4 METODE NUMERIK UNTUK ALJABAR LINIER

A. Pengantar Matriks

Matriks *A* berukuran *m* x *n* dinotasikan A_{mxn} adalah matriks yang terdiri *m* baris dan *n* kolom. Matriks tersebut jika kita tuliskan lengkap dengan elemen-elemennya adalah sebagai berikut

$$A_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)$$

dengan a_{ij} adalah elemen baris baris ke - *i* dan kolom ke - *j*.

Adapun jenis-jenis matriks yang perlu kita ketahui adalah

- Matriks bujur sangkar, yaitu matriks yang banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom. Misalnya matriks *A* berukuran *n* x *n* cukup disingkat A_n.
- Matriks diagonal, yaitu matriks bujur sangkar dengan elemen bukan diagonalnya bernilai nol. Dengan demikian $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$. Matriks diagonal biasanya diberi nama matriks *D.*
- Matriks satuan, yaitu matriks diagonal yang semua elemen diagonalnya bernilai 1. Matriks satuan biasanya diberi nama *I.*
- Matriks segitiga atas, yaitu matriks bujursangkar dengan semua elemen di bawah diagonal bernilai nol. Dengan demikian $a_{ij} = 0$ untuk $i > j$.
- Matriks segitiga bawah, yaitu matriks bujur sangkar dengan semua elemen di atas diagonal bernilai nol. Dengan demikian $a_{ij} = 0$ untuk $i < j$.

- Matriks tridiagonal, yaitu matriks bujur sangkar yang memenuhi $a_{ij} = 0$ untuk $|i - j| \geq 2$.

Disamping itu dikenal juga yang disebut vektor kolom (baris), yaitu matriks yang terdiri *m* baris (kolom) dan 1 kolom (baris).

B. Sistem Linier

Sistem linier dari *n* persamaan dalam *n* yang tak diketahui $x_1, x_2, \cdots, x_n$ adalah himpunan persamaan-persamaan $P_1, P_2, \cdots, P_n$ berbentuk

$$\begin{array}{ll} P_1: & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ P_2: & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_n: & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = c_n \end{array} \qquad (1)$$

dimana koefisien-koefisien a_{ij} dan c_i adalah bilangan-bilangan riil. Sistem (1) tersebut disebut **homogen** jika c_i semuanya nol. Jika ada c_i yang tidak nol maka sistem (1) tersebut disebut **tidak homogen.** Menggunakan perkalian matriks, kita dapat menulis (1) sebagai satu persamaan vektor

$$\boldsymbol{AX = C} \qquad (2)$$

Dimana **matriks koefisien** $A = (a_{ij})$ adalah matriks berordo *n* x *n* dan *X, C* adalah matriks vektor kolom, yaitu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Matriks yang diperbesar $\tilde{A}$ dari sistem (1) adalah

$$\tilde{A} = (A\ C) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & c_n \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Penyelesaian dari (1) adalah himpunan bilangan-bilangan $x_1, x_2, \cdots, x_n$ yang memenuhi semua (*n*) persamaan tersebut, dan **vektor penyelesaian** dari (1) adalah vektor *X* yang komponen-komponennya merupakan penyelesaian dari (1). Secara numerik suatu sistem persamaan linier dikatakan dapat diselesaikan jika mempunyai selesaian tunggal. Sedangkan dalam hal lainnya dikatakan tidak dapat diselesaikan, walaupun secara aljabar linier sebenarnya masih memungkinkan untuk mempunyai tak berhingga banyaknya selesaian. Metode penyelesaian sistem tersebut dengan determinan (aturan Cramer) tidak praktis, sama dengan metode-metode efisien untuk mengevaluasi determinan-deterninan.

1. Sistem Linier Segitiga Atas

Sistem linier segitiga atas adalah sistem linier yang matriks koefisiennya, yaitu A berupa matriks segitiga atas. Jadi $AX = C$ dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= c_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots& \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n &= c_{n-1} \\ a_{nn}x_n &= c_n \end{aligned}$$

Dalam sistem tersebut diasumsikan bahwa elemen-elemen diagonalnya tidak nol, yaitu $a_{kk} \neq 0$ untuk k = 1, 2, ..., n.

