Folha Prática 5

Atenção: Estas notas não constituem uma resolução formal e rigorosa dos exercícios das Folhas Práticas.

Última atualização: 24 de dezembro de 2025
Notas sobre os exercícios: 1(b), 1(c), 1(e), 2, 9, 10, 15, 16(c), 16(d), 17(a), 18(e).

Teoria: Seja $A_{n\times n}$ uma matriz quadrada cujo polinómio característico é

$$p_A(\lambda) = det(A - \lambda I_n) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_{\lambda_1}} \dots (\lambda_k - \lambda)^{n_{\lambda_k}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} A \text{ tem } n \text{ vetores próprios l.i.} \\ \text{OU} \\ \dim U_{\lambda_i} = n_{\lambda_i},\ i = 1,\dots,k \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{A \text{ é diagonalizável}}$$

$$\boxed{\text{Se } A \text{ tem } n \text{ valores próprios distintos}} \Rightarrow \boxed{A \text{ é diagonalizável}}$$

Relativamente à segunda caixa: Se $A_{n\times n}$ tem n valores próprios distintos $\Rightarrow$ A é diagonalizável.
Isto quer dizer que, por exemplo, dada uma matriz $A_{3\times 3}$

- se temos 3 valores próprios distintos então automaticamente sabemos que A é **diagonalizável**
- se temos apenas 1 ou 2 valores próprios distintos **não podemos concluir se a matriz é ou não diagonalizável**. Neste caso, para sabermos se a matriz é diagonalizável ou não temos de calcular os vetores próprios:
  - se tivermos no total 3 vetores próprios l.i. então a matriz é **diagonalizável**
  - se tivermos menos do que 3 vetores próprios então a matriz **não é diagonalizável**

Exemplos: Será que as seguintes matrizes são diagonalizáveis?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A matriz $A_{3\times 3}$ tem 2 valores próprios: o 1 e o 2 (neste ponto ainda não sabemos se A é diagonalizável ou não) e fazendo as contas ficamos a saber que

$$U_1 = \langle (1,0,0),(0,1,0)\rangle \text{ e } U_2 = \langle (2,1,1)\rangle$$

associado ao valor próprio 1 temos os vetores próprios $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$ e associado ao valor próprio 2 temos o vetor próprio $(2,1,1)$. Assim, temos 3 vetores próprios logo $\underline{A_{3\times 3} \text{ é diagonalizável}}$. Reparem que não faz mal termos "poucos" valores próprios (só temos 2) porque depois eles podem "compensar-nos" dando-nos 3 vetores próprios.
Agora vamos ver se a matriz B é diagonalizável. B tem também 2 valores próprios: o 1 e o 2 (neste ponto não sabemos se é diagonalizável ou não) calculando os subespaços próprios temos:

$$U_1 = \langle (1,0,0)\rangle \text{ e } U_2 = \langle (4,1,1)\rangle$$

associado ao valor próprio 1 temos o vetor próprio $(1,0,0)$ e associado ao valor próprio 2 temos o vetor próprio $(4,1,1)$. Portanto só temos 2 vetores próprios, assim $\underline{B_{3\times 3} \text{ não é diagonalizável}}$.

Vamos ver agora a matriz C. A matriz C tem 3 valores próprios distintos: o 3, 1 e 2 portanto sabemos logo que $\underline{C_{3\times 3} \text{ é diagonalizável}}$.

Seguem os exercícios ...

1(b). $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

<u>Calcular os valores próprios de A</u>[i]

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & -2-\lambda \end{bmatrix} \right) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)\det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 2 & -2-\lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(3-\lambda)(-2-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 3 \text{ ou } \lambda = -2$$

Os valores próprios de A são 3, 1 e -2. Assim, a matriz $A_{3\times 3}$ é diagonalizável porque tem 3 valores próprios distintos.

<u>Calcular os vetores próprios associados a cada valor próprio</u>
O subespaço próprio associado ao valor próprio 3 é:

$$\begin{aligned}
U_3 &= \{X \in \mathbb{R}^3 : (A - 3I_3)X = 0\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 1-3 & 0 & 0 \\ -1 & 3-3 & 0 \\ 3 & 2 & -2-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} -2x = 0 \\ -x = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 0 \end{cases} \right\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \text{ e } y = {}^{5z}\!/_2\} \\
&= \{(0, {}^{5z}\!/_2, z),\ z \in \mathbb{R}\} \\
&\quad \text{Colocar o } z \text{ em evidência} \\
&= \{z\,(0, {}^{5}\!/_2, 1),\ z \in \mathbb{R}\} \\
&= \langle (0, {}^{5}\!/_2, 1) \rangle \\
&\quad \text{Opcional: multiplicar por 2 para não termos frações} \\
&= \langle (0, 5, 2) \rangle
\end{aligned}$$

