z) \cdot u = 0$. Portanto, o objetivo é saber quais são os vetores (x, y, z) cujo produto interno com o vetor u dá zero.

$$\begin{aligned}(x, y, z) \cdot u &= 0 \\ \Leftrightarrow (x, y, z) \cdot (1, -2, 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x - 2y + z &= 0 \\ \Leftrightarrow z &= -x + 2y\end{aligned}$$

Logo todos os vetores da forma $(x, y, -x + 2y)$, $x, y \in \mathbb{R}$ são ortogonais ao vetor u .ⁱⁱ Isso é o

ⁱTodos os vetores a vermelho são ortogonais a v .

ⁱⁱEm vez disto poderíamos ter escrito $x = 2y - z$ ou $y = \frac{x+z}{2}$, o resultado seria ligeiramente diferente mas também estaria correto. Aliás, por mim a resolução podia acabar aqui...

mesmo que dizer que todos os vetores da forma

$$(x, y, -x + 2y)$$

Separar em dois vetores: um com os x 's outro com os y 's

$$= (x, 0, -x) + (0, y, 2y)$$

Colocar o x e o y em evidência

$$= x(1, 0, -1) + y(0, 1, 2), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

são ortogonais ao vetor u ⁱⁱⁱ.

$$16(c) . \mathcal{B} = ((4/5, 0, 3/5), (0, 1, 0), (-3/5, 0, 4/5))$$

Queremos determinar a matriz de mudança da base $\tilde{\mathcal{B}} = ((0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1))$ para a base \mathcal{B} , isto é,

$$M_{\mathcal{B} \leftarrow \tilde{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ [(0, 0, 1)]_{\mathcal{B}} & [(0, 1, 1)]_{\mathcal{B}} & [(1, 1, 1)]_{\mathcal{B}} \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

A matriz de mudança de base $M_{\mathcal{B} \leftarrow \tilde{\mathcal{B}}}$ o que faz é pegar em vetores na base $\tilde{\mathcal{B}}$ e escreve-os na base \mathcal{B} . Portanto, as colunas desta matriz são os vetores da base $\tilde{\mathcal{B}}$ escritos à custa da base \mathcal{B} .

Pela alínea (a) sabemos que a base \mathcal{B} é ortonormada por isso podemos usar o Teorema do slide 8 do Capítulo 4 para escrever os vetores de $\tilde{\mathcal{B}}$ na base \mathcal{B} .

Assim, a primeira coluna da matriz é:

$$[(0, 0, 1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} (0, 0, 1) \cdot (4/5, 0, 3/5) \\ (0, 0, 1) \cdot (0, 1, 0) \\ (0, 0, 1) \cdot (-3/5, 0, 4/5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{bmatrix}$$

A segunda coluna da matriz é:

$$[(0, 1, 1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} (0, 1, 1) \cdot (4/5, 0, 3/5) \\ (0, 1, 1) \cdot (0, 1, 0) \\ (0, 1, 1) \cdot (-3/5, 0, 4/5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 1 \\ 4/5 \end{bmatrix}$$

A terceira coluna da matriz é:

$$[(1, 1, 1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} (1, 1, 1) \cdot (4/5, 0, 3/5) \\ (1, 1, 1) \cdot (0, 1, 0) \\ (1, 1, 1) \cdot (-3/5, 0, 4/5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 1 \\ 1/5 \end{bmatrix}$$

Portanto temos que

$$M_{\mathcal{B} \leftarrow \tilde{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} 3/5 & 3/5 & 7/5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4/5 & 4/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

16(d). A matriz $M_{\mathcal{B} \leftarrow \tilde{\mathcal{B}}}$ de mudança de base que calculamos na alínea (c) o que faz é pega num vetor que esteja escrito na base $\tilde{\mathcal{B}}$ e passa-o para as suas coordenadas na base \mathcal{B} .^{iv} Portanto^v, se soubermos quais são as coordenadas de um vetor na base $\tilde{\mathcal{B}}$ usando esta matriz conseguimos determinar quais são as suas coordenadas na base \mathcal{B} , isto é,

$$[Y]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B} \leftarrow \tilde{\mathcal{B}}} [Y]_{\tilde{\mathcal{B}}}$$

Pegamos no vetor $[Y]_{\tilde{\mathcal{B}}}$, que nos é dado, e se multiplicarmos pela matriz $M_{\mathcal{B} \leftarrow \tilde{\mathcal{B}}}$ obtemos esse mesmo vetor mas agora na base \mathcal{B} .

$$[Y]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3/5 & 3/5 & 7/5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4/5 & 4/5 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ⁱⁱⁱNas soluções chamam ao x de α e ao y de β , mas o nome das variáveis não importa.

^{iv}Para mim ajuda-me a ver a setinha $\mathcal{B} \leftarrow \tilde{\mathcal{B}}$ que diz que vai de $\tilde{\mathcal{B}}$ para \mathcal{B} .

^vver Teorema do slide 18 do Capítulo 2

24.4 Equações normais:

$$A^T A X = A^T b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Resolver o sistema, vou usar o método de Gauss-Jordan mas podias usar a inversa tbm, deves de indicar TODAS as operações elementares que fazes, mas eu vou saltar isso à frente e meter só o resultado final.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 6 \\ 3 & 11 & 14 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

A solução dos mínimos quadrados é $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

O erro dos mínimos quadrados é: ^{vi}

$$\|b - Ax\| = \left\| \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\|$$

$$= \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

Assim, o erro dos mínimos quadrados é $\sqrt{6}$.

^{vi}fazemos a diferença do vetor b que é dado no enunciado com o vetor Ax e calculamos a norma desse vetor