Sistem segitiga atas tersebut mempunyai penyelesaian tunggal yang mudah dicari dengan cara penyulihan mundur, yaitu

$$x_n = \frac{c_n}{a_{nn}},$$

$$x_{n-1} = \frac{c_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}},$$

$$x_{n-2} = \frac{c_{n-2} - a_{n-2,n-1}x_{n-1} - a_{n-2,n}x_n}{a_{n-2,n-2}}$$

dan secara umum diperoleh

$$x_k = \frac{c_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j}{a_{kk}}, \quad \text{untuk } k = n-1, n-2, \cdots, 1. \tag{4}$$

Jadi syarat $a_{kk} \neq 0$ sangat penting karena (4) melibatkan penbagian dengan a_{kk}. Jika syarat ini tidak dipenuhi, maka tidak terdapat penyelesaian atau terdapat tak berhingga banyaknya selesaian.

Algoritma penyulihan mundur untuk sistem segitiga atas

Masukan : n

$$a_{ij}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$
$$\qquad j = i, i+1, \cdots, n$$
$$c_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

Keluaran : selesaian dari sistem segitiga atas yaitu $x_1, x_2, \cdots, x_n$

Langkah-langkah :

$$x_n := \frac{c_n}{a_{nn}}$$

Untuk $k = n-1, n-2, \cdots, 1$ kerjakan

Jumlah := 0

Untuk $j = k+1, k+2, \cdots, n$ kerjakan

Jumlah := Jumlah + $a_{kj} x_j$

$$x_k := \frac{c_k - \text{Jumlah}}{a_{kk}}.$$

Contoh 4.1 :

Terapkan penyulihan mundur untuk menyelesaikan sistem persamaan linier

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= -5 \\ -2x_2 + 5x_3 - 3x_4 &= 2 \\ 6x_3 + 5x_4 &= 21 \\ 3x_4 &= 9 \end{aligned}.$$

Penyelesaian :

Dengan penyulihan mundur kita peroleh

$$x_4 = \frac{9}{3} = 3$$
$$x_3 = \frac{21-5(3)}{6} = 1$$
$$x_2 = \frac{2+3(3)-5(1)}{-2} = -3$$
$$x_1 = \frac{-5+2(3)+2(1)-(-3)}{3} = 2.$$

■

2. Sistem Linier Segitiga Bawah

Sistem linier segitiga bawah adalah sistem linier yang matriks koefisiennya, yaitu *A* berupa matriks segitiga bawah. Jadi *AX* = *C* dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 && = c_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 && = c_2\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \cdots + a_{n-1,n-1}x_{n-1} && = c_{n-1}\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n && = c_n.
\end{aligned}$$

Dalam sistem tersebut diasumsikan bahwa elemen-elemen diagonalnya tidak nol, yaitu $a_{kk} \neq 0$ untuk *k* = 1, 2, ..., *n*.

Sistem segitiga bawah tersebut mempunyai penyelesaian tunggal yang mudah dicari dengan cara penyulihan maju, yaitu

$$x_1 = \frac{c_1}{a_{11}},$$
$$x_2 = \frac{c_2 - a_{21}x_1}{a_{22}},$$
$$x_3 = \frac{c_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}$$

dan secara umum diperoleh

$$x_k = \frac{c_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}x_j}{a_{kk}}, \quad \text{untuk}\, k = 2,3,\cdots,n. \tag{5}$$

Syarat untuk persamaan (5) sama dengan untuk persamaan (4). Dan algoritmanya juga serupa.

3. Operasi Baris Elementer

Dua sistem linier bermatriks *n* x *n* dikatakan setara jika himpunan-himpunan penyelesaiannya sama. Sedangkan dalam teorema-teorema aljabar linier memperlihatkan bahwa jika transformasi tertentu diterapkan pada suatu sistem yang diketahui maka himpunan selesaiannya tidak berubah.

Operasi-operasi berikut jika diterapkan pada matriks yang diperbesar (3) akan menghasilkan sistem yang setara.

- Pertukaran : urutan dua baris dapat ditukar

  $B_i \times B_j$ artinya baris ke-*i* ditukar letaknya dengan baris ke-*j*

- Penskalaan : perkalian sebuah baris dengan tetapan tak nol

  $B_i \times k$ artinya kalikan baris ke-*i* dengan konstanta *k*

- Pengantian : sebuah baris dapat digantikan oleh jumlah baris tersebut dengan suatu kelipatan sebarang baris lainnya

  $B_i - kB_j$ artinya kurangkan *k* kali baris ke-*j* dari baris ke-*i*.

Biasanya pengantian digunakan untuk menggantikan suatu baris dengan selisih baris tersebut dengan kelipatan baris lainnya. Operasi-operasi tersebut biasanya disebut sebagai Operasi Baris Elementer (OBE).

