**Departamento de Matemática** **Universidade de Aveiro**

# Álgebra Linear e Geometria Analítica - A

**Exame de Recurso** **7 de Fevereiro de 2024**

**Justifique devidamente as respostas a todas as questões**

**Duração total do exame: 2h30m**

---

*(3,5 val.)***1)** Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

onde $a$ é um parâmetro real.

(a) Mostre que $A$ é invertível se e só se $a \neq \frac{1}{3}$.

(b) Considere $a = 1$. Justifique que o sistema de equações lineares $AX = b$ é possível e determinado, onde $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$ é o vetor das incógnitas e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. ~~Determine o valor da incógnita $w$ pela regra de Cramer.~~

(c) Considere $a = 1$. Encontre uma decomposição $LU$ da matriz $A$.

*(1,5 val.)***2)** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ invertível e a matriz $C = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$. Determine a matriz $X$ tal que $2A^T X + C = 0$, onde 0 denota a matriz nula do tipo $3 \times 3$.

*(2,5 val.)***3)** Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e $B = ((1,0,1),(0,1,1),(0,0,1))$.

(a) Mostre que $B$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Determine a ~~matriz de mudança da base canónica para a base $B$ e~~ o vetor das coordenadas de $(2,-1,1)$ na base $B$.

*(2 val.)***4)** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 13 \end{bmatrix}$. Mostre que $\lambda = 10$ é o único valor próprio da matriz $A$. Obtenha o subespaço próprio $U_{10}$ associado ao valor próprio 10 e verifique se $A$ é diagonalizável.

**(v.s.f.f)**

~~*(1,5 val.)* **5)** Mostre que $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \end{bmatrix}$ é solução dos mínimos quadrados do sistema~~

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

*(2 val.)* **6)** Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e os vetores $u = (1, 1, 0)$ e $v = (0, a, 1)$, onde $a$ é um parâmetro real.

a) Determine $a$ de modo que $u$ e $v$ sejam ortogonais.

b) Determine $a$ de modo que a área do paralelogramo definido por $u$ e $v$ seja igual a 2.

*(2,5 val.)* **7)** Considere a cónica de equação

$$x^2 - 8xy - 5y^2 + 2x - y + 1 = 0.$$

Obtenha uma equação reduzida da cónica e classifique-a.

*(2,5 val.)* **8)** Considere a aplicação linear $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por $L(1, 0, 0) = (1, -1, 0, 1)$, $L(0, 1, 0) = (0, 0, 0, 0)$ e $L(0, 0, 1) = (0, 1, 2, 3)$.

(a) Determine $L(x, y, z)$.

(b) Verifique se $L$ é injetiva.

(c) Verifique se $L$ é sobrejetiva.

*(2 val.)* **9)** Justifique as seguintes afirmações (verdadeiras).

a) Considere o espaço vetorial $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes do tipo $2 \times 2$. O subconjunto

$$S = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,:\, det(A) = 0\},$$

das matrizes de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ com determinante igual a zero, não é um subespaço de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

b) Seja $A$ uma matriz quadrada do tipo $n \times n$ com valores próprios distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Então o determinante de $A$ é $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

Estas notas não constituem uma resolução formal e rigorosa dos exercícios do Exame.

**1 (a)** A tem inversa $\Leftrightarrow$ car$(A) = 4$ = nº de colunas de A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 2 & -1 \end{bmatrix} \underset{L_4 = L_4 - L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_3 = L_3 + L_2 \\ L_4 = L_4 - (a-1)L_2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & -a-1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\underset{L_4 = L_4 - (a-1)L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \underbrace{-a-1-2(a-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3a+1 \end{bmatrix}$$

$$= -a-1-2a+2$$
$$= -3a+1$$

A tem inversa $\Leftrightarrow$ car$(A) = 4$, isto é, $-3a+1 \neq 0 \Leftrightarrow 3a \neq 1 \Leftrightarrow a \neq \frac{1}{3}$.

**(b)** Como $a = 1 \neq \frac{1}{3}$, pela alínea anterior sabemos que A tem inversa logo o sistema $AX = b$ é sempre possível determinado e a solução é:

$$AX = b \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}b \Leftrightarrow X = A^{-1}b.$$

**(c)** Para $a = 1$ temos de encontrar a decomposição LU de A

Escalonar $A \sim U$ (sem trocar linhas nem multiplicar uma linha por um escalar)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \underset{L_4 = L_4 - L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \underset{L_3 = L_3 + L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = U$$

escalonada

Construir L

$$\begin{array}{c|c|c|c} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & -1 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ \hline \div 1 & \div 1 & \div 1 & \div(-2) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & -1 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Assim, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é triangular inferior com 1's na diagonal principal.

