17/10/2025

Aula 19

FP4 (7) $X=(1,2,0)$ e $Y=(1,-1,1)$

(a) $Z=(z_1,z_2,z_3)$? tal que $Z\perp X$ e $Z\perp Y$

Queremos que $Z\cdot X=0$ e $Z\cdot Y=0$

$$\begin{cases} Z\cdot X=0 \\ Z\cdot Y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(z_1,z_2,z_3)\cdot(1,2,0)=0 \\ (z_1,z_2,z_3)\cdot(1,-1,1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1+2z_2=0 \\ z_1-z_2+z_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1=-2z_2 \\ -2z_2-z_2+z_3=0\end{cases}$$

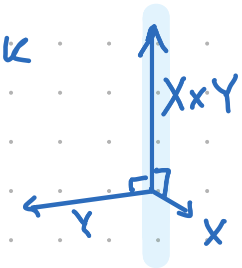
$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1=-2z_2 \\ z_3=3z_2\end{cases}$$

Logo, os vetores $(-2\alpha, \alpha, 3\alpha)=\alpha(-2,1,3)$, $\alpha\in\mathbb{R}$ são ortogonais a X e Y.
$(z_2\to\alpha)$

(ou) Queremos vetores ortogonais a X e Y, isto é, múltiplos do vetor $X\times Y$.

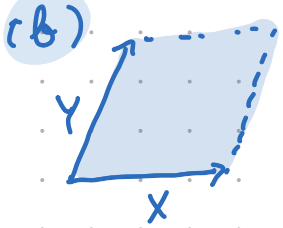
$$X\times Y=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix} = i\begin{vmatrix}2 & 0 \\ -1 & 1\end{vmatrix} - j\begin{vmatrix}1 & 0 \\ 1 & 1\end{vmatrix} + k\begin{vmatrix}1 & 2 \\ 1 & -1\end{vmatrix} = 2i-j-3k$$

$$=2(1,0,0)-(0,1,0)-3(0,0,1)=(2,-1,-3).$$



Qualquer múltiplo de $X\times Y$ é ortogonal a X e a Y: $\alpha(2,-1,-3)$, $\alpha\in\mathbb{R}$

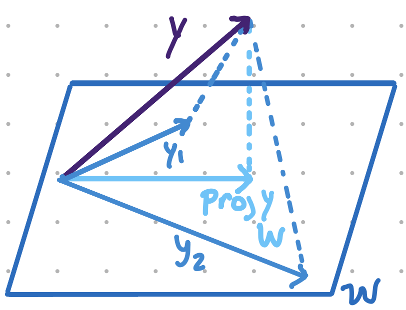
(b)



Pelo slide 14

$$A_{\square}=\|X\times Y\|=\|(2,-1,-3)\|=\sqrt{2^2+(-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{14}$$

Teorema da melhor aproximação: Seja W um subespaço do $\mathbb{R}^n$ e y um vetor de $\mathbb{R}^n$.



O vetor mais próximo de y que está no plano W é $\text{proj}_W y$. Por outras palavras a diferença entre qualquer vetor $y'\in W$ é mínima quando $y'=\text{proj}_W$

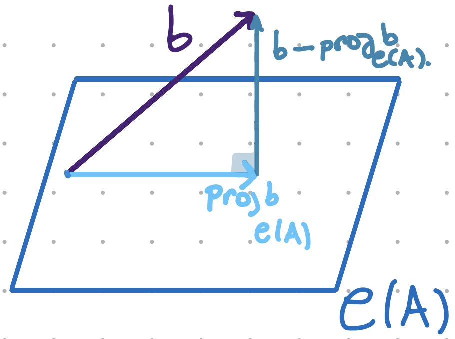
Assim,

- $\text{proj}_W y$ é a melhor aproximação de y por vetores de W.
- $\|y-v\|$ - é o erro de aproximar y por $v\in W$. O erro é minimizado quando $v=\text{proj}_W y$.

Problema dos mínimos quadrados (m.q.)

resolver sistemas impossíveis usando projeções ortogonais como aproximações.

$Ax = b$ é impossível $\Leftrightarrow$ $b \notin \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow$ b não é C.L. das colunas de A.
Cap. 2.2. Slide 7



Como $b \notin \mathcal{C}(A)$, o objetivo é encontrar um $\hat{x}$ tal que $A\hat{x} = \hat{b} \in \mathcal{C}(A)$ e é a melhor aproximação possível de b por vetores de $\mathcal{C}(A)$. Pelo Teorema da melhor aproximação sabemos que $\hat{b}$ tem de ser $\mathrm{proj}_{\mathcal{C}(A)} b$.

$\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ é uma solução dos m.q. do sistema $Ax = b$
$\Leftrightarrow$ $\hat{x}$ é solução do sistema (possível) $A\hat{x} = \hat{b}$ onde $\hat{b} = \mathrm{proj}_{\mathcal{C}(A)} b$.

Erro dos m.q. é $\|b - A\hat{x}\| = \|b - \mathrm{proj}_{\mathcal{C}(A)} b\|$.

