

# Folha Prática 1

Atenção: Estas notas não constituem uma resolução formal e rigorosa dos exercícios das Folhas Práticas.

Última atualização: 27 de outubro de 2025

Notas sobre os exercícios: 2, 4, 5, 6, 15(a), 16(a), 17, 18, 24, 25, 29, 32(a), 35, 36(a) e 36(c).

2.

$$\begin{aligned} & 2(A + B) - AB \\ &= 2 \left( \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} 1+(-1) & 2+0 & 3+(-1) \\ 2+2 & 3+3 & 1+1 \\ 3+1 & 1+2 & 2+0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \times (-1) + 2 \times 2 + 3 \times 1 & 1 \times 0 + 2 \times 3 + 3 \times 2 & 1 \times (-1) + 2 \times 1 + 3 \times 0 \\ 2 \times (-1) + 3 \times 2 + 1 \times 1 & 2 \times 0 + 3 \times 3 + 1 \times 2 & 2 \times (-1) + 3 \times 1 + 1 \times 0 \\ 3 \times (-1) + 1 \times 2 + 2 \times 1 & 3 \times 0 + 1 \times 3 + 2 \times 2 & 3 \times (-1) + 1 \times 1 + 2 \times 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \times 0 & 2 \times 2 & 2 \times 2 \\ 2 \times 4 & 2 \times 6 & 2 \times 2 \\ 2 \times 4 & 2 \times 3 & 2 \times 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 12 & 1 \\ 5 & 11 & 1 \\ 1 & 7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 8 & 12 & 4 \\ 8 & 6 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 12 & 1 \\ 5 & 11 & 1 \\ 1 & 7 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0-6 & 4-12 & 4-1 \\ 8-5 & 12-11 & 4-1 \\ 8-1 & 6-7 & 4-(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -8 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 7 & -1 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. Seja

$$A_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{4 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Queremos calcular a primeira coluna e a segunda linha da matriz que resulta do produto  $AB$ . Como o número de colunas de  $A$  coincide com o número de linhas de  $B$ , o produto  $AB$  está bem definido, sendo o resultado uma matriz de ordem  $3 \times 2$ .

Informalmente, podemos escrever:

$$AB = \begin{bmatrix} \text{Linha 1 de } A \text{ com a coluna 1 de } B & \text{Linha 1 de } A \text{ com a coluna 2 de } B \\ \text{Linha 2 de } A \text{ com a coluna 1 de } B & \text{Linha 2 de } A \text{ com a coluna 2 de } B \\ \text{Linha 3 de } A \text{ com a coluna 1 de } B & \text{Linha 3 de } A \text{ com a coluna 3 de } B \end{bmatrix}$$

Assim, conseguimos calcular apenas a primeira coluna e a segunda linha de  $AB$ , sem termos de determinar as restantes entradas:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 1 + (-4) \times 0 + 0 \times (-1) & \text{Linha 1 de } A \text{ com a coluna 2 de } B \\ 2 \times 1 + 0 \times 1 + 1 \times 0 + (-1) \times (-1) & 2 \times 3 + 0 \times 1 + 1 \times (-1) + (-1) \times 1 \\ 2 \times 1 + 0 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times (-1) & \text{Linha 3 de } A \text{ com a coluna 3 de } B \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & \text{Linha 1 de } A \text{ com a coluna 2 de } B \\ 3 & 4 \\ 2 & \text{Linha 3 de } A \text{ com a coluna 3 de } B \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Logo, a primeira coluna de  $AB$  é  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$  e a segunda linha é  $[3 \quad 4]$ .

P.S. Já agora, a segunda coluna completa de  $AB$  é  $\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ .

5. Sabendo que  $AB$  e  $BA$  estão bem definidos e que  $A$  é uma matriz de ordem  $m \times n$  (ou seja, com  $m$  linhas e  $n$  colunas), queremos provar que  $B$  tem ordem  $n \times m$ , isto é, que  $B$  tem  $n$  linhas e  $m$  colunas.

Como o produto  $AB$  está bem definido, o número de colunas de  $A$  ( $n$ ) tem de coincidir com o número de linhas de  $B$ , isto é,

$$\text{n}^\circ \text{ de colunas } A = n = \text{n}^\circ \text{ de linhas } B$$

daqui concluímos que  $B$  tem  $n$  linhas.

