Aula 27

Revisões

Cap 6: FP6 ex. 1(c)(e) e 16 + Recurso 24/25 ex. 1(h)
Cap. 5: Exame Final 23/24 ex. 5
Cap. 4: FP4 ex: 16
Cap 3: Teste 1 23/24 4(a)

22/12/2025

FP6 1 (c) $L(x,y,z) = (x-y, x^2, 2z)$ é uma aplicação linear? ⚠

- $L((x,y,z)+(x',y',z')) = L(x,y,z) + L(x',y',z')$? (não vai ser por causa do x^2 - não é linear)

$$L((x,y,z)+(x',y',z')) = L(x+x', y+y', z+z') = (x+x'-(y+y'), (x+x')^2, 2(z+z'))$$
$$= (x+x'-y-y', x^2+2xx'+x'^2, 2z+2z')$$

$$L(x,y,z) + L(x',y',z') = (x-y, x^2, 2z) + (x'-y', x'^2, 2z') = (x+x'-y-y', x^2+x'^2, 2z+2z')$$

Como $L((x,y,z)+(x',y',z')) \neq L(x,y,z) + L(x',y',z')$, L não é uma aplicação linear.

ou

contraexemplo: $L((1,0,0)+(2,0,0)) = L(3,0,0) = (3, 9, 0)$
$L(1,0,0) + L(2,0,0) = (1,1,0)+(2,4,0) = (3,5,0)$

Logo, L não é uma aplicação linear.

1 (e) $L(at^2+bt+c) = at+b+1$ ⚠

(Pega num polinómio com grau ≤ 2 e devolve outro polinómio com grau ≤ 1
Por exemplo, $L(t^2+2t+3) = t+2+1 = t+3$ e $L(t^2+t) = t+1+1 = t+2$
L não vai ser linear por causa do $+1$! vamos dar um contraexemplo.)

$$L(0+t) = L(t) = 1+1 = 2 \neq L(0) + L(t) = 1+1+1 = 3$$
em que $0t^2+0t+0 = 0$ é o polinómio nulo.

Como $L(at^2+bt+c+a't^2+b't+c') \neq L(at^2+bt+c) + L(a't^2+b't+c')$ temos que L não aplicação linear.

$\boxed{\text{Recurso 24/25}}$ 1 (h) $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ tal que $L(u_1) = (1,2)$ e $L(u_2) = (1,0)$.

Se $[v]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ então $v = 1u_1 + 2u_2$ logo $L(v) = 1L(u_1) + 2L(u_2)$
$= 1(1,2) + 2(1,0)$
$= (3,2)$

FP6 16 $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $L(1,1) = (3,0,2)$ e $L(1,-1) = (1,0,2)$

(a) $L(x,y) = ?$

1º Escrever (x,y) como combinação linear (C.L.) de $(1,1)$ e $(1,-1)$

$$(x,y) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(1,-1) \Leftrightarrow (x,y) = (\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1-\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1+\alpha_2 = x \\ \alpha_1 - \alpha_2 = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = x - \alpha_2 \\ x - \alpha_2 - \alpha_2 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{x+y}{2} \\ \alpha_2 = \frac{x-y}{2} \end{cases}$$

2º Aplicar L

como $(x,y) = \frac{x+y}{2}(1,1) + \frac{x-y}{2}(1,-1)$

Logo, $L(x,y) = \frac{x+y}{2} L(1,1) + \frac{x-y}{2} L(1,-1) = \frac{x+y}{2}(3,0,2) + \frac{x-y}{2}(1,0,2) = (2x+y, 0, 2x)$

(b) $S = ((1,1),(1,-1))$ base de $\mathbb{R}^2$ e $T = ((0,1,0),(1,0,1),(0,0,1))$ base de $\mathbb{R}^3$

$$[L]_{S,T} = \begin{bmatrix} | & | \\ [L(1,1)]_T & [L(1,-1)]_T \\ | & | \end{bmatrix}$$

as colunas são as imagens por L dos vetores de S escritos nas coordenadas da base T

1º calcular $L(1,1) = (3,0,2)$ e $L(1,-1) = (1,0,2)$ *"já sabemos"*

2º Escrever $L(1,1)$ e $L(1,-1)$ como C.L. de T

$$L(1,1) = (3,0,2) = \alpha_1(0,1,0) + \alpha_2(1,0,1) + \alpha_3(0,0,1) \Leftrightarrow (3,0,2) = (\alpha_2, \alpha_1, \alpha_2+\alpha_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 3 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 3 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_3 = -1 \end{cases} \quad \text{logo } [L(1,1)]_T = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$L(1,-1) = (1,0,2) = \beta_1(0,1,0) + \beta_2(1,0,1) + \beta_3(0,0,1) \Leftrightarrow (1,0,2) = (\beta_2, \beta_1, \beta_2+\beta_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta_2 = 1 \\ \beta_1 = 0 \\ \beta_2 + \beta_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_2 = 1 \\ \beta_1 = 0 \\ \beta_3 = 1 \end{cases} \quad \text{logo } [L(1,-1)]_T = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim, $[L]_{S,T} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $[X]_S = ? = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ sabendo que $[L(X)]_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Temos que $[L(X)]_T = [L]_{S,T}[X]_S$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1/2 \\ x_2 = -1 + x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1/2 \\ x_2 = -1/2 \end{cases}$$

NOTA: Como sei que $[X]_S \in \mathbb{R}^2$?

- um vetor escrito à custa da base S tem de ser um vetor de $\mathbb{R}^2$

ou

- $\underbrace{[L(X)]_T}_{3\times 1} = \underbrace{[L]_{S,T}}_{3\times 2} \underbrace{[X]_S}_{2\times 1}$

logo $[X]_S \in \mathbb{R}^2$.

