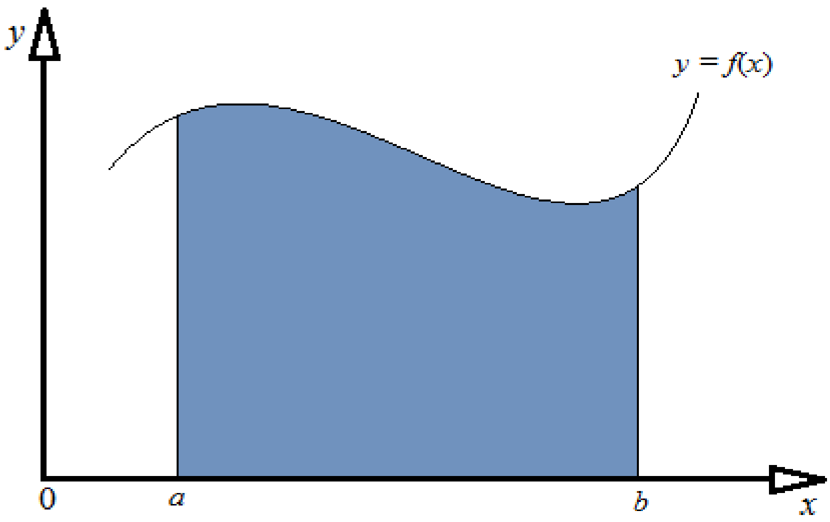
5 METODE NUMERIK UNTUK INTEGRASI

Integral tentu dikenalkan dalam Kalkulus sebagai limit jumlah Reimann. Untuk fungsi y = f(x) yang grafiknya berada diatas sumbu-*x*, $\int_a^b f(x)dx$ diartikan sebagai luas daerah yang dibatasi oleh kurva *f*(*x*), sumbu-*x*, garis *x* = *a*, dan garis *x* = *b*. Sedangkan jika grafik *y* = *f*(*x*) berada dibawah sumbu-*x*, maka $\int_a^b f(x)dx$ diartikan sebagai negatif dari luas daerah yang dibatasi oleh kurva *f*(*x*), sumbu-*x*, garis *x* = *a*, dan garis *x* = *b*. Dalam perkembangannya, akhirnya integral tentu tidak hanya digunakan untuk menghitung luas daerah, tetapi juga untuk menghitung volume benda putar, panjang kurva, luas permukaan benda putar, dan lain sebagainya.



Gambar 5.1. Integral suatu fungsi

Jika suatu fungsi *f* kontinu pada suatu interval tutup [*a*, *b*], maka nilai $\int_a^b f(x)dx$ pasti ada. Walaupun nilainya pasti ada, tetapi untuk menghitungnya belum tentu mudah. Sering terjadi metode-metode yang ada (Teorema Dasar Kalkulus) tidak bisa atau sulit digunakan untuk menyelesaikan mencari nilai integral secara analitik. Hal ini mungkin disebabkan karena integrannya tidak dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi sederhana yang dapat diselesaikan dengan Teorema Dasar Kalkulus. Beberapa contoh integran yang sulit disederhanakan adalah e^{-x^2}, $\sin(x^2)$, $\sqrt{1-x^2}$, $\frac{\sin x}{x}$. Bahkan ada beberapa kasus yang integral tentunya lebih mudah diselesaikan dengan menggunakan metode aproksimasi (numerik), dari pada secara analitik. Metode numerik dapat digunakan untuk menghitung integral tentu yang fungsi integrannya tidak diberikan secara analitik (ekplisit), tetapi hanya diberikan dalam bentuk tabel data(numerik). Dengan demikian kita dibatasi dengan sejumlah titik data yang diberikan.

Metode numerik untuk integrasi adalah suatu perhitungan integral tentu yang didasarkan pada perhitungan perkiraan (pendekatan). Hal ini tentu akan menyebabkan timbulnya galat. Perhitungan dilakukan dengan mengganti (mendekati) fungsi integral atau data fungsi dengan suatu fungsi yang lebih mudah dihitung integralnya. Fungsi yang biasanya digunakan untuk mendekati fungsi integral atau data fungsi adalah polinom orde tertentu. Secara umum, semakin besar orde polinom yang digunakan untuk mendekati, maka akan semakin kecil galat yang ditimbulkan. Integral tentu dapat diaproksimasikan dengan menggunakan satu polinom (segmen tunggal) atau dengan menggunakan beberapa polinom yang diterapkan secara sepotong-sepotong (segmen ganda). Metode numerik untuk integrasi yang akan kita bahas dalam bab ini kita bagi dalam dua kelompok, yaitu kelompok metode **Newton Cotes dan metode Gauss Lagrange**. Dalam penggunaan metode Newton Cotes, kita mengganti fungsi atau tabel data dengan suatu fungsi polinom yang sederhana agar mudah diintegralkan. Dalam metode ini, interval [*a*, *b*] dibagi dalam jarak yang tetap, yaitu dibagi menjadi subinterval-subinterval dengan panjang yang sama. Metode Newton Cotes yang kita bahas meliputi metode (aturan) **trapesium, metode Simpson 1/3 dan metode Simpson 3/8.** Sedangkan metode Gauss Kuadratus hanya dapat digunakan untuk menghitung integral yang fungsi integrannya diberikan secara ekplisit. Jadi metode Gauss Kuadratur tidak dapat digunakan untuk menghitung integral yang nilai fungsinya diberikan dalam bentuk tabel data.

A. Metode Trapesium

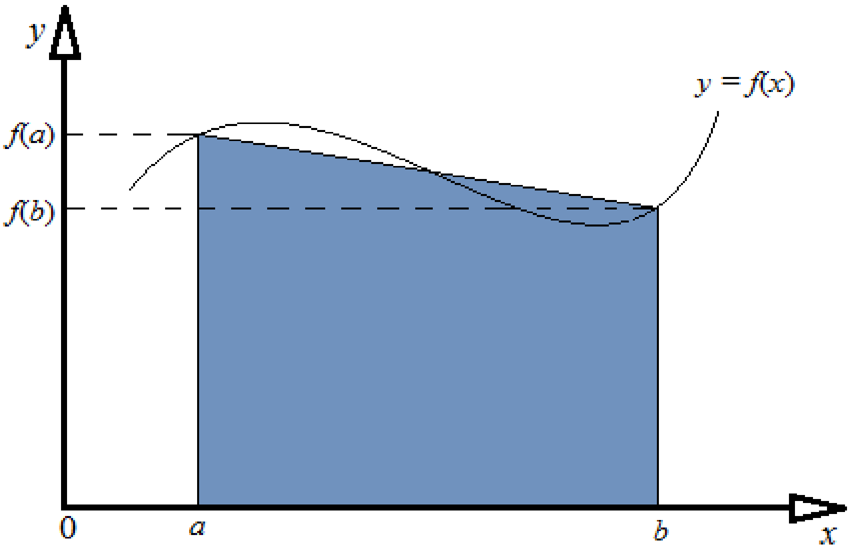
Metode trapesium termasuk metode Newton Cotes orde pertama. Dalam metode ini, grafik fungsi $y = f(x)$ didekati dengan garis lurus yang menghubungkan titik $(a, f(a))$ dan $(b, f(b))$. Dengan demikian luas daerah dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, garis $x = a$ dan garis $x = b$ dihampiri oleh trapesium yang dibatasi oleh garis lurus yang menghubungkan titik (a ,$f(a)$) dan (b, $f(b)$), garis $x = a$, garis $x = b$ dan sumbu-x. Dengan menggunakan rumus luas untuk trapesium, kita peroleh aturan trapesium segmen tunggal berikut ini.

