

Aturan Simpson (Aturan Parabola)

- Aturan Simpson $1/3$
- Aturan Simpson $3/8$

ATURAN SIMPSON $\frac{1}{3}$

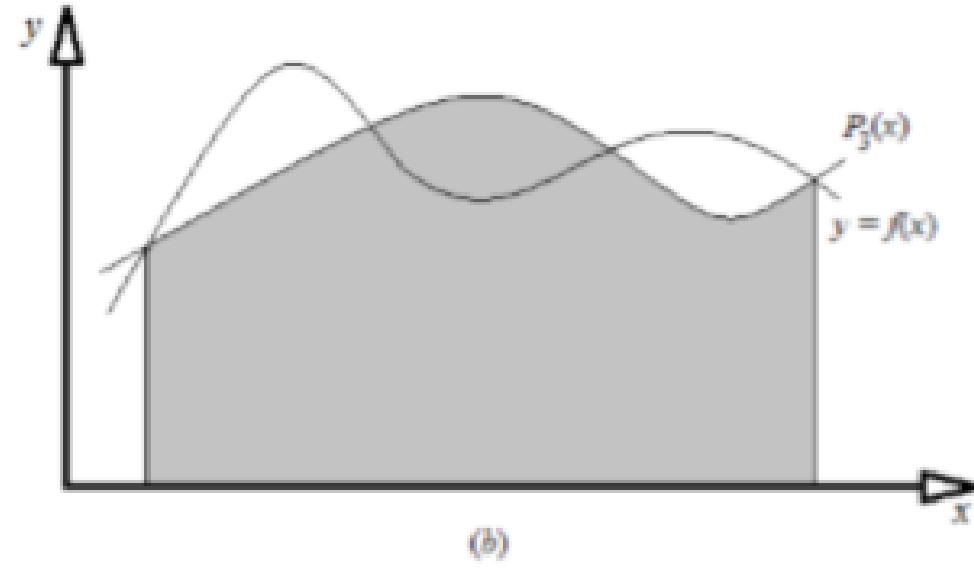
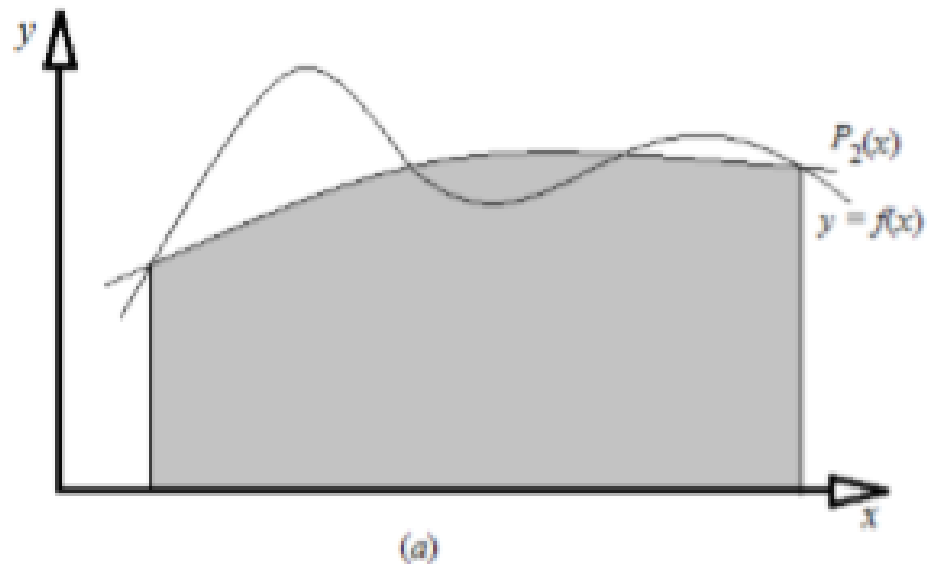
- Aturan Simpson $\frac{1}{3}$ adalah metode Newton Cotes orde dua karena menggunakan polinom orde dua untuk mendekati $f(x)$
- Kurva $f(x)$ didekati polinom orde 2 dan melalui 3 titik
- Kurva $f(x)$ bisa didekati dengan satu buah polinom (segmen tunggal) dan beberapa polinom secara sepotong-sepotong (segmen ganda)
- Segmen (n) bernilai genap

Rumus Aturan Simpson $\frac{1}{3}$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

Pola koefisien 1,4,2,4,2, ..., 4,2,4,1

Ilustrasi



Contoh 5.6: Aturan Simpson $\frac{1}{3}$ segmen tunggal untuk menghampiri $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

Jawab: Dengan menggunakan rumus (5.13) kita peroleh

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx &= \frac{\pi}{12} \left(\sin 0 + 4 \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) \\ &= 0,261\,799(0 + 4(0,707\,107) + 0,909\,297) = 0,978\,533\end{aligned}$$

Dan galat relatifnya adalah $e = 2,1467\%$

Hasil ini jauh lebih bagus jika dibandingkan dengan Aturan Trapesium segmen tunggal pada contoh 5.1 yang diperoleh $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 0,785000$ dengan galat relatif 21,5%. Sedangkan hasil analitiknya adalah 1.