Assim todos os vetores não nulos[ii] que são <u>múltiplos</u> de $(0, 5, 2)$ são vetores próprios associados ao valor próprio 3. Isto é o mesmo que dizer que todos os vetores da forma

$$x\,(0, 5, 2),\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ = \ (0, 5x, 2x),\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

são vetores próprios associados ao valor próprio 3.[iii]

[i] Como A é triangular inferior os valores próprios são os elementos da diagonal: o 1, 3 e -2.
[ii] O vetor nulo nunca pode ser um vetor próprio!
[iii] **Nota:** A variável x podia ter outro nome, como por exemplo α, porque o nome não importa, o mais importante são as coordenadas do vetor estarem corretas.

O subespaço próprio associado ao valor próprio 1 é:

$$\begin{aligned}
U_1 &= \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, (A - 1 I_3)X = 0\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, -x + 2y = 0 \text{ e } 3x + 2y - 3z = 0\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = 2y \text{ e } z = {}^{8y}\!/_{3}\} \\
&= \{(2y, y, {}^{8y}\!/_{3}),\ y \in \mathbb{R}\} \\
&\quad \text{Colocar o } y \text{ em evidência} \\
&= \{y\,(2, 1, {}^{8}\!/_{3}),\ y \in \mathbb{R}\} \\
&= \langle (2, 1, {}^{8}\!/_{3}) \rangle \\
&\quad \text{Opcional: multiplicar por 3 para não termos frações} \\
&= \langle (6, 3, 8) \rangle
\end{aligned}$$

Assim todos os vetores não nulos que são múltiplos de $(6,3,8)$ são vetores próprios associados ao valor próprio 1. Isto é o mesmo que dizer que todos os vetores da forma

$$x\,(6,3,8),\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \;=\; (6x, 3x, 8x),\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

são vetores próprios associados ao valor próprio 1. O subespaço próprio associado ao valor próprio -2 é:

$$\begin{aligned}
U_{-2} &= \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, (A - (-2) I_3)X = 0\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = 0 \text{ e } y = 0\} \\
&= \{(0,0,z),\ z \in \mathbb{R}\} \\
&\quad \text{Colocar o } z \text{ em evidência} \\
&= \{z(0,0,1),\ z \in \mathbb{R}\} \\
&= \langle (0,0,1) \rangle
\end{aligned}$$

Assim todos os vetores não nulos que são múltiplos de $(0,0,1)$ são vetores próprios associados ao valor próprio -2. Isto é o mesmo que dizer que todos os vetores da forma

$$x\,(0,0,1),\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \;=\; (0,0,x),\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

são vetores próprios associados ao valor próprio -2.

Diagonalização

Como A é diagonalizável temos P invertível e D diagonal tal que $A = PDP^{-1}$. A matriz P tem os vetores próprios nas colunas e a matriz D tem os valores proprios correspondentes na diagonal principal.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 2 & 8 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

1(c). $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Calcular os valores próprios

$$\det(A - \lambda I_4) = 0 \Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} \right) = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda)\det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3-\lambda)\,(1-\lambda)\det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} \right) = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda)\,(1-\lambda)\,(1-\lambda)\,(3-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3 \text{ ou } \lambda = 1$$

Assim, os valores próprios são 3 e 1.[iv]

Calcular os vetores próprios

O subespaço próprio associado ao valor próprio 3 é:

$$\begin{aligned}
U_3 &= \{X \in \mathbb{R}^4 \,:\, (A - 3I_4)X = 0\} \\
&= \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, \begin{bmatrix} 3-3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1-3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, \begin{cases} y = 0 \\ -2y + z + 2w = 0 \\ -2z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \right\} \\
&= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, y = 0 \text{ e } z = 0 \text{ e } w = 0\} \\
&= \{(x,0,0,0),\ x \in \mathbb{R}\} \\
&\quad \text{Colocar o } x \text{ em evidência} \\
&= \{x\,(1,0,0,0),\ x \in \mathbb{R}\} \\
&= \langle (1,0,0,0) \rangle
\end{aligned}$$

Assim todos os vetores não nulos[v] que são múltiplos de $(1,0,0,0)$ são vetores próprios associados ao valor próprio 3. Isto é o mesmo que dizer que todos os vetores da forma

$$x\,(1,0,0,0),\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \;=\; (x,0,0,0),\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

são vetores próprios associados ao valor próprio 3.