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Penggunaan daerah trapesium untuk mendekati daerah yang sebenarnya tentu saja mengakibatkan terjadinya galat (kesalahan). Besarnya galat mutlak yang terjadi adalah

$$E = -\frac{1}{12} f''(c)(b-a)$$

Di mana $c \in (a, b)$. Sedangkan besarnya galat relatif rumusnya dapat dilihat di bab 1.



Gambar 5.2. Metode Trapesium segmen tunggal

Contoh 5.1: Gunakan aturan trapesium segmen tunggal untuk menghampiri $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

Jawab: Jika integral tersebut diselesaikan secara analitik maka kita peroleh hasil sebagai berikut

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxdx = [-cosx]_0^{\frac{\pi}{2}} = -cos\frac{\pi}{2} - (-cos0) = -0 + 1 = 1$$

Dengan aturan Trapesium segmen tunggal kita peroleh

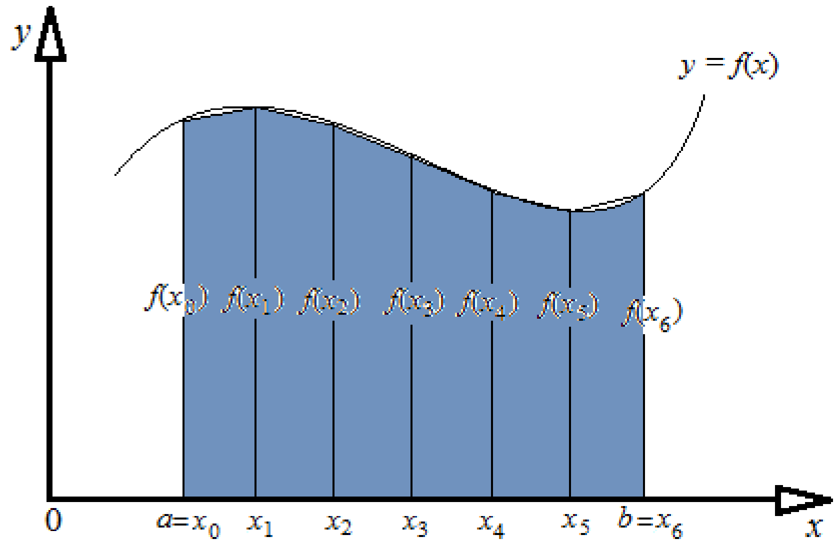
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxdx \approx \left(\frac{\pi}{2} - 0\right)\left(\frac{sin0 + sin\frac{\pi}{2}}{2}\right) = 0{,}785000$$

Dengan demikian galat mutlak dan galat relatifnya adalah

$E = x - x^* = 0{,}215$

$e = \frac{x - x^*}{x}$ x 100% =21,5%.

Dari contoh di atas dapat dilihat bahwa dengan menggunakan satu buah garis lurus untuk mendekati kurva lengkung ternyata menimbulkan kesalahan yang cukup besar. Untuk mengurangi besarnya kesalahan yang terjadi, kita dapat menggunakan sederetan (beberapa) Gria lurus untuk mendekati kurva lengkung secara sepotong-sepotong sehingga terbentuk beberapa daerah trapesium. Caranya adalah dengan mempartisikan selang $[a, b]$ menjadi n selang bagian dengan panjang yang sama, yaitu $h = \frac{b-a}{n}$. Dengan demikian diperoleh titik-titik $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ dengan $x_i = a + ih$. Langkah selanjutnya adalah menghubungkan titik-titik $\left(x_{i-1}, f(x_{i-1})\right)$ dan $\left(x_i, f(x_i)\right)$ dengan suatu ruas Gris sehingga terbentuklah n buah trapesium. Cara ini disebut metode trapesium segmen ganda. Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar 5.3.



Gambar 5.3. Metode Trapesium segmen ganda

Luas trapesium bagian ke-i adalah

$$L_i = \frac{h}{2}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)$$

Yang perlu diingat L_i adalah luas trapesium bertanda, karena L_i akan negatif jika $\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)$ bernilai negatif. Dengan menjumlahkan n buah luas bertanda dari trapesium-trapesium tersebut, kita dekati integralnya. Jadi kita peroleh

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right) + \frac{h}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right) + \ldots + \frac{h}{2}\left(f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

Karena ada suku-suku yang sama, maka rumus tersebut dapat kita sederhanakan menjadi *Aturan Trapesium segmen ganda* berikut ini.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)] \quad (5.3)$$

dengan $h = \frac{b-a}{n}$

$x_i = a + ih$

Untuk lebih memahami Aturan Trapesium segmen ganda ini, perhatikan contoh berikut.

Contoh 5.2: Gunakan Aturan Trapesium segmen ganda dengan mengambil *n* = 6 dan dalam 6D untuk mencari suatu hampiran dari $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxdx$.

Jawab: Karena *h* = 6, maka $h = \frac{\frac{\pi}{2}-0}{6} = \frac{\pi}{12}$, sehingga

$x_0 = 0$ → $f(x_0) = 0$

$x_1 = \frac{\pi}{12}$ = 0,261 799 → $f(x_1)$ = 0,258 819

$x_2 = \frac{2\pi}{12}$ = 0,523 599 → $f(x_2)$ = 0,500 000

$x_3 = \frac{3\pi}{12}$ = 0,785 398 → $f(x_3)$ = 0,707 107

$x_4 = \frac{4\pi}{12}$ = 0,047 198 → $f(x_4)$ = 0,866 025

$x_5 = \frac{5\pi}{12}$ = 0,308 997 → $f(x_5)$ = 0,965 926

$x_6 = \frac{6\pi}{12}$ = 0,570 796 → $f(x_6)$ = 1

Jadi

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxdx =$

$\frac{\pi}{24}[0 + 2(0{,}258\,819 + 0{,}500\,000 + 0{,}707\,107 + 0{,}866\,025 + 0{,}965\,926) + 1]$

= (1 + 2(3,297877)) = (0,190 900) (7,595 754) = 0,994 282

Dengan membandingkan dengan hasil analitiknya, diperoleh galat mutlak dan galat relatifnya, yaitu

$|E| = |x - x^{\wedge} *|$= 1 - 0,994 282= -0, 005 718

$|e| = \left|\frac{x-x^*}{x}\right|$ x 100% = 0, 5718%

Dapat kita lihat bahwa terdapat galat yang relatif kecil dibandingkan dengan segmen tunggal dalam contoh 5.1 , apalagi galat relatifnya jauh lebih kecil dibandingkan dengan galat relatif segmen tunggalnya. Jadi untuk memperkecil galat dapat kita lakukan dengan memperbesar *n*. Tetapi perlu diingat bahwa dengan memperbesar *n* juga dapat menimbulkan galat perhitungan yang lebih besar.

