Folha Prática 4

Atenção: Estas notas não constituem uma resolução formal e rigorosa dos exercícios das Folhas Práticas.

Última atualização: 18 de novembro de 2025

Notas sobre os exercícios: 1(f), 1(h), 12, 16(c), 16(d), 24.4.

1(f) $u = (1, -2, 1)$ e $v = (-1, 1, 0)$

1º Encontrar os vetores ortogonais a v.

Queremos saber quais são os vetores ortogonais a v para usarmos esses vetores no próximo passo. Um vetor (x, y, z) é ortogonal a v se e só se $(x, y, z) \cdot v = 0$.

$$\begin{aligned} & (x, y, z) \cdot v = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x, y, z) \cdot (-1, 1, 0) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & -x + y = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = y \end{aligned}$$

Logo todos os vetores (x, y, z) tal que $x = y$ são ortogonais a v, isto é,

$$\begin{aligned} & (x, x, z),\ x, z \in \mathbb{R} \\ & \text{Separar em dois vetores: um com os } x\text{'s outro com os } z\text{'s} \\ = & (x, x, 0) + (0, 0, z),\ x, z \in \mathbb{R} \\ & \text{Colocar o } x \text{ e o } z \text{ em evidência} \\ = & x\,(1, 1, 0) + z\,(0, 0, 1),\ x,\ z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ou seja, todos os vetores ortogonais a v são combinação linear dos vetores $(1, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

2º Escrever o vetor u como C.L. de v e de um vetor ortogonal a v.

Vamos tentar escrever u à custa do vetor v e de um vetor que é ortogonal a v. Nós já conhecemos o vetor v e também já sabemos que todos os vetores ortogonais a v são combinação linear de $(1, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$. Assim sendo o objetivo é escrever o vetor u à custa de v e de $(1, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.[i]

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1\, v + \alpha_2\,(1, 1, 0) + \alpha_3\,(0, 0, 1) \\ \Leftrightarrow (1, -2, 1) &= \alpha_1(-1, 1, 0) + \alpha_2\,(1, 1, 0) + \alpha_3\,(0, 0, 1) \\ & \ldots \text{fazer contas} \ldots \\ \Leftrightarrow (1, -2, 1) &= -{}^3\!/_2(-1, 1, 0) - {}^1\!/_2\,(1, 1, 0) + 1(0, 0, 1) \\ & \text{Juntar o } (1, 1, 0) \text{ e } (0, 0, 1) \\ \Leftrightarrow (1, -2, 1) &= -{}^3\!/_2(-1, 1, 0) + -(-{}^1\!/_2, -{}^1\!/_2, 1) \\ \Leftrightarrow u &= -{}^3\!/_2\, v + \underbrace{(-{}^1\!/_2, -{}^1\!/_2, 1)}_{\text{ortogonal a } v} \end{aligned}$$

1(h) Um vetor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é ortogonal/perpendicular ao vetor u se e só se $(x, y, z) \cdot u = 0$. Portanto, o objetivo é saber quais são os vetores (x, y, z) cujo produto interno com o vetor u dá zero.

$$\begin{aligned} & (x, y, z) \cdot u = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x, y, z) \cdot (1, -2, 1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x - 2y + z = 0 \\ \Leftrightarrow\ & z = -x + 2y \end{aligned}$$

Logo todos os vetores da forma $(x, y, -x + 2y),\ x,\ y \in \mathbb{R}$ são ortogonais ao vetor u. [ii]. Isso é o

[i] Todos os vetores a vermelho são ortogonais a v.

[ii] Em vez disto poderiamos ter escrito $x = 2y - z$ ou $y = \frac{x+z}{2}$, o resultado seria ligeiramente diferente mas também estaria correto. Aliás, por mim a resolução podia acabar aqui...

mesmo que dizer que todos os vetores da forma

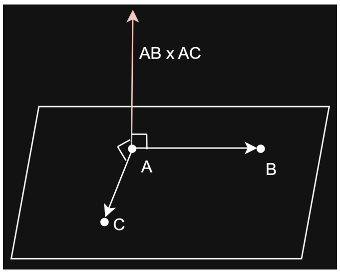
$$
\begin{aligned}
&(x, y, -x+2y) \\
&\quad \text{Separar em dois vetores: um com os } x\text{'s outro com os } y\text{'s} \\
=&(x,0,-x)+(0,y,2y) \\
&\quad \text{Colocar o } x \text{ e o } y \text{ em evidência} \\
=&x(1,0,-1)+y(0,1,2),\ x,\ y \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

são ortogonais ao vetor u[iii].

