Aula 12

23/10/2025

Teste 1 - 2024/2025

1.
$$\begin{cases} x - y + 2z + 3w = 2 \\ 2x + 2z + 4w = 6 \\ -2y + z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = B$$

1º Escalonar $A \sim U$ (sem trocar linhas nem multiplicar uma linha por um escalar)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_2 = L_2 - 2L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_3 = L_3 + L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} = U \text{ escalonada}$$

2º Construir L

$$\begin{array}{c|c|c} 1 & & \\ 2 & 2 & \\ 0 & -2 & -1 \\ \hline \div 1 & \div 2 & \div(-1) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|c|c} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 0 & -1 & 1 \end{array}$$

Assim, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ é triangular inferior com 1's na diagonal principal.

Temos que
$$A = LU = \underset{(3\times 3)}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}} \underset{(3\times 4)}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}} = \underset{(3\times 4}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}}$$

Logo $AX = B \Leftrightarrow L\underbrace{UX}_{=Y} = B \Leftrightarrow LY = B$

3º Resolver $LY = B$ $\quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

$$[L|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2 - 2L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 + L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = [C|D]$$

$$LY = B \Leftrightarrow CY = D \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = 2 \\ y_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow Y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4º Resolver $UX = Y$

$$[U|Y] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3 = -L_3}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 = L_2 + 2L_3 \\ L_1 = L_1 - 2L_3}}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2/2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{L_1 = L_1 + L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] = [E|F]$$

⚠ $car(U) = car([U|Y]) <$ nº de colunas logo o sistema é poss. ind.

$$UX=Y \Leftrightarrow EX=F \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y+w=1 \\ z+2w=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1-w \\ z=-2w \end{cases}$$

O sistema $AX=B$ é poss. ind. e o conjunto de soluções é:

$$\{(3, 1-w, -2w, w), w \in \mathbb{R}\}$$

② – ver aula 11

③ (a) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x - 7y + 3z = 0}_{\Leftrightarrow\, x = 7y - 3z}\}$

$$= \{(7y-3z, y, z), y,z \in \mathbb{R}\}$$

• $(0,0,0) \in S$? Sim porque a primeira coordenada é igual a 7 vezes a segunda menos 3 vezes a terceira, isto é, $0 = 7\cdot 0 - 3\cdot 0$.

• $(7y-3z, y, z), (7y'-3z', y', z') \in S$. Será que $(7y-3z,y,z)+(7y'-3z',y',z') \in S$?
$(7y-3z,y,z)+(7y'-3z',y',z') = (7y-3z+7y'-3z', y+y', z+z') \in S$ porque a primeira coordenada é igual a 7 vezes a segunda menos 3 vezes a terceira, isto é, $\underbrace{7y-3z+7y'-3z'}_{1^{\text{a}}\text{ coordenada}} = 7\underbrace{(y+y')}_{2^{\text{a}}\text{ coordenada}} - 3\underbrace{(z+z')}_{3^{\text{a}}\text{ coordenada}}$

S é fechado para a soma.

• $\alpha \in \mathbb{R}$, $(7y-3z, y, z) \in S$. Será que $\alpha(7y-3z, y, z) \in S$?

$\alpha(7y-3z,y,z) = (\alpha(7y-3z), \alpha y, \alpha z) = (7\alpha y - 3\alpha z, \alpha y, \alpha z) \in S$ porque a primeira coordenada, $7\alpha y - 3\alpha z$, é igual a 7 vezes a segunda coordenada, αy, menos 3 vezes a terceira coordenada, αz.

S é fechado para a multiplicação por escalar.

Portanto, S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

(b) $S = \{(7y-3z, y, z), y,z \in \mathbb{R}\}$

$$= \{(7y, y, 0) + (-3z, 0, z), y,z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{y(7,1,0) + z(-3,0,1), y,z \in \mathbb{R}\}$$

$= \{$vetores que são C.L. de $(7,1,0)$ e $(-3,0,1)\} = \langle (7,1,0), (-3,0,1) \rangle$

Logo, o conjunto $K=\{(7,1,0),(-3,0,1)\}$ gera S. Se K é l.i. então temos que K forma uma base de S.