Untuk fungsi yang diberikan secara diskrit dengan tabel data , juga dapat kita selesaikan dengan Aturan Trapesiumsegmen ganda. Yang perlu diperhatikan adalaha syarat x_i nya yang harus berjarak sama.

Contoh 5.3: Diberikan tabel data di bawah ini. Hitunglah luasan di bawah kurva $f(x)$ antara $x = 0$ dan $x = 2$.

Jawab : Dengan menggunakan metode trapesium kita peroleh $h = 0{,}5$ dan

$$\int_0^2 f(x)dx = \frac{0{,}5}{2}(1 + 2(5) + 2(10) + 2(12) + 30) = 21{,}25$$

Kita juga dapat menggunakan Aturan Trapesium untuk menghitung hampiran integral fungsi yang tidak dapat atau sulit diselesaikan secara analitik dengan menerapkan teorema dasar Kalkulus. Perhatikan contoh integral yang penting dalam statistik berikut ini.

Contoh 5.4 : Gunakan Aturan Trapesium segmen ganda dengan $n = 6$ dan dalam 6D untuk menghitung $\int_0^1 e^{-x^2}dx$.

Jawab: Karena $h = \frac{1}{6}$ dan $f(x) = e^{-x^2}$, maka diperoleh

x_0 = 0, 000 000	$f(x_0)$ = 1, 000 000
x_1 = 0, 166 667	$f(x_1)$ = 0, 972 604
x_2= 0, 333 333	$f(x_2)$ = 0, 894 839
x_3 = 0, 500 000	$f(x_3)$ = 0, 778 801
x_4 = 0, 666 667	$f(x_4)$ = 0, 641 180
x_5 = 0, 833 333	$f(x_5)$ = 0, 499 352
x_6 = 1, 000 000	$f(x_6)$ = 0, 367 879

$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{12}[1{,}000\,000 + 2(0{,}972\,604) + 2(0{,}894\,839) + 2(0{,}778\,801) + 2(0{,}641\,180) + 2(0{,}499\,352) + 0{,}367\,879]$ = $\frac{1}{12}$(8,941 433) = 0,745 119.

Dalam menggunakan Aturan Trapesium untuk menghampiri integral tentu suatu fungsi kita harus memperhatikan galat yang muncul dari metode ini. Galat Aturan Trapesium segmen ganda adalah

$$E_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c) = -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(c) \qquad (5.4)$$

dengan *c* berada antara *a* dan *b* serta *n* adalah banyaknya partisi dari *x* (banyaknya trapesium). Sehingga

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right) - \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c) \qquad (5.5)$$

Nilai $f''(c)$ untuk kebanyakan fungsi didekati oleh $\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$. Sehingga rumus (5.5) menjadi *Rumus Trapesium dengan koreksi ujung*, karena memperhatikan koreksi pada ujung-ujung interval *a* dan *b*, yaitu

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right) - \frac{h^2}{12}\left(f'(b) - f'(a)\right) \qquad (5.6)$$

Karena Aturan Trapesium dapat digunakan untuk menghampiri integral tentu suatu fungsi yang disajikan dalam bentuk diskrit, maka untuk menghitung galatnya, nilai $f'(a)$ dan $f'(b)$ dapat diganti dengan defernsial beda hingga berikut ini.

$$f'(a) = \frac{f(x_1)-f(a)}{h} \text{ dan } f'(b) = \frac{f(a)-f(x_{n-1})}{h}$$

Dengan demikian rumus (5.6) menjadi

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right) - \frac{h}{12}\left(f(a) + f(b) - f(x_1) - f(x_{n-1})\right)$$

Contoh 5.5: Tentukan galat maksimum pada contoh 5.4.

Jawab: Galat maksimum diperoleh dari rumus (5.4) dengan mengambil *c* antara *a* dan *b* sedemikian sehingga $|f''(c)|$ maksimum pada interval [*a*, *b*].

Karena $f(x) = e^{-x^2}$, maka $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ dan $f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$

Nilai maksimum $|f''(c)|$ pada [0, π] cukup diambil batasnya saja dengan menggunakan sifat-sifat nilai mutlak.

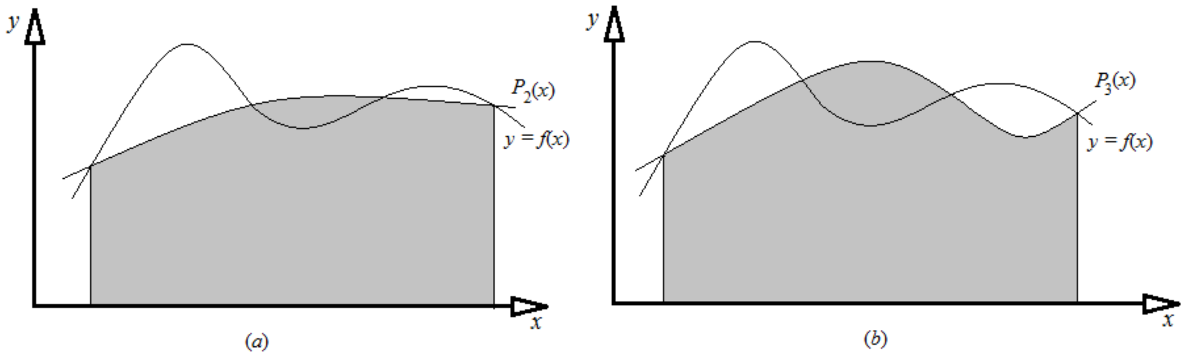
$$|f''(c)| = |(4x^2 - 2)e^{-x^2}| = e^{-x^2}|4x^2 - 2| \le e^{-x^2}(4x^2 + 2) \le 1(4 + 2) = 6$$

Jadi $|E_n| = \frac{(b-a)^3}{12n^2}|f''(c)| \le \frac{(1-0)^3}{126^2}(6) = \frac{1}{72} \approx 0{,}013889$

Batas galat yang kita peroleh ini adalah galat dari metode, belum termasuk galat dari perhitungan. Tetapi karena *n* cukup kecil, maka galat hitungan dapat diabaikan.

B. Aturan Simpson (Aturan Parabol)

Untuk memperkecil galat metode dalam Aturan Trapesium kita dapat lakukan dengan memperkecil panjang subinterval, yaitu dengan memperbesar *n*. Disamping cara tersebut, kita dapat memperkecil galat dengan meningkatkan orde dari polinom yang mendekati kurva lengkung tersebut. Jika pada Aturan Trapesium kita menggunakan polinom orde pertama, maka pada Aturan Simpson yang akan kita bahas ini kita menggunakan polinom orde dua dan orde tiga. Pada Aturan Simpson $\frac{1}{3}$ kita gunakan polinom orde kedua, sedangkan pada pada Aturan Simpson $\frac{3}{8}$ digunakan polinom orde ketiga.



Gambar 5.4. (a) Aturan Simpson $\frac{1}{3}$ (b) Aturan Simpson $\frac{3}{8}$

Seperti dalam menjelaskan Aturan Trapesium, untuk lebih memahami Aturan Simpson maka terlebih dahulu kita jelaskan Aturan Simpson segmen tunggal. Yaitu kurva lengkung hanya didekati dengan satu buah polinom. Setelah Aturan Simpson segmen tunggal dipahami, maka kemudian kurva lengkung tersebut kita dekati dengan beberapa polinom secara sepotong-sepotong(segmen ganda).

