Revisão de sistemas lineares

Álgebra Linear e Geometria Analítica - A

Equações lineares

são equações que podem ser escritas na forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

em que $x_1, \ldots, x_n$ são as variáveis/incógnitas da equação, $b \in \mathbb{R}$ é o termo independente e $a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ são os coeficientes.

Equações lineares

são equações que podem ser escritas na forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

em que $x_1, \ldots, x_n$ são as variáveis/incógnitas da equação, $b \in \mathbb{R}$ é o termo independente e $a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ são os coeficientes.

Exemplos

$$x_1 + x_2 = 3$$

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 9$$

Notar que as equações lineares:

- Não envolvem produtos ou raízes de variáveis
- Todas as variáveis tem grau igual a 1
- As variáveis não aparecem como argumentos de funções trignométricas, exponenciais ou logarítmicas

Notar que as equações lineares:

- Não envolvem produtos ou raízes de variáveis
- Todas as variáveis tem grau igual a 1
- As variáveis não aparecem como argumentos de funções trignométricas, exponenciais ou logarítmicas

Assim,

- $4x_1 - 5x_2 = x_1x_2$
- $x_1^2 + x_2 = 1$
- $x_1 + sin(x_2) = 2$

não são equações lineares

Sistemas lineares

consiste numa coleção de equações lineares que envolvem as mesmas variáveis (por exemplo, $x_1, \ldots, x_n$).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sistemas lineares

consiste numa coleção de equações lineares que envolvem as mesmas variáveis (por exemplo, $x_1, \ldots, x_n$).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

O elemento a_{ij} corresponde ao coeficiente que está na equação i do sistema linear a multiplicar pela variável x_j

Sistemas lineares

consiste numa coleção de equações lineares que envolvem as mesmas variáveis (por exemplo, $x_1, \ldots, x_n$).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

O elemento a_{ij} corresponde ao coeficiente que está na equação i do sistema linear a multiplicar pela variável x_j

Um sistema diz-se homogéneo sse $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

O objetivo é . . .

encontrar todas as soluções $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que todas as equações do sistema sejam satisfeitas substituindo cada x_i por s_i.

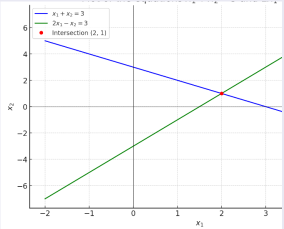
O objetivo é . . .

encontrar todas as soluções $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que todas as equações do sistema sejam satisfeitas substituindo cada x_i por s_i.

Exemplo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$$

$(2, 1)$ é solução do sistema



Dois sistemas lineares são equivalentes se têm o mesmo conjunto de soluções.

Dois sistemas lineares são equivalentes se têm o mesmo conjunto de soluções.

Exemplo: sistemas equivalentes

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = 5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$(3, -1)$ é a única solução de ambos os sistemas

Dois sistemas lineares são equivalentes se têm o mesmo conjunto de soluções.

Exemplo: sistemas equivalentes

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = 5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$(3, -1)$ é a única solução de ambos os sistemas

Exemplo: sistemas não equivalentes

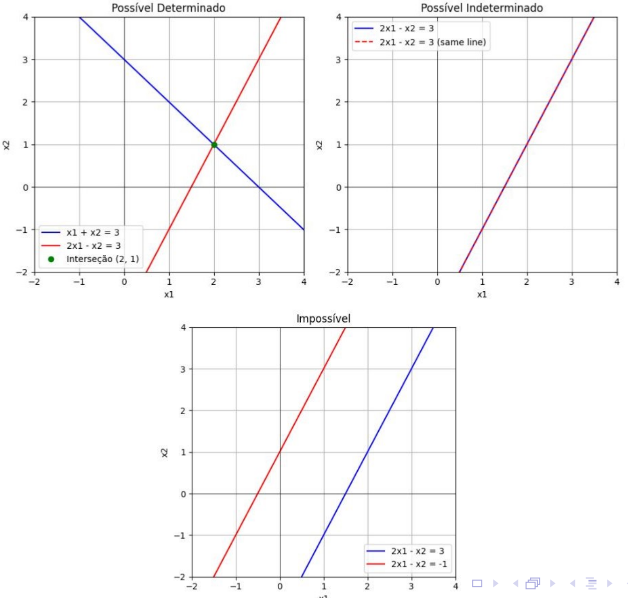
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \end{cases} \quad \not\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$$

$(2, 1)$ é solução do primeiro mas não do segundo.

Um sistema de equações lineares é:

- Possível se existe pelo menos uma solução
  - Possível determinado se existir uma única solução
  - Possível indeterminado se existir mais do que uma solução
- Impossível se não existirem soluções

Geometricamente em $\mathbb{R}^2$



Notas:

- Um sistema homogéneo é sempre possível (determinado ou indeterminado).
- !! Não se pode concluir que um sistema é possível ou impossível unicamente a partir do número de equações e variáveis. Por exemplo, o seguinte sistema tem duas variáveis e duas equações mas é impossível.

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$$