De um modo semelhante, como o produto  $BA$  também está bem definido, o número de colunas de  $B$  tem de coincidir com o número de linhas de  $A$ , isto é,

$$\text{n}^\circ \text{ de colunas } B = \text{n}^\circ \text{ de linhas } A = m$$

concluimos então que  $B$  tem  $m$  colunas.

Portanto,  $B$  é uma matriz com ordem  $n \times m$ .

6.

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 \times 3 + 4 & 2 \times 3 + 5 & 3 \times 3 + 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 11 & 15 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Após efetuar  $EA$  o resultado corresponde a somar à linha 2 da matriz  $A$  três vezes a linha 1.<sup>i</sup>

$$AE = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2 \times 3 & 2 & 3 \\ 4 + 5 \times 3 & 5 & 6 \\ 7 + 8 \times 3 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 19 & 5 & 6 \\ 31 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Após efetuar  $AE$  o resultado corresponde a somar à coluna 1 da matriz  $A$  três vezes a coluna 2.

- 15(a). Para determinar se uma matriz está na forma escalonada ou escalonada por linhas reduzimos precisamos primeiro de identificar os seus pivots. Cada linha da matriz têm no máximo um pivot que é a primeira entrada não nula. Assim, a matriz  $A$  têm 3 pivots marcados a vermelho.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 1 \text{ é o pivot da } L_1 \\ 3 \text{ é o pivot da } L_2 \\ 1 \text{ é o pivot da } L_3 \end{array}$$

Uma matriz está na forma escalonada por linhas se:

- abaixo de cada pivot só ocorrem zeros
- os pivots de linhas mais abaixo estão mais à direita do que os pivots de linhas acima
- caso existam linhas só com zeros estão na parte inferior da matriz

Uma matriz está na forma escalonada por linhas reduzida se:

- está na forma escalonada (isto é satisfaz todas as condições anteriores)
- os pivots são todos iguais a 1
- acima de cada pivot só temos zeros.

Assim, a matriz  $A$  não está na forma escalonada por linhas porque abaixo do pivot da 1<sup>a</sup> linha não temos só zeros. Para além disso, não está na forma escalonada por linhas reduzida.

Apesar da matriz  $A$  não estar na forma escalonada por linhas (reduzida) podemos aplicar operações elementares sobre as linhas da matriz de modo a ter uma matriz equivalente que seja escalonada por linhas (e reduzida).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2=L_2-3L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B \text{ (escalonada)}$$

<sup>i</sup>Isto não é óbvio. Quando estudarmos a decomposição LU vamos ver que a matriz  $E$  chama-se matriz elementar e corresponde a operações elementares.

Fazendo  $L_2 = L_2 - 3L_1$  garantimos que abaixo do pivot da linha 1 só ocorrem zeros. A matriz  $B$  é equivalente à matriz  $A$  e está na forma escalonada por linhas: abaixo de cada pivot só ocorrem zeros, os pivots das linhas mais abaixo estão mais à direita e não temos linhas nulas com que nos preocupar.

Mas, a matriz  $B$  não está na forma escalonada reduzida para isso temos de ter todos os pivots iguais a 1 e garantir que acima de cada pivot só ocorrem zeros. Vamos aplicar mais operações elementares sobre as linhas da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2=L_2-3L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2=L_2/3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2=L_2-L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C$$

A matriz  $C$  é equivalente à matriz  $A$  e está na forma escalonada por linhas reduzida porque está na forma escalonada, todos os pivots (marcados a vermelho) são iguais a 1 e acima de cada pivot só temos zeros. Assim, a solução do exercício 15 (a)(i) é a matriz  $B$  e do 15 (a)(ii) é a matriz  $C$ .

16(a). Vamos começar por escrever o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 1x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 2 \end{cases}$$

na forma matricial. Para isso vamos ter 3 matrizes: a matriz  $A$  dos coeficientes,  $X$  das incógnitas, marcados a preto, e  $B$  dos termos independentes. As incógnitas são  $x_1, x_2$  e  $x_3$  que vão ficar na matriz  $X$  em coluna. Os termos independentes estão marcados a azul e vão ficar na matriz  $B$  em coluna. Os coeficientes estão marcados a vermelho e vão ficar por ordem na matriz  $A$ . Assim,

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 1x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = B$$

Para resolver o sistema podemos usar o método de Gauss ou Gauss-Jordan. Vou usar o de Gauss-Jordan<sup>ii</sup>. Para isso tenho de começar por escrever a matriz ampliada que consiste em juntar à matriz  $A$  a matriz  $B$ . A matriz ampliada escreve-se da seguinte forma:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \end{array} \right]$$