1. Aturan Simpson $\frac{1}{3}$

Aturan Simpson $\frac{1}{3}$ adalah metode Newton Cotes orde dua karena menggunakan polinom orde dua untuk mendekati $f(x)$. Nilai $\frac{1}{3}$ diperoleh karena Δx dibagi **3 (**tiga). Polinom orde dua yang digunakan untuk mendekati kurva $f(x)$ dalam metode ini melalui titik-titik $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ $(x_i, f(x_i))$ dan $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Penurunan rumus Simpson berdasarkan deret Taylor. Misalkan

$$A(x) = \int_c^x f(t)\,dt \qquad (5.7)$$

Dengan mendeferensialkan kedua ruas dari persamaan (5.7) kita peroeleh

$$\frac{dA(x)}{dx} = f(x) \tag{5.8}$$

Dan dengan menggunakan persamaan deret Taylor kita peroleh

$$A(x_{i+1}) = A(x_i + \Delta x)$$

$$= A(x_i) + \Delta x f(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} f'(x_i) + \frac{\Delta x^3}{3!} f''(x_i) + \frac{\Delta x^4}{4!} f'''(x_i) + O(\Delta x^5) \tag{5.9}$$

$$A(x_{i-1}) = A(x_i - \Delta x)$$

$$= A(x_i) - \Delta x f(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} f'(x_i) - \frac{\Delta x^3}{3!} f''(x_i) + \frac{\Delta x^4}{4!} f'''(x_i) - O(\Delta x^5) \tag{5.10}$$

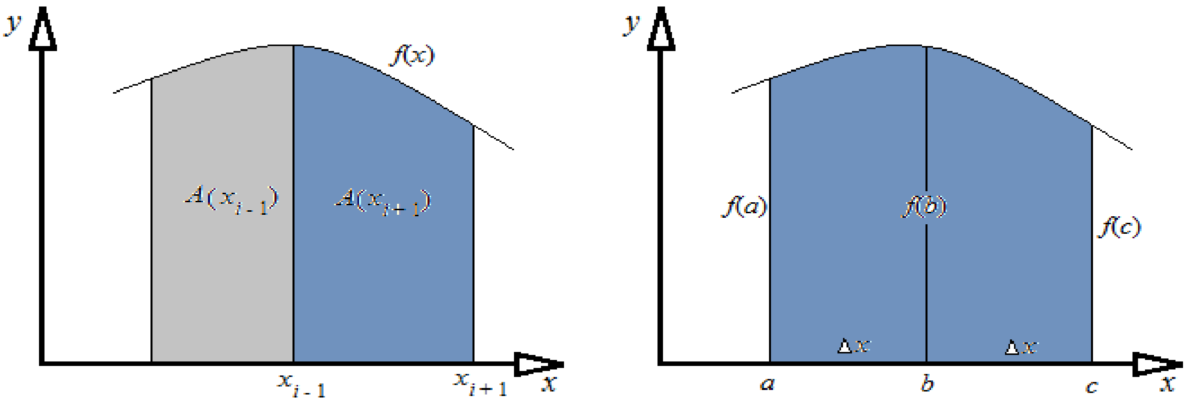
Di mana $A(x_{i+1})$ adalah luas daearh di bawah kurva $f(x)$ dan dibatasi oleh garis $x = c$ dan $x = x_{i+1}$. Sedangkan $A(x_{i-1})$ adalah luas daearh di bawah kurva $f(x)$ dan dibatasi oleh garis $x = c$ dan $x = x_{i-1}$. Dengan demikian luas daerah di bawah kurva $f(x)$ yang dibatasi oleh garis $x = x_i$-1 dan $x = x_{i+1}$ adalah $A(x_{i+1})$ dikurangi $A(x_{i-1})$. Sebut luas daerah ini dengan A_i sehingga $A_i = A(x_{i+1})$ - $A(x_{i-1})$ dan dengan menggunakan rumus (5.9) dan (5.10) kita peroleh

$$A_i = 2\Delta x f_i + \frac{\Delta x}{3}(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}) + \frac{\Delta x^3}{3} O(\Delta x^2) + O(\Delta x^5)$$

Atau secara singkat dapat dituliskan sebagai

$$A_i = \frac{\Delta x}{3}(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}) + O(\Delta x^5) \tag{5.12}$$

Rumus (5.12) ini disebut sebagai Aturan Simpson $\frac{1}{3}$. Untuk lebih memperjelas rumus ini kita tinjau terlebih dahulu untuk pemakaian Aturan Simpson $\frac{1}{3}$ satu daerah (segmen tunggal).



(a) (b)

Gambar 5.5 (a) Penurunan Aturan Simpson (b) Aturan Simpson $\frac{1}{3}$ segmen tunggal

Dalam aturan ini $\Delta x = \frac{b-a}{2}$ sehingga dari rumus (5.12) kita peroleh

$$A = \int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{6}(f(a) + 4f(c) + f(b)) = \frac{\Delta x}{3}(f(a) + 4f(c) + f(b)) \quad (5.13)$$

dengan *c* adalah titik tengah antara *a* dan *b*. Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar (5.5b).

Contoh 5.6: Aturan Simpson $\frac{1}{3}$ segmen tunggal untuk menghampiri $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

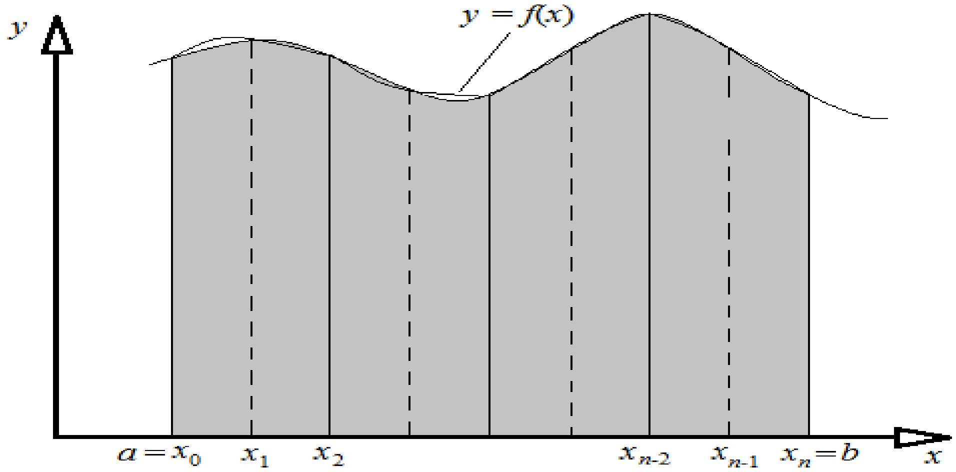
Jawab: Dengan menggunakan rumus (5.13) kita peroleh

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{12}\left(\sin 0 + 4\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

= 0,261 799(0 + 4(0,707 107) + 0,909 297) = 0,978 533

Dan galat relatifnya adalah *e* = 2,1467%

Hasil ini jauh lebih bagus jika dibandingkan dengan Aturan Trapesium segmen tunggaL pada contoh 5.1 yang diperoleh $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 0{,}785000$ dengan galat relatif 21,5%. Sedangkan hasil analitiknya adalah 1.



