Aula 17

10/11/2025

FP3 5 $A_{5\times5}$ e $B_{5\times5}$
$|A| = 3$ e $|B| = -5$

(a) $|A^T| = |A| = 3$
(b) $|AB| = |A||B| = 3.(-5) = -15$
(c) $|A^4| = |AAAA| = |A||A||A||A| = |A|^4 = 81$
(d) $|B^{-1}| = \dfrac{1}{|B|} = -\dfrac{1}{5}$

(e) $|2A| = 2^5|A| = 32.3 = 96$
(f) $|2A^{-1}| = 2^5|A^{-1}| = \dfrac{2^5}{3} = \dfrac{32}{3}$
(g) $|(2A)^{-1}| = \dfrac{1}{|2A|} = \dfrac{1}{96}$
(h) $|AB^{-1}A^T| = |A||B^{-1}||A^T| = |A|\dfrac{1}{|B|}|A| = -\dfrac{3^2}{5} = -\dfrac{9}{5}.$

FP3 15 (a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +1\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=0} - 1\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=1+1=2} - 2\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=-1-1=-2}$$

$= -2 + 4 = 2$

(b)

$$\text{adj}\,A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{bmatrix}$$

elemento (2,3)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

• O elemento (2,3) da adj A é o $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}\,A = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{bmatrix}$$

• O elemento (2,3) da inversa de A é $\dfrac{A_{32}}{|A|} = \dfrac{2}{2} = 1.$

Produto interno

$(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$

Exemplo $(1,2,3)\cdot(4,5,6) = 1.4 + 2.5 + 3.6 = 32$

Norma $\|X\| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

Vetor Unitário tem norma 1

Normalizar um vetor $X \neq 0$: $\frac{X}{\|X\|}$ tem a direção e sentido de X e norma 1.

FP4 ① (d) $u=(1,-2,1)$, $\|u\|=\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{6}$

Um vetor unitário com direção de u é: $\frac{u}{\|u\|}=\frac{(1,-2,1)}{\sqrt{6}}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

Propriedades:

(1) $X\cdot X \geq 0$ porque $X\cdot X=(x_1,\dots,x_n)\cdot(x_1,\dots,x_n)=\underbrace{x_1^2}_{\geq 0}+\underbrace{x_2^2}_{\geq 0}+\dots+\underbrace{x_n^2}_{\geq 0} \geq 0$

(2) $X\cdot X=0 \Leftrightarrow X=0$

(3) $X\cdot Y=Y\cdot X$ porque $X\cdot Y=x_1y_1+\dots+x_ny_n=y_1x_1+\dots+y_nx_n=Y\cdot X$

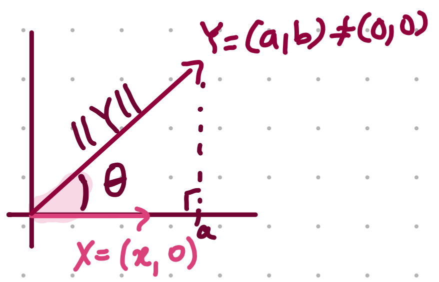
(4) i. $(X+Y)\cdot Z=X\cdot Z+Y\cdot Z$ porque $(X+Y)\cdot Z=(x_1+y_1,\dots x_n+y_n)\cdot Z$
$= (x_1+y_1)z_1+\dots+(x_n+y_n)z_n$
$= x_1z_1+y_1z_1+\dots+x_nz_n+y_nz_n$
$= x_1z_1+\dots+x_nz_n+y_1z_1+\dots+y_nz_n$
$= X\cdot Z+Y\cdot Z$

ii. $Z\cdot(X+Y)=Z\cdot X+Z\cdot Y$

(5) $(\alpha X)\cdot Y=\alpha(X\cdot Y)=X\cdot(\alpha Y)$ porque $(\alpha X)\cdot Y=(\alpha x_1,\dots,\alpha x_n)\cdot(y_1,\dots,y_n)$
$=\alpha x_1y_1+\dots+\alpha x_ny_n$
$=\alpha(x_1y_1+\dots+x_ny_n)=\alpha(X\cdot Y)$

(6) $\|\alpha X\|=|\alpha|\,\|X\|$
porque $\|\alpha X\|=\|(\alpha x_1,\dots,\alpha x_n)\|=\sqrt{(\alpha x_1)^2+\dots+(\alpha x_n)^2}=\sqrt{\alpha^2x_1^2+\dots+\alpha^2x_n^2}$
$=\sqrt{\alpha^2(x_1^2+\dots+x_n^2)}=\sqrt{\alpha^2}\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}=|\alpha|\,\|X\|$