O próximo passo no método de Gauss-Jordan é escalonar e reduzir a matriz  $[A|B]$ :

$$\begin{aligned} [A|B] &= \left[ \begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{L_2=L_2-4L_1 \\ L_3=L_3-3L_1}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -9 & -18 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2=-L_2/9} \\ &\sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1/3 \\ 0 & -3 & -6 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3=L_3+3L_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1=L_1-3L_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = [E|F] \end{aligned}$$

A matriz  $[E|F]$  está na forma escalonada reduzida por linhas. Comecei por trocar a  $L_1$  com a  $L_2$  (porque dá mais jeito para fazer contas). Depois eliminei tudo o que estava abaixo do pivot da  $L_1$ . O pivot da  $L_2$  era o  $-9$ , dividi a  $L_2$  por  $-9$  para ter o pivot igual a 1 (mais uma vez dá mais jeito para fazer contas) e eliminei tudo abaixo desse pivot. Por fim, como queria ter a matriz na forma escalonada reduzida eliminei o 3 que estava acima do pivot da  $L_2$ . Portanto temos que

$$AX = B \Leftrightarrow EX = F \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 1/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 1/3 + 2x_3 \end{cases}$$

O sistema  $AX = B$  é possível indeterminado (tem infinitas soluções) e o conjunto de soluções é:  $\{(x_3, 1/3 + 2x_3, x_3), x_3 \in \mathbb{R}\}$ <sup>iii</sup>.

<sup>ii</sup> Isto é uma questão de preferência, usem o que gostarem mais.

<sup>iii</sup> Nas soluções chamaram  $x_3$  de  $t$ , é a mesma coisa, o nome da variável não importa.

17. Indique para que valores de  $\alpha \in \mathbb{R}$  o sistema é: impossível, possível determinado ou impossível.

$$\begin{cases} \alpha x + y = 1 \\ x + \alpha y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = B$$

Vamos usar a teoria do slide 32 Cap.1.1 que envolve comparar a  $\text{car}(A)$  com a  $\text{car}([A|B])$ . Assim, a primeira coisa que temos de fazer é escalonar as matriz para contar os pivots de  $A$  e  $[A|B]$ .

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{cc|c} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{array} \right]$$

A matriz já está escalonada? Não, seja lá qual for o valor de  $\alpha$  a matriz nunca estará na forma escalonada! (isto é claro?) Assim, vamos escalonar a matriz:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{cc|c} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 = L_2 - \alpha L_1} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 - \alpha^2 & 1 - \alpha \end{array} \right]$$

Como não sei o valor de alpha, por exemplo se  $\alpha = 0$  não pode ser o pivot da  $L_1$ , a primeira coisa que fiz foi trocar a  $L_1$  com a  $L_2$  e assim garanto que tenho o 1 como pivot da primeira linha. De seguida, abaixo do pivot 1 só quero ter 0's então eliminei o  $\alpha$  abaixo do pivot fazendo  $L_2 = L_2 - \alpha L_1$ <sup>iv</sup>. A matriz está escalonada? Sim, temos o pivot da  $L_1$  e abaixo dele só temos zeros e a  $L_2$  pode ou não ter o pivot (dependendo do valor de  $\alpha$ ) mas se  $1 - \alpha^2$  ou  $1 - \alpha$  for pivot da  $L_2$  está garantido que está mais à direita do que o pivot da  $L_1$ .

A matriz já está escalonada vamos agora contar os pivots. Reparem que existe sempre o pivot da  $L_1$  e depois a  $L_2$  pode ou não ter pivot. Vamos ver caso a caso do slide 32:

O sistema é impossível se e só se  $1 = \text{car}(A) < \text{car}([A|B]) = 2$

Neste caso queremos que a matriz  $A$  só tenha um pivot (o da  $L_1$ ) e queremos que a matriz  $[A|B]$  tenha dois pivots, ou seja, queremos ter

$$[A|B] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & (1 - \alpha^2) = 0 & (1 - \alpha) \neq 0 \end{array} \right]$$

Assim, se  $1 - \alpha^2 = 0$  e  $1 - \alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha = -1$  temos que o sistema é impossível.