Gambar 5.6. Aturan Simpson $\frac{1}{3}$ dengan *n* daerah (segmen ganda)

Jika kita akan menggun akan Aturan Simpson $\frac{1}{3}$ dengan *n* daerah, maka interval [*a*, *b*] harus kita bagi menjadi *n* sub interval yang sama panjang dengan panjang

$\boldsymbol{h = \Delta x = \frac{b-a}{n}}$ dan n harus genap. Sehingga luas total diperoleh dengan menjumlahkan semua luas daerah bagiannnya, yaitu (perhatikan gambar (5.6))

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_1 + A_3 + \cdots + A_{n-1} \qquad (5.14)$$

Dengan mensubstitusikan rumus (5.12) ke rumrs (5.14) kita peroleh

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{\Delta x}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4) + \cdots + \frac{\Delta x}{3}(f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

Atau dapat dituliskan dalam bentuk

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)}$$

(5.15)

Dengan pola koefisien adalah 1, 4, 2, 4, 2, ..., 4, 2, 4, 1. Sedangkan perkiraan kesalahan yang terjadi pada Aturan Simpson $\frac{1}{3}$ segmen ganda (n daerah) adalah

$$E = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}$$

dimana $f^{(4)}$ adalah rerata turunan keempat untuk setiap interval.

Contoh 5.7. Hitunglah $\int_0^4 e^x dx$ dengan menggunakan aturan Simpson $\frac{1}{3}$ dengan 4 segmen

Jawab: Karena a = 0, b = 4, dan n = 5, maka Δx = 1, sehingga $x_0 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; dan $x_4 = 4$. Sehingga diperoleh

$$\int_0^4 e^x dx \approx \frac{1}{8}(e^0 + 4e^1 + 2e^2 + 4e^3 + e^4) = 53{,}863846$$

Sedangkan jika kita hitung dengan menggunakan rumus dasar integral tentu yang telah kita kenal di kalkulus diperoleh hasil eksak 6D berikut ini.

$$\int_0^4 e^x dx = e^x]_0^4 = 53{,}598150$$

Dengan demikian galat relatif dalam persen diperoleh

$$e = \frac{53{,}598150 - 53{,}863846}{53{,}598150} \text{x } 100\% = 0{,}5\%.$$

2. Aturan Simpson $\frac{3}{8}$

Cara penurunan Aturan Simpson $\frac{3}{8}$ hampir sama dengan Aturan Simpson $\frac{1}{3}$. Hanya saja pada Aturan Simpson $\frac{3}{8}$ polinomial yang digunakan adalah polinomial orde tiga yang melalui empat titik. Dengan demikian

$$A = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_3\,(x)dx$$

Yang memberikan rumus

$$A \approx \frac{3\Delta x}{8}\big(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\big) \qquad (5.16)$$

dengan $\Delta x = \frac{b-a}{3}$

Rumus (5.16) ini dikenal sebagai aturan Simpson $\frac{3}{8}$ karena menggunakan perkalian dengan $\frac{3}{8}$. Rumus ini juga dapat dituliskan dalam bentuk

$$A \approx \underbrace{b-a}_{\text{lebar}}\underbrace{\frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}}_{\text{tinggi rata-rata}}$$

Contoh 5.8. Hitunglah $\int_0^4 e^x dx$ dengan menggunakan aturan Simpson $\frac{3}{8}$.

Jawab: Karena a = 0, b = 4, maka Δx = 1,333 333, sehingga x_0 = 0, x_1 = 1,333 333, x_2 = 2,666 667 dan x_3 = 4. Sehingga diperoleh

$$\int_0^4 e^x dx \approx \frac{(4-0)}{8}(e^0 + 3e^{1,333333} + 3e^{2,666667} + e^4) = 55{,}077456$$

Sedangkan besarnya galat relatif dalam persen adalah

$$e = \frac{53{,}598\ 150 - 55{,}077\ 456}{53{,}598\ 150}\text{x}100\% = -2{,}76\%$$

Secara umum aturan Simpson lebih teliti dibandingkan dengan Aturan Trapesium. Dan Aturan Simpson $\frac{1}{3}$ lebih disukai dari pada aturan Simpson $\frac{3}{8}$, karena mencapai ketelitian sampai orde tiga hanya dengan tiga titik. Tetapi karena Aturan Simpson $\frac{1}{3}$ memerlukan *n* yang genap, maka jika *n* ganjil dapat digunakan gabungan antara Aturan Simpson $\frac{1}{3}$ dan aturan Simpson $\frac{3}{8}$ dengan (*n* – 3) daerah menggunakan aturan Simpson $\frac{1}{3}$ sedangkan daerah sisanya menggunakan $\frac{3}{8}$.

Contoh 5.9. Hitunglah $\int_0^4 e^x dx$ dengan menggunakan aturan Simpson dengan 5 segmen

Jawab: Karena a = 0, b = 4, dan n = 5, maka Δx = 0,8, sehingga x_0 = 0; x_1 = 0,8; x_2 = 1,6; x_3 = 2,4; x_4 = 3,2 dan x_5 = 4. Sehingga diperoleh

$f(0) = 1$ $f(2{,}4) = 11{,}023\ 176$

$f(0{,}8) = 2{,}225\ 541$ $f(3{,}2) = 24{,}532\ 530$

$f(1{,}6) = 4{,}953\ 032$ $f(4) = 54{,}598\ 150$

Integral untuk dua segmen pertama dihitung dengan Aturan Simpson $\frac{1}{3}$, diperoleh

$A_1 = \int_0^{1,6} e^x dx = \frac{1,6}{6}(f(0) + 4f(0,8) + f(1,6)) = 3{,}961\ 386$

Sedangkan tiga segmen terakhir dihitung dengan menggunakan aturan Simpson $\frac{3}{8}$sebagai berikut.

$A_2 = \int_{1,6}^{4} e^x dx = \frac{(4-1,6)}{6}(f(1,6) + 3f(2,4) + 3f(3,2) + f(4)) =$