NOTA: Se $Ax = b$ é possível então $b \in \mathcal{C}(A)$ e $\mathrm{proj}_{\mathcal{C}(A)} b = b$. Logo a solução dos m.q. é a solução usual do sistema.

Corolário (Cap. 2.2. slide 7): car(A) é o nº máx. de colunas/linhas l.i.

O problema dos m.q. $A\hat{x} = \mathrm{proj}_{\mathcal{C}(A)} b$:
- possível determinado se as colunas de A são l.i. (car(A) = nº de colunas)
- possível indeterminado se as colunas de A são l.i. (car(A) < nº de colunas)

NOTA: O problema dos m.q. nunca é impossível porque por definição $\mathrm{proj}_{\mathcal{C}(A)} b \in \mathcal{C}(A)$ assim existe $\exists\, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $A\hat{x} = \mathrm{proj}_{\mathcal{C}(A)} b$.

Como resolver o problema dos m.q.? (versão não prática).
Dado um sistema $Ax = b$ impossível (car(A) < car$([A|b])$) usamos os m.q. para encontrar a solução $\hat{x}$ mais próxima possível.

(1) Encontrar uma base para o espaço das colunas de A, $\mathcal{C}(A)$.
(2) Pelo método de Gram-Schmidt transformar a base do ponto anterior numa base o.n. de $\mathcal{C}(A)$, $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$
(3) Logo, pelo Cap. 4 Teorema do slide 10 temos que
$$\mathrm{proj}_{\mathcal{C}(A)} b = (b \cdot x_1)x_1 + \dots + (b \cdot x_n)x_n$$
(4) Resolver o sistema $A\hat{x} = \mathrm{proj}_{\mathcal{C}(A)} b$ e $\hat{x}$ é a solução dos m.q..

Sendo o erro dos m.q. $\|b - A\hat{x}\| = \|b - \mathrm{proj}_{\mathcal{C}(A)} b\|$.

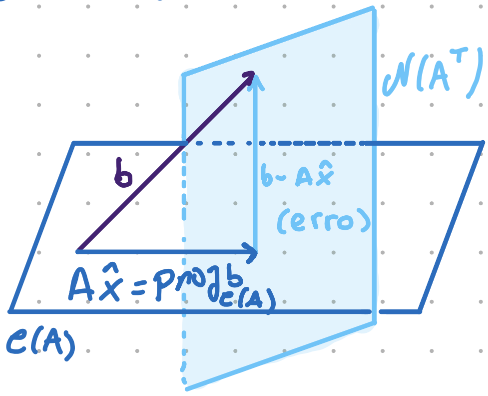
Teorema: $\hat{x}$ é a solução dos m.q.
$\Leftrightarrow$ $\hat{x}$ é a solução do sistema possível $\boxed{A^TA\hat{x}=A^Tb}$ Equações Normais
e o erro dos m.q. é: $\boxed{\|b-A\hat{x}\|}$

Equações Normais - intuição:

Seja $\hat{x}$ a solução dos m.q., isto é, $A\hat{x} = \text{proj}_{\mathcal{C}(A)} b$. Temos que o vetor $b - \text{proj}_{\mathcal{C}(A)} b = b - A\hat{x}$ é ortogonal ao subespaço $\mathcal{C}(A)$ (ver desenho pág. 2).

Seja C_i uma coluna qualquer de A, como $C_i \in \mathcal{C}(A)$ e $b - A\hat{x} \perp \mathcal{C}(A)$ temos que $C_i \cdot (b - A\hat{x}) = 0$, pela definição do produto interno (Cap. 4 slide 2): $\Leftrightarrow C_i^T(b - A\hat{x}) = 0$. Como C_i^T é uma linha na matriz A^T segue que $A^T(b - A\hat{x}) = 0 \Leftrightarrow A\hat{x} = A^Tb$. Por outras palavras, o espaço nulo de A^T, $\mathcal{N}(A^T)$ é ortogonal ao espaço das colunas de A.

$A^TA\hat{x} = A^Tb \Leftrightarrow A^TA\hat{x} - A^Tb = 0$
$\Leftrightarrow A^T\underbrace{(A\hat{x} - b)}_{\text{este vetor é ortogonal a } \mathcal{C}(A)} = 0 \Leftrightarrow A\hat{x} - b \in \mathcal{N}(A^T)$



Teorema: $Ax = b$ tem 1 única sol. dos m.q. $\Leftrightarrow$ As colunas de A são l.i. $\Leftrightarrow$ A^TA tem inversa e a sol. dos m.q. é $A^TA\hat{x} = A^Tb \Leftrightarrow \hat{x} = (A^TA)^{-1}A^Tb$.

FP4 24 1. $Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 = L_2 + 2L_1 \\ L_3 = L_3 - L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -11 \end{array}\right]$$

$car(A) = 2 < car([A|b]) = 3$
$Ax = b$ é impossível.