O sistema é possível determinado se e só se  $\text{car}(A) = \text{car}([A|B]) = n^{\circ} \text{ colunas de } A = 2$

Queremos que a matriz  $A$  (e  $[A|B]$ ) tenha dois pivots, i.e., queremos que  $1 - \alpha^2$  seja o pivot da  $L_2$ .

$$[A|B] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & (1 - \alpha^2) \neq 0 & 1 - \alpha \end{array} \right]$$

Assim, se  $1 - \alpha^2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \pm 1$  temos que o sistema é possível determinado.

O sistema é possível indeterminado se e só se  $\text{car}(A) = \text{car}([A|B]) < 2$

Queremos que a matriz  $[A|B]$  (e  $A$ ) tenha só o pivot da  $L_1$ , ou seja, a  $L_2$  só pode ter zeros.

$$[A|B] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & (1 - \alpha^2) = 0 & (1 - \alpha) = 0 \end{array} \right]$$

Assim, se  $1 - \alpha^2 = 0$  e  $1 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$  temos que o sistema é possível indeterminado.

Portanto, se  $\alpha = 1$  o sistema  $AX = B$  é possível indeterminado. Para além disso, sabemos que

$$\underline{\text{grau de indeterminação}} = n^{\circ} \text{ de colunas} - \text{car}(A) = 2 - 1 = 1$$

Ou seja, temos uma única variável livre. Vamos resolver para confirmar:

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x = 1 - y \end{cases}$$

O conjunto de soluções é  $\{(1 - y, y) : y \in \mathbb{R}\}$  em que  $y$  é a única variável livre.

---

<sup>iv</sup>Se  $\alpha = 0$  estamos a fazer  $L_2 = L_2 - 0L_1$ , que é o mesmo que não fazer nada, mas não tem mal

18. Indique para que valores de  $\alpha \in \mathbb{R}$  o sistema é: impossível, possível determinado ou impossível.

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha - 1 & \alpha \\ 0 & \alpha - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} \alpha - 2 \\ 1 \\ \alpha - 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = B$$

Tal como no exercício 17, vamos comparar a  $\text{car}(A)$  e a  $\text{car}([A|B])$  para determinar os valores de  $\alpha$  para quais o sistema é impossível, possível determinado ou indeterminado. A matriz  $[A|B]$  está escalonada? Depende...

$$\text{Se } \alpha = 1, [A|B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & -2 & | & -2 \end{bmatrix} \text{ não está escalonada}$$

$$\text{Se } \alpha = 0, [A|B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & -2 \\ 0 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -3 \end{bmatrix} \text{ está escalonada}$$

A primeira coisa que vamos fazer vai ser escalonar a matriz para qualquer valor de  $\alpha$ .

$$[A|B] = \begin{bmatrix} \textcolor{red}{1} & \alpha - 1 & \alpha & | & \alpha - 2 \\ 0 & \alpha - 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & | & \alpha - 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 = \frac{L_2}{\alpha-1}, \alpha \neq 1]{\sim} \begin{bmatrix} \textcolor{red}{1} & \alpha - 1 & \alpha & | & \alpha - 2 \\ 0 & \textcolor{blue}{1} & 0 & | & \frac{1}{\alpha-1} \\ 0 & 0 & \alpha & | & \alpha - 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 = \frac{L_3}{\alpha}, \alpha \neq 0]{\sim} \begin{bmatrix} \textcolor{red}{1} & \alpha - 1 & \alpha & | & \alpha - 2 \\ 0 & \textcolor{blue}{1} & 0 & | & \frac{1}{\alpha-1} \\ 0 & 0 & \textcolor{orange}{1} & | & \frac{\alpha-3}{\alpha} \end{bmatrix} = [C|D]$$

Inicialmente na  $L_2$  o  $\alpha - 1$  podia ou não ser um pivot. Então o que fizemos foi dividir a  $L_2$  por  $\alpha - 1$  e assim garantimos que aquela entrada é um pivot (o  $\textcolor{blue}{1}$ ), para fazermos isto temos de assegurar que não estamos a dividir por 0, isto é,  $\alpha - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 1$ . De um modo semelhante, dividimos a  $L_3$  por  $\alpha$  desde que  $\alpha \neq 0$  e ficamos com o pivot  $\textcolor{orange}{1}$  na  $L_3$ . Vamos continuar a resolução sem nos preocuparmos o que acontece quando  $\alpha = 1$  ou  $\alpha = 0$  mais tarde voltamos aqui!

Neste caso,  $\alpha \neq 1$  e  $\alpha \neq 0$ , temos que  $\text{car}(A) = \text{car}([A|B]) = 3 = n^\circ$  de colunas de  $A$ . Logo,

Se  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  temos que o sistema é possível determinado.

