

# Aula 2

18/09/2025

Seja  $A_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  e  $B_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$(AB)^T = \left( \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 1x0 + (-2)x1 \\ 1x0 + 0x1 \\ 2x0 + 3x1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$3 \times 2$      $2 \times 1$

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$1 \times 2$      $2 \times 3$

$$A^T B^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{O produto } A^T B^T \text{ não está bem definido porque o nº de colunas de } A^T \text{ é diferente do nº de linhas de } B^T.$$

$2 \times 3$      $1 \times 2$

Assim temos que,  $(AB)^T = B^T A^T \neq A^T B^T$

FP1 ① (d)  $DA = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

$2 \times 3$      $3 \times 2$      $\underbrace{=}_{\text{✓}}$

$\begin{matrix} \text{nº de linhas de } D \\ \text{nº de col. de } A \\ = 2 \times 2 \end{matrix}$

$$(f) \frac{1}{5} (I_2 - (DA)^2)$$

$$= \frac{1}{5} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{5} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{5} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 15 & 16 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 1 & -16 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -15 & -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -15/5 & -15/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$$

(ver os slides de revisão de sistemas lineares)

## Sistema de equações lineares / Sistema linear:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

é uma coleção de eq. lineares em que  $x_1 \dots x_n$  são as variáveis/incógnitas,  $b_1 \dots b_n$  os termos independentes e  $a_{ij}$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$  e  $j \in \{1, \dots, n\}$ , o coeficiente da equação i multiplicar por  $x_j$ .

O sistema é homogéneo se e só se  $b_1 = \dots = b_m$

Ex:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

e' homogéneo - os termos independentes são todos 0.

$$\begin{array}{l} a_{21} = 2 \rightarrow 2^{\text{a}} \text{eq. coeficiente de } x_1 \\ a_{12} = 1 \rightarrow 1^{\text{a}} \text{eq. coeficiente de } x_2 \\ a_{13} = 0 \rightarrow 1^{\text{a}} \text{eq. coef. de } x_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ 2(x_2) + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ -2x_2 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ -x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = -x_2 \end{cases}$$

O sistema é possível indeterminado. O conjunto de soluções é:  
 $\{(-x_2, x_2, -x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\}$ .

## Forma matricial de um sistema linear:

$m$ -nº de equações e  $n$ -nº de incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow A \underset{\substack{\text{matriz dos} \\ \text{coeficientes} \\ (m \times n)}}{\underset{\substack{\downarrow \\ \text{coluna das} \\ \text{incógnitas} \\ (n \times 1)}}{X}} = B \underset{\substack{\text{vetor} \\ \text{dos termos} \\ \text{independentes} \\ (m \times 1)}}{\underset{\substack{\downarrow \\ \text{coluna das} \\ \text{incógnitas} \\ (n \times 1)}}{=}}$$

Exp:

$$(1) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 5 \\ 5x_1 - 5x_3 = 10 \end{cases}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1^{\text{eq}} \\ 2^{\text{eq}} \\ 3^{\text{eq}} \end{array}$$

$$(2) \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 1^{\text{eq}} \\ 2^{\text{eq}} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 2x_1 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \quad \checkmark$$

A matriz  $[A|B]$  é a matriz ampliada e tem ordem  $m \times (n+1)$

Exp:

$$\begin{cases} x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow AX = B \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}}_{2 \times 3} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{3 \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}}_{2 \times 1}$$

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right] \text{ é a matriz ampliada}$$

Pivot: é a 1<sup>a</sup> entrada não nula de cada linha

Exp.  $\left[ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$  Pivot da linha 1: 1  
 " " linha 2: 1  
 " " linha 3: 2

$$\left[ \begin{array}{ccc} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{" " linha 1: 2, linha 2: não tem}$$

Matriz escalonada por linhas

escalonar

- Abaixo de cada pivot só temos 0's
- Dadas 2 linhas consecutivas, não nulas, o pivot da linha mais acima está mais à direita do pivot da linha mais abaixo
- Se existem linhas nulas estão no fundo da matriz.

Ex. Quem este é na forma escalonada por linhas?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

✓

X abaixo  
do pivot L2  
não tem 0's,

X pivot  
da L2 está  
mais à direita do  
que de L1

→ os pivots de cada linha estão sublinhados  
Abreviados: L<sub>1</sub> - linha 1, L<sub>2</sub> - linha 2, L<sub>3</sub> - linha 3...

### Matriz escalonada por linhas reduzida:

- Escalonada por linhas
- Pivots são todos iguais a 1
- Acima de cada pivot só temos zeros.

Ex. Quem este é na forma escalonada por linhas reduzida?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I<sub>2</sub>  
duplicado

X  
de ordem 2  
de ordem 2

0 pivot de L<sub>2</sub>  
L<sub>4</sub> não é de 1

X  
acima do  
pivot de  
L<sub>2</sub> está um  
1.

### Nos próximos episódios:

Sistema  $\rightarrow$  forma matricial  $\xrightarrow{\text{Próxima aula}}$

Escalonar (e  
reduzir)  $\xrightarrow{\text{Próxima aula}}$

[A|B]

Repetido para  
encontrar a  
Solução de um  
Sistema

FP1 ate' ao ex: 15

Recomendo o ex: 15 (só indicar)