Sistem $AX = C$ dengan matriks yang diperbesar (3) dapat diselesai-kan dengan melakukan operasi baris elementer (OBE) pada matriks yang diperbesar (3). Dimana peubah-peubah x_k sebagai pemegang posisi untuk koefisien-koefisien dapat dihilangkan sampai akhir perhitungan.

Beberapa metode untuk menyelesaikan sistem linier (1) akan diberikan di bawah ini.

C. Eliminasi Gauss

Metode baku untuk menyelesaikan sistem linier (1) ini adalah proses sistematik dari eliminasi yang merubah (1) ke dalam **bentuk segitiga atas**, sebab bentuk ini dapat dengan mudah diselesaikan dengan **penyulihan mundur.** Contoh sistem segitiga adalah

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 8 \\ 8x_2 + 2x_3 &= -7 \\ 6x_3 &= 3 \end{aligned}$$

dan dengan penyulihan mundur diperoleh $x_3 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ dari persamaan ketiga, sehingga dari persamaan kedua diperoleh

$$x_2 \tfrac{1}{8}(-7 - 2x_3) = -1,$$

akhirnya adari persamaan pertama diperoleh

$$x_1 = \tfrac{1}{3}(8 - 5x_2 - 2x_3) = 4.$$

Bagaimana kita merubah sistem (1) yang diberikan ke dalam bentuk segitiga? Langkah pertama adalah menghilangkan x_1 dari persamaan P_2 sampai P_n dalam (1). Ini kita kerjakan dengan mengurangkan perkalian yang sesuai dari persamaan pertama dari persamaan yang lain. Dalam langkah ini persamaan pertama disebut **persamaan tumpuan,** dan a_{11} disebut **tumpuan.** Dalam langkah kedua kita pilih persamaan kedua yang baru $P_2^{(2)}$ (yang mana tidak memuat x_1) sebagai persamaan tumpuan dan menggunakannya untuk menghilangkan x_2 dari persamaan-persamaan baru $P_3^{(2)}$ sampai $P_n^{(2)}$ yang diperoleh dari langkah pertama. Langkah-langkah ini diteruskan sehingga diperoleh sistem segitiga yang dapat diselesaikan dengan penyulihan mundur. Dengan jalan ini kita peroleh secara tepat semua penyelesaian dari sistem yang diberikan. Agar langkah-langkah tersebut dapat kita lakukan, maka tumpuan harus tidak sama dengan nol. Jika ini terjadi, maka kita boleh menukar urutan dari persamaan. Ini disebut **tumpuan parsial**.

Secara umum dapat disimpulkan bahwa metode eliminasi Gauss untuk menyelesaikan sistem persamaan linier terdiri dari dua tahap. Tahap pertama adalah matriks koefisiennya menjadi matriks segitiga atas dengan operasi baris elementer (OBE). Sedangkan tahap kedua adalah mencari selesaian sistem linier dari sistem yang setara yang telah diperoleh pada tahap pertama dengan penyulihan mundur.

Struktur formal eliminasi Gauss untuk n = 3 dengan koefisien secara umum adalah sebagai berikut.

Sistem linier yang harus diselesaikan adalah

$$\begin{aligned}
P_1 :&\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1\\
P_2 :&\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2\\
P_3 :&\quad a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3
\end{aligned}$$

Tahap I

Langkah 1: Menghilangkan x_1 dari P_2 dan P_3

Asumsikan $a_{11} \neq 0$

Definisikan $p_{21} = \dfrac{a_{21}}{a_{11}}, \quad p_{31} = \dfrac{a_{31}}{a_{11}}$

Kurangkan $p_{21} \times P_1$ dari P_2 dan kurangkan $p_{31} \times P_1$ dari P_3.

Sistem semula berubah menjadi sistem baru yang setara, yaitu

$$\begin{aligned}
P_1 &\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1\\
P_2^{(2)} &\quad a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = c_2^{(2)}\\
P_3^{(2)} &\quad a_{32}^{(2)}x_2 + a_{33}^{(2)}x_3 = c_3^{(2)}
\end{aligned}$$

dimana koefisien-koefisien $a_{ij}^{(2)}$ dan $c_i^{(2)}$ didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned}
a_{ij}^{(2)} &= a_{ij} - p_{i1}a_{1j}, \quad \text{untuk } i, j = 2,3\\
c_i^{(2)} &= c_i - p_{i1}c_1, \quad \text{untuk } i = 2,3
\end{aligned}$$

Langkah 2 : Menghilangkan x_2 dari $P_3^{(2)}$

Asumsikan $a_{22}^{(2)} \neq 0$

Definisikan $p_{32} = \dfrac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$

