Departamento de Matemática **Universidade de Aveiro**

Álgebra Linear e Geometria Analítica - A

1^o Teste **3 de Novembro de 2023**

Justifique devidamente as respostas a todas as questões

Duração total do teste: 1h30m

---

*(3,5 val.)***1)** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, o vetor $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ e o sistema de equações lineares $AX = b$, onde $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ é o vetor das incógnitas.

a) Verifique que A é invertível.

b) Verifique que o sistema $AX = b$ tem uma única solução ~~e calcule o valor de y pela regra de Cramer.~~

*(3 val.)***2)** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$, o vetor $b = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e o sistema de equações lineares $AX = b$, onde $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ é o vetor das incógnitas. Resolva o sistema $AX = b$, através do método de fatorização $A = LU$.

*(1,5 val.)***3)** Considere uma economia dividida em 3 setores: manufaturação, agricultura e serviços. Por cada unidade de output a manufaturação requer 0.2 unidades do mesmo setor, 0.7 unidades da agricultura e 0 unidades dos serviços. Por cada unidade de output, a agricultura usa 0.4 unidades do seu próprio output, 0.4 unidades da manufaturaçao e 0.1 unidades dos serviços. Por cada unidade de output, os serviços consomem 0.5 unidades dos serviços, 0.2 unidades da manufaturação e 0.2 da agricultura. Sabendo que a demanda final (procura final) é 10 unidades de manufaturação, 5 unidades de agricultura e 10 unidades de serviços. Escreva o modelo de Leontief $x = Cx + d$ para o problema e indique a matriz C e d para este problema.

*(6 val.)***4)** Sejam A e B duas matrizes invertíveis de dimensão 3×3. Considere a equação matricial

$$A^T \cdot X \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

onde X é uma matriz de dimensão 3×3.

~~a) Justifique a seguinte afirmação verdadeira: a matriz X é sempre não invertível quaisquer que sejam as matrizes A, B invertíveis.~~

b) Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, na equação acima e calcule a matriz X.

*(6 val.)***5)** Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

a) Verifique se $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y - 2z\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

b) Complete $\langle(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (-1, 1, 2)\rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :$ ________$\}$ e apresente todos os cálculos efetuados.

Estas notas não constituem uma resolução formal e rigorosa dos exercícios do Exame.

1 (a) A é invertível se e só se car(A) = 3 = nº de colunas de A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \underset{L_3 = L_3 - 2L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} \underset{L_3 = L_3 + 3L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \text{ escalonada}$$

Como car(A) = 3 temos que a matriz A é invertível.

(b) Pela alínea (a), como A tem inversa temos que o sistema $Ax = b$ é sempre possível e a solução é:

$$Ax = b \Leftrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Leftrightarrow \boxed{X = A^{-1}b}$$

2 1º Escalonar $A \sim U$ (sem trocar linhas, nem multiplicar uma linha por um escalar).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \underset{L_3 = L_3 - L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \underset{L_3 = L_3 - 2L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = U$$

U é uma matriz escalonada equivalente por linhas a A.

2º Construir L

1		
0	-1	
1	-2	2
÷1	÷(-1)	÷2

→

1		
0	1	
1	2	1

Assim, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz triangular inferior com 1's na diagonal principal.

Como $A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ temos que $AX = b \Leftrightarrow L\underbrace{UX}_{=Y} = b \Leftrightarrow LY = b$

3º Resolver $LY = b$, $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

$$[L \mid b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - 2L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] = [C \mid D]$$

$LY = b \Leftrightarrow CY = D \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = -1 \\ y_3 = -2 \end{cases}$ A solução de $LY = b$ é $Y = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

4º Resolver $UX = Y$

$$[U \mid Y] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2 + L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right] \underset{\substack{L_3 = L_3/2 \\ L_1 = L_1 + L_2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \underset{L_2 = -L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] = [E \mid F]$$

$UX=Y \iff EX=F \iff \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=3 \\ x_3=-1 \end{cases}$ Assim, $X=\begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix}$ é a solução do sistema $AX=b$.

(4) $X_{3\times 3}=?$

(b) Seja $C=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\boxed{A^T X B^{-1}} = \boxed{C} \iff A^T X \underbrace{B^{-1}B}_{=I_3} = CB \iff \underbrace{(A^T)^{-1}A^T}_{=I_3} X = (A^T)^{-1}CB \iff \boxed{X=(A^T)^{-1}CB}$$

calcular $(A^T)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$

$$[A^T|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2=L_2-L_1 \\ L_3=L_3+L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_3=L_3+2L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\underset{\substack{L_2=-L_2 \\ L_1=L_1-L_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] = [I_3 | (A^T)^{-1}]$$

Logo, $X=(A^T)^{-1}CB = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 & -15 & -41 \\ -5 & -4 & -11 \\ 23 & 18 & 49 \end{bmatrix}$

(5) (a) $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=y-2z\} \in \mathbb{R}^3$ é um subespaço vetorial?

$=\{(y-2z,y,z),\ y,z\in\mathbb{R}\}$

· $(0,0,0)\in S$? Sim porque a primeira coordenada é igual à segunda coordenada menos 2 vezes a terceira coordenada, isto é, $0=0-2\cdot 0$.

· $(y-2z,y,z),(y'-2z',y',z')\in S$. Será que $(y-2z,y,z)+(y'-2z',y',z')\in S$?

$(y-2z,y,z)+(y'-2z',y',z') = (y-2z+y'-2z', y+y', z+z')$
$= ((y+y')-2(z+z'), y+y', z+z')\in S$

porque a primeira coordenada, $(y+y')-2(z+z')$, é igual à segunda coordenada, $y+y'$, menos 2 vezes a terceira, $z+z'$.
Assim, S é fechado para a soma.

· $\alpha\in\mathbb{R}$, $(y-2z,y,z)\in S$. Será que $\alpha(y-2z,y,z)\in S$?

$\alpha(y-2z,y,z) = (\alpha(y-2z),\alpha y,\alpha z)\in S$ porque a primeira coordenada é igual à segunda coordenada menos 2 vezes a terceira, isto é,

$\underbrace{\alpha(y-2z)}_{1^a \text{ coordenada}} = \underbrace{\alpha y}_{2^a \text{ coordenada}} - 2\underbrace{\alpha z}_{3^a \text{ coordenada}}$.

Assim, S é fechado para a multiplicação por escalar.

S é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(b)

$$\langle (1,1,0),(-1,0,1),(-1,1,2)\rangle = \{(x,y,z) = \alpha_1(1,0,1)+\alpha_2(-1,0,1)+\alpha_3(-1,1,2), \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Quando é que o sistema $AX=B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ é possível / $car(A) = car([A|B])$?

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 2 & z \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2 - L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & x \\ 0 & 1 & 2 & y-x \\ 0 & 1 & 2 & z \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 - L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & x \\ 0 & 1 & 2 & y-x \\ 0 & 0 & 0 & z-y+x \end{array}\right] \text{ escalonada}$$

Temos que a $car(A)=2$ para o sistema $AX=B$ ser possível queremos ter que $car([A|B]) = car(A)$, ou seja, $car([A|B])=2$. Logo, $z-y+x=0$.

Assim, todos os vetores $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $z-y+x=0$ são C.L. dos vetores $(1,1,0),(-1,0,1),(-1,1,2)$ e estão no espaço gerado por eles.

$$\langle (1,1,0),(-1,0,1),(-1,1,2)\rangle = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z-y+x=0\}$$