Folha Prática 1

Atenção: Estas notas não constituem uma resolução formal e rigorosa dos exercícios das Folhas Práticas.

Última atualização: 24 de setembro de 2025

Notas sobre os exercícios: 2, 4, 5, 6, 15(a), 16(a), 17, 18, 24, 25, 29, 32(a), 35 e 36(c).

2.

$$
\begin{aligned}
&2(A+B)-AB\\
&=2\left(\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&0&-1\\2&3&1\\1&2&0\end{bmatrix}\right)-\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&-1\\2&3&1\\1&2&0\end{bmatrix}\\
&=2\begin{bmatrix}1+(-1)&2+0&3+(-1)\\2+2&3+3&1+1\\3+1&1+2&2+0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&-1\\2&3&1\\1&2&0\end{bmatrix}\\
&=2\begin{bmatrix}0&2&2\\4&6&2\\4&3&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\times(-1)+2\times2+3\times1&1\times0+2\times3+3\times2&1\times(-1)+2\times1+3\times0\\2\times(-1)+3\times2+1\times1&2\times0+3\times3+1\times2&2\times(-1)+3\times1+1\times0\\3\times(-1)+1\times2+2\times1&3\times0+1\times3+2\times2&3\times(-1)+1\times1+2\times0\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}2\times0&2\times2&2\times2\\2\times4&2\times6&2\times2\\2\times4&2\times3&2\times2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6&12&1\\5&11&1\\1&7&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&4&4\\8&12&4\\8&6&4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6&12&1\\5&11&1\\1&7&-2\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}0-6&4-12&4-1\\8-5&12-11&4-1\\8-1&6-7&4-(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6&-8&3\\3&1&3\\7&-1&6\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

4. Seja

$$A_{3\times4}=\begin{bmatrix}1&1&-4&0\\2&0&1&-1\\2&0&1&0\end{bmatrix},\ B_{4\times2}=\begin{bmatrix}1&3\\1&1\\0&-1\\-1&1\end{bmatrix}$$

Queremos calcular a primeira coluna e a segunda linha da matriz que resulta do produto AB. Como o número de colunas de A coincide com o número de linhas de B, o produto AB está bem definido, sendo o resultado uma matriz de ordem 3×2.

Informalmente, podemos escrever:

$$AB=\begin{bmatrix}\text{Linha 1 de } A \text{ com a coluna 1 de } B & \text{Linha 1 de } A \text{ com a coluna 2 de } B\\ \text{Linha 2 de } A \text{ com a coluna 1 de } B & \text{Linha 2 de } A \text{ com a coluna 2 de } B\\ \text{Linha 3 de } A \text{ com a coluna 1 de } B & \text{Linha 3 de } A \text{ com a coluna 3 de } B\end{bmatrix}$$

Assim, conseguimos calcular apenas a primeira coluna e a segunda linha de AB, sem termos de determinar as restantes entradas:

$$
\begin{aligned}
AB&=\begin{bmatrix}1\times1+1\times1+(-4)\times0+0\times(-1) & \text{Linha 1 de } A \text{ com a coluna 2 de } B\\ 2\times1+0\times1+1\times0+(-1)\times(-1) & 2\times3+0\times1+1\times(-1)+(-1)\times1\\ 2\times1+0\times1+1\times0+0\times(-1) & \text{Linha 3 de } A \text{ com a coluna 3 de } B\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}2 & \text{Linha 1 de } A \text{ com a coluna 2 de } B\\ 3 & 4\\ 2 & \text{Linha 3 de } A \text{ com a coluna 3 de } B\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Logo, a primeira coluna de AB é $\begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix}$ e asegunda linha é $\begin{bmatrix}3&4\end{bmatrix}$.

P.S. Já agora, a segunda coluna completa de AB é $\begin{bmatrix}8\\4\\5\end{bmatrix}$.