Vamos resolver o sistema para ver a solução<sup>v</sup>:

$$\begin{aligned} AX = B &\Leftrightarrow CX = D \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \alpha - 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - 2 \\ \frac{1}{\alpha-1} \\ \frac{\alpha-3}{\alpha} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + (\alpha - 1)x_2 + \alpha x_3 = \alpha - 2 \\ x_2 = \frac{1}{\alpha-1} \\ x_3 = \frac{\alpha-3}{\alpha} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + (\alpha - 1)\frac{1}{\alpha-1} + \alpha\left(\frac{\alpha-3}{\alpha}\right) = \alpha - 2 \\ x_2 = \frac{1}{\alpha-1} \\ x_3 = \frac{\alpha-3}{\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 1 + \alpha - 3 = \alpha - 2 \\ x_2 = \frac{1}{\alpha-1} \\ x_3 = \frac{\alpha}{\alpha} - \frac{3}{\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{1}{\alpha-1} \\ x_3 = 1 - \frac{3}{\alpha} \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, a solução do sistema quando  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  é  $(0, 1/(\alpha-1), 1 - 3/\alpha)$ .

O que é que acontece quando  $\alpha = 1$ ?

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & -2 & | & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & -2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Neste caso temos  $\text{car}(A) = 2 < 3 = \text{car}([A|B])$ , ou seja, o sistema é impossível.

E o que acontece quando  $\alpha = 0$ ?

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & -2 \\ 0 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -3 \end{bmatrix}$$

Neste caso temos que  $\text{car}(A) = 2 < 3 = \text{car}([A|B])$ , o sistema é impossível. Em conclusão

Se  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = 1$  o sistema é impossível.

<sup>v</sup>Este passo não é necessário na resolução do exercício

**Nota:** Se logo no início conseguirem ver os diferentes casos, quando  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = 1$  ou  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  podem logo passar para a parte em que justificam com a característica. Para mim, é difícil ver a matriz e identificar logo esses casos por isso escalono a matriz e faço desta forma. O mais importante é terem a justificação da característica direitinha!

24. A matriz  $A$  é invertível, ou seja, sabemos que a inversa existe e é a matriz  $A^{-1}$ . Para  $\alpha \neq 0$ , queremos provar que a inversa da matriz  $\alpha A$  existe e é  $1/\alpha A^{-1}$ . Portanto temos de provar que se multiplicarmos  $1/\alpha A^{-1}$  à direita ou esquerda de  $\alpha A$  dá a identidade (ver a definição do slide 35):

$$(\alpha A)(\alpha A)^{-1} = I_n \Leftrightarrow (\alpha A)\left(\frac{1}{\alpha}A^{-1}\right) = I_n \quad (1)$$

$$(\alpha A)^{-1}(\alpha A) = I_n \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\alpha}A^{-1}\right)(\alpha A) = I_n \quad (2)$$

Vamos começar por provar (1), isto é,  $(\alpha A)(\alpha A)^{-1} = I_n$ . Como o produto por escalar é comutativo Prop.4 slide 17 (posso mexer o  $\alpha$  e o  $1/\alpha$ ), temos que

$$(\alpha A)(\alpha A)^{-1} = (\alpha A)\left(\frac{1}{\alpha}A^{-1}\right) = \alpha A \frac{1}{\alpha} A^{-1} = \underbrace{\frac{1}{\alpha} \alpha}_{=1} AA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

Por fim, vamos provar (2), isto é,  $(\alpha A)^{-1}(\alpha A) = I_n$ . Como o produto por escalar é comutativo Prop.4 slide 17 temos que,

$$(\alpha A)^{-1}(\alpha A) = \left(\frac{1}{\alpha}A^{-1}\right)(\alpha A) = \frac{1}{\alpha}A^{-1}\alpha A = \underbrace{\frac{1}{\alpha} \alpha}_{=1} A^{-1}A = A^{-1}A = I_n$$

Assim provamos que existe uma matriz  $(1/\alpha A^{-1})$  que multiplicada à esquerda e à direita por  $\alpha A$  dá a identidade. Portanto,  $A$  é invertível e a sua inversa é  $1/\alpha A^{-1}$ .