Contoh 5.7 hal 84

Contoh 5.7. Hitunglah $\int_0^4 e^x dx$ dengan menggunakan aturan Simpson $\frac{1}{3}$ dengan 4 segmen

Jawab: Karena $a = 0$, $b = 4$, dan $n = 5$, maka $\Delta x = 1$, sehingga $x_0 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 2$;

$x_3 = 3$; dan $x_4 = 4$. Sehingga diperoleh

$$\int_0^4 e^x dx \approx \frac{1}{8}(e^0 + 4e^1 + 2e^2 + 4e^3 + e^4) = 53,863846$$

Sedangkan jika kita hitung dengan menggunakan rumus dasar integral tentu yang telah kita kenal di kalkulus diperoleh hasil eksak 6D berikut ini.

$$\int_0^4 e^x dx = e^x \Big|_0^4 = 53,598150$$

Dengan demikian galat relatif dalam persen diperoleh

$$e = \frac{53,598150 - 53,863846}{53,598150} \times 100\% = 0,5\%.$$

ATURAN SIMPSON $\frac{3}{8}$

- Kurva $f(x)$ didekati polinom orde 3 dan melalui 4 titik
- Segmen (n) harus kelipatan 3

Rumus Aturan Simpson $\frac{3}{8}$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3h}{8} (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 3f_4 + 3f_5 + \cdots + 2f_{n-3} + 3f_{n-2} + 3f_{n-1} + f_n)$$

Pola koefisien 1,3,3,2,3,3, ... 2,3,3,1

Contoh 5.8. Hitunglah $\int_0^4 e^x dx$ dengan menggunakan aturan Simpson $\frac{3}{8}$.

Jawab: Karena $a = 0$, $b = 4$, maka $\Delta x = 1,333\ 333$, sehingga $x_0 = 0$, $x_1 = 1,333\ 333$, $x_2 = 2,666\ 667$ dan $x_3 = 4$. Sehingga diperoleh

$$\int_0^4 e^x dx \approx \frac{(4-0)}{8} (e^0 + 3e^{1,333333} + 3e^{2,666667} + e^4) = 55,077456$$

Sedangkan besarnya galat relatif dalam persen adalah

$$e = \frac{53,598\ 150 - 55,077\ 456}{53,598\ 150} \times 100\% = -2,76\%$$

Secara umum aturan Simpson lebih teliti dibandingkan dengan Aturan Trapesium. Dan Aturan Simpson $\frac{1}{3}$ lebih disukai dari pada aturan Simpson $\frac{3}{8}$, karena mencapai ketelitian sampai orde tiga hanya dengan tiga titik. Tetapi karena Aturan Simpson $\frac{1}{3}$ memerlukan n yang genap, maka jika n ganjil dapat digunakan gabungan antara Aturan Simpson $\frac{1}{3}$ dan aturan Simpson $\frac{3}{8}$ dengan $(n - 3)$ daerah menggunakan aturan Simpson $\frac{1}{3}$ sedangkan daerah sisanya menggunakan $\frac{3}{8}$.

Contoh 5.9 hal 85-86

Contoh 5.9. Hitunglah $\int_0^4 e^x dx$ dengan menggunakan aturan Simpson dengan 5 segmen

Jawab: Karena $a = 0$, $b = 4$, dan $n = 5$, maka $\Delta x = 0,8$, sehingga $x_0 = 0$; $x_1 = 0,8$; $x_2 = 1,6$; $x_3 = 2,4$; $x_4 = 3,2$ dan $x_5 = 4$. Sehingga diperoleh

$$\begin{array}{ll} f(0) = 1 & f(2,4) = 11,023\ 176 \\ f(0,8) = 2,225\ 541 & f(3,2) = 24,532\ 530 \\ f(1,6) = 4,953\ 032 & f(4) = 54,598\ 150 \end{array}$$

Integral untuk dua segmen pertama dihitung dengan Aturan Simpson $\frac{1}{3}$, diperoleh

$$A_1 = \int_0^{1,6} e^x dx = \frac{1,6}{6} (f(0) + 4f(0,8) + f(1,6)) = 3,961\ 386$$

Sedangkan tiga segmen terakhir dihitung dengan menggunakan aturan Simpson $\frac{3}{8}$ sebagai berikut.

$$A_2 = \int_{1,6}^4 e^x dx = \frac{(4-1,6)}{6} (f(1,6) + 3f(2,4) + 3f(3,2) + f(4)) = 42,644\ 632$$

Integral total adalah jumlah kedua hasil tersebut, yaitu

$$A = A_1 + A_2 = 46,606\ 018$$

Dengan demikian besarnya galat relatif dalam persen adalah

$$e = \frac{53,598\ 150 - 46,606\ 018}{53,598\ 150} \times 100\% = 13,0455\%$$