5. Sabendo que AB e BA estão bem definidos e que A é uma matriz de ordem $m \times n$ (ou seja, com m linhas e n colunas), queremos provar que B tem ordem $n \times m$, isto é, que B tem n linhas e m colunas.

   Como o produto AB está bem definido, o número de colunas de A (n) tem de coincidir com o número de linhas de B, isto é,

$$\text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de colunas } A = n = \text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de linhas } B$$

   daqui concluimos que B tem n linhas.

   De um modo semelhante, como o produto BA também está bem definido , o número de colunas de B tem de coincidir com o número de linhas de A, isto é,

$$\text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de colunas } B = \text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de linhas } A = m$$

   concluímos então que B tem m colunas.

   Portanto, B é uma matriz com ordem $n \times m$.

6.

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 \times 3 + 4 & 2 \times 3 + 5 & 3 \times 3 + 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 11 & 15 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

   Após efetuar EA o resultado corresponde a somar à linha 2 da matriz A três vezes a linha 1.[i]

$$AE = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2 \times 3 & 2 & 3 \\ 4 + 5 \times 3 & 5 & 6 \\ 7 + 8 \times 3 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 19 & 5 & 6 \\ 31 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

   Após efetuar AE o resultado corresponde a somar à coluna 1 da matriz A três vezes a coluna 2.

15(a). Para determinar se uma matriz está na forma escalonada ou escalonada por linhas reduzimos precisamos primeiro de identificar os seus pivots. Cada linha da matriz têm no máximo um pivot que é a primeira entrada não nula. Assim, a matriz A têm 3 pivots marcados a vermelho.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} 1 \text{ é o pivot da } L_1 \\ 3 \text{ é o pivot da } L_2 \\ 1 \text{ é o pivot da } L_3 \end{array}$$

Uma matriz está na forma escalonada por linhas se:

- abaixo de cada pivot só ocorrem zeros
- os pivots de linhas mais abaixo estão mais à direita do que os pivots de linhas acima
- caso existam linhas só com zeros estão na parte inferior da matriz

Uma matriz está na forma escalonada por linhas reduzida se:

- está na forma escalonada (isto é satisfaz todas as condições anteriores)
- os pivots são todos iguais a 1
- acima de cada pivot só temos zeros.

Assim, a matriz A não está na forma escalonada por linhas porque abaixo do pivot da $1^{\underline{a}}$ linha não temos só zeros. Para além disso, não está na forma escalonada por linhas reduzida.

Apesar da matriz A não estar na forma escalonada por linhas (reduzida) podemos aplicar operações elementares sobre as linhas da matriz de modo a ter uma matriz equivalente que seja escalonada por linhas (e reduzida).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_2 = L_2 - 3L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B \textbf{ (escalonada)}$$

[i] Isto não é óbvio. Quando estudarmos a decomposição LU vamos ver que a matriz E chama-se matriz elementar e corresponde a operações elementares.

Fazendo $L_2 = L_2 - 3L_1$ garantimos que abaixo do pivot da linha 1 só ocorrem zeros. A matriz B é equivalente à matriz A e está na forma escalonada por linhas: abaixo de cada pivot só ocorrem zeros, os pivots das linhas mais abaixo estão mais à direita e não temos linhas nulas com que nos preocupar.

Mas, a matriz B não está na forma escalonada reduzida para isso temos de ter todos os pivots iguais a 1 e garantir que acima de cada pivot só ocorrem zeros. Vamos aplicar mais operações elementares sobre as linhas da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_2=L_2-3L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_2=L_2/3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_2=L_2-L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C$$

A matriz C é equivalente à matriz A e está na forma escalonada por linhas reduzida porque está na forma escalonada, todos os pivots (marcados a vermelho) são iguais a 1 e acima de cada pivot só temos zeros. Assim, a solução do exercício 15 (a)(i) é a matriz B e do 15 (a)(ii) é a matriz C.