25. Seja  $A$  e  $B$  matrizes  $n \times n$  invertíveis com inversa  $A^{-1}$  e  $B^{-1}$ , respetivamente. Queremos mostrar que  $AB$  é invertível, isto é, queremos mostrar que existe uma matriz  $C$  tal que  $(AB)C = C(AB) = I_n$ . Pela prop.2 do slide 36, sabemos que a matriz  $C$  é igual a  $B^{-1}A^{-1}$ .

Assim temos de mostrar que  $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n$  e que  $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$ . Como o produto de matrizes é associativo, Prop. 1 slide 17, podemos colocar os parêntesis como quisermos logo:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I_n$$

A matriz  $AB$  é invertível e a inversa é  $B^{-1}A^{-1}$ .

29. Sabendo que  $A$  é uma matriz quadrada  $n \times n$  e que  $A^4 = AAAA = O_n$  em que  $O_n$  é a matriz nula com dimensão  $n \times n$ , queremos provar que  $(I_n + A)^{-1} = (I_n - A)(I_n + A^2)$ . Por outras palavras, queremos provar que a inversa de  $(I_n + A)$  é  $(I_n - A)(I_n + A^2)$  para isso basta provar:

$$(I_n + A)(I_n - A)(I_n + A^2) = I_n \quad (3)$$

$$(I_n - A)(I_n + A^2)(I_n + A) = I_n \quad (4)$$

Vamos começar por provar (3), isto é, que  $(I_n + A)(I_n - A)(I_n + A^2) = I_n$ .

$$\begin{aligned} (I_n + A)(I_n - A)(I_n + A^2) &= (\underbrace{I_n I_n}_{=I_n} - \underbrace{I_n A}_{=A} + \underbrace{A I_n}_{=A} - \underbrace{A A}_{=A^2})(I_n + A^2) && \text{Prop.2 do slide 17 (distribuição)} \\ &= (I_n - A + A - A^2)(I_n + A^2) \\ &= (I_n - A^2)(I_n + A^2) && \text{Prop.2 do slide 17 (distribuição)} \\ &= \underbrace{I_n I_n}_{=I_n} + \underbrace{I_n A^2}_{=A^2} - \underbrace{A^2 I_n}_{=A^2} - \underbrace{A^2 A^2}_{=A^4} \\ &= I_n + A^2 - A^2 - A^4 && \text{Sabemos que } A^4 = O_n \\ &= I_n - O_n \\ &= I_n \end{aligned}$$

De um modo semelhante mostramos que  $(I_n - A)(I_n + A^2)(I_n + A) = I_n$ .

$$\begin{aligned}
 (I_n - A)(I_n + A^2)(I_n + A) &= (\underbrace{I_n I_n}_{=I_n} + \underbrace{I_n A^2}_{=A^2} - \underbrace{A I_n}_{=A} - \underbrace{A A^2}_{=A^3})(I_n + A) && \text{Prop.2 do slide 17} \\
 &= (I_n + A^2 - A - A^3)(I_n + A) && \text{Prop.2 do slide 17} \\
 &= \underbrace{I_n I_n}_{=I_n} + \underbrace{I_n A}_{=A} + \underbrace{A^2 I_n}_{=A^2} + \underbrace{A^2 A}_{=A^3} - \underbrace{A I_n}_{=A} - \underbrace{A A}_{=A^2} - \underbrace{A^3 I_n}_{=A^3} - \underbrace{A^3 A}_{=A^4} \\
 &= I_n + A + A^2 + A^3 - A - A^2 - A^3 - A^4 && \text{Como } A^4 = O_n \\
 &= I_n - O_n \\
 &= I_n
 \end{aligned}$$

Assim mostramos que a inversa da matriz  $(I_n + A)$  é  $(I_n - A)(I_n + A^2)$ .

32(a). Recomendamos tentarem fazer o exercício 30 e 31 antes deste.

Neste tipo de exercícios, o objetivo é isolarmos a matriz das incógnitas  $X$  usando as propriedades das matrizes que conhecemos. Existem várias opções para isolar o  $X$ , eis umas:

### Opção 1:

$$\left( (B^{-1})^T X \right)^{-1} A^{-1} = I_3$$

Usando a Prop.2 do slide 36, temos que:

$$\Leftrightarrow \left( A (B^{-1})^T X \right)^{-1} = I_3$$

Para tirar a inversa podemos multiplicar pela matriz mais à esquerda dos dois lados da equação