Ângulo entre vetores



$X\cdot Y=(x,0)\cdot(a,b)=x\cdot a+0\cdot b=xa$

$\|X\|=\sqrt{x^2+0^2}=x$

Assim, $\frac{X\cdot Y}{\|X\|}=\frac{ax}{x}=a$

(SOHCAHTOA) $\cos\theta=\frac{a}{\|Y\|}=\frac{X\cdot Y}{\|X\|}\cdot\frac{1}{\|Y\|}=\frac{X\cdot Y}{\|X\|\|Y\|}$

Logo, $X,Y\neq 0$ temos que:

$$\boxed{\cos\theta=\frac{X\cdot Y}{\|X\|\|Y\|}} \quad \text{e} \quad \theta=\arccos\left(\frac{X\cdot Y}{\|X\|\|Y\|}\right)$$

em que θ é o ângulo formado por X e Y.

Casos Particulares:

- ortogonais/perpendiculares $X \perp Y$
  se $\theta = \pi/2$ logo $\cos\frac{\pi}{2} = \frac{X \cdot Y}{\|X\|\|Y\|} \Rightarrow \boxed{X \cdot Y = 0}$

- Tem a mesma direção:
  - se tem o mesmo sentido $\theta = 0$ logo $\cos 0 = \frac{X \cdot Y}{\|X\|\|Y\|}$

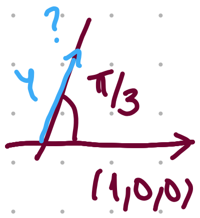
$\Leftrightarrow \boxed{X \cdot Y = \|X\|\|Y\|}$

  - sentidos opostos se $\theta = -\pi$ logo $\cos\pi = \frac{X \cdot Y}{\|X\|\|Y\|}$

$\Leftrightarrow \boxed{X \cdot Y = -\|X\|\|Y\|}$

NOTA Se $X=0$ ou $Y=0$ $\therefore$ X e Y são colineares e ortogonais.

FP4 3 $X=(1,0,0)$ e $Y=(y_1, y_2, y_3) = ?$



$\cos\pi/3 = \frac{X \cdot Y}{\|X\|\|Y\|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{y_1^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2} \Leftrightarrow$

$y_1^2+y_2^2+y_3^2 = 4y_1^2 \Leftrightarrow 3y_1^2 = y_2^2+y_3^2 \Leftrightarrow y_1 = \sqrt{\frac{y_2^2+y_3^2}{3}}$

Soluções: vetores da forma $\left(\sqrt{\frac{y_2^2+y_3^2}{3}}, y_2, y_3\right)$, $y_2, y_3 \in \mathbb{R}$.

$\{X_1, \dots, X_n\}$ é ortogonal se $X_i \cdot X_j = 0$ $(i \neq j)$
é ortonormado (o.n.) se $X_i \cdot X_j = 0$ $(i \neq j)$ (é ortogonal) $\oplus$ $X_i \cdot X_i = 1$ (tem norma 1)

Exemplos:

- $\{(1,0),(0,-2)\}$ é ortogonal porque $(1,0)\cdot(0,-2)=0$ mas não é ortonormado porque $(0,-2)\cdot(0,-2) = 4 \neq 1$
- $\{(1,0),(0,1)\}$ é ortonormado (são l.i.!)

Base ortogonal/o.n. Uma base em que os vetores são ortogonais/o.n.

Exemplos:

- $\{(1,0),(0,-2)\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ (mas não é uma base o.n.)
- $\{(1,0),(0,1)\}$ é uma base o.n. de $\mathbb{R}^2$

Teorema $B=(X_1,\dots,X_n)$ é uma base o.n. de $\mathbb{R}^n$ então

$$[X]_B = \begin{bmatrix} X\cdot X_1 \\ \vdots \\ X\cdot X_n \end{bmatrix}$$

isto é, $X=(X\cdot X_1)X_1+\dots+(X\cdot X_n)X_n$.

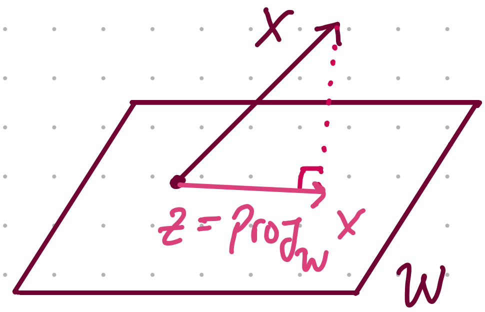
Exemplo $B=(X_1,X_2)=\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ é base o.n. de $\mathbb{R}^2$

$$[(1,5)]_B = \begin{bmatrix} (1,5)\cdot X_1 \\ (1,5)\cdot X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{5\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}+5\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Assim, $(1,5)=-2\sqrt{2}X_1+3\sqrt{2}X_2$.