O subespaço próprio associado ao valor próprio 1 é:

$$\begin{aligned}
U_1 &= \{X \in \mathbb{R}^4 \,:\, (A - 1I_4)X = 0\} \\
&= \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, \begin{bmatrix} 3-1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, \begin{cases} 2x + y = 0 \\ z + 2w = 0 \\ z + 2w = 0 \end{cases} \right\} \\
&= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, y = -2x \text{ e } z = -2w\} \\
&= \{(x,-2x,-2w,w),\ x,w \in \mathbb{R}\} \\
&\quad \text{Separar em dois vetores: um com os } x\text{'s outro com os } w\text{'s} \\
&= \{(x,-2x,0,0) + (0,0,-2w,w),\ x,w \in \mathbb{R}\} \\
&\quad \text{Colocar o } x \text{ e } w \text{ em evidência} \\
&= \{x(1,-2,0,0) + w(0,0,-2,1),\ x,w \in \mathbb{R}\} \\
&= \langle (1,-2,0,0), (0,0,-2,1) \rangle
\end{aligned}$$

[iv] Neste ponto não podemos se A é diagonalizável ou não. Temos de calcular os vetores próprios para ver se é ou não.

[v] O vetor nulo não é um vetor próprio.

Assim todos os vetores não nulos que são múltiplos de $(1,-2,0,0)$ e $(0,0,-2,1)$ são vetores próprios associados ao valor próprio 1. Isto é o mesmo que dizer que todos os vetores da forma

$$\begin{aligned} & x\,(1,-2,0,0)+y(0,0,-2,1),\ x,\,y\in\mathbb{R} \text{ não simultaneamente nulos} \\ &= (1x,-2x,-2y,y),\ x,\,y\in\mathbb{R} \text{ não simultaneamente nulos} \end{aligned}$$

são vetores próprios associados ao valor próprio 1. Portanto, a matriz $A_{4\times 4}$ só tem 3 vetores próprios logo **não é diagonalizável.**

1(e). $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Calcular os valores próprios

$$\det(A-\lambda I_3)=0 \Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right)=0 \Leftrightarrow (2-\lambda)((3-\lambda)^2-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)=0 \text{ ou } ((3-\lambda)^2-1)=0 \Leftrightarrow \lambda=2 \text{ ou } 9-6\lambda+\lambda^2-1=0 \Leftrightarrow \lambda=2 \text{ ou } 8-6\lambda+\lambda^2=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda=2 \text{ ou } \lambda : \frac{6\pm\sqrt{6^2-4.8}}{2} \Leftrightarrow \lambda=2 \text{ ou } \lambda=2 \text{ ou } \lambda=4 \Leftrightarrow \lambda=2 \text{ ou } \lambda=4$$

Reparem que o valor próprio 2 aparece duas vezes como raiz do polinómio característico de A, i.e.,

$$p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I_3) = (2-\lambda)^2(4-\lambda)$$

Assim, os valores próprios de A são 2 e 4 e se $\dim U_2 = 2$ temos que A é diagonalizável.

Calcular os vetores próprios

O subespaço próprio associado ao valor próprio 4 é:

$$\begin{aligned} U_4 &= \{X\in\mathbb{R}^3 : (A-4I_3)X=0\} \\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 2-4 & -1 & -1 \\ 0 & 3-4 & 1 \\ 0 & 1 & 3-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \begin{cases} -2x-y-z=0 \\ -y+z=0 \\ y-z=0 \end{cases}\right\} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \begin{cases} -2x-2z=0 \\ y=z \end{cases}\right\} \\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=-z \text{ e } y=z\right\} = \{(-z,z,z), z\in\mathbb{R}\} = \{z(-1,1,1), z\in\mathbb{R}\} = \langle(-1,1,1)\rangle \end{aligned}$$

Assim todos os vetores não nulos[vi] que são múltiplos de $(-1,1,1)$ são vetores próprios associados ao valor próprio 4. Isto é o mesmo que dizer que todos os vetores da forma

$$x\,(-1,1,1),\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} = (-x,x,x),\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

são vetores próprios associados ao valor próprio 4.

[vi] O vetor nulo não é um vetor próprio.

