Aula 24

11/12/2025

FPS 16 (b) Os menores principais dominantes são:

$\Delta_1 = |2| = 2$ ~~(L2, C2, L3, C3)~~ ; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$ ~~(L3, C3)~~

$\Delta_3 = |A| = -8$

Como $\Delta_1 > 0$ e $\Delta_3 < 0$ temos que a forma quadrática Q é indefinida. Assim, A tem valores próprios positivos e negativos.

Equação geral de uma cónica: $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ (não simultaneamente nulos), $\delta, \eta, \mu \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\alpha x^2 + \beta y^2 + 2\gamma xy + \delta x + \eta y + \mu = 0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \mu = 0$$

$$\Leftrightarrow X^T \underbrace{A}_{\text{simétrica!}} X + BX + \mu = 0$$

Equações reduzidas da elipse, hipérbole, parábola

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\qquad y = ax^2$

Simplificar $X^TAX + BX + \mu = 0$ como A é simétrica então é ortogonalmente diagonalizável, isto é, $P^TAP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ em que λ_1 e λ_2 são valores próprios de A.

Seja $X = P\hat{X}$ onde $\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}$ temos que:

$$X^TAX + BX + \mu = 0 \Leftrightarrow (P\hat{X})^T A (P\hat{X}) + BP\hat{X} + \mu = 0 \Leftrightarrow \hat{X}^T \underbrace{P^TAP}_{=D} \hat{X} + \underbrace{BP}_{=\hat{B}} \hat{X} + \mu = 0$$

$$\Leftrightarrow \hat{X}^T D \hat{X} + \hat{B}\hat{X} + \mu = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\delta} & \hat{\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \mu = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \hat{x}^2 + \lambda_2 \hat{y}^2 + \hat{\delta}\hat{x} + \hat{\eta}\hat{y} + \mu = 0$$ "Rotação dos eixos"

⚠ Eliminamos o termo cruzado ($2\gamma xy$). Para eliminar BX ou μ vamos ver os próximos exemplos.

Recordar: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Eliminar BX: $2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 18 = 0$

$\Leftrightarrow 2(x^2 + 6x) + (y^2 + 4y) + 18 = 0$

$\Leftrightarrow 2(x^2 + 6x + (6/2)^2 - (6/2)^2) + (y^2 + 4y + (4/2)^2 - (4/2)^2) + 18 = 0$

$\Leftrightarrow 2(x^2 + 6x + 9 - 9) + (y^2 + 4y + 4 - 4) + 18 = 0$

$\Leftrightarrow 2(x^2 + 6x + 3^2) + (y^2 + 4y + 2^2) - 2 \cdot 9 - 4 + 18 = 0$

$\Leftrightarrow 2(\underbrace{x + 3}_{=\tilde{x}})^2 + (\underbrace{y + 2}_{=\tilde{y}})^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 2\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 4$

"Translação"

$\Leftrightarrow \frac{\tilde{x}^2}{2} + \frac{\tilde{y}^2}{4} = 1$ elipse (termos ao quadrado todos com sinal ⊕ e uma constante)

Eliminar a constante μ: $2x^2 + 12x + 3y + 15 = 0$

$\Leftrightarrow 2(x^2 + 6x) + 3y + 15 = 0$

$\Leftrightarrow 2(x^2 + 6x + 3^2 - 3^2) + 3y + 15 = 0$

$\Leftrightarrow 2(x^2 + 6x + 3^2) + 3y - 2.3^2 + 15 = 0$

$\Leftrightarrow 2(x+3)^2 + 3y - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2\underbrace{(x+3)}_{=\tilde{x}}^2 + 3(\underbrace{y-1}_{=\tilde{y}}) = 0 \Leftrightarrow 2\tilde{x}^2 + 3\tilde{y} = 0$ "Translação"

$\Leftrightarrow \tilde{y} = -\frac{2}{3}\tilde{x}^2$ parábola (um termo de grau 1, $\tilde{y}$, e outro ao quadrado $\tilde{x}^2$.)

Cónica degeneradas (exemplos)

- $2(x+3)^2 + (y+2)^2 = -2$ Conjunto vazio!
- $2\underbrace{(x+3)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(y+2)^2}_{\geq 0} = 0 \Leftrightarrow x+3=0$ e $y+2=0$
  $\Leftrightarrow x=-3$ e $y=-2$
  Ponto!

FP5 17 (b) $4xy - 2x + 6y + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 3 = 0$

$\Leftrightarrow X^T A X + BX + 3 = 0.$

- Eliminar $4xy$ - diagonalizando ortogonalmente A
  - Calcular valores próprios de A

    $\det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 0-\lambda & 2 \\ 2 & 0-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2$

  - Calcular vetores próprios de A.

    $U_2 = \{X \in \mathbb{R}^2 : (A - 2I_2)X = 0\}$

    $= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\Leftrightarrow 2x - 2y = 0}\right\}$

    $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\} = \{(y,y), y \in \mathbb{R}\}$

    $= \{y(1,1), y \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1) \rangle$ assim, $(1,1)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 2.

$$\mathcal{U}_{-2} = \{ X \in \mathbb{R}^2 : (A + 2I_2)X = 0 \}$$
$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$
$$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underset{\Leftrightarrow x = -y}{x + y = 0} \}$$
$$= \{ (-y, y), y \in \mathbb{R} \} = \{ y(-1,1), y \in \mathbb{R} \} = \langle (-1,1) \rangle$$

Assim, $(-1,1)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio -2.

- Dividir cada vetor próprio pela sua norma

$$\frac{(1,1)}{\|(1,1)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ e } \frac{(-1,1)}{\|(-1,1)\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

- Construir $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

- Seja $\boxed{X = P\hat{X}}$ onde $\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}$ e $\hat{B} = BP = \begin{bmatrix} -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 4\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

- Assim, $X^T A X + BX + 3 = 0 \Leftrightarrow \hat{X}^T D \hat{X} + \hat{B}\hat{X} + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 4\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\hat{x}^2 - 2\hat{y}^2 + \cancel{2}\sqrt{2}\hat{x} + \cancel{4}\sqrt{2}\hat{y} + 3 = 0$$

- completar quadrados

$$\Leftrightarrow 2\left(\hat{x}^2 + \sqrt{2}\hat{x} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) - 2\left(\hat{y}^2 - 2\sqrt{2}\hat{y} + \left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\hat{x}^2 + \sqrt{2}\hat{x} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) - 2\left(\hat{y}^2 - 2\sqrt{2}\hat{y} + \sqrt{2})^2\right) - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2(\sqrt{2})^2 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\underbrace{\hat{x} + \sqrt{2}/2}_{=\tilde{x}})^2 - 2(\underbrace{\hat{y} - \sqrt{2}}_{=\tilde{y}})^2 + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\tilde{x}^2 - 2\tilde{y}^2 = -6 \Leftrightarrow -\frac{\tilde{x}^2}{3} + \frac{\tilde{y}^2}{3} = 1$$

hipérbole (termos ao quadrado, um com sinal negativo e uma constante).

FP5 até ao 17. Recomendo 17(c).