Departamento de Matemática **Universidade de Aveiro**

Álgebra Linear e Geometria Analítica - A

1º Teste **3 de Novembro de 2023**

Justifique devidamente as respostas a todas as questões

Duração total do teste: 1h30m

(3,5 val.) **1)** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, o vetor $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ e o sistema de equações lineares $AX = b$, onde $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ é o vetor das incógnitas.

a) Verifique que A é invertível.

Tema de auto-estudo!

b) Verifique que o sistema $AX = b$ tem uma única solução e calcule o valor de y pela regra de Cramer.

(3 val.) **2)** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$, o vetor $b = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e o sistema de equações lineares $AX = b$, onde $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ é o vetor das incógnitas. Resolva o sistema $AX = b$, através do método de fatorização $A = LU$.

(1,5 val.) **3)** Considere uma economia dividida em 3 setores: manufaturação, agricultura e serviços. Por cada unidade de output a manufaturação requer 0.2 unidades do mesmo setor, 0.7 unidades da agricultura e 0 unidades dos serviços. Por cada unidade de output, a agricultura usa 0.4 unidades do seu próprio output, 0.4 unidades da manufaturaçao e 0.1 unidades dos serviços. Por cada unidade de output, os serviços consomem 0.5 unidades dos serviços, 0.2 unidades da manufaturação e 0.2 da agricultura. Sabendo que a demanda final (procura final) é 10 unidades de manufaturação, 5 unidades de agricultura e 10 unidades de serviços. Escreva o modelo de Leontief $x = Cx + d$ para o problema e indique a matriz C e d para este problema.

(6 val.) **4)** Sejam A e B duas matrizes invertíveis de dimensão 3×3. Considere a equação matricial

$$A^T \cdot X \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

onde X é uma matriz de dimensão 3×3.

a) Justifique a seguinte afirmação verdadeira: a matriz X é sempre não invertível quaisquer que sejam as matrizes A, B invertíveis.

~~b) Considere~~ $\cancel{A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}$ ~~e~~ $\cancel{B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}}$~~, na equação acima e calcule a matriz~~ $\cancel{X}$.

(6 val.) **5)** Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

a) Verifique se $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y - 2z\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

b) Complete $\langle(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (-1, 1, 2)\rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \_\_\_\_\_\_\_\_\}$ e apresente todos os cálculos efetuados.

Estas notas não constituem uma resolução formal e rigorosa dos exercícios do Exame.

1 (a) A é invertível se e só se $\det(A) \neq 0$ (Teorema do Cap.3 slide 10)

$$\det(A) = \det\left(\begin{bmatrix} 1^{+} & 1^{-} & 0^{+} \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}\right) = 1\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}_{=-1-2=-3} - 1\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}_{=0\cdot(-1)-2\cdot(-2)=4} = -3-4 = -7 \neq 0$$

logo A é invertível

(b) Pela alínea (a), temos que A é invertível logo $AX=b$ é possível determinado e a solução é $X = A^{-1}b$. (Cap. 1.1. slide 37).

A é uma matriz quadrada e $|A| \neq 0$ então podemos usar a regra de Cramer para calcular a solução do sistema.

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1^{+} & 4^{-} & 0^{+} \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{2-4\cdot 4}{-7} = \frac{-14}{-7} = 2$$

estamos a calcular a 2ª incógnita, y, assim no numerador está o determinante da matriz A substituindo a 2ª coluna pela coluna dos termos independentes $b = [4\ 2\ 2]^T$.

3 M - manufaturação, A - agricultura e S - serviço

	M	A	S
M	0.2	0.4	0.2
A	0.7	0.4	0.2
S	0	0.1	0.5
	coluna de consumo de M.	coluna de consumo da A.	coluna de consumo dos S.

Matriz de Consumo: $C = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.7 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}$ e demanda final: $d = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$

O modelo de Leontief é: $X = CX + d$.

4 (a) Queremos mostrar que seja lá qual forem as matrizes A e B invertíveis, isto é, $|A| \neq 0$ e $|B| \neq 0$ vamos ter sempre que X não tem inversa, $|X| = 0$.

Como $A^T X B^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{bmatrix}}_{=C}$ então $|A^T X B^{-1}| = |C|$

$\Leftrightarrow |A^T||X||B^{-1}| = |C|$

$\Leftrightarrow \underbrace{|A|}_{\neq 0}|X|\underbrace{\frac{1}{|B|}}_{\neq 0} = 0$

C.A. $|C| = \begin{vmatrix} 3^{+} & -1^{-} & 0^{+} \\ 6 & -2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

$= 3\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}$

$= 3.0 + 1.0 = 0$

$\Rightarrow |X| = 0$, isto é, X não é invertível.