Tarea Febrero 14

Juliana Parra Caro

Feb 2023

1 Punto 1

Verificar si la operación * sobre el conjunto {a,b,c,d} es un grupo.

Para comenzar, se define una función μ como:

μ	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	d	d	d
c	a	b	d	c
d	d	a	c	d

Caso 1 Dos de los factores son elementos neutros:
$(a * a) * b = a * (a * b)$
a $*b = a * b$
b = b
Caso 2 Uno de los factores es el elemento neutro:
$(a * b) * c = a * (b * c)$
b $*c = a * d$
d = d
Caso 3 Ninguno de los factores es el elemento neutro:
$(b * c) * d = b * (c * d)$
d $*d = b * c$
d = d
Con estos tres casos, se prueba la sociatividad de la función μ

2 Punto 2

Demostrar que la multiplicación de matrices cuadradas es asociativa.

Se define el producto de matrices cuadradas como:
Sean A y B matrices cuadradas reales del mismo orden que el producto $C = A * B$, resultado de multiplicar las filas de A por las columnas de B, es decir:

$$A = \begin{bmatrix} \text{a1} & \text{a2} \\ \text{a3} & \text{a4} \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} b1 & b2 \\ b3 & b4 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} (a1 * b1 + a23) & (a1 * b2 + a2 * b4) \\ (a3 * b1 + a42) & (a3 * b2 + a4 * b4) \end{bmatrix}$$

Es posible deducir que cada elemento de la matriz producto C está conformado por una suma de productos Reales, y al ser números Reales, por propiedades de la suma de estos se asume que el producto de matrices C pertenece a dicho conjunto, pues para un producto $D = A * B * C$ donde $A, B, C \in R$, y se tiene que:

$$D11 = ((a1 * b1 + a2 * b3) * c1) + ((a1 * b2 + a2 * b4) * c2) =$$
$$((b1 * c1 + b2 * c3) * a1) + ((b1 * c2 + b2 * c4) * a2)$$

Este resultado es una suma de productos reales, y como se demostró anteriormente su asociatividad, también se extiende esta propiedad a todos los elementos que conforman la matriz $D \in R$

3 Punto 3

Verificar que la multiplicación de complejos es asociativa.

Se define el conjunto de los números complejos C como el conjunto de números reales
$R + i = \sqrt{-i}$
siendo cualquier número complejo
$c \in$ C como $c = (a + ib)$ con $a, b \in (R)$

Para definir elproducto de complejos se tiene
$c = (A + IB), D = (E + IF)$
$P = (A * E - B * F) + (A * F + B * E)I$

También ser define la forma polar de un número complejo como:
Si $c \in C$ su expresión polar será $c = r(cos(\theta) + sen(\theta)i)$, en donde
$r = \sqrt{a^2 + b^2}\theta = tan^{-1}(\frac{b}{a})$, $a \neq 0$

Sen usará la igualdad $e^i = cos(\theta) + sen(\theta)i$ para demostrar las propiedades de grupo en los complejos, acompañado de el producto de exponenciales reales.

Elemento neutro

Sean a y b complejos expresados de la forma
$a = e^i\theta$ y $b = e^i\alpha$, $\theta, \alpha \in R$

su producto es $a * b = e^i(\theta + \alpha)$

Es decir, una suma de reales. Al comparar, se sabe que el elemento neutro de la suma de reales es 0, por lo que se reemplaza por 0 para encontrar el elemento neutro en el producto.

$$\theta = 0$$

$$a * b = e^i(\theta + \alpha) = e^i(0 + \alpha) = e^i(\alpha$$

$$a * b = e^i(\theta) * e^i(\alpha) = e^i(0) * e^i(\alpha) = 1 * e^i(\alpha) = e^i(\alpha)$$

Por las propiedades de los exponentes reales se sabe que un número real elevado a la 0 es 1, así que el elemento neutro de los números complejos es 1.

Inverso multiplicativo

Para determinar el inverso multiplicativo en los números reales, se parte del inverso aditivo. Se establece que

$\forall a \in R \wedge -a \in R$, tal que $-a + a = 0$

Asignamos $\alpha = -\theta$, así $a * b = e^i(\theta + \alpha) = e^i(\theta - \alpha) = e^i(0) = 1$

Por las propiedades de los exponentes se tiene que

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Que permite inferir que el inverso de multiplicativo de un numero complejo c es $\frac{1}{c}$.

Asociatividad

Para demostrar la propiedad de asociatividad, se toman 3 números arbitrarios, se escriben en su forma exponencial y se halla el producto:

$$(e^i(\alpha) * e^i(\theta))e^i(\beta) = e^i(\alpha + \theta) * e^i(\beta) = e^i((\alpha + \theta) + \beta) =$$

$$e^i(\alpha + (\theta + \beta)) = e^i(\alpha) * e^i(\theta + \beta) = e^i(\alpha) * (e^i(\theta) * e^i(\beta))$$

demostrando que el producto de los números complejos es asociativo.