16(a). Vamos começar por escrever o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 1x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 2 \end{cases}$$

na forma matricial. Para isso vamos ter 3 matrizes: a matriz A dos coeficientes, X das incógnitas, marcados a preto, e B dos termos independentes As incógnitas são x_1, x_2 e x_3 que vão ficar na matriz X em coluna. Os termos independentes estão marcados a azul e vão ficar na matriz B em coluna. Os coeficientes estão marcados a vermelho e vão ficar por ordem na matriz A. Assim,

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 1x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = B$$

Para resolver o sistema podemos usar o método de Gauss ou Gauss-Jordan. Vou usar o de Gauss-Jordan[ii]. Para isso tenho de começar por escrever a matriz ampliada que consiste em juntar à matriz A a matriz B. A matriz ampliada escreve-se da seguinte forma:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 9 & 2 \end{array}\right]$$

O próximo passo no método de Gauss-Jordan é escalonar e reduzir a matriz $[A|B]$:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \end{array}\right] \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2=L_2-4L_1 \\ L_3=L_3-3L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -9 & -18 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & -1 \end{array}\right] \underset{L_2=-L_2/9}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1/3 \\ 0 & -3 & -6 & -1 \end{array}\right] \underset{L_3=L_3+3L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{L_1=L_1-3L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [E|F]$$

A matriz $[E|F]$ está na forma escalonada reduzida por linhas. Comecei por trocar a L_1 com a L_2 (porque dá mais jeito para fazer contas). Depois eliminei tudo o que estava abaixo do pivot da L_1. O pivot da L_2 era o -9, dividi a L_2 por -9 para ter o pivot igual a 1 (mais uma vez dá mais jeito para fazer contas) e eliminei tudo abaixo desse pivot. Por fim, como queria ter a matriz na forma escalonada reduzida eliminei o 3 que estava acima do pivot da L_2. Portanto temos que

$$AX = B \Leftrightarrow EX = F \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 1/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 1/3 + 2x_3 \end{cases}$$

O sistema $AX = B$ é possível indeterminado (tem infinitas soluções) e o conjunto de soluções é: $\{(x_3, 1/3 + 2x_3, x_3),\ x_3 \in \mathbb{R}\}$[iii].

[ii] Isto é uma questão de preferência, usem o que gostarem mais.

[iii] Nas soluções chamaram x_3 de t, é a mesma coisa, o nome da variável não importa.

17. Indique para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ o sistema é: impossível, possível determinado ou impossível.

$$\begin{cases} \alpha x + y = 1 \\ x + \alpha y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = B$$

Vamos usar a teoria do slide 32 Cap.1.1 que envolve comparar a car(A) com a car($[A|B]$). Assim, a primeira coisa que temos de fazer é escalonar as matriz para contar os pivots de A e $[A|B]$.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{array}\right]$$

A matriz já está escalonada? Não, seja lá qual for o valor de α a matriz nunca estará na forma escalonada! (isto é claro?) Assim, vamos escalonar a matriz:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{array}\right] \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} {\color{red}1} & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2 - \alpha L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} {\color{red}1} & \alpha & 1 \\ 0 & 1-\alpha^2 & 1-\alpha \end{array}\right]$$

Como não sei o valor de alpha, por exemplo se $\alpha = 0$ não pode ser o pivot da L_1, a primeira coisa que fiz foi trocar a L_1 com a L_2 e assim garanto que tenho o 1 como pivot da primeira linha. De seguida, abaixo do pivot 1 só quero ter 0's então eliminei o α abaixo do pivot fazendo $L_2 = L_2 - \alpha L_1$[iv]. A matriz está escalonada? Sim, temos o pivot da L_1 e abaixo dele só temos zeros e a L_2 pode ou não ter o pivot (dependendo do valor de α) mas se $1-\alpha^2$ ou $1-\alpha$ for pivot da L_2 está garantido que está mais à direita do que o pivot da L_1.

