

Folha Prática 3

Atenção: Estas notas não constituem uma resolução formal e rigorosa dos exercícios das Folhas Práticas.

Última atualização: 6 de novembro de 2025

Notas sobre os exercícios: 6, 15 e 27.

6. Seja A uma matriz quadrada de ordem 4 tal que $\det(A) = 3$.

$$\begin{aligned}\det(2(A^{-1})^T) &= 2^4 \det((A^{-1})^T) && \text{pelo ex.4 da FP3, o 2 está a multiplicar por todas as 4 colunas/linhas de } A \\ &= 2^4 \det(A^{-1}) && \text{pela Prop.1 do slide 9} \\ &= 2^4 \frac{1}{\det(A)} && \text{pela Prop. 9 do slide 9} \\ &= 2^4 \frac{1}{3} = \frac{16}{3}\end{aligned}$$

15. (a) Nota: a azul estão assinaladas as entradas utilizadas no desenvolvimento do determinante, e o expoente a vermelho indica o sinal que cada entrada irá assumir nesse desenvolvimento. Esta indicação é opcional e serve apenas como auxílio no cálculo.

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} 1^+ & 0 & 2 & -1 \\ 0^- & 1 & -1 & 1 \\ 1^+ & 2 & 0 & 0 \\ 0^- & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \det(A) &= +1 \det \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2^- & 0^+ & 0^- \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) + 1 \det \left(\begin{bmatrix} 0^+ & 2 & -1 \\ 1^- & -1 & 1 \\ 1^+ & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= -2 \det \left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) - 1 \det \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) + 1 \det \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= -2(-1-1) - (2+1) + (2-1) = 2\end{aligned}$$

- (b) Vamos usar a definição da matriz adjunta que se encontra no slide 9:

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{bmatrix}$$

em que, ver o slide 5, $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$ é o cofator e M_{ij} é a matriz que resulta da matriz A eliminando a linha i e coluna j .

O elemento $(2, 3)$ da $\text{adj } A$ é o elemento que está na linha 2 coluna 3, isto é, o cofator:

$$\begin{aligned}A_{32} &= (-1)^{(3+2)} \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) && \text{desenvolvimento pela } C_1 \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Eliminamos a } L_3 \text{ e } C_2 \text{ de } A} \\ &= - \det \left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = -(-1-1) = 2\end{aligned}$$

Pelo teorema do 10 temos que:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj } A$$

Assim, o elemento $(2, 3)$ da matriz A^{-1} é igual ao elemento $(2, 3)$ da matriz $\text{adj } A$, que acabamos de calcular, a dividir pelo determinante de A , que calculamos na alínea (a), ou seja,

$$\frac{A_{32}}{\det(A)} = \frac{2}{2} = 1$$

27. No contexto do problema apresentado, o sistema $x = Cx + d$ corresponde à matriz de consumo C , ao vector de produção x e ao vector de procura externa d , onde

$$C = \begin{array}{cc} \text{Caçador} & \text{Talho} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \text{Caçador} \\ \text{Talho} \end{array} \end{array}, \quad d = \begin{bmatrix} 76 \\ 76 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{Caçador} \\ \text{Talho} \end{array}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Este problema tem solução?

- As entradas de C e d são não negativas.
- A soma das entradas em cada coluna de C é inferior a 1, isto é, $0.2 + 0.1 = 0.3 < 1$ e $0.4 + 0 = 0.4 < 1$.

Portanto, pelos pontos anteriores, podemos concluir que existe um único vector de produção x que é a solução do sistema $x = Cx + d$. Vamos calcular x :

$$x = Cx + d \Leftrightarrow x - Cx = d \Leftrightarrow (I_2 - C)x = d \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0.8 & -0.4 \\ -0.1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 76 \\ 76 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [I_2 - C|d] &= \left[\begin{array}{cc|c} 0.8 & -0.4 & 76 \\ -0.1 & 1 & 76 \end{array} \right] \xrightarrow[L_2 = -10L_1]{L_1 = 10L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 8 & -4 & 760 \\ 1 & -10 & -760 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -10 & -760 \\ 8 & -4 & 760 \end{array} \right] \sim \\ &\xrightarrow{L_2 = L_2 - 8L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -10 & -760 \\ 0 & 76 & 9 \times 760 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 = L_2/76} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -10 & -760 \\ 0 & 1 & 90 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 = L_1 + 10L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 140 \\ 0 & 1 & 90 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Assim, a solução do problema é $X = \begin{bmatrix} 140 \\ 90 \end{bmatrix}$. Nessa semana, o caçador deve gerar 140 euros na sua atividade de caça e o talho deve gerar 90 euros na sua atividade.