$42{,}644\ 632$

Integral total adalah jumlah kedua hasil tgersebut, yaitu

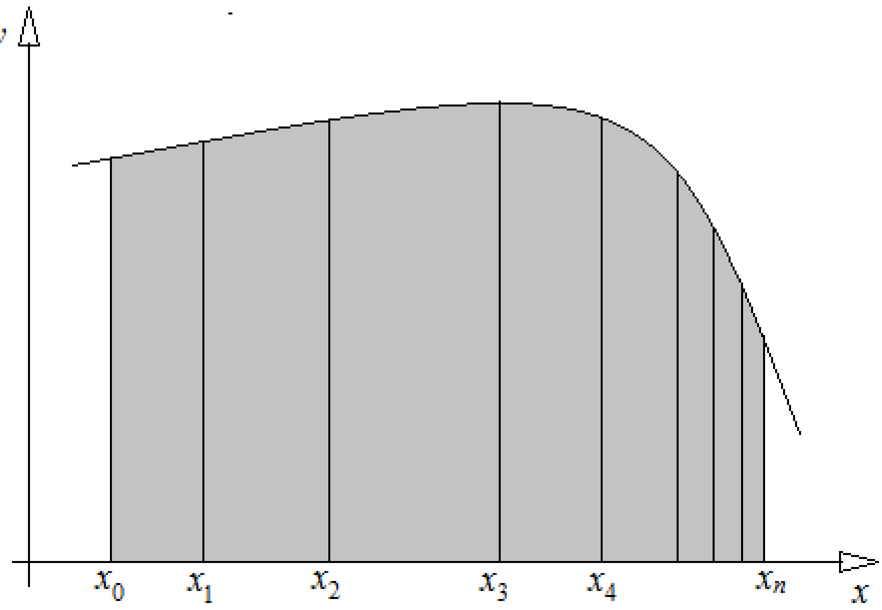
$A = A_1 + A_2 = 46{,}606\ 018$

Dengan demikian besarnya galat relatif dalam persen adalah

$$e = \frac{53{,}598\ 150 - 46{,}606\ 018}{53{,}598\ 150} \text{x}100\% = 13{,}0455\%$$

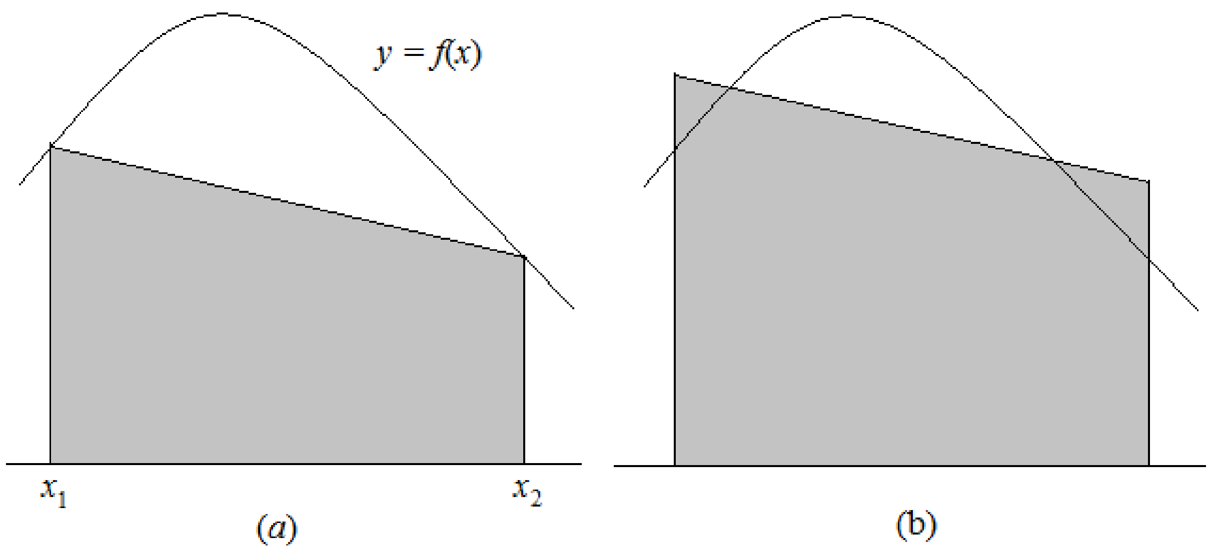
C. Metode Gauss Kuadratur

Pada dua metode yang telah dibahas sebelumnya mensyaratkan panjang sub interval sama sehingga titik-titik x_i-nya tertentu. Sedangkan pada metode Gauss yang akan dijelaskan ini panjang sub interval tidak harus sama. Hanya saja metode ini tidak dapat digunakan jika fungsinya diberikan dalam bentuk tabel data. Metode ini akan sangat menguntungkan jika ada bagian grafik yang melengkung tajam, sehingga diperlukan lebih banyak daerah pada lengkungan tersebut. Perhatikan ilustrasinya pada gambar 5.7.



Gambar 5.7. Integral dengan panjang sub interval yang tidak sama

Disamping itu titik ujung segmen pada dua metode sebelumnya harus melewati titik-titik (x_i, $f(x_i)$) dan (x_{i+1}, $f(x_{i+1})$) dengan x_i dan x_{i+1} adalah titik ujung sub interval yang telah tertentu. Pada beberapa kasus, hal ini dapat menimbulkan galat yang cukup besar. Dengan metode Gauss Kuadratur ini galat tersebut akan dikurangi dengan memberi kebebasan pada letak dari titk-titik ujung sehingga dihasilkan galat yang lebih kecil. Perhatikan gambar 5.8.



Gambar 5.8. (a) Aturan Trapesium (b) Metode Gauss

Seperti halnya dalam aturan trapesium, maka dalam metode Gauss Kuadratur ini juga akan dicari koefisien-koefisien c_i dari persamaan

$$A \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) \qquad (5.17)$$

Dalam aturan trapesium x_1 dan x_2 adalah adalah titik ujung interval, sedangkan dalam metode Gauss Kuadratur x_1 dan x_2 tidak tetap pada ujung dan nilainya juga belum diketahui. Jadi dalam persamaan (5.17) mengandung empat variabel sehingga diperlukan empat persamaan untuk menyelesaikannya.

Jika fungsi yang diintegralkan adalah fungsi konstan dan fungsi linier (grafiknya berupa garis lurus), mialkan $\boldsymbol{f(x) = 1}$ dan $\boldsymbol{f(x) = x}$, maka penyelesaian persamaan (5.17) adalah eksak. Jadi $f(x) = 1$ dan $f(x) = x$ memenuhi kondisi persamaan (5.17). Dengan demikian diperlukan lagi dua kondisi (persamaan). Dengan suatu penalaran, maka kondisi persamaan (5.17) dianggap cocok untuk integral suatu fungsi parabola $\boldsymbol{f(x) = x^2}$ dan fungsi kubik $\boldsymbol{f(x) = x^3}$. Dengan demikian persamaan (5.17) telah memenuhi untuk empat fungsi, yaitu

(i) Untuk $f(x) = 1$ dipenuhi $c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = \int_{-1}^{1} 1dx$ yang ekivalen dengan

$$c_1 + c_2 = 2 \qquad (5.18)$$

(ii) Untuk $f(x) = x$ dipenuhi $c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = \int_{-1}^{1} xdx$ yang ekivalen dengan

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0 \qquad (5.19)$$

(iii) Untuk $f(x) = x^2$ dipenuhi $c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = \int_{-1}^{1} x^2 dx$ yang ekivalen dengan

$$c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = \frac{2}{3} \qquad (5.20)$$

(iv) Untuk $f(x) = x^3$ dipenuhi $c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = \int_{-1}^{1} x^3 dx$ yang ekivalen dengan