A matriz já está escalonada vamos agora contar os pivots. Reparem que existe sempre o pivot da L_1 e depois a L_2 pode ou não ter pivot. Vamos ver caso a caso do slide 32:

$$\boxed{\text{O sistema é impossível se e só se } 1 = \text{car}(A) < \text{car}([A|B]) = 2}$$

Neste caso queremos que a matriz A só tenha um pivot (o da L_1) e queremos que a matriz $[A|B]$ tenha dois pivots, ou seja, queremos ter

$$[A|B] \sim \left[\begin{array}{cc|c} {\color{red}1} & \alpha & 1 \\ 0 & (1-\alpha^2){\color{red}= 0} & (1-\alpha){\color{red}\neq 0} \end{array}\right]$$

Assim, se $1-\alpha^2 = 0$ e $1-\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha = -1$ temos que o sistema é impossível.

$$\boxed{\text{O sistema é possível determinado se e só se } \text{car}(A) = \text{car}([A|B]) = \text{n}^{\text{o}} \text{ colunas de } A = 2}$$

Queremos que a matriz A (e $[A|B]$) tenha dois pivots, i.e., queremos que $1-\alpha^2$ seja o pivot da L_2.

$$[A|B] \sim \left[\begin{array}{cc|c} {\color{red}1} & \alpha & 1 \\ 0 & (1-\alpha^2){\color{red}\neq 0} & 1-\alpha \end{array}\right]$$

Assim, se $1-\alpha^2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \pm 1$ temos que o sistema é possível determinado.

$$\boxed{\text{O sistema é possível indeterminado se e só se } \text{car}(A) = \text{car}([A|B]) < 2}$$

Queremos que a matriz $[A|B]$ (e A) tenha só o pivot da L_1, ou seja, a L_2 só pode ter zeros.

$$[A|B] \sim \left[\begin{array}{cc|c} {\color{red}1} & \alpha & 1 \\ 0 & (1-\alpha^2){\color{red}= 0} & (1-\alpha){\color{red}= 0} \end{array}\right]$$

Assim, se $1-\alpha^2 = 0$ e $1-\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$ temos que o sistema é possível indeterminado.

Portanto, se $\alpha = 1$ o sistema $AX = B$ é possível indeterminado. Para além disso, sabemos que

$$\underline{\text{grau de indeterminação}} = \text{n}^{\text{o}} \text{ de colunas} - \text{car}(A) = 2 - 1 = 1$$

Ou seja, temos uma única variável livre. Vamos resolver para confirmar:

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \end{cases}$$

O conjunto de soluções é $\{(1-y, y) : y \in \mathbb{R}\}$ em que y é a única variável livre.

[iv] Se $\alpha = 0$ estamos a fazer $L_2 = L_2 - 0L_1$, que é o mesmo que não fazer nada, mas não tem mal

18. Indique para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ o sistema é: impossível, possível determinado ou impossível.

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha-1 & \alpha \\ 0 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} \alpha-2 \\ 1 \\ \alpha-3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = B$$

Tal como no exercício 17, vamos comparar a $\text{car}(A)$ e a $\text{car}([A|B])$ para determinar os valores de α para quais o sistema é impossível, possível determinado ou indeterminado. A matriz $[A|B]$ está escalonada? Depende...

$$\text{Se } \alpha = 1, \ [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right] \text{ não está escalonada}$$

$$\text{Se } \alpha = 0, \ [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right] \text{ está escalonada}$$

A primeira coisa que vamos fazer vai ser escalonar a matriz para qualquer valor de α.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha-1 & \alpha & \alpha-2 \\ 0 & \alpha-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha-3 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 = \frac{L_2}{\alpha-1} \\ \alpha\neq 1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha-1 & \alpha & \alpha-2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\alpha-1} \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha-3 \end{array}\right] \underset{\substack{L_3 = \frac{L_3}{\alpha} \\ \alpha\neq 0}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha-1 & \alpha & \alpha-2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\alpha-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\alpha-3}{\alpha} \end{array}\right] = [C|D]$$

