20/11/2025

Aula 20

FP3 9 (a) $\begin{vmatrix} a_1+2b_1 & a_2+2b_2 & a_3+2b_3 \\ 3c_1+b_1 & 3c_2+b_2 & 3c_3+b_3 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 3c_1 & 3c_2 & 3c_3 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

$L_1 = L_1 + 2L_3$
$L_2 = L_2 + L_3$

$(L_2 \leftrightarrow L_3)$

$= 3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 3$

(b) $\begin{vmatrix} 2a_1 & a_2+a_3 & -a_3 \\ 2c_1 & c_2+c_3 & -c_3 \\ 2b_1 & b_2+b_3 & -b_3 \end{vmatrix} = 10 \Leftrightarrow 2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & -a_3 \\ c_1 & c_2 & -c_3 \\ b_1 & b_2 & -b_3 \end{vmatrix} = 10 \Leftrightarrow -2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 10$

$(C_2 = C_2 + C_3)$ $(L_2 \leftrightarrow L_3)$

$\Leftrightarrow 2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 10 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 5$

(c) $\begin{vmatrix} a_1 & 2b_1 & 4c_1+a_1 \\ a_2 & 2b_2 & 4c_2+a_2 \\ a_3 & 2b_3 & 4c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 4c_1 \\ a_2 & b_2 & 4c_2 \\ a_3 & b_3 & 4c_3 \end{vmatrix} = 4.2 \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{=2} = 16$

$(C_3 = C_3 - C_1)$

(d) $\begin{vmatrix} a_1+a_2 & a_1 & 2a_3+5a_1 \\ b_1+b_2 & b_1 & 2b_3+5b_1 \\ c_1+c_2 & c_1 & 2c_3+5c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & 2a_3 \\ b_2 & b_1 & 2b_3 \\ c_2 & c_1 & 2c_3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -2$

$\begin{pmatrix} C_1 = C_1 - C_2 \\ C_3 = C_3 - 5C_1 \end{pmatrix}$ $(C_1 \leftrightarrow C_2)$

18 $AX=0$ só tem a solução trivial $X=0 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ tem inversa

Cap. 3 Corolário do slide 10

$|A| \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \beta^+ & 6 & 1 \\ 0 & \beta-1 & 1 \\ 0 & 1 & \beta+5 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \beta \begin{vmatrix} \beta-1 & 1 \\ 1 & \beta+5 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \beta((\beta-1)(\beta+5)-1) \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \beta \neq 0$ e $(\beta-1)(\beta+5)-1 \neq 0 \Leftrightarrow \beta \neq 0$ e $\beta^2+4\beta-6 \neq 0 \Leftrightarrow \beta \neq 0$ e $\beta \neq \frac{-4 \pm \sqrt{4^2+4.6}}{2}$

$\Leftrightarrow \beta \neq 0$ e $\beta \neq -2 \pm \frac{\sqrt{40}}{2} \Leftrightarrow \beta \neq 0$ e $\beta \neq -2 \pm \sqrt{10}$

C.A. $\sqrt{40} = \sqrt{4.10}$
$= \sqrt{4}\sqrt{10} = 2\sqrt{10}$

R: $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{-2+\sqrt{10}, 0, -2-\sqrt{10}\}$.

λ é um valor próprio de $A_{n \times n}$ se existe um vetor $X \neq 0$ tal que:

$$\boxed{AX = \lambda X}$$

Assim, X é o vetor próprio associado ao valor próprio λ.

Como calcular λ? λ é um valor próprio de A

$\Leftrightarrow AX = \lambda X$

$\Leftrightarrow AX - \lambda I_n X = 0$

$\Leftrightarrow (A - \lambda I_n)X = 0$ tem uma solução não trivial ($X \neq 0$)

$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$

Polinómio característico de A: $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$

Equação característica de A: $P_A(\lambda) = 0$ — as raízes reais são os vetores próprios

Exemplo Quais são os valores próprios de $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$?

$\det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda)(2-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$ ou $\lambda = 2$.

A tem valores próprios 2 e 3.

Observação: Os valores próprios de uma matriz triangular são os elementos na diagonal.

Exemplo $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\det(B - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$

(Rotação 90°) $\Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0$ Não tem raízes reais

B não tem valores próprios.

Teorema: λ é um valor próprio de $A_{n \times n}$ então

$$\mathcal{U}_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^n : AX = \lambda X\} \cup \{0\} = \{X \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda I_n)X = 0\}$$

$= \mathcal{N}(A - \lambda I_n)$ (espaço nulo é um subespaço vetorial)

é o subespaço próprio associado ao valor próprio λ.

Exemplo $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ tem valores próprios 3 e 2.

$\mathcal{U}_3 = \{X \in \mathbb{R}^2 : AX = 3X\} = \{X \in \mathbb{R}^2 : (A - 3I_2)X = 0\}$

$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} 3-3 & 1 \\ 0 & 2-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} = \{(x,0),\ x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0),\ x \in \mathbb{R}\}$

$= \langle (1,0) \rangle$

$$\mathcal{U}_2 = \{ X \in \mathbb{R}^2 : (A - 2I_2) X = 0 \} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} 3-2 & 1 \\ 0 & 2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x + y = 0}_{\Leftrightarrow x = -y} \}$$

$$= \{ (-y, y), y \in \mathbb{R} \} = \{ y(-1,1), y \in \mathbb{R} \} = \langle (-1,1) \rangle$$

Logo $(1,0)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 3.
$(-1,1)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 2.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Triang. sup. 0 é o único valor próprio

• $\det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 4 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \right) = 0 \Leftrightarrow -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 4 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$

• $\mathcal{U}_0 = \{ X \in \mathbb{R}^3 : (A - 0I_3) X = 0 \} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} z = 0 \\ 4z = 0 \end{cases} \right\} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \}$$

$$= \{ (x, y, 0), x,y \ \mathbb{R} \} = \{ x(1,0,0) + y(0,1,0), y,x \in \mathbb{R} \}$$

$$= \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle$$

$(1,0,0)$ e $(0,1,0)$ são vetores próprios associados ao valor próprio 0.