Folha Prática 3

Atenção: Estas notas não constituem uma resolução formal e rigorosa dos exercícios das Folhas Práticas.

Última atualização: 3 de novembro de 2025

Notas sobre os exercícios: 6, 15, e 27.

6. Seja A uma matriz quadrada de ordem 4 tal que $\det(A) = 3$.

$$\begin{aligned}
\det\left(2(A^{-1})^T\right) &= 2^4 \det\left((A^{-1})^T\right) && \text{pelo ex.4 da FP3, o 2 está a multiplicar por todas as 4 colunas/linhas de } A\\
&= 2^4 \det\left(A^{-1}\right) && \text{pela Prop.1 do slide 9}\\
&= 2^4\, \frac{1}{\det(A)} && \text{pelo slide 10}\\
&= 2^4 \frac{1}{3} = \frac{16}{3}
\end{aligned}$$

15. (a) Nota: a azul estão assinaladas as entradas utilizadas no desenvolvimento do determinante, e o expoente a vermelho indica o sinal que cada entrada irá assumir nesse desenvolvimento. Esta indicação é opcional e serve apenas como auxílio no cálculo.

$$A = \begin{bmatrix} 1^+ & 0 & 2 & -1 \\ 0^- & 1 & -1 & 1 \\ 1^+ & 2 & 0 & 0 \\ 0^- & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\det(A) &= +1\det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2^- & 0^+ & 0^- \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) +1\det\left(\begin{bmatrix} 0^+ & 2 & -1 \\ 1^- & -1 & 1 \\ 1^+ & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) && \text{desenv. pela } C_1\\
&= -2\det\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) -1\det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) +1\det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right) && \text{desenv. pela } L_2 \text{ e } C_1\text{, respetivamente}\\
&= -2(-1-1) - (2+1) + (2-1) = 2
\end{aligned}$$

(b) Vamos usar a definição da matriz adjunta que se encontra no slide 10:

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{13} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{bmatrix}$$

em que, ver o slide 5, $A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$ é o cofator e M_{ij} é a matriz que resulta da matriz A eliminando a linha i e coluna j.

O elemento $(2,3)$ da $\operatorname{adj} A$ é o elemento que está na linha 2 coluna 3, isto é, o cofator:

$$\begin{aligned}
A_{32} &= (-1)^{(3+2)} \underbrace{\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)}_{\text{Eliminamos a } L_3 \text{ e } C_2 \text{ de } A} && \text{desenvolvimento pela } C_1\\
&= -\det\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = -(-1-1) = 2
\end{aligned}$$

Pelo teorema do 10 temos que:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj} A$$

Assim, o elemento $(2,3)$ da matriz A^{-1} é igual ao elemento $(2,3)$ da matriz $\operatorname{adj} A$, que acabamos de calcular, a dividir pelo determinante de A, que calculamos na alínea (a), ou seja,

$$\frac{A_{32}}{\det(A)} = \frac{2}{2} = 1$$

20(c).

$$\begin{cases} -2x - y + z = -3 \\ 2x + 4y - 2z = 8 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow AX = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2^{+} & -1 & 1 \\ 2^{-} & 4 & -2 \\ 2^{+} & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para resolvermos o sistema $AX = B$ com a regra de Cramer precisamos primeiro de calcular o determinante da matriz dos coeficientes A e verificar se é diferente de 0.

$$\det(A) = \underbrace{-2\det\left(\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\right)}_{=2} \underbrace{-2\det\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\right)}_{=-2} \underbrace{+2\det\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\right)}_{=-2} = -4 + 4 - 4 = -4$$

Como a matriz A é quadrada e $\det(A) \neq 0$ podemos usar a regra de Cramer. Assim[i],

$$x = \frac{\det\left(\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 8 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}\right)}{\det(A)} = \frac{8}{-4} = -2$$

$$y = \frac{\det\left(\begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 2 & 8 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right)}{\det(A)} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$z = \frac{\det\left(\begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\right)}{\det(A)} = \frac{32}{-4} = -8$$

Logo, a solução do sistema $AX = B$ é $X = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}$

27. No contexto do problema apresentado, o sistema$x = Cx + d$ corresponde à matriz de consumo C, ao vector de produção x e ao vector de procura externa d, onde

$$C = \begin{array}{cc} \text{Caçador} & \text{Talho} \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix}} \end{array} \begin{array}{l} \text{Caçador} \\ \text{Talho} \end{array}, \quad d = \begin{bmatrix} 76 \\ 76 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Caçador} \\ \text{Talho} \end{array}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Este problema tem solução?

– As entradas de C e d são não negativas.
– A soma das entradas em cada coluna de C é inferior a 1, isto é, $0.2 + 0.1 = 0.3 < 1$ e $0.4 + 0 = 0.4 < 1$.

Portanto, pelos pontos anteriores, podemons concluir que existe um único vetor de produção x que é a solução do sistema $x = Cx + d$. Vamos calcular x:

$$x = Cx + d \Leftrightarrow x - Cx = d \Leftrightarrow (I_2 - C)x = d \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0.8 & -0.4 \\ -0.1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 76 \\ 76 \end{bmatrix}$$

$$[I_2 - C|d] = \left[\begin{array}{cc|c} 0.8 & -0.4 & 76 \\ -0.1 & 1 & 76 \end{array}\right] \underset{\substack{L_1=10L_1 \\ L2=-10L_2}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 8 & -4 & 760 \\ 1 & -10 & -760 \end{array}\right] \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -10 & -760 \\ 8 & -4 & 760 \end{array}\right] \sim$$

$$\underset{L_2=L_2-8L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -10 & -760 \\ 0 & 76 & 9 \times 760 \end{array}\right] \underset{L_2=L_2/76}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -10 & -760 \\ 0 & 1 & 90 \end{array}\right] \underset{L_1=L_1+10L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 140 \\ 0 & 1 & 90 \end{array}\right]$$

Assim, a solução do problema é $X = \begin{bmatrix} 140 \\ 90 \end{bmatrix}$. Nessa semana, o caçador deve gerar 140 euros na sua atividade de caça e o talho deve gerar 90 euros na sua atividade.

[i] Nas avaliações devem apresentar os cálculos de todos os determinantes!