Inicialmente na L_2 o $\alpha-1$ podia ou não ser um pivot. Então o que fizemos foi dividir a L_2 por $\alpha-1$ e assim garantimos que aquela entrada é um pivot (o 1), para fazermos isto temos de assegurar que não estamos a dividir por 0, isto é, $\alpha - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 1$. De um modo semelhante, dividimos a L_3 por α desde que $\alpha \neq 0$ e ficamos com o pivot 1 na L_3. Vamos continuar a resolução sem nos preocuparmos o que acontece quando $\alpha = 1$ ou $\alpha = 0$ mais tarde voltamos aqui!

Neste caso, $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq 0$, temos que $\text{car}(A) = \text{car}([A|B]) = 3 =$ nº de colunas de A. Logo, $\boxed{\text{Se } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \text{ temos que o sistema é possível determinado.}}$

Vamos resolver o sistema para ver a solução[v]:

$$AX = B \Leftrightarrow CX = D \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \alpha-1 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha-2 \\ \frac{1}{\alpha-1} \\ \frac{\alpha-3}{\alpha} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + (\alpha-1)x_2 + \alpha x_3 = \alpha - 2 \\ x_2 = \frac{1}{\alpha-1} \\ x_3 = \frac{\alpha-3}{\alpha} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + (\alpha-1)\frac{1}{\alpha-1} + \alpha\left(\frac{\alpha-3}{\alpha}\right) = \alpha - 2 \\ x_2 = \frac{1}{\alpha-1} \\ x_3 = \frac{\alpha-3}{\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 1 + \alpha - 3 = \alpha - 2 \\ x_2 = \frac{1}{\alpha-1} \\ x_3 = \frac{\alpha}{\alpha} - \frac{3}{\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{1}{\alpha-1} \\ x_3 = 1 - \frac{3}{\alpha} \end{cases}$$

Assim, a solução do sistema quando $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\, 0, 1\}$ é $(0, {}^1\!/_{(\alpha-1)}, 1 - {}^3\!/_{\alpha})$.

O que é que acontece quando $\alpha = 1$?

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right] \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Neste caso temos $\text{car}(A) = 2 \ < \ 3 = \text{car}([A|B])$, ou seja, o sistema é impossivel.

E o que acontece quando $\alpha = 0$?

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

Neste caso temos que $\text{car}(A) = 2 \ < \ 3 = \text{car}([A|B])$, o sistema é impossivel. Em conclusão $\boxed{\text{Se } \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = 1 \text{ o sistema é impossível.}}$

[v] Este passo não é necessário na resolução do exercício

Nota: Se logo no início conseguirem ver os diferentes casos, quando $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$ ou $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ podem logo passar para a parte em que justificam com a característica. Para mim, é difícil ver a matriz e identificar logo esses casos por isso escalono a matriz e faço desta forma. O mais importante é terem a justificação da característica direitinha!

24. A matriz A é invertível, ou seja, sabemos que a inversa existe e é a matriz A^{-1}. Para $\alpha \neq 0$, queremos provar que a inversa da matriz αA existe e é ${}^1\!/\!_\alpha A^{-1}$. Portanto temos de provar que se multiplicarmos ${}^1\!/\!_\alpha A^{-1}$ à direita ou esquerda de αA dá a identidade (ver a definição do slide 35):

$$(\alpha A)(\alpha A)^{-1} = I_n \Leftrightarrow (\alpha A)\left(\frac{1}{\alpha}A^{-1}\right) = I_n \tag{1}$$

$$(\alpha A)^{-1}(\alpha A) = I_n \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\alpha}A^{-1}\right)(\alpha A) = I_n \tag{2}$$