Projeção ortogonal: de um vetor X sobre um espaço W é um vetor:

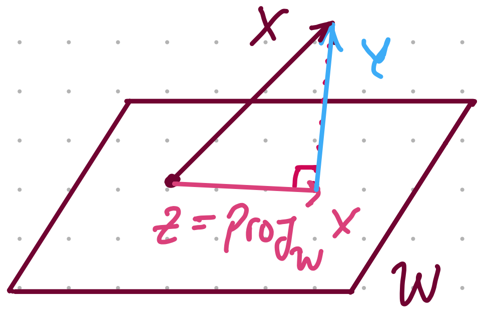
$$Z=\text{proj}_W X$$



Intuição:

- W é um subespaço. Por exemplo, um plano de $\mathbb{R}^3$.
- Logo conseguimos encontrar uma base o.n. de W (X_1,X_2) em que:

$$X_1\cdot X_2=0 \quad (*)$$
$$X_1\cdot X_1=1 \text{ e } X_2\cdot X_2=1 \quad (**)$$



- $X=Z+Y$ em que Y é ortogonal a W logo também é ortogonal a X_1 e X_2, isto é, $X_2\cdot Y=X_1\cdot Y=0 \; (***)$

Como $Z\in W$ é C.L. da base o.n. (X_1,X_2)

$$Z=\text{proj}_W X=\overset{?}{\alpha_1}X_1+\overset{?}{\alpha_2}X_2$$

Portanto, $X=Y+Z=Y+\alpha_1X_1+\alpha_2X_2$

$$X\cdot X_1=(Y+\alpha_1X_1+\alpha_2X_2)\cdot X_1=\underbrace{Y\cdot X_1}_{\substack{=0 \text{ por} \\ (***)}}+\alpha_1\underbrace{X_1\cdot X_1}_{\substack{=1 \text{ por} \\ (**)}}+\alpha_2\underbrace{X_2\cdot X_1}_{\substack{=0 \text{ por} \\ (*)}}=\alpha_1$$

$X \cdot X_2 = \alpha_2$

Assim, $Z = proj_W X = (X \cdot X_1) X_1 + \dots + (X \cdot X_2) X_2$.

Teorema $(X_1, \dots, X_n)$ base o.n. de W

$$proj_W X = (X \cdot X_1) X_1 + \dots + (X \cdot X_n) X_n$$

Exemplo $((\underbrace{1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}}_{= X_1}, 0), (0,0,1))$ base o.n. de $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$

Qual é a proj. ortogonal de $X = (2,-2,3)$?

$$proj_W X = (X \cdot X_1) X_1 + (X \cdot X_2) X_2$$
$$= (2,-2,3) \cdot (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0) X_1 + (2,-2,3) \cdot (0,0,1) X_2$$
$$= \left(2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \frac{1}{\sqrt{2}} + 0\right) X_1 + 3(0,0,1)$$
$$= 0 X_1 + 3(0,0,1) = (0,0,3).$$

FP3 **20**

(a) $\det(AA^T) = \det(A)\det(A^T) = \det(A)\det(A) = \det^2(A) \geq 0$

(b) Se $\boxed{AB = I_n}$ $\Rightarrow \det(A) \neq 0$ e $\det(B) \neq 0$

Se $AB = I_n$ então $\det(AB) = \det(I_n) \Leftrightarrow \det(A)\det(B) = 1$
logo $\det(A) \neq 0$ e $\det(B) \neq 0$.

(c) Se A é singular, $\det(A) = 0$, então $\det(AB) = \underbrace{\det(A)}_{=0}\det(B) = 0$.

(d) Se A é não singular, isto é, $\det(A) \neq 0$ e se $A^2 = A$ então
$\det(A^2) = \det(A) \Leftrightarrow \det(A)\det(A) = \det(A)$ como $\det(A) \neq 0$
então $\det(A) = \dfrac{\det(A)}{\det(A)} = 1$.

(e) Se $A = A^{-1}$ então $\det(A) = \dfrac{1}{\det(A)} \Leftrightarrow \det^2(A) = 1$ logo $\det(A) = \pm 1$

(f) Se A é invertível, $\det(A) \neq 0$, e tem ordem 3. Temos que

$A \operatorname{adj} A = |A| I_n$ logo $\det(A \operatorname{adj} A) = |A|^3 \underbrace{\det(I_n)}_{=1}$

$\Leftrightarrow \det(A) \det(\operatorname{adj} A) = |A|^3$

$\Leftrightarrow \det(\operatorname{adj} A) = \frac{|A|^3}{|A|} = A^2.$

FPU - Recorreto

7(a), ~~10~~ 8(a), 15, 16.