$\boxed{K=\{(7,1,0),(-3,0,1)\} \text{ é l.i.?}}$ $(0,0,0)=\alpha_1(7,0,1)+\alpha_2(-3,0,1)$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&-3\\0&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix} \Leftrightarrow 0=AX$$

$$[A|0]=\left[\begin{array}{cc|c}7&-3&0\\1&0&0\\0&1&0\end{array}\right] \underset{L_2\leftrightarrow L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c}1&0&0\\7&-3&0\\0&1&0\end{array}\right] \underset{L_3\leftrightarrow L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&0\\7&-3&0\end{array}\right] \underset{L_3=L_3-7L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&0\\0&-3&0\end{array}\right] \sim$$

$$\underset{L_3=L_3+3L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{array}\right]=[C|0]$$

$AX=0 \Leftrightarrow CX=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=0\\\alpha_2=0\end{cases}$ Poss. Det.

Logo, K é l.i. e gera S. Portanto $((7,1,0),(-3,0,1))$ é uma base de S.

A dimensão de S é o número de vetores de uma base qualquer de S. Como $((7,1,0),(-3,0,1))$ é uma base de S e tem 2 vetores temos que

$\dim S = 2$

(4) $B=((1,a,2a),(0,1,0),(a,0,8a))$

Como $\dim \mathbb{R}^3=3$ temos que qualquer base de $\mathbb{R}^3$ é um conjunto (ordenado) com exatamente 3 vetores que são l.i. e geram $\mathbb{R}^3$. Como o conjunto B tem 3 vetores, igual à dimensão de $\mathbb{R}^3$, basta ver para que valores de a é que os vetores de B são l.i. ou geram $\mathbb{R}^3$. (vou ver para que valores de a é que os vetores de B são l.i. porque é a condição mais simples de testar).

Para que valores de a é que os vetores $\{(1,a,2a),(0,1,0),(a,0,8a)\}$ são l.i.? Isto é, para que valores de a é que o sistema:

$$(0,0,0)=\alpha_1(1,a,2a)+\alpha_2(0,1,0)+\alpha_3(a,0,8a)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&a\\a&1&0\\2a&0&8a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix} \Leftrightarrow 0=AX$$

é possível determinado com a única solução $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$?

$$[A|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 2a & 0 & 8a & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 = L_2 - aL_1 \\ L_3 = L_3 - 2aL_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 8a-2a^2 & 0 \end{array}\right]$$

O sistema $AX=0$ é possível determinado se e só se $car(A) = car([A|0]) = 3 =$ nº de colunas de A, isto é, $8a - 2a^2 \neq 0$ $\Leftrightarrow a(8-2a) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ ou $8 - 2a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ ou $a \neq 4$.

Portanto, $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ se e só se $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$.

FP2 6

$$\underbrace{\mathcal{N}(A)}_{\leftarrow \text{espaço nulo de } A} = \{X \in \mathbb{R}^4 : AX = 0\}$$

$X \in \mathcal{N}(A) \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \underbrace{A_r}_{\text{matriz escalonada reduzida equivalente a } A} X = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 - 2L_1 \\ L_4 = L_4 - L_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_2 = L_2/2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_3 = L_3 - L_2 \\ L_4 = L_4 - L_2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_r X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 - x_4 \end{cases}$$

$$\mathcal{N}(A) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = -x_3 \text{ e } x_2 = -x_3 - x_4\}$$

$$= \{(-x_3, -x_3 - x_4, x_3, x_4),\ x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(-x_3, -x_3, x_3, 0) + (0, -x_4, 0, x_4),\ x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x_3(-1, -1, 1, 0) + x_4(0, -1, 0, 1),\ x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

$$= \langle (-1, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 1) \rangle$$

$(-1, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 1)$ geram $\mathcal{N}(A)$.

$(-1, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 1)$ são l.i.? $(0, 0, 0) = \alpha_1(-1, -1, 1, 0) + \alpha_2(0, -1, 0, 1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$ Poss. Det. logo os vetores são l.i.

Assim $((-1, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 1))$ é uma base do espaço nulo de A, $\mathcal{N}(A)$.

Temos que a dim $\mathcal{N}(A) = 2 =$ nº de vetores na base.