Temos que
$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

② $X = ?$

$$2A^T X + C = 0 \quad \leftarrow \text{Matriz nula } 3\times3$$

$$\Leftrightarrow 2A^T X = -C$$

$$\Leftrightarrow A^T X = -\tfrac{1}{2} C \Leftrightarrow \underbrace{(A^T)^{-1} A^T}_{= I_3} X = -\tfrac{1}{2}(A^T)^{-1} C \Leftrightarrow \boxed{X = -\tfrac{1}{2}(A^T)^{-1} C}$$

Calcular a inversa de $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$[A^T | I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 = L_2 - L_3 \\ L_1 = L_1 - 2L_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_1 = L_1 + L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = [I_3 | (A^T)^{-1}]$$

Assim, $X = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 12 & 18 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/2 & -12/2 & -18/2 \\ 0 & -4/2 & -6/2 \\ 0 & 2/2 & 6/2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -6 & -9 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

③ (a) $B = ((1,0,1),(0,1,1),(0,0,1))$ é uma base de $\mathbb{R}^3$?

Opção 1: Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ temos que qualquer base de $\mathbb{R}^3$ é um conjunto (ordenado) com 3 vetores l.i. e que gera $\mathbb{R}^3$. Como o conjunto B tem exatamente 3 vetores basta ver se B é l.i. ou se gera $\mathbb{R}^3$ que automaticamente satisfaz a outra condição e forma uma base de $\mathbb{R}^3$.

(vou ver esta porque é mais fácil)

$\boxed{\text{B é l.i.?}}$ $(0,0,0) = \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(0,1,1) + \alpha_3(0,0,1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = 0$

$$[A|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = [C|0]$$

$$AX = 0 \Leftrightarrow CX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases} \quad \text{Poss. Det.}$$

Logo, B é l.i. Como qualquer conjunto de 3 vetores l.i. em $\mathbb{R}^3$ forma uma base de $\mathbb{R}^3$ podemos concluir que B é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Opção 2: O conjunto ordenado B é uma base de $\mathbb{R}^3$ se gera $\mathbb{R}^3$ e se é l.i.

$\boxed{\text{B é l.i.?}}$ $(0,0,0) = \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(0,1,1) + \alpha_3(0,0,1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = 0$

$$[A|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = [C|0]$$

$AX=0 \Leftrightarrow CX=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1=0 \\ \alpha_2=0 \\ \alpha_3=0 \end{cases}$ Poss. Det. Logo, B é l.i.

$\boxed{B \text{ gera } \mathbb{R}^3 ?}$ $\langle (1,0,1), (0,1,1), (0,0,1) \rangle = \mathbb{R}^3$ ?

$$\langle (1,0,1), (0,1,1), (0,0,1) \rangle = \{ (x,y,z) = \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(0,1,1) + \alpha_3(0,0,1),\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R} \}$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix},\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Quando é que o sistema $AX=B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ é possível / $car(A) = car([A|B])$?

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 1 & z-x \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z-x-y \end{array}\right]$$

Como a $car(A) = car([A|B]) = 3$, o sistema $AX=B$ é sempre possível, ou seja, qualquer vetor $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ pode ser escrito como C.L. dos vetores de B. Assim, $\langle (1,0,1), (0,1,1), (0,0,1) \rangle = \mathbb{R}^3$.

Portanto, B é uma base de $\mathbb{R}^3$.

(b) $[(2,-1,1)]_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ tal que $(2,-1,1) = a_1(1,0,1) + a_2(0,1,1) + a_3(0,0,1)$
$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow B = AX$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = [E|F]$$

$AX=B \Leftrightarrow EX=F \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = -1 \\ a_3 = 0 \end{cases}$

Logo, $[(2,-1,1)]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(Vou só verificar se está tudo ok, isto não é necessário:
$(2,-1,1) = a_1(1,0,1) + a_2(0,1,1) + a_3(0,0,1)$
$= 2(1,0,1) - 1(0,1,1) + 0(0,0,1)$
$= (2,-1,1)$ ✓ )