13/10/2025

Aula 9

(4) (d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3 & -\alpha_2+2\alpha_3 \\ 2\alpha_1-\alpha_3 & \alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=1 \\ -\alpha_2+2\alpha_3=1 \\ 2\alpha_1-\alpha_3=0 \\ \alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right] \underset{\substack{L_3=L_3-2L_1 \\ L_4=L_4-L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_3=L_3-2L_2 \\ L_4=L_4+2L_2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right] \underset{L_4=L_4+\frac{L_3}{3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 5/3 \end{array}\right]$$

O sistema é impossível, logo $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ não é C.L. das restantes matrizes.

$K = \{X_1, \dots, X_k\}$ é **linearmente independente** (l.i.) se
$\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k = 0_V \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ (sistema é poss. det.)

Senão, K é **linearmente dependente** (l.d.) (o sistema acima é poss. ind.), assim existe um vetor $X \in K$ tal que X é C.L. dos restantes vetores $K \setminus \{X\}$
"excepto"

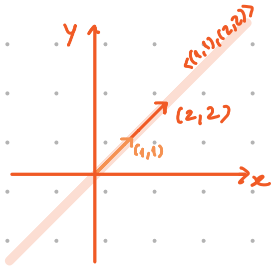
Exp $\{(1,0),(0,1)\}$ é l.i. porque $(0,0) = \alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$ Possível Determinado

Exp $\{(1,1),(2,2)\}$ é l.d. porque $(0,0) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(2,2) \Leftrightarrow \alpha_1 = -2\alpha_2$ Poss. Ind.
P/exp. $(0,0) = \underset{\neq 0}{-2}(1,1) + \underset{\neq 0}{1}(2,2)$

Se $K = \{X_1, \dots, X_k\}$ é:

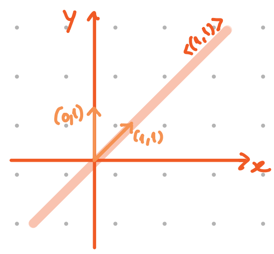
(ver ex.13 (b)) • l.d. $\exists X \in K$ que é C.L. de $K \setminus \{X\} \Leftrightarrow \langle K \rangle = \langle K \setminus \{X\} \rangle$

exp
$\{(1,1),(2,2)\}$ é l.d. $(2,2)$ é C.L. de $(1,1)$
$\langle (1,1),(2,2) \rangle = \langle (1,1) \rangle = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$



(ver ex.15) • l.i. $\forall X \notin \langle K \rangle$ (não é C.L. de K) $\Rightarrow K \cup \{X\}$ ainda é l.i.

exp $\{(1,1)\}$ é l.i. porque $(0,0) = \alpha_1(1,1) \Rightarrow \alpha_1 = 0$
$(0,1) \notin \langle (1,1) \rangle$, isto é, $(0,1)$ não é C.L. de $(1,1)$.
$\{(1,1),(0,1)\}$ é l.i.



NOTA Se $0_V \in K \Rightarrow K$ é l.d.

O conjunto (ordenado) $\mathcal{B}=(x_1,\dots,x_n)$ é uma **base** de um e.v. V ($\neq\{0_V\}$) se é l.i. e gera V.

NOTA $\{0_V\}$ tem base $\emptyset$.

Bases Canónicas...

"Canónica" quer dizer que é a mais natural/simples.

de $\mathbb{R}^2$ é $((1,0),(0,1))$

de $\mathbb{R}^3$ é $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$

de $M_{2\times 2}$ ($=\mathbb{R}^{2\times 2}$) é $\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right)$

de $\mathcal{P}_n$ é $(1,x,x^2,\dots,x^n)$

12 (a) $K=\{(1,2),(2,4)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$? Para ser uma base de $\mathbb{R}^2$ tem de ser l.i. e gerar $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{K \text{ é l.i.?}}$ $(0,0)=\alpha_1(1,2)+\alpha_2(2,4) \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow AX=B$

$$[A|B]=\left[\begin{array}{cc|c}1&2&0\\2&4&0\end{array}\right]\underset{L_2=L_2-2L_1}{\sim}\left[\begin{array}{cc|c}1&2&0\\0&0&0\end{array}\right]=[C|D]$$

$AX=B \Leftrightarrow CX=D \Leftrightarrow \alpha_1=-2\alpha_2$. Poss. Ind.