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left( A (B^{-1})^T X \right)^{-1} \left( A (B^{-1})^T X \right)}_{=I_3} = I_3 \left( A (B^{-1})^T X \right) \Leftrightarrow I_3 = A (B^{-1})^T X$$

Para passar o  $A$  para o outro lado multiplicamos mais à esquerda por  $A^{-1}$  dos dois lados da equação!

$$\Leftrightarrow \cancel{A} I_3 = \cancel{A} A (B^{-1})^T X \Leftrightarrow A^{-1} I_3 = \underbrace{A^{-1} A}_{=I_3} (B^{-1})^T X \Leftrightarrow A^{-1} = (B^{-1})^T X$$

Pela Prop. 4 do slide 36 temos que  $(B^{-1})^T = (B^T)^{-1}$  logo

$$\Leftrightarrow A^{-1} = (B^T)^{-1} X$$

Para passar o  $(B^T)^{-1}$  para o outro lado multiplicamos mais à esquerda pela sua inversa  $\left( (B^T)^{-1} \right)^{-1} = B^T$

$$\Leftrightarrow \cancel{(B^T)^{-1}} A^{-1} = \cancel{(B^T)^{-1}} (B^T)^{-1} X \Leftrightarrow B^T A^{-1} = \underbrace{B^T (B^T)^{-1}}_{=I_3} X \Leftrightarrow B^T A^{-1} = X$$

### Opção 2:

$$\left( (B^{-1})^T X \right)^{-1} A^{-1} = I_3$$

Usando a Prop.2 do slide 36, temos que:

$$\Leftrightarrow X^{-1} \left( (B^{-1})^T \right)^{-1} A^{-1} = I_3$$

Pela Prop.1 e 4 do slide 36 temos que  $\left( (B^{-1})^T \right)^{-1} = \left( (B^T)^{-1} \right)^{-1} = B^T$

$$\Leftrightarrow X^{-1} B^T A^{-1} = I_3 \Leftrightarrow \cancel{X^{-1}} I_3 = \cancel{X^{-1}} X^{-1} B^T A^{-1}$$

Queremos isolar o  $X$  para isso multiplicamos por  $X$  mais à esquerda dos dois lados da equação!

$$\Leftrightarrow X I_3 = X X^{-1} B^T A^{-1} \Leftrightarrow X = B^T A^{-1}$$

...já conseguimos isolar o  $X$  e sabemos que  $X$  é igual a  $B^T A^{-1}$ , agora só nos resta fazer contas.

**C.A. calcular a inversa de  $A$ :**

$$[A|I_3] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[L_1=L_1-L_3]{L_2=L_2-L_1} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = [I_3|A^{-1}]$$

Logo temos que

$$X = B^T A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

35. Uma matriz quadrada  $A_{n \times n}$  diz-se ortogonal se tiver inversa e  $A^{-1} = A^T$ .

(a)  $A$  e  $B$  são duas matrizes ortogonais, isto é,  $A^{-1} = A^T$  e  $B^{-1} = B^T$ . Queremos mostrar que o produto  $AB$  é ainda uma matriz ortogonal, isto é, queremos mostrar que  $(AB)^{-1} = (AB)^T$ .

$$\begin{aligned} (AB)^{-1} & \quad \text{pela Prop. 2 slide 36} \\ = B^{-1} A^{-1} & \quad \text{como } A \text{ e } B \text{ são ortogonais temos que } A^{-1} = A^T \text{ e } B^{-1} = B^T \\ = B^T A^T & \quad \text{pela Prop. 5 slide 17 Cap.1.1} \\ = (AB)^T & \end{aligned}$$

Logo, dadas duas matrizes ortogonais  $A$  e  $B$  temos que  $AB$  é ainda uma matriz ortogonal.

(b) Seja  $A$  uma matriz ortogonal, isto é,  $A^{-1} = A^T$ . Queremos mostrar que a inversa de  $A$ ,  $A^{-1}$ , é ainda uma matriz ortogonal. Portanto queremos mostrar que a inversa da matriz  $A^{-1}$  é igual à sua transposta,  $(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^T$ .

$$\begin{aligned} (A^{-1})^{-1} & \quad \text{como } A \text{ é ortogona temos que } A^{-1} = A^T \\ = (A^T)^{-1} & \quad \text{pela Prop. 4 slide 36 Cap.1.1.} \\ = (A^{-1})^T & \end{aligned}$$

Logo, dada uma matriz  $A$  ortogonal, a sua inversa  $A^{-1}$  é ainda uma matriz ortogonal.