Logo, $[X]_S = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{Exame Final 23/24}}$ 5 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & 2 \end{bmatrix}$

(a) Como A é triangular inferior os valores próprios são os elementos da diagonal: 1 e 2.

ou

$\det(A-\lambda I_3)=0 \Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & a & 2-\lambda \end{bmatrix}\right)=0 \Leftrightarrow (2-\lambda)\det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)^2=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ ou $\lambda=2$ são os valores próprios de A.

(b) $A_{3\times3}$ é diagonalizável se e só se tem 3 vetores próprios l.i.

Pela alínea (a), temos que $p_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_3)=(1-\lambda)^1(2-\lambda)^2$ logo,
$1\leq \dim U_1 \leq 1 \Rightarrow \dim U_1 = 1$ e $1 \leq \dim U_2 \leq 2$. (Teorema cap. 5.1. slide 4)

1 e 2 são valores próprios distintos de A logo A possui $\dim U_1 + \dim U_2$ vetores próprios l.i. (Teorema do cap. 5.1. slide 11).

Assim, temos que A é diagonalizável se e só se
$\dim U_1 + \dim U_2 = 3 \Leftrightarrow 1 + \dim U_2 = 3 \Leftrightarrow \dim U_2 = 2$

$\dim U_2 = 2 \Leftrightarrow$ nº de colunas de A $-$ car$(A-2I_3)=2 \Leftrightarrow$ car$(A-2I_3)=1$
$\Leftrightarrow a=0$

Cap. 5.1. slide 12

C.A.
$A-2I_3=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2=L_2+L_1 \\ L_3=L_3+L_1}}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

A é diagonalizável se e só se $a=0$.

FP4 16 $X_1=(4/5,0,3/5)$, $X_2=(0,1,0)$ e $X_3=(-3/5,0,4/5)$

(a) Para $\{X_1,X_2,X_3\}$ ser um conjunto ortonormado (o.n.) temos de ter:
$X_1\cdot X_2 = X_2\cdot X_3 = X_1\cdot X_3 = 0$ (ortogonais) e $X_1\cdot X_1 = X_2\cdot X_2 = X_3\cdot X_3 = 1$ (norma 1)

vamos verificar se satisfaz estas condições:

$X_1\cdot X_1=(4/5,0,3/5)\cdot(4/5,0,3/5)=\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16+9}{25}=1$ ✓

$X_2\cdot X_2=(0,1,0)\cdot(0,1,0)=1$ ✓

$X_3\cdot X_3=(-3/5,0,4/5)\cdot(-3/5,0,4/5)=(3/5)^2+(4/5)^2=1$ ✓

$X_1\cdot X_2=(4/5,0,3/5)\cdot(0,1,0)=4/5\times0+0\times1+3/5\times0=0$ ✓

$X_2\cdot X_3=(0,1,0)\cdot(-3/5,0,4/5)=0\times(-3/5)+1\times0+0\times4/5=0$ ✓

$X_1\cdot X_3=(4/5,0,3/5)\cdot(-3/5,0,4/5)=\cancel{\frac{4}{5}\times\left(-\frac{3}{5}\right)}+\cancel{\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}}=0$ ✓

Como X_1, X_2 e X_3 são ortogonais então são l.i. e 3 vetores l.i. em $\mathbb{R}^3$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$. - matéria do 1º teste

Assim, $B = (X_1, X_2, X_3)$ é uma base o.n. de $\mathbb{R}^3$.

(b) Como B é uma base o.n. temos que: (Teorema do cap 4. slide 8).

$$[(1,1,1)]_B = \begin{bmatrix} (1,1,1)\cdot X_1 \\ (1,1,1)\cdot X_2 \\ (1,1,1)\cdot X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 + 3/5 \\ 1 \\ -3/5 + 4/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 1 \\ 1/5 \end{bmatrix}$$

(c) $\tilde{B} = ((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1))$

$$M_{B \leftarrow \tilde{B}} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ [(0,0,1)]_B & [(0,1,1)]_B & [(1,1,1)]_B \\ | & | & | \end{bmatrix}$$ as colunas são os vetores de $\tilde{B}$ escrito nas coordenadas da base B

$$= \begin{bmatrix} (0,0,1)\cdot X_1 & (0,1,1)\cdot X_1 & (1,1,1)\cdot X_1 \\ (0,0,1)\cdot X_2 & (0,1,1)\cdot X_2 & (1,1,1)\cdot X_2 \\ (0,0,1)\cdot X_3 & (0,1,1)\cdot X_3 & (1,1,1)\cdot X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & 3/5 & 7/5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4/5 & 4/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

(d) $[Y]_B = ?$ sabendo que $[Y]_{\tilde{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$[Y]_B = M_{B \leftarrow \tilde{B}} [Y]_{\tilde{B}}$$ (cap. 2.1. slide 14)

$$= \begin{bmatrix} 3/5 & 3/5 & 7/5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4/5 & 4/5 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{Teste 1 23/24}}$ **4 (a)** $A^T X B^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{bmatrix}}_{=C} \Leftrightarrow A^T X B^{-1} = C$ sendo A e B invertíveis, isto é, $|A| \neq 0$ e $|B| \neq 0$

Logo, $|A^T X B^{-1}| = |C| \Leftrightarrow |A^T||X||B^{-1}| = |C|$

$\Leftrightarrow \underbrace{|A|}_{\neq 0}|X| \underbrace{\frac{1}{|B|}}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow |X| = 0$, isto é, X não é invertível.

C.A.:

$$|C| = \begin{vmatrix} \overset{+}{3} & \overset{-}{-1} & \overset{+}{0} \\ 6 & -2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3\underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}_{=0} + 1\underbrace{\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}}_{=0}$$

$= 0$

Bom natal  e um bom ano novo