Vamos começar por provar (1), isto é, $(\alpha A)(\alpha A)^{-1} = I_n$. Como o produto por escalar é comutativo Prop.4 slide 17 (posso mexer o α e o ${}^1\!/\!_\alpha$), temos que

$$(\alpha A)(\alpha A)^{-1} = (\alpha A)\left(\frac{1}{\alpha}A^{-1}\right) = \alpha A\frac{1}{\alpha}A^{-1} = \underbrace{\frac{1}{\alpha}\alpha}_{=1} AA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

Por fim, vamos provar (2), isto é, $(\alpha A)^{-1}(\alpha A) = I_n$. Como o produto por escalar é comutativo Prop.4 slide 17 temos que,

$$(\alpha A)^{-1}(\alpha A) = \left(\frac{1}{\alpha}A^{-1}\right)(\alpha A) = \frac{1}{\alpha}A^{-1}\alpha A = \underbrace{\alpha\frac{1}{\alpha}}_{=1} A^{-1}A = A^{-1}A = I_n$$

Assim provamos que existe uma matriz $({}^1\!/\!_\alpha A^{-1})$ que multiplicada à esquerda e à direita por αA dá a identidade. Portanto, A é invertível e a sua inversa é ${}^1\!/\!_\alpha A^{-1}$.

25. Seja A e B matrizes $n \times n$ invertíveis com inversa A^{-1} e B^{-1}, respetivamente. Queremos mostrar que AB é invertível, isto é, queremos mostrar que existe uma matriz C tal que $(AB)C = C(AB) = I_n$. Pela prop.2 do slide 36, sabemos que a matriz C é igual a $B^{-1}A^{-1}$.

Assim temos de mostrar que $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n$ e que $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$. Como o produto de matrizes é associativo, Prop. 1 slide 17, podemos colocar os parêntesis como quisermos logo:

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I_n\\ (B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1} = I_n\end{aligned}$$

A matriz AB é invertível e a inversa é $B^{-1}A^{-1}$.

29. Sabendo que A é uma matriz quadrada $n \times n$ e que $\boxed{A^4 = AAAA = O_n}$ em que O_n é a matriz nula com dimensão $n \times n$, queremos provar que $(I_n + A)^{-1} = (I_n - A)(I_n + A^2)$. Por outras palavras, queremos provar que a inversa de $(I_n + A)$ é $(I_n - A)(I_n + A^2)$ para isso basta provar:

$$(I_n + A)(I_n - A)(I_n + A^2) = I_n \tag{3}$$

$$(I_n - A)(I_n + A^2)(I_n + A) = I_n \tag{4}$$

Vamos começar por provar (3), isto é, que $(I_n + A)(I_n - A)(I_n + A^2) = I_n$.

$$\begin{aligned}(I_n + A)(I_n - A)(I_n + A^2) &= (\underbrace{I_nI_n}_{=I_n} - \underbrace{I_nA}_{=A} + \underbrace{AI_n}_{=A} - \underbrace{AA}_{=A^2})(I_n + A^2) && \text{Prop.2 do slide 17 (distribuição)}\\ &= (I_n - \cancel{A} + \cancel{A} - A^2)(I_n + A^2)\\ &= (I_n - A^2)(I_n + A^2) && \text{Prop.2 do slide 17 (distribuição)}\\ &= \underbrace{I_nI_n}_{=I_n} + \underbrace{I_nA^2}_{=A^2} - \underbrace{A^2I_n}_{A^2} - \underbrace{A^2A^2}_{=A^4}\\ &= I_n + \cancel{A^2} - \cancel{A^2} - A^4 && \text{Sabemos que } A^4 = O_n\\ &= I_n - O_n\\ &= I_n\end{aligned}$$

De um modo semelhante mostramos que $(I_n - A)(I_n + A^2)(I_n + A) = I_n$.