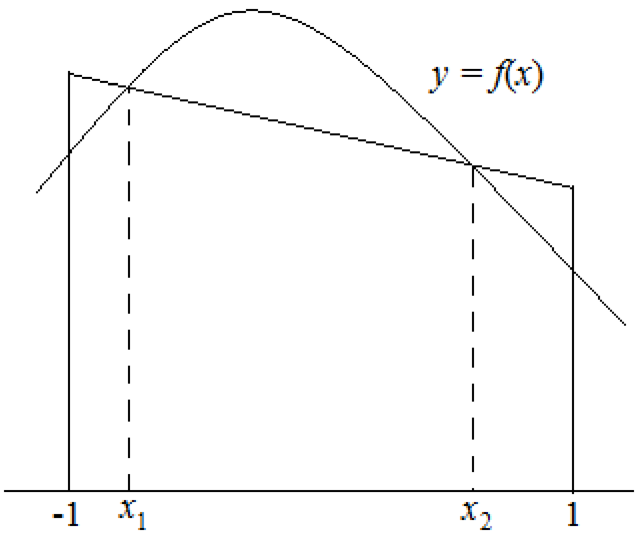
$$c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 = 0 \qquad (5.21)$$

Dengan demikian diperoleh sistem persamaan

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0 \\ c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = \frac{2}{3} \\ c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 = 0 \end{cases} \qquad (5.22)$$

dengan penyelesaiannya adalah

$$\begin{cases} c_1 = c_2 = 1 \\ x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0{,}577\ 350\ 269 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577\ 350\ 269 \end{cases} \tag{5.23}$$



Gambar 5.9. Ilustrasi Metode Gauss Kuadratur

Dengan mensubstitusikan (5.23) ke dalam (5.17) diperoleh rumus Gauss Legendre dua titik sebagai berikut

$$\boldsymbol{L \approx f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} \tag{5.24}$$

Perhatikan bahwa sistem persamaan (5.22) diperoleh dari integral dengan batas -1 dan 1, bukan dari *a* ke *b*. Hal ini dilakukan untuk mempermudah perhitungan dan agar rumus berlaku secara umum. Dengan suatu transformasi variabel *x*, batas integral yang lain dapat ditransformasi ke batas -1 dan 1. Misalkan x_r variabel baru, maka x_r dapat dihubungkan dengan variabel semula *x* (lama) dengan

$$x = a_0 + a_1 x_r \tag{5.25}$$

Jika batas bawah $x = a$ bersesuaian dengan $x_r = -1$, maka (5.25) menjadi

$$a = a_0 + a_1(-1) \tag{5.26}$$

Jika batas bawah $x = b$ bersesuaian dengan $x_r = 1$, maka (5.25) menjadi

$$b = a_0 + a_1(1) \tag{5.27}$$

Sehingga dari (5.26) dan (5.27) diperoleh

$$\begin{cases} a_0 = \frac{a+b}{2} \\ a_1 = \frac{b-a}{2} \end{cases} \quad (5.28)$$

Dengan mensubstitusikan (5.28) ke (5.25) diperoleh

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} x_r \quad (5.29)$$

Dan dengan mendeferensialkan kedua ruas (5.29) diperoleh

$$dx = \frac{b-a}{2} dx_r \quad (5.30)$$

Sedangkan rumus Gauss Legendre tiga titik sebagai berikut .

$$L \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

Untuk memberi gambaran yang lebih jelas tentang transformasi variabel, perhatikan contoh berikut yang telah diselesaikan dengan metode Newton Cotes.

Contoh 5.12: Gunakan metode gauss Kuadratur untuk mengevaluasi $\int_0^4 e^x dx$.

Jawab: Jika batasnya diubah ke -1 dan1 dengan a = 0 dan b = 4, maka dari rumus (5.29) dan (5.30) diperoleh

$$x = \frac{(4+0)}{2} + \frac{(4-0)}{2} \quad x_r = 2 + 2x_r \text{ dan } dx = 2dx_r$$

Sehingga $\int_0^4 e^x dx = \int_{-1}^1 e^{2+2x_r}.2dx_r = \int_{-1}^1 2\,(e^{2+2x_r})dx_r$

Ruas kanan dari persamaan di atas digunakan untuk menghitung luasan dengan metode Gauss Kuadratur (dua titik), dengan mensubstitusikan

$$x_{r_1} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0{,}577\ 350\ 269 \text{ dan } x_{r_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577\ 350\ 269$$

Sehingga $2e^{2+2x_{r_1}} = 4{,}6573501$ dan $2e^{2+2x_{r_2}} = 46{,}8920297$.

Dengan demikian luasan total adalah

A = $4{,}6573501 + 46{,}8920297 = 51{,}549380$

Dan kesalahan relatifnya adalah

$$e = \frac{53{,}598150 - 51{,}549380}{53{,}598150} \times 100\% = 3{,}82\%$$

Jika menggunakan metode Gauss Kuadratur tiga titik, maka digunakan

$$x_{r_1} = -0{,}\ 774\ 596\ 669 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$x_{r_2} = 0,\ 000\ 000\ 000$$

$$x_{r_3} = 0,\ 774\ 596\ 669 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

Sehingga $2e^{2+2x_{r_1}} = 3{,}139156$

$2e^{2+2x_{r_2}} = 14{,}778112$

$2e^{2+2x_{r_3}} = 69{,}570492$

Dengan demikian luasan total adalah

$A = \frac{5}{9}(\qquad) + \frac{8}{9}(\qquad) + \frac{5}{9}(\qquad)$

$= \qquad + \qquad +$

$= 53{,}530349$

Dan kesalahan relatifnya adalah

$$e = \frac{53{,}598150 -}{53{,}598150} \times 100\% = \quad 0{,}126499\%$$

$$x_{r_1} = -0,\ 774\ 596\ 669 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$x_{r_2} = 0,\ 000\ 000\ 000$$

$$x_{r_3} = 0,\ 774\ 596\ 669 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

Sehingga $f_1 = 2e^{2+2x_{r_1}} =$

$f_2 = 2e^{2+2x_{r_2}} =$

$f_3 = 2e^{2+2x_{r_3}} =$

Dengan demikian luasan total adalah

$A = \frac{5}{9}(\qquad) + \frac{8}{9}(\qquad) + \frac{5}{9}(\qquad)$

$= \qquad + \qquad +$

$=$

Dan kesalahan relatifnya adalah

$$e = \frac{53{,}598150 -}{53{,}598150} \times 100\% = \qquad \%$$

Contoh 5.13: Gunakan metode gauss Kuadratur 2 titik untuk mengevaluasi $\int_2^3 2 + 3x^2 - 10x^4 dx$.

Jawab: Solusi eksaknya adalah $\int_2^3 2 + 3x^2 - 10x^4 dx = 2x + x^3 - 2x^5]_2^3 = -401$

Jika batasnya diubah ke -1 dan 1 dengan *a* = 2 dan *b* = 3, maka dari rumus (5.29) dan (5.30) diperoleh

$x = \frac{(3+2)}{2} + \frac{(3-2)}{2} x_r = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} x_r$ dan $dx = \frac{1}{2} dx_r$.