Vamos agora calcular o subespaço próprio associado ao valor próprio 2:

$$\begin{aligned}
U_2 &= \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, (A - 2I_3)X = 0\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \begin{bmatrix} 2-2 & -1 & -1 \\ 0 & 3-2 & 1 \\ 0 & 1 & 3-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \begin{cases} -y-z=0 \\ y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \right\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, y = -z\} \\
&\quad \text{Escrever } y \text{ usando } z^{\text{vii}} \\
&= \{(x,-z,z),\ x,z \in \mathbb{R}\} \\
&\quad \text{Separar o } x\text{'s dos } z\text{'s} \\
&= \{(x,0,0) + (0,-z,z),\ x,z \in \mathbb{R}\} \\
&\quad \text{Colocar o } x \text{ e } z \text{ em evidência} \\
&= \{x(1,0,0) + z(0,-1,1),\ x,z \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,0), (0,-1,1) \rangle
\end{aligned}$$

Assim, sabemos que todos os vetores não nulos que são múltiplos de $(1,0,0)$ e de $(0,-1,1)$ são vetores próprios associados ao valor próprio 2. Isto é o mesmo que dizer que todos os vetores da forma

$$\begin{aligned}
&x\,(1,0,0) + y(0,-1,1),\ x,y \in \mathbb{R} \text{ não simultaneamente nulos} \\
&= (x,-y,y),\ x,y \in \mathbb{R} \text{ não simultaneamente nulos}
\end{aligned}$$

são vetores próprios associados ao valor próprio 2.

$A_{3\times 3}$ e tem 3 vetores próprios l.i. o $(-1,1,1)$, o $(1,0,0)$ e o $(0,-1,1)$ logo a matriz é diagonalizável.

Diagonalização

Como a matriz é diagonalizável temos P invertível e D diagonal tal que $A = PDP^{-1}$. A matriz P tem os vetores próprios nas colunas e a matriz D tem os valores proprios correspondentes na diagonal principal.

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Como o valor próprio 2 tem dois vetores (o $(1,0,0)$ e $(0,-1,1)$) ele aparece duas vezes na diagonal principal de D.

2. (a) Cálculo dos valores próprios de A:

$$p_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)((-1-\lambda)(3-\lambda) - 1) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 + 4.2}}{2} \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 1 \pm \sqrt{5}$$

Assim, 1 é um valor próprio de A.

— **OU** —

Em alternativa podiam apenas verificar que o polinómio cracaterístico de A, $p_A(\lambda)$, é igual a 0 quando $\lambda = 1$, o que implica que 1 é um valor próprio −(ver Cap.5.1. slide 2).

$$\boxed{\lambda \text{ é um valor próprio de } A \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_2) = 0}$$

Temos que,

$$p_A(1) = \det(A - 1I_3) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right) = 0$$

Logo, 1 é um valor próprio de A.

Finalmente, vamos calcular o subespaço próprio associado ao valor próprio 1:

$$\begin{aligned}
U_1 &= \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, (A - 1I_3)X = 0\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \begin{cases} x = -\frac{5}{2}z \\ y = -2z \end{cases} \right\} \\
&= \{(-5z/2, -2z, z), z \in \mathbb{R}\} = \{z(-5/2, -2, 1), z \in \mathbb{R}\} = \langle (-5/2, -2, 1) \rangle
\end{aligned}$$

Assim, $(-5/2, -2, 1)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 1.

(b) Calculando os valores próprios (ver alínea anterior):

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 1 \pm \sqrt{5}$$

Temos que a matriz $A_{3\times 3}$ tem 3 valores próprios distintos (o 1, $1-\sqrt{5}$ e o $1+\sqrt{5}$) logo é diagonalizável[viii]. Para além disso, qualquer matriz diagonal D que contêm na diagonal principal os valores próprios de A é uma matriz semelhante a A. Por exemplo,

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

9. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$ queremos que 0 seja um valor próprio de A e $(1,1)$ seja um vetor próprio de A.

$$\boxed{\lambda \text{ é um valor próprio de } A \;\Leftrightarrow\; \det(A - \lambda I_2) = 0}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
0 \text{ é um valor próprio de } A &\Leftrightarrow \det(A - 0I_2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \det(A) = 0 \\
&\Leftrightarrow b - a = 0 \\
&\Leftrightarrow \boxed{a = b}
\end{aligned}$$

$$\boxed{X \neq (0,0) \text{ é um vetor próprio de } A \;\Leftrightarrow\; \exists \lambda \in \mathbb{R} \,:\, AX = \lambda X}$$

Portanto, como $(1,1)$ é um vetor próprio de A está associado a um valor próprio λ, isto é,[ix]

$$AX = \lambda X \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} 2 \\ a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = a + b \end{cases} \;\underset{a=b}{\Leftrightarrow}\; \begin{cases} \lambda = 2 \\ a = 1 \end{cases}$$

ou seja, $(1,1)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 2[x].

Em suma, 0 é um valor próprio de A e $(1,1)$ é um vetor próprio de A se e só se $a = b = 1$. Portanto,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(Já agora: A é diagonalizável? Sim, $A_{2\times 2}$ tem 2 valores próprios distintos: o 0 e o 2 (sabemos que o vetor próprio $(1,1)$ está associado ao valor próprio 2).

[viii] Atenção que nem todas as matrizes $n \times n$ que são diagonalizáveis tem exatamente n valores próprios distintos, podem ter menos!

[ix] Nós já sabemos que A tem o valor próprio 0 mas isso não quer dizer que o vetor próprio $(1,1)$ está associado ao valor próprio 0. Podem existir outros valores próprios!

[x] Acabamos de perceber que a matriz A para além do valor próprio 0 tem o valor próprio 2.

10. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ k & k+1 \end{bmatrix}$

   (a) O polinómio característico de A é:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) = \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ k & k+1-\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= (-\lambda)(k+1-\lambda) + k = -\lambda k - \lambda + \lambda^2 + k = \lambda^2 - (k+1)\lambda + k \end{aligned}$$

   Os valores próprios de A são os zeros do polinómio característico, isto é,

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = 0 &\Leftrightarrow \lambda^2 - (k+1)\lambda + k = 0 \quad \text{(fórmula resolvente)} \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{k+1 \pm \sqrt{(-(k+1))^2 - 4k}}{2} = \frac{k+1 \pm \sqrt{(-k-1)^2 - 4k}}{2} \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{k+1 \pm \sqrt{k^2 + 2k + 1 - 4k}}{2} = \frac{k+1 \pm \sqrt{k^2 - 2k + 1}}{2} \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{k+1 \pm \sqrt{(k-1)^2}}{2} = \frac{k+1 \pm (k-1)}{2} \\ &\Leftrightarrow \lambda = k \text{ ou } \lambda = 1 \end{aligned}$$

   k e 1 são os valores próprios de A.

   (b) Calcular os subespaços próprios:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{X \in \mathbb{R}^2 : (A - 1I_2)X = 0\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} -x - y = 0 \\ kx + ky = 0 \end{cases}\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} x = -y \\ -ky + ky = 0 \end{cases}\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} x = -y \\ 0 = 0 \end{cases}\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} x = -y \\ -ky + ky = 0 \end{cases}\right\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = -y\} \\ &= \{(-y,y), y \in \mathbb{R}\} = \{y(-1,1), y \in \mathbb{R}\} = \langle(-1,1)\rangle \end{aligned}$$

   $(-1,1)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 1.

$$\begin{aligned} U_k &= \{X \in \mathbb{R}^2 : (A - kI_2)X = 0\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} -k & -1 \\ k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} -kx - y = 0 \\ kx + y = 0 \end{cases}\right\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -kx\} = \{(x,-kx), x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,-k), y \in \mathbb{R}\} = \langle(1,-k)\rangle \end{aligned}$$

   $(1,-k)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio k.

   (c) $A_{2\times 2}$ é diagonalizável $\Leftrightarrow$ A possui 2 vetores próprios l.i.

   Pelas alíneas anteriores sabemos que:

   - $(1,-1)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 1
   - $(1,-k)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio k.

   Se $\boxed{k = 1}$ então A só tem o valor próprio 1 e o vetor próprio associado $(1,-1)$. Neste caso, A não é diagonalizável.

   Se $\boxed{k \neq 1}$ então A tem dois valores próprios distintos: o 1 e o k e 2 valores próprios associados $(1,-1)$ e o $(1,-k)$, respetivamente. Vetores próprios associados a valores próprios distintos são l.i. (ver Cap.5.1. Lema do slide 11). Neste caso, A é diagonalizável.

   — **OU** —

$A_{2\times 2}$ é diagonalizável $\Leftrightarrow$ A possui 2 vetores próprios l.i.. $\Leftrightarrow$ $(1,-1)$ e $(1,-k)$ são l.i., ou seja, o seguinte sistema é possível determinado

$$\alpha_1(1,-1)+\alpha_2(1,-k)=(0,0) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX=0$$

O sistema é possível determinado se e só se $car(A) = car([A|0]) = $ nº de colunas de A.

$$[A|0] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -k & 0 \end{array}\right] \underset{L_2=L_2+L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -k+1 & 0 \end{array}\right]$$

Assim, A tem 2 vetores próprios l.i. quando $-k+1\neq 0 \Leftrightarrow k\neq 1$ e nesse caso A é diagonalizável.

(d) Para $k\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ temos que A é diagonalizável, isto é, existe P invertível e D diagonal tal que $A = PDP^{-1}$ sendo

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -k \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

(e) Pela alínea anterior temos que $A = PDP^{-1}$. Assim, para $k=-1$ (ver Cap.5.1. slide 15)

$$A^{2012} = PD^{2012}P^{-1} = P\underbrace{\begin{bmatrix} 1^{2012} & 0 \\ 0 & (-1)^{2012} \end{bmatrix}}_{=I_2}P^{-1} = PP^{-1} = I_2$$

Nota: A potência de matrizes diagonais é igual à potência das entradas da diagonal principal – isto só acontece para matrizes diagonais.

15. A é uma matriz simétrica de ordem 3 com valores próprios 1 e -3 tal que:

- $(1,0,0)$ e $(0,1,1)$ são vetores próprios associados ao valor próprio 1
- $(0,-1,1)$ é um vetor próprio associados ao valor próprio -3

(a) Queremos determinar o subespaço próprio associado ao valor próprio 1, isto é, $U_1 =$? $(1,0,0)$ e $(0,1,1)$ são vetores próprios associados ao valor próprio 1, isso quer dizer, que os vetores próprios associados ao valor próprio 1 são C.L. de $(1,0,0)$ e $(0,1,1)$. Portanto,

$$\begin{aligned} U_1 &= \langle(1,0,0),(0,1,1)\rangle \\ &= \{\text{Vetores que são C.L. de } (1,0,0) \text{ e } (0,1,1)\} \end{aligned}$$

Quais são os vetores $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ que são C.L. de $(1,0,0)$ e $(0,1,1)$?

$$(x,y,z) = \alpha_1(1,0,0)+\alpha_2(0,1,1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = B = AX$$

Vamos escalonar $[A|B]$ para calcular a característica.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \end{array}\right] \underset{L_3=L_3-L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z-y \end{array}\right] \text{ Escalonada}$$

O sistema $AX=B$ é possível se e só se $car(A) = car([A|B])$. Assim, a L_3 não pode ter pivot, isto é, $z-y=0 \Leftrightarrow z=y$.

Portanto, todos os vetores $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tal que $z=y$ podem ser escritos como C.L. de $(1,0,0)$ e $(0,1,1)$.

$$\begin{aligned} U_1 &= \langle(1,0,0),(0,1,1)\rangle \\ &= \{\text{Vetores que são C.L. de } (1,0,0) \text{ e } (0,1,1)\} \\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y=z\} \end{aligned}$$

(b) A matriz A é (ortogonalmente) diagonalizável porque é simétrica. Assim, $A = PDP^T$ em que P é uma matriz ortogonal cujas colunas são os vetores próprios de A (com norma 1 !!) e D é uma matriz diagonal em que na diagonal principal estão os valores próprios.

Normalizar os vetores próprios:

$$\frac{(1,0,0)}{\|(1,0,0)\|} = (1,0,0)$$
$$\frac{(0,1,1)}{\|(0,1,1)\|} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$\frac{(0,-1,1)}{\|(0,-1,1)\|} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Construir P e D:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$A = PDP^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

16(c). Seja $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma forma quadrática definida por $Q(X) = X^T AX$ em que $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Temos de classificar a forma quadrática para isso vamos usar o Critério de Sylvester e começar por calcular os menores principais dominantes de A[xi]:

$$\Delta_1 = \det(1) = 1 \qquad \text{(eliminar } L_2, C_2, L_3 \text{ e } C_3)$$
$$\Delta_2 = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0 \quad \text{(eliminar } L_3 \text{ e } C_3)$$
$$\Delta_3 = \det(A) = 0$$

Não é o caso que os menores principais dominantes são todos positivos, nem é o caso que os de ordem par são positivos, $0 \not> 0$ e os de ordem ímpar negativos. Assim, temos de calcular todos os menores principais.

Os menores principais de ordem 1 são:

$$\mathbf{\Delta_1 = 1},\ \mathbf{1} \text{ (eliminar } L_1, C_1, L_3, C_3),\ \mathbf{4} \text{ (eliminar } L_1, C_1, L_2, C_2)$$

Os menores principais de ordem 2 são:

$$\mathbf{\Delta_2 = 0},\ \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\right) = \mathbf{4} \text{ (eliminar } L_2, C_2),\ \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\right) = \mathbf{4} \text{ (eliminar } L_1, C_1)$$

O menor principal de ordem 3 é: $\Delta_3 = \det(A) = 0$

Logo, Q é semi-definida positiva porque todos os menores principais são não negativos (≥ 0).

16(d). Seja $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma forma quadrática definida por $Q(X) = X^T AX$ em que $A = \begin{bmatrix} -10 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$.

Temos de classificar a forma quadrática para isso vamos usar o Critério de Sylvester e começar por calcular os menores principais dominantes de A[xii]:

[xi] Devem de apresentar o cálculo de todos os determinantes por extenso, não chega o resultado!
[xii] Devem de apresentar o cálculo de todos os determinantes por extenso, não chega o resultado!

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \det(-10) = -10 && \text{(eliminar } L_2, C_2, L_3 \text{ e } C_3) \\
\Delta_2 &= \det\left(\begin{bmatrix} -10 & -5 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}\right) = 5 && \text{(eliminar } L_3 \text{ e } C_3) \\
\Delta_3 &= \det(A) = -3
\end{aligned}$$

Como os menores principais dominantes de ordem par (Δ_2) são positivos e os de ordem ímpar (Δ_1, Δ_3) são negativos temos que a forma quadrática Q é definida negativa. Para além disso, sabemos que todos os valores próprios de A são negativos!

17(a).

$$x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 4y + 5 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{1x^2 + 1y^2 - 2xy}_{\text{na matriz simétrica } A} + \underbrace{2x + 4y}_{\text{na matriz } B} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 5 = 0 \Leftrightarrow X^T AX + BX + 5 = 0$$

<u>Vamos eliminar o termo cruzado $-2xy$</u>

<u>Calcular os valores próprios de A</u>

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2 - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 2$$

Os valores próprios de A são 0 e o 2.

<u>Calcular os vetores próprios de A</u>

$$\begin{aligned}
U_0 &= \{X \in \mathbb{R}^2 : (A - 0I_2)X = 0\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0 \text{ e } -x + y = 0\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\right\} = \{(x,x), x \in \mathbb{R}\} \\
&\quad \text{Colocar o } x \text{ em evidência} \\
&= \{x(1,1),\ x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1) \rangle
\end{aligned}$$

$(1,1)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 0.

$$\begin{aligned}
U_2 &= \{X \in \mathbb{R}^2 : (A - 2I_2)X = 0\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} -x - y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}\right\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\} = \{(x,-x),\ x \in \mathbb{R}\} \\
&\quad \text{Colocar o } x \text{ em evidência} \\
&= \{x(1,-1),\ x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,-1) \rangle
\end{aligned}$$

$(1,-1)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 2.

<u>Dividir cada vetor próprio pela norma</u>

$$\frac{(1,1)}{\|(1,1)\|} = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{e} \quad \frac{(1,-1)}{\|(1,-1)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

<u>Construir P e D</u>, as colunas de P são os vetores próprios de A normalizados e na diagonal principal de D estão os valores próprios de A. Por exemplo,

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mudança de variável $X = P\hat{X}$ sendo $\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}$

e calcular $\hat{B} = BP = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Assim temos

$$X^T AX + BX + 5 = 0 \rightsquigarrow \hat{X}^T D\hat{X} + \hat{B}\hat{X} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + 5 = 0 \Leftrightarrow \boxed{2\hat{x}^2 - \sqrt{2}\hat{x} + 3\sqrt{2}\hat{y} + 5 = 0}$$

Completar o quadrado de $\hat{x}$

$$2\hat{x}^2 - \sqrt{2}\hat{x} + 3\sqrt{2}\hat{y} + 5 = 0 \Leftrightarrow 2\left(\hat{x}^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{x}\right) + 3\sqrt{2}\hat{y} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\hat{x}^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{x} + \left(\frac{\sqrt{2}/2}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}/2}{2}\right)^2\right) + 3\sqrt{2}\hat{y} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\hat{x}^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{x} + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2\right) - \frac{1}{4} + 3\sqrt{2}\hat{y} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\hat{x} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + 3\sqrt{2}\hat{y} + \frac{19}{4} = 0$$

Eliminar a constante $19/4$

$$2\left(\hat{x} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + 3\sqrt{2}\hat{y} + \frac{19}{4} = 0 \Leftrightarrow 2\left(\hat{x} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + 3\sqrt{2}\left(\hat{y} + \frac{19}{4} \div 3\sqrt{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\hat{x} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + 3\sqrt{2}\left(\hat{y} + \frac{19}{4}\frac{1}{3\sqrt{2}}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\left(\underbrace{\hat{x} - \frac{\sqrt{2}}{4}}_{=\tilde{x}}\right)^2 + 3\sqrt{2}\left(\underbrace{\hat{y} + \frac{19}{12\sqrt{2}}}_{\tilde{y}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\tilde{x}^2 + 3\sqrt{2}\tilde{y} = 0 \Leftrightarrow \tilde{y} = -\frac{2}{3\sqrt{2}}\tilde{x}^2 \Leftrightarrow \boxed{\tilde{y} = -\frac{\sqrt{2}}{3}\tilde{x}^2}$$

É uma **parábola**.

18(e).

$$3y^2 + 4xz + 6y + 1 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{0x^2 + 3y^2 + 0z^2 + 0xy + 4xz + 0yz}_{\text{na matriz simétrica } A} + \underbrace{0x + 6y + 0z}_{\text{na matriz } B} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + 1 = 0 \Leftrightarrow X^T AX + BX + 1 = 0$$

Vamos eliminar o termo cruzado $4xz$

Calcular os valores próprios de A

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 0-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda \det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}\right) + 2\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 3-\lambda \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2(3-\lambda) - 4(3-\lambda) = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda)(\lambda^2 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 - \lambda = 0 \text{ ou } \lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3 \text{ ou } \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = -2$$

Os valores próprios de A são 3, 2 e -2.

Calcular os vetores próprios de A

$$\begin{aligned}
U_3 &= \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, (A - 3I_3)X = 0\} \\
&= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, -3x + 2z = 0 \text{ e } 2x - 3z = 0\} \\
&= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = \frac{2z}{3} \text{ e } \underbrace{2\frac{2z}{3} - 3z = 0}_{-5z/3=0 \Leftrightarrow z=0} \right\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = 0 \text{ e } z = 0\} = \{(0,y,0),\ y \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

Colocar o y em evidência

$$= \{y(0,1,0),\ y \in \mathbb{R}\} = \langle (0,1,0) \rangle$$

$(0,1,0)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 3.

$$\begin{aligned}
U_2 &= \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, (A - 2I_3)X = 0\} \\
&= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \begin{cases} -2x + 2z = 0 \\ y = 0 \\ 2x - 2z = 0 \end{cases} \right\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, y = 0 \text{ e } x = z\} = \{(x,0,x),\ x \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

Colocar o x em evidência

$$= \{x(1,0,1),\ x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,1) \rangle$$

$(1,0,1)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 2.

$$\begin{aligned}
U_{-2} &= \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, (A + 2I_3)X = 0\} \\
&= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x + 2z = 0 \text{ e } 5y = 0\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = -x \text{ e } y = 0\} = \{(x,0,-x),\ x \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

Colocar o x em evidência

$$= \{x(1,0,-1),\ x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,-1) \rangle$$

$(1,0,-1)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio -2.[xiii]

Dividir cada vetor próprio pela norma

$$\begin{aligned}
\frac{(0,1,0)}{\|(0,1,0)\|} &= (0,1,0) \\
\frac{(1,0,1)}{\|(1,0,1)\|} &= \frac{(1,0,1)}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
\frac{(1,0,-1)}{\|(1,0,-1)\|} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

Construir P e D, as colunas de P são os vetores próprios de A normalizados e na diagonal principal de D estão os valores próprios de A. Atenção: a ordem não importa mas P e D devem de seguir a mesma ordem. Por exemplo,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

[xiii] Também podiam escrever $x = -z$, iam obter um vetor diferente mas não tem problema

Mudança de variável $X = P\hat{X}$ sendo $\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix}$

e calcular $\hat{B} = BP = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Assim temos

$$X^T AX + BX + 1 = 0 \rightsquigarrow \hat{X}^T D\hat{X} + \hat{B}\hat{X} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} + 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{3\hat{x}^2 + 2\hat{y}^2 - 2\hat{z}^2 + 6\hat{x} + 1 = 0}$$

Completar o quadrado de $\hat{x}$

$$3\hat{x}^2 + 2\hat{y}^2 - 2\hat{z}^2 + 6\hat{x} + 1 = 0 \Leftrightarrow 3(\hat{x}^2 + 2\hat{x}) + 2\hat{y}^2 - 2\hat{z}^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\hat{x}^2 + 2\hat{x} + \left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2\right) + 2\hat{y}^2 - 2\hat{z}^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\hat{x}^2 + 2\hat{x} + 1^2\right) - 3 + 2\hat{y}^2 - 2\hat{z}^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\underbrace{(\hat{x}+1)}_{=\tilde{x}}{}^2 + 2\hat{y}^2 - 2\hat{z}^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 3\tilde{x}^2 + 2\hat{y}^2 - 2\hat{z}^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\tilde{x}^2}{2} + \hat{y}^2 - \hat{z}^2 = 1 \qquad \text{Cálculo auxiliar: } \frac{3\tilde{x}^2}{2} = \tilde{x}^2 \times \frac{3}{2} = \tilde{x}^2 \div \frac{2}{3} = \frac{\tilde{x}^2}{2/3}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\tilde{x}^2}{2/3} + \hat{y}^2 - \hat{z}^2 = 1}$$

É um **hiperbolóide de uma folha.** [xiv]

NOTA: Se organizarem os valores próprios por outra ordem a equação que obtêm é ligeiramente diferente (não tem problema!), o mais importante é chegarem à conclusão de que é um hiperboloide de uma folha.

[xiv] Temos termos ao quadrado (com sinais negativos) e uma constante logo é um hiperboloide, como só temos um sinal negativo é um hiperboloide de uma folha.