$$\begin{aligned}
(I_n - A)(I_n + A^2)(I_n + A) &= (\underbrace{I_n I_n}_{=I_n} + \underbrace{I_n A^2}_{=A^2} - \underbrace{A I_n}_{=A} - \underbrace{A A^2}_{=A^3})(I_n + A) && \text{Prop.2 do slide 17}\\
&= (I_n + A^2 - A - A^3)(I_n + A) && \text{Prop.2 do slide 17}\\
&= \underbrace{I_n I_n}_{=I_n} + \underbrace{I_n A}_{=A} + \underbrace{A^2 I_n}_{=A^2} + \underbrace{A^2 A}_{=A^3} - \underbrace{A I_n}_{=A} - \underbrace{A A}_{A^2} - \underbrace{A^3 I_n}_{=A^3} - \underbrace{A^3 A}_{=A^4}\\
&= I_n + \cancel{A} + \cancel{A^2} + \cancel{A^3} - \cancel{A} - \cancel{A^2} - \cancel{A^3} - A^4 && \text{Como } A^4 = O_n\\
&= I_n - O_n\\
&= I_n
\end{aligned}$$

Assim mostramos que a inversa da matriz $(I_n + A)$ é $(I_n - A)(I_n + A^2)$.

32(a). Recomendo tentarem fazer o exercício 30 e 31 antes deste.

Neste tipo de exercícios, o objetivo é isolarmos a matriz das incógnitas X usando as propriedades das matrizes que conhecemos. Existem várias opções para isolar o X, eis umas:

Opção 1:

$$\left(\left(B^{-1}\right)^T X\right)^{-1} A^{-1} = I_3$$

Usando a Prop.2 do slide 36, temos que:

$$\Leftrightarrow \left(A\left(B^{-1}\right)^T X\right)^{-1} = I_3$$

Para tirar a inversa podemos multiplicar pela matriz mais à esquerda dos dois lados da equação

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(A\left(B^{-1}\right)^T X\right)^{-1}\left(A\left(B^{-1}\right)^T X\right)}_{=I_3} = I_3\left(A\left(B^{-1}\right)^T X\right) \Leftrightarrow I_3 = A\left(B^{-1}\right)^T X$$

Para passar o A para o outro lado multiplicamos mais à esquerda por A^{-1} dos dois lados da equação!

$$\Leftrightarrow \nearrow I_3 = \nearrow A\left(B^{-1}\right)^T X \Leftrightarrow A^{-1} I_3 = \underbrace{A^{-1}A}_{=I_3}\left(B^{-1}\right)^T X \Leftrightarrow A^{-1} = \left(B^{-1}\right)^T X$$

Pela Prop. 4 do slide 36 temos que $\left(B^{-1}\right)^T = \left(B^T\right)^{-1}$ logo

$$\Leftrightarrow A^{-1} = \left(B^T\right)^{-1} X$$

Para passar o $\left(B^T\right)^{-1}$ para o outro lado multiplicamos mais à esquerda pela sua inversa $\left(\left(B^T\right)^{-1}\right)^{-1} = B^T$

$$\Leftrightarrow \nearrow A^{-1} = \nearrow \left(B^T\right)^{-1} X \Leftrightarrow B^T A^{-1} = \underbrace{B^T\left(B^T\right)^{-1}}_{=I_3} X \Leftrightarrow B^T A^{-1} = X$$

Opção 2:

$$\left(\left(B^{-1}\right)^T X\right)^{-1} A^{-1} = I_3$$

Usando a Prop.2 do slide 36, temos que:

$$\Leftrightarrow X^{-1}\left(\left(B^{-1}\right)^T\right)^{-1} A^{-1} = I_3$$

Pela Prop.1 e 4 do slide 36 temos que $\left(\left(B^{-1}\right)^T\right)^{-1} = \left(\left(B^T\right)^{-1}\right)^{-1} = B^T$

$$\Leftrightarrow X^{-1} B^T A^{-1} = I_3 \Leftrightarrow \nearrow I_3 = \nearrow X^{-1} B^T A^{-1}$$

Queremos isolar o X para isso multiplicamos por X mais à esquerda dos dois lados da equação!

$$\Leftrightarrow X I_3 = X X^{-1} B^T A^{-1} \Leftrightarrow X = B^T A^{-1}$$

...já conseguimos isolar o X e sabemos que X é igual a $B^T A^{-1}$, agora só nos resta fazer contas.