Logo, K é l.d. Por isso não pode ser uma base de $\mathbb{R}^2$.

Exp $K=\{(1,2),(0,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$?

$\boxed{K \text{ é l.i.?}}$ $(0,0)=\alpha_1(1,2)+\alpha_2(0,1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=0\\\alpha_2=0\end{cases}$ Poss. Det.

Logo, K é l.i.

$\boxed{K \text{ gera } \mathbb{R}^2 ?}$ $AX=B \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ é sempre possível?

$$[A|B]=\left[\begin{array}{cc|c}1&0&x\\2&1&y\end{array}\right]\underset{L_2=L_2-2L_1}{\sim}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&x\\0&1&y-2x\end{array}\right]$$

Como $car(A)=car([A|B])=2$, o sistema é sempre possível, isto é, todos os vetores de $\mathbb{R}^2$ são C.L. de $(1,2)$ e $(0,1)$. Assim, $\langle(1,2),(0,1)\rangle=\mathbb{R}^2$.

Logo, como K é l.i. e gera $\mathbb{R}^2$, K é uma base de $\mathbb{R}^2$.

Teorema $\mathcal{B}=(x_1,\dots,x_n)$ base de V então $\forall x\in V$ é C.L. de forma única de $\mathcal{B}$, isto é, o sistema

$$x=a_1x_1+\dots+a_nx_n$$

é possível det.

As **coordenadas de x na base $\mathcal{B}$** são: $[x]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}$

Exp $\mathcal{B}=((1,2),(2,1))$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

$[(0,3)]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}$ tal que $(0,3)=a_1(1,2)+a_2(2,1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix} \Leftrightarrow AX=B$

$[A|B]=\left[\begin{array}{cc|c}1&2&0\\2&1&3\end{array}\right] \underset{L_2=L_2-2L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c}1&2&0\\0&-3&3\end{array}\right] \underset{L_2=\frac{L_2}{(-3)}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c}1&2&0\\0&1&-1\end{array}\right] \underset{L_1=L_1-2L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c}1&0&2\\0&1&-1\end{array}\right]=[E|F]$

$AX=B \Leftrightarrow EX=F \Leftrightarrow \begin{cases}a_1=2\\a_2=-1\end{cases}$

verificar que $(0,3)=2(1,2)-(2,1)$ ✓

Assim as coordenadas do vetor $(0,3)$ na base $\mathcal{B}$ são:

$$[(0,3)]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$$

Exp $\langle t^2+2t+1,\ t^2+3,\ t-1\rangle$
$=\{at^2+bt+c=\alpha_1(t^2+2t+1)+\alpha_2(t^2+3)+\alpha_3(t-1),\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}\}$

$at^2+bt+c \overset{?}{=} \alpha_1(t^2+2t+1)+\alpha_2(t^2+3)+\alpha_3(t-1)$ quando é que é possível?

$\Leftrightarrow at^2+bt+c=(\alpha_1+\alpha_2)t^2+(2\alpha_1+\alpha_3)+(\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=a\\2\alpha_1+\alpha_3=b\\\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3=c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&1&0\\2&0&1\\1&3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} \Leftrightarrow AX=B$

$1t^2+2t+1$ $\quad 1t^2+0t+3$ $\quad 0t^2+1t-1$

$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&a\\2&0&1&b\\1&3&-1&c\end{array}\right] \underset{\substack{L_2=L_2-2L_1\\L_3=L_3-L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&a\\0&-2&1&b-2a\\0&2&-1&c-a\end{array}\right] \underset{L_3=L_3+L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&a\\0&-2&1&b-2a\\0&0&0&c+b-3a\end{array}\right]$

Para car$(A)=$ car$([A|B])=2$ temos de ter $c+b-3a=0$

$\langle t^2+2t+1,\ t^2+3,\ t-1\rangle=\{at^2+bt+c\in\mathcal{P}_2 : c+b-3a=0\}$.

São todos polinómios com grau menor ou igual a 2, isto é, $at^2+bt+c\in\mathcal{P}_2$, tal que $c+b-3a=0$.

FP2 até ao 18

Recomendo 9(b), 12(b), 13(b), 18(a)