12 (a) Para escrever a equação cartesiana $ax+by+cz+d=0$ de um plano $\mathcal{P}$ que contêm os pontos $A=(1,2,1)$, $B=(0,0,3)$ e $C=(1,-1,1)$ precisamos de um vetor $w=(a,b,c)$ ortogonal ao plano. Se o vetor w é ortogonal ao plano $\mathcal{P}$ então é ortogonal a qualquer vetor que esteja no plano. Por exemplo, é ortogonal a $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= B-A = (0,0,3)-(1,2,1) = (-1,-2,2) \\
\overrightarrow{AC} &= C-A = (1,-1,1)-(1,2,1) = (0,-3,0)
\end{aligned}
$$

Pelo Cap.4 slide 13 Propriedade 6 sabemos que o produto externo de $\overrightarrow{AB}$ com $\overrightarrow{AC}$ é um vetor ortogonal a esses dois vetores, isto é,



$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} &= (-1,-2,2)\times(0,-3,0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \\
&= 6i-0j+3k = 6(1,0,0)-0(0,1,0)+3(0,0,1) = (6,0,3)
\end{aligned}
$$

Logo, $w=(6,0,3)$ é ortogonal ao plano e a equação de $\mathcal{P}$ é $6x+3z+d=0$. Para determinar d basta substituir por um ponto que está no plano. Por exemplo, como $A=(1,2,1)\in\mathcal{P}$ temos que $6.1+3.1+d=0 \Leftrightarrow d=-9$. A equação cartesiana de $\mathcal{P}$ é: $6x+3z-9=0 \Leftrightarrow 2x+z-3=0$

— **OU** —

Em alternativa podem escrever a equação vetorial do plano

$$(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0)+\alpha(v_1,v_2,v_3)+\beta(u_1,u_2,u_3),\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

em que (x_0,y_0,z_0) é um ponto no plano e (v_1,v_2,v_3), (u_1,u_2,u_3) são vetores diretores do plano (não colineares). Em seguida, escrevem as equações paramétricas correspondentes e, resolvendo-as, obtêm a equação cartesiana do plano.
Como $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são vetores diretores do plano:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= B-A = (0,0,3)-(1,2,1) = (-1,-2,2) \\
\overrightarrow{AC} &= C-A = (1,-1,1)-(1,2,1) = (0,-3,0)
\end{aligned}
$$

e o ponto $A\in\mathcal{P}$. Segue que a equação vetorial do plano é:

$$(x,y,z) = (1,2,1)+\alpha(-1,-2,2)+\beta(0,-3,0),\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

O que é o mesmo que escrever on seguinte sistema e eliminando os paramêtros α e β obtemos a equação cartesiana do plano:

$$
\begin{cases} x=1-\alpha \\ y=2-2\alpha-3\beta \\ z=1+2\alpha \end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases} \alpha=1-x \\ y=2-2(1-x)-3\beta \\ z=1+2(1-x) \end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases} \alpha=1-x \\ \beta=\frac{-y+2x}{3} \\ \mathbf{z=3-2x} \text{ Equação cartesiana} \end{cases}
$$

[iii] Nas soluções chamam ao x de α e ao y de β, mas o nome das variáveis não importa.

(b) A distância de um ponto $Q = (1, 2, 3)$ ao plano $\mathcal{P}$, cuja equação cartesiana é $2x + 1z - 3 = 0$ é dada pela seguinte fórmula (ver Cap.4 slide 20):

$$d(Q, \mathcal{P}) = \frac{|2x_Q + 1z_Q - 3|}{\sqrt{(2)^2 + (1)^2}} = \frac{|2.1 + 1.3 - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

16(c) $\mathcal{B} = ((4/5, 0, 3/5), (0, 1, 0), (-3/5, 0, 4/5))$

Queremos determinar a matriz de mudança da base $\tilde{\mathcal{B}} = ((0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1))$ para a base $\mathcal{B}$, isto é,

$$M_{\mathcal{B}\leftarrow\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ [(0,0,1)]_{\mathcal{B}} & [(0,1,1)]_{\mathcal{B}} & [(1,1,1)]_{\mathcal{B}} \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

A matriz de mudança de base $M_{\mathcal{B}\leftarrow\tilde{\mathcal{B}}}$ o que faz é pegar em vetores na base $\tilde{\mathcal{B}}$ e escreve-os na base $\mathcal{B}$. Portanto, as colunas desta matriz são os vetores da base $\tilde{\mathcal{B}}$ escritos à custa da base $\mathcal{B}$.

