Aula 7

06/10/2025

FP1 32 (a) $((B^{-1})^T X)^{-1} A^{-1} = I_3$ (Prop 2 slide 36)

$\Leftrightarrow X^{-1} ((B^{-1})^T)^{-1} A^{-1} = I_3$ (Prop 4 slide 36)

$\Leftrightarrow X^{-1} \underbrace{((B^T)^{-1})^{-1}}_{= B^T \text{ (Prop 1 slide 36)}} A^{-1} = I_3 \Leftrightarrow \boxed{X^{-1} B^T A^{-1}} = \boxed{I_3} \Leftrightarrow \underbrace{X X^{-1}}_{= I_3} B^T A^{-1} = X I_3 \Leftrightarrow X = B^T A^{-1}$

Calcular A^{-1}: $[A | I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2 - L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_1 = L_1 - L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = [I_3 | A^{-1}]$

Assim, $X = B^T A^{-1}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

(b) $(C^T D^T X)^T = E \Leftrightarrow ((C^T D^T X)^T)^T = E^T \Leftrightarrow C^T D^T X = E^T \Leftrightarrow \boxed{(DC)^T X} = \boxed{E^T}$

$\Leftrightarrow \underbrace{((DC)^T)^{-1} (DC)^T}_{= I} X = ((DC)^T)^{-1} E^T \Leftrightarrow X = ((DC)^T)^{-1} E^T$

Calcular $DC = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $(DC)^T = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Calcular $(DC^T)^{-1}$

$[(DC)^T | I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2/2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{array}\right] \underset{L_1 = L_1 - 3L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} -4 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{array}\right] \underset{L_1 = -\frac{L_1}{4}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/4 & 3/8 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$

$= [I_2 | ((DC)^T)^{-1}]$

Assim, $X = \begin{bmatrix} -1/4 & 3/8 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

Espaço Vetorial (e.v.) é um conjunto $\mathcal{V}$ com soma e multiplicação por escalar que satisfazem as propriedades do slide 2.

Exp. $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$...
$\mathcal{M}_{m \times n}$ – conjunto de matrizes com ordem $m \times n$
$\mathcal{P}_n$ – conjunto de polinómios com grau $\leq n$.

Exemplos de subconjuntos

"contido"

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$
$\{$matrizes quadradas$\} \subseteq \mathcal{M}_{m \times n}$
$\{$Polinómios com grau 2$\} \subseteq \mathcal{P}_n$

$S \subseteq \mathcal{V}$ é um **subespaço (vetorial)** do e.v. $\mathcal{V}$ se ele próprio for um e.v.

Teorema: $S \subseteq \mathcal{V}$ é um subespaço vetorial se e só se:
(1) $(S \neq \emptyset)$ $0_{\mathcal{V}} \in S$
(2) S é fechado para soma
(3) S é fechado para a multiplicação por escalar

Elemento neutro de um e.v. $\mathcal{V}$ é $0_{\mathcal{V}}$ tal que para qualquer $X \in \mathcal{V}$, $0_{\mathcal{V}} + X = X$

Exp $0_{\mathbb{R}^n} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ vetor nulo

$0_{M_{m\times n}} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ matriz nula

$0_{\mathcal{P}_n} = 0$ polinómio nulo

Exp $S = \{(0,y,z) : y,z \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$
$= \{(0,1,3), (0,3,1), \dots\} = \{$vetores de $\mathbb{R}^3$ cuja 1ª coordenada é $0\}$ é um subespaço?

- $(0,0,0) \in S$? Sim porque a 1ª coordenada é igual a 0.
- É fechado para a soma? Isto é, para qualquer $(0,y,z), (0,y',z') \in S$ será que $(0,y,z)+(0,y',z') \in S$?

$(0,y,z)+(0,y',z') = (0, \underbrace{y+y'}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{z+z'}_{\in\mathbb{R}}) \in S$ porque a soma de 2 vetores de $\mathbb{R}^3$ cuja 1ª coordenada é 0 dá um vetor em $\mathbb{R}^3$ cuja 1ª coordenada ainda é 0.

- É fechado para a multiplicação por escalar? Isto é, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(0,y,z) \in S$, será que $\alpha(0,y,z) \in S$?

$\alpha(0,y,z) = (0, \underbrace{\alpha y}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{\alpha z}_{\in\mathbb{R}}) \in S$ porque a 1ª coordenada continua a ser igual a 0.

Assim, S é um subespaço.

Exp $S = \{(1,y) : y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$
$= \{$vetores de $\mathbb{R}^2$ cuja 1ª coordenada é igual a $1\}$

- $(0,0) \in S$? Não, porque a 1ª coordenada é diferente de 1, $0 \neq 1$.

Logo, S não é um subespaço.

2 (a) (ii) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (1,1)\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,1)\}$

- $(0,0) \in S$? Sim porque $(0,0) \neq (1,1)$.

- S é fechado para a soma? Não, porque, por exemplo, $(1,0), (0,1) \in S$ mas $(1,0)+(0,1) = (1,1) \notin S$

Logo, S não é um subespaço.

2 (a) (i) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x+y=0}_{\Leftrightarrow x=-y}\} = \{(-y,y) : y \in \mathbb{R}\}$

- $(0,0) \in S$? Sim, porque a soma das coordenadas de $(0,0)$ é igual a 0, $0+0=0$.
- Sejam $(-y,y), (-y',y') \in S$, será que $(-y,y)+(-y',y') \in S$?

$(-y,y)+(-y',y') = (-y-y', y+y') = (-(y+y'), y+y') \in S$ porque a 1ª coordenada é igual a menos a 2ª coordenada.

S é fechado para a soma.

- Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, $(-y,y) \in S$, será que $\alpha(-y,y) \in S$?

$\alpha(-y,y) = (-\alpha y, \alpha y) \in S$ porque a 1ª coordenada $(-\alpha y)$ é igual a menos a 2ª coordenada (αy)

S é fechado para a multiplicação por escalar.

Logo, S é um subespaço.

② (d) (iii) n é fixo.

$S = \{$ matrizes $n \times n$ invertíveis $\}$

- Temos que a matriz nula $0_{n\times n} \in S$? Não, porque a $car(0_{n\times n}) = 0 \neq n$ logo $0_{n\times n}$ não é invertível e por isso não está em S.

Logo S não é um subespaço.

(i) $S = \{A \in M_{n\times n} : A$ é simétrica$\} \underset{\text{cap1 slide 12}}{=} \{A \in M_{n\times n} : A = A^T\}$

- $0_{n\times n} \in S$? Sim porque $0_{n\times n}$ é simétrica, isto é, $0_{n\times n} = 0_{n\times n}^T$.

- Sejam $A, B \in S$, isto é, $A = A^T$ e $B = B^T$, será que $A + B \in S$?

$$A + B \underset{\substack{\text{como}\\ A \text{ e } B\\ \text{são simétricas}}}{=} A^T + B^T \underset{\substack{\text{Prop 5}\\ \text{slide 14}\\ \text{cap1}}}{=} (A+B)^T \in S$$

Assim, a soma de 2 matrizes simétricas é ainda simétrica por isso S é fechado para a soma.

- Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A \in S$, isto é, $A = A^T$, será que $\alpha A \in S$?

$$\alpha A \underset{\substack{A\\ \text{é simétrica}}}{=} \alpha A^T \underset{\substack{\text{Prop 9}\\ \text{slide 14}}}{=} (\alpha A)^T \in S$$

Logo, S é fechado para a soma.

FP2 até ao 3

Recomendo 1(a), (b), 2(d)(ii), (iv).