C.A. calcular a inversa de A:

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 = L_2 - L_1 \\ L_1 = L_1 - L_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = [I_3|A^{-1}]$$

Logo temos que

$$X = B^T A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

35. Uma matriz quadrada $A_{n\times n}$ diz-se ortogonal se tiver inversa e $A^{-1} = A^T$.

(a) A e B são duas matrizes ortogonais, isto é, $A^{-1} = A^T$ e $B^{-1} = B^T$. Queremos mostrar que o produto AB é ainda uma matriz ortogonal, isto é, queremos mostrar que $(AB)^{-1} = (AB)^T$.

$$\begin{array}{ll} (AB)^{-1} & \text{pela Prop. 2 slide 36} \\ =B^{-1}A^{-1} & \text{como } A \text{ e } B \text{ são ortogonais temos que } A^{-1} = A^T \text{ e } B^{-1} = B^T \\ =B^T A^T & \text{pela Prop. 5 slide 17 Cap.1.1} \\ =(AB)^T & \end{array}$$

Logo, dadas duas matrizes ortogonais A e B temos que AB é ainda uma matriz ortogonal.

(b) Seja A uma matriz ortogonal, isto é, $A^{-1} = A^T$. Queremos mostrar que a inversa de A, A^{-1}, é ainda uma matriz ortogonal. Portanto queremos mostrar que a inversa da matriz A^{-1} é igual à sua transposta, $(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^T$.

$$\begin{array}{ll} (A^{-1})^{-1} & \text{como } A \text{ é ortogona temos que } A^{-1} = A^T \\ =(A^T)^{-1} & \text{pela Prop. 4 slide 36 Cap.1.1.} \\ =(A^{-1})^T & \end{array}$$

Logo, dada uma matriz A ortogonal, a sua inversa A^{-1} é ainda uma matriz ortogonal.

36(c). **Passos para resolver um sistema linear $AX = B$ com decomposição LU:**

1. Obter a matriz U escalonando a matriz A, SEM trocar linhas nem multiplicar linhas por escalares $\alpha \neq 0$. (i.e. $\cancel{L_i \leftrightarrow L_j}$ nem $\cancel{L_i = \alpha L_i}$).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 - 3L_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 10 & -1 \end{bmatrix} \underset{L_3 = L_3 + 5L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = U$$

Assim obtemos U que é uma matriz escalonada equivalente a A ✓

2. Construir a matriz L com as colunas coloridas no passo anterior e dividimos cada coluna pelo elemento que está no seu topo:

1		
1	-2	
3	10	-6
$\div$ 1	$\div$ (-2)	$\div$ (-6)

$\Rightarrow$

1		
1	1	
3	-5	1

As restantes entradas da tabela são prenchidas com 0's e assim obtemos a matriz L que é uma matriz triangular inferior com 1's na diagonal ✓.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

(Neste ponto podem e devem confirmar que $A = LU$ ✓.)

3. Resolver o sistema $Ly = b$ em que $y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}^T$.

$$[L|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ 3 & -5 & 1 & 7 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 - 3L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & 1 & 7 \end{array}\right] \underset{L_3 = L_3 + 5L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -18 \end{array}\right] = [I_3|y]$$

Assim, temos que

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -18 \end{bmatrix}$$

4. Resolver $Ux = y$ em que $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$ é a solução do sistema $AX = b$.

$$[U|y] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array}\right] \underset{L_3 = \frac{L_3}{(-6)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 = L_2 + L_3 \\ L_1 = L_1 - 2L_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim$$

$$\underset{L_2 = \frac{L_2}{(-2)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \underset{L_1 = L_1 + L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] = [I_3|x]$$

Assim, a solução do sistema $Ax = b$ é:

$$x = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$