Pela alínea (a) sabemos que a base $\mathcal{B}$ é ortonormada por isso podemos usar o Teorema do slide 8 do Capítulo 4 para escrever os vetores de $\tilde{\mathcal{B}}$ na base $\mathcal{B}$.

Assim, a primeira coluna da matriz é:

$$[(0,0,1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} (0,0,1)\cdot(4/5, 0, 3/5) \\ (0,0,1)\cdot(0,1,0) \\ (0,0,1)\cdot(-3/5, 0, 4/5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{bmatrix}$$

A segunda coluna da matriz é:

$$[(0,1,1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} (0,1,1)\cdot(4/5, 0, 3/5) \\ (0,1,1)\cdot(0,1,0) \\ (0,1,1)\cdot(-3/5, 0, 4/5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 1 \\ 4/5 \end{bmatrix}$$

A terceira coluna da matriz é:

$$[(1,1,1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} (1,1,1)\cdot(4/5, 0, 3/5) \\ (1,1,1)\cdot(0,1,0) \\ (1,1,1)\cdot(-3/5, 0, 4/5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 1 \\ 1/5 \end{bmatrix}$$

Portanto temos que

$$M_{\mathcal{B}\leftarrow\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} 3/5 & 3/5 & 7/5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4/5 & 4/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

16(d). A matriz $M_{\mathcal{B}\leftarrow\tilde{\mathcal{B}}}$ de mudança de base que calculamos na alínea (c) o que faz é pega num vetor que esteja escrito na base $\tilde{\mathcal{B}}$ e passa-o para as suas coordenas na base B.[iv] Portanto[v], se soubermos quais são as coordenadas de um vetor na base $\tilde{\mathcal{B}}$ usando esta matriz conseguimos determinar quais são as suas coordenadas na base $\mathcal{B}$, isto é,

$$[Y]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}\leftarrow\tilde{\mathcal{B}}}\,[Y]_{\tilde{\mathcal{B}}}$$

Pegamos no vetor $[Y]_{\tilde{\mathcal{B}}}$, que nos é dado, e se multiplicarmos pela matriz $M_{\mathcal{B}\leftarrow\tilde{\mathcal{B}}}$ obtemos esse mesmo vetor mas agora na base $\mathcal{B}$.

$$[Y]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3/5 & 3/5 & 7/5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4/5 & 4/5 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

[iv] Para mim ajuda-me a ver a setinha $\mathcal{B} \leftarrow \tilde{\mathcal{B}}$ que diz que vai de $\tilde{\mathcal{B}}$ para $\mathcal{B}$.

[v] ver Teorema do slide 18 do Capítulo 2

24.4 Equações normais:

$$A^TAX = A^Tb \iff \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix}3 & 3\\ 3 & 11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\ 14\end{bmatrix}$$

Resolver o sistema, vou usar o método de Gauss-Jordan mas podias usar a inversa tbm, deves de indicar TODAS as operações elementares que fazes, mas eu vou saltar isso à frente e meter só o resultado final.

$$\left[\begin{array}{cc|c}3 & 3 & 6\\ 3 & 11 & 14\end{array}\right] \underset{...}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{array}\right]$$

A solução dos mínimos quadrados é $x = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

O erro dos mínimos quadrados é: [vi]

$$\|b - Ax\| = \left\| \begin{bmatrix}5\\ 1\\ 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix}5\\ 1\\ 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4\\ 0\\ 2\end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix}1\\ 1\\ -2\end{bmatrix} \right\|$$

$$= \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

Assim, o erro dos mínimos quadrados é $\sqrt{6}$.

[vi] fazemos a diferença do vetor b que é dado no enunciado com o vetor Ax e calculamos a norma desse vetor