1º Equações Normais: $A^TA\hat{x} = A^Tb \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 6 & -11 \\ -11 & 22 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 11 \end{bmatrix}$

2º Resolver Eq. Normais:

$$[A^TA | A^Tb] = \left[\begin{array}{cc|c} 6 & -11 & -4 \\ -11 & 22 & 11 \end{array}\right] \underset{L_1 = L_1/6}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -11/6 & -2/3 \\ -11 & 22 & 11 \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2 + 11L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -11/6 & -2/3 \\ 0 & 11/6 & 11/3 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_1 = L_1 + L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 11/6 & 11/3 \end{array}\right] \underset{L_2 = 6\frac{L_2}{11}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Assim, $\begin{bmatrix}6 & -11\\ -11 & 22\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\ 11\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\hat{x}_1 = 3\\ \hat{x}_2 = 2\end{cases}$ é a sol. dos m.q.

ou Como $\det(A^TA) = 6\cdot 22 - 11^2 = 11 \neq 0$ temos que a solução dos m.q. é:

$$\hat{x} = (A^TA)^{-1}A^Tb = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 6/11\end{bmatrix}A^Tb = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 6/11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ 2 & -3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 1\\ 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}$$

C.A.

$$[A^TA|I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc}6 & -11 & 1 & 0\\ -11 & 22 & 0 & 1\end{array}\right] \underset{L_1 = L_1/6}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc}1 & -11/6 & 1/6 & 0\\ -11 & 22 & 0 & 1\end{array}\right] \underset{L_2=L_2+11L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc}1 & -11/6 & 1/6 & 0\\ 0 & 11/6 & 11/6 & 1\end{array}\right] \sim$$

$$\underset{L_1=L_1+L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 11/6 & 11/6 & 1\end{array}\right] \underset{L_2=\frac{6L_2}{11}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 6/11\end{array}\right] = [I_2|(A^TA)^{-1}]$$

Erro dos m.q. $\|b - A\hat{x}\| = \left\|\begin{bmatrix}4\\ 1\\ 2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & -3\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}\right\| = \left\|\begin{bmatrix}4\\ 1\\ 2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 3\end{bmatrix}\right\| = \left\|\begin{bmatrix}3\\ 1\\ -1\end{bmatrix}\right\|$

$= \sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$.

Exemplo - slide 32 As colunas de A não são l.i. $C_1 = C_2 + C_3 + C_4$ logo o problema dos m.q. é poss. ind.

$A^TA\hat{x} = A^Tb \Leftrightarrow \hat{x} = (3 - \hat{x}_4, -5 + \hat{x}_4, -2 + \hat{x}_4, \hat{x}_4)$, $\hat{x}_4 \in \mathbb{R}$

Por exemplo, $\hat{x} = (3, -5, -2, 0)$ é sol. dos m.q. ($\hat{x}_4 = 0$) e o erro dos m.q. é:

$$\|b - A\hat{x}\| = \left\|\begin{bmatrix}-3\\ -1\\ 0\\ 2\\ 5\\ 1\end{bmatrix} - A\begin{bmatrix}3\\ -5\\ -2\\ 0\end{bmatrix}\right\| = \left\|\begin{bmatrix}-3\\ -1\\ 0\\ 2\\ 5\\ 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ -5\\ -2\\ 0\end{bmatrix}\right\| = \left\|\begin{bmatrix}-3\\ -1\\ 0\\ 2\\ 5\\ 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-2\\ -2\\ 1\\ 1\\ 3\\ 3\end{bmatrix}\right\|$$

$$= \left\|\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ -1\\ 1\\ 2\\ -2\end{bmatrix}\right\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2 + 1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{12}.$$

NOTA: Regressão linear não é avaliada (Cap. 4 slide 35-38).

FP4 toda. Recomendo o 23.

Revisões

Exame Final 2023 9 (b) $\boxed{\{u, v, w\} \text{ é ortogonal}} \Rightarrow \boxed{\{u, \alpha v + \beta w\} \text{ é ortogonal}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}}$

Como $\{u, v, w\}$ é ortogonal sabemos que $u \cdot v = 0$, $v \cdot w = 0$ e $u \cdot w = 0$.

Queremos mostrar que $\{u, \alpha v + \beta w\}$ é ortogonal, isto é, queremos provar que $u \cdot (\alpha v + \beta w) = 0$.

$u \cdot (\alpha v + \beta w) = (u \cdot \alpha v) + (u \cdot \beta w) = \alpha \underbrace{(u \cdot v)}_{=0} + \beta \underbrace{(u \cdot w)}_{=0} = \alpha \cdot 0 + \beta 0 = 0$

Logo, u é ortogonal a $\alpha v + \beta w$, isto é, o conjunto $\{u, \alpha v + \beta w\}$ é ortogonal.

Teste 1 2023

3

	M	A	S
M	0.2	0.4	0.2
A	0.7	0.4	0.2
S	0	0.1	0.5

$C = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.7 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}$ - matriz de consumo

$d = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} M \\ A \\ S \end{array} \end{array}$ - demanda final.

O modelo de Leontief é:

$X = CX + d \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.7 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$