Sehingga

$$\int_2^3 2 + 3x^2 - 10x^4 dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\left[2 + 3\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}x_r\right)^2 - 10\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}x_r\right)^4\right] dx_r$$

Ruas kanan dari persamaan di atas digunakan untuk menghitung luasan dengan metode Gauss Kuadratur, dengan mensubstitusikan

$$x_{r_1} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0{,}577\ 350\ 269 \text{ dan } x_{r_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577\ 350\ 269$$

Sehingga

$\frac{1}{2}\left[2 + \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}x_{r_1}\right)^2 - 10\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}x_{r_1}\right)^4\right] =$

$\frac{1}{2}[2 + 4{,}889958 - 10(23{,}911686)]$= -116,113 501

$\frac{1}{2}\left[2 + \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}x_{r_2}\right)^2 - 10\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}x_{r_2}\right)^4\right] =$

$\frac{1}{2}[2 + 7{,}776\ 709 - 10(60{,}477\ 203)]$ = -297,497 660

Dengan demikian luasan total adalah

A = -116,113 501 + (-297,497 660) = -413,611 161

Dan kesalahan relatifnya adalah

$$|e| = \left|\frac{-401 + 413{,}611\ 161}{-401}\right| \text{x}100\% = 9{,}1449\%$$

Rumus Gauss Legendre (5.24) dapat dikembangkan untuk *n* buah titik secara umum, yaitu

$$L \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \ \ldots + c_n f(x_n) \qquad (\ 5.31)$$

Sedangkan nilai c_i dan x_i untuk n sampai dengan 6 titik diberikan dalam tabel berikut ini.

Jumlah Titik	Koefisien *c*	Variabel *x*
2	c_1 = 1, 000 000 000 c_2 = 1, 000 000 000	x_1 = -0, 577 350 269= $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ x_2 = = 0, 577 350 269= $\frac{1}{\sqrt{3}}$
3	c_1 = 0, 555 555 556 = $\frac{5}{9}$ c_2 = 0, 888 888 889 = $\frac{8}{9}$ c_3 = 0, 555 555 556 = $\frac{5}{9}$	x_1 = -0, 774 596 669= $-\sqrt{\frac{3}{5}}$ x_2 = = 0, 000 000 000 x_3 = 0, 774 596 669= $\sqrt{\frac{3}{5}}$
4	c_1 = 0, 347 854 845 c_2 = 0, 562 145 155 c_3 =0, 562 145 155 c_4 = 0, 347 854 845	x_1 = -0, 861 136 312 x_2 = -0, 339 981 044 x_3 =0, 339 981 044 x_4 = 0, 861 136 312
5	c_1 = 0, 236 926 885 c_2 = 0, 478 628 676 c_3 =0, 566 888 889 c_4 = 0, 478 628 676 c_5 = 0, 236 926 885	x_1 = -0, 906 179 846 x_2 = -0, 538 469 310 x_3 = 0, 000 000 000 x_4 = 0, 538 469 310 x_5 = 0, 906 179 846
6	c_1 = 0, 171 324 492 c_2 = 0, 360 761 573 c_3 =0, 467 913 935 c_4 = 0, 467 913 935 c_5 = 0, 360 761 573 c_6 = 0, 171 324 492	x_1 = -0, 932 469 514 x_2 = -0, 661 209 386 x_3 =-0, 238 619 186 x_4 = 0, 238 619 186 x_5 = 0, 661 209 386 x_6 = 0, 932 469 514

Soal-soal:

1. Hitunglah $\int_0^{10}(10+2x-6x^2+5x^4)dx$ dengan cara
   a) Eksak (analitik)
   b) Aturan Trapesium segmen tunggal
   c) Aturan Trapesium segmen ganda dengan n = 4 dan 6
   d) Aturan Simpson $\frac{1}{3}$ segmen tunggal
   e) Aturan Simpson $\frac{1}{3}$ segmen ganda dengan n = 4 dan 6
   f) Aturan Simpson $\frac{3}{8}$ segmen tunggal
   g) Aturan Simpson $\frac{3}{8}$ segmen ganda dengan n = 6

   Kemudian carilah galat relatifnya dalam persen untuk masing-masing jawaban.
2. Hitunglah $\int_0^{\frac{3\pi}{20}}\sin(5x+1)dx$ dengan cara
   a) Eksak (analitik)
   b) Aturan Trapesium segmen tunggal
   c) Aturan Trapesium segmen ganda dengan n = 4 dan 6

   Kemudian carilah galat relatifnya dalam persen untuk masing-masing jawaban.
3. Hitunglah $\int_{-4}^{6}(4x+8)^3dx$ dengan cara
   a) Analitik
   b) Aturan Simpson dengan n = 4 dan 5

   Kemudian bahaslah hasil-hasilnya
4. Hitunglah $\int_0^{4}(xe^{2x})dx$ dengan cara
   a) Eksak
   b) Aturan Trapesium segmen tunggal
   c) Aturan Trapesium segmen ganda dengan n = 4 dan 6
   d) Aturan Simpson $\frac{1}{3}$ segmen tunggal
   e) Aturan Simpson $\frac{1}{3}$ segmen ganda dengan n = 4 dan 6
   f) Aturan Simpson $\frac{3}{8}$ segmen tunggal
   g) Aturan Simpson $\frac{3}{8}$ segmen ganda dengan n = 6

   Kemudian carilah galat relatifnya dalam persen untuk masing-masing jawaban.

5. Hitunglah $\int_0^1 (1{,}53^{2{,}5x})dx$ dengan cara
   a) Eksak
   b) Aturan Trapesium segmen tunggal
   c) Aturan Trapesium segmen ganda dengan n = 4 dan 6
   d) Aturan Simpson $\frac{1}{3}$ segmen tunggal
   e) Aturan Simpson $\frac{1}{3}$ segmen ganda dengan n = 4 dan 6
   f) Aturan Simpson $\frac{3}{8}$ segmen tunggal
   g) Aturan Simpson $\frac{3}{8}$ segmen ganda dengan n = 6

   Kemudian carilah galat relatifnya dalam persen untuk masing-masing jawaban.
6. Hitunglah $\int_0^\pi (4 + 2\sin x)dx$ dengan cara
   h) Eksak
   a) Aturan Trapesium segmen tunggal
   b) Aturan Trapesium segmen ganda dengan n = 5
   c) Aturan Simpson $\frac{1}{3}$ segmen tunggal
   d) Aturan Simpson $\frac{1}{3}$ segmen ganda dengan n = 4 dan 6
   e) Aturan Simpson $\frac{3}{8}$ segmen tunggal
   f) Aturan Simpson $\frac{3}{8}$ segmen ganda dengan n = 6

   Kemudian carilah galat relatifnya dalam persen untuk masing-masing jawaban.
7. Evaluasi integral dari dara tabulasi berikut ini dengan cara

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
f(*x*)	1	7	4	3	5	9

   a) Aturan Trapesium
   b) Aturan Simpson
8. Evaluasi integral dari dara tabulasi berikut ini dengan cara

x	-3	-1	1	3	5	7	9	11
f(*x*)	1	-4	-5	2	4	8	6	-3

   a) Aturan Trapesium

b) Aturan Simpson

9. Fungsi $f(x) = 10 - 38{,}6x + 74{,}07x^2 - 40x^3$ dapat digunakan untuk menghasilkan tabel data berjarak tidak sama sebagai berikut

x	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,95	1,2
$9(x)$	10	6,84	4	4,20	5,51	5,77	1

Evaluasikan intrgral dari $a = 0$ sampai $b = 1{,}2$ dengan menggunakan

a) Analitik

b) Aturan Trapesium