**36(a). Passos para resolver um sistema linear  $AX = B$  com decomposição LU:**

1. Obter a matriz  $U$  escalonando a matriz  $A$ , SEM trocar linhas nem multiplicar linhas por escalares  $\alpha \neq 0$ . (i.e.  $L_i \leftrightarrow L_j$  nem  $L_i \leftarrow \alpha L_i$ ).

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3=L_3-2L_1]{L_2=L_2+L_1} \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 10 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3=L_3+5L_2} \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = U$$

Assim obtemos  $U$  que é uma matriz escalonada equivalente a  $A$  ✓

2. Construir a matriz  $L$  com as colunas coloridas no passo anterior e dividimos cada coluna pelo elemento que está no seu topo:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & & \\ \hline -3 & -2 & \\ \hline 6 & 10 & -1 \\ \hline \div 3 & \div (-2) & \div (-1) \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \\ \hline -1 & 1 & \\ \hline 2 & -5 & 1 \\ \hline \end{array}$$

As restantes entradas da tabela são preenchidas com 0's e assim obtemos a matriz  $L$  que é uma matriz triangular inferior com 1's na diagonal ✓.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

(Neste ponto podem e devem confirmar que  $A = LU$  ✓.)



3. Resolver o sistema  $Ly = b$  em que  $y = [y_1 \ y_2 \ y_3]^T$ .

$$[L|b] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow[L_3=L_3-2L_1]{L_2=L_2+L_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 1 & 16 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3=L_3+5L_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right] = [I_3|y]$$

Assim, temos que

$$y = \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

4. Resolver  $Ux = y$  em que  $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$  é a solução do sistema  $AX = b$ .

$$[U|y] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow[L_1=L_1-2L_3]{L_2=L_2-L_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 0 & -19 \\ 0 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow[L_2=-\frac{L_2}{2}]{L_3=-L_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -7 & 0 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array} \right] \sim$$

$$\xrightarrow[L_1=L_1+7L_2]{L_3=L_3+L_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1=\frac{L_1}{3}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array} \right] = [I_3|x]$$

Assim, a solução do sistema  $Ax = b$  é:

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

### 36(c). Passos para resolver um sistema linear $AX = B$ com decomposição LU:

1. Obter a matriz  $U$  escalonando a matriz  $A$ , SEM trocar linhas nem multiplicar linhas por escalares  $\alpha \neq 0$ . (i.e.  $\underline{L_i} \leftrightarrow \underline{L_j}$  nem  $\underline{L_i} \rightarrow \alpha \underline{L_i}$ ).

$$A = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow[L_3=L_3-3L_1]{L_2=L_2-L_1} \left[ \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 10 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3=L_3+5L_2} \left[ \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{array} \right] = U$$

Assim obtemos  $U$  que é uma matriz escalonada equivalente a  $A$  ✓

2. Construir a matriz  $L$  com as colunas coloridas no passo anterior e dividimos cada coluna pelo elemento que está no seu topo:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \\ \hline 1 & -2 & \\ \hline 3 & 10 & -6 \\ \hline \div 1 & \div (-2) & \div (-6) \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline 3 & -5 & 1 \\ \hline \end{array}$$

As restantes entradas da tabela são preenchidas com 0's e assim obtemos a matriz  $L$  que é uma matriz triangular inferior com 1's na diagonal ✓.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

(Neste ponto podem e devem confirmar que  $A = LU$  ✓.)

3. Resolver o sistema  $Ly = b$  em que  $y = [y_1 \ y_2 \ y_3]^T$ .

$$[L|b] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ 3 & -5 & 1 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow[L_3=L_3-3L_1]{L_2=L_2-L_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & 1 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3=L_3+5L_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -18 \end{array} \right] = [I_3|y]$$

Assim, temos que

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -18 \end{bmatrix}$$

4. Resolver  $Ux = y$  em que  $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$  é a solução do sistema  $AX = b$ .

$$\begin{aligned}
 [U|y] &= \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array} \right] \xrightarrow[L_3 = \frac{L_3}{(-6)}]{\sim} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow[L_1 = L_1 - 2L_3]{L_2 = L_2 + L_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \sim \\
 &\xrightarrow[L_2 = \frac{L_2}{(-2)}]{\sim} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow[L_1 = L_1 + L_2]{\sim} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] = [I_3|x]
 \end{aligned}$$

Assim, a solução do sistema  $Ax = b$  é:

$$x = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$