Kurangkan $p_{32} \times P_2^{(2)}$ dari $P_3^{(2)}$, sehingga sistem yang diperoleh pada langkah 1 berubah menjadi

$$\begin{aligned}
P_1 &\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1\\
P_2^{(2)} &\quad a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = c_2^{(2)}\\
P_3^{(3)} &\quad a_{33}^{(3)}x_3 = c_3^{(3)}
\end{aligned}$$

di mana koefisien-koefisien baru didefinisikan sebagai

$$a_{33}^{(3)} = a_{33}^{(2)} - p_{32}a_{23}^{(2)}$$
$$c_3^{(3)} = c_3^{(2)} - p_{32}c_2^{(2)}$$

Tahap II

Adalah tahap penyulihan mundur. Sehingga dari persamaan terakhir yang kita peroleh pada tahap I, kita mendapatkan selesaian

$$x_3 = \frac{c_3^{(3)}}{a_{33}^{(3)}}$$
$$x_2 = \frac{c_2^{(2)} - a_{23}^{(2)}x_3}{a_{22}^{(2)}}$$
$$x_1 = \frac{c_1 - a_{13}x_3 - a_{12}x_2}{a_{11}}.$$

Algoritma untuk n = 3 ini dapat dengan mudah diperumum untuk sistem linier dengan n persamaan linier yang tidak singular.

Contoh 4.2.

Selesaikan sistem

$$\begin{aligned} 8x_2 + 2x_3 &= -7 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 8 \\ 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 &= 26. \end{aligned}$$

Penyelesaian:

Untuk memperoleh persamaan tumpuan yang memuat x_1, kita susun ulang persamaan-persamaan, misalnya kita tukar persamaan pertama dengan persamaan pertama yang memuat x_1 (yaitu persamaan kedua):

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 8 \\ 8x_2 + 2x_3 &= -7 \quad . \\ 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 &= 26 \end{aligned}$$

Tahap I : Mengubah matriks koefisien sistem tersebut menjadi matriks segitiga atas dengan operasi baris elementer (OBE).

Langkah 1: Menghilangkan x_1

Berikut ini kita perlihatkan persamaan liniernya dan matriks yang diperbesar dari sistem tersebut. Pada langkah pertama persamaan pertama sebagai persamaan tumpuan. Dengan demikian diperoleh

$$\begin{array}{lrl} \text{tumpuan} \rightarrow & \boxed{3x_1} + 5x_2 + 2x_3 = 8 & \\ & 8x_2 + 2x_3 = -7 & \\ \text{dihilangkan} \rightarrow & \boxed{6x_1} + 2x_2 + 8x_3 = 26 & \end{array} \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 8 & 2 & -7 \\ 6 & 2 & 8 & 26 \end{pmatrix}$$

Untuk menghilangkan x_1 dari persamaan kedua dan ketiga diperlukan p_{21} = 0, dan p_{31} = 6/3 = 2. Kemudian kurangkan p_{21} kali persamaan pertama dari persamaan kedua dan kurangkan p_{31} kali persamaan pertama dari persamaan ketiga. Hasilnya dapat dilihat pada langkah kedua.

Langkah 2 : Menghilangkan x_2

Kita tinggalkan persamaan pertama tanpa mengubahnya dan persamaan kedua yang baru sebagai persamaan tumpuan. Dalam hal ini masih merupakan persamaan kedua yang lama, sebab tidak ada x_1 yang dihilangkan pada langkah pertama.

$$\begin{array}{lrl} & 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8 & \\ \text{tumpuan} \rightarrow & \boxed{8x_2} + 2x_3 = -7 & \\ \text{dihilangkan} \rightarrow & \boxed{-8x_2} + 4x_3 = 10 & \end{array} \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 8 & 2 & -7 \\ 0 & -8 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Untuk menghilangkan x_2 dari persamaan di bawahnya (dalam hal ini persamaan ketiga) diperlukan p_{32} = -8/8 = -1. Kemudian kurangkan p_{32} kali persamaan kedua (yang baru) dari persamaan ketiga (yang baru). Hasilnya adalah sistem segitiga bawah, yaitu

$$\begin{array}{r} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8 \\ 8x_2 + 2x_3 = -7 \\ 6x_3 = 3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 8 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Tahap II : Penyulihan mundur untuk menentukan x_1, x_2, dan x_3 .

Berturut-turut dari persamaan ketiga, persamaan kedua dan persamaan pertama pada sistem terakhir kita peroleh

$$\begin{aligned} x_3 &= \tfrac{3}{6} = \tfrac{1}{2}, \\ x_2