

Álgebra Linear e Geometria Analítica - A

1º Teste

30 de Outubro de 2024

Justifique devidamente as respostas a todas as questões

Duração total do teste: 1h30m

(4 val.) 1) Considere o sistema de equações lineares nas variáveis x, y, z e w ,

$$\begin{cases} x - y + 2z + 3w = 2 \\ 2x + 2z + 4w = 6 \\ -2y + z = -2 \end{cases}$$

Resolva o sistema usando a decomposição $A = LU$.

(7,5 val.) 2) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ \alpha & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

onde α é um parâmetro real.

a) Verifique que A é invertível se e só se $\alpha \neq 1$.

b) Considere $\alpha = 2$.

i) Calcule a inversa de A .

ii) Determine a matrix X do tipo 3×3 tal que $A^T X + 5B = DC$, onde

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

(6 val.) 3) Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^3 e o subconjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 7y + 3z = 0\}.$$

a) Verifique que S é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 .

b) Determine uma base e a dimensão de S .

~~(2,5 val.) 4) Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^3 e os vetores $(1, a, 2a), (0, 1, 0), (a, 0, 8a)$, onde a é um parâmetro real. Determine os valores de a para os quais $\mathcal{B} = ((1, a, 2a), (0, 1, 0), (a, 0, 8a))$ é uma base de \mathbb{R}^3 .~~

(2)(a)

$$A \text{ é invertível} \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1^+ & -1^- & 2 \\ 0^- & 1^+ & 1 \\ \alpha^+ & 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3 + \alpha(-1-2) \neq 0 \Leftrightarrow 3 - 3\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 1$$

(b)(i) Seja $\alpha = 2$.

Se não for pedido explicitamente podem calcular a inversa pelo método que quiserem:

$$[A|I_n] \rightsquigarrow [I_n|A^{-1}] \quad * \text{ matéria do 1º teste*}$$

ou

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}A}{|A|} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T \quad (\text{Corolário 2. Cap 3.1. slide 10})$$

Pela alínea (a), $|A| = 3 - 3\alpha = 3 - 3 \times 2 = -3$

Os cofatores são:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \text{ e } A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1^+ & -1^- & 2 \\ 0^- & 1^+ & 1 \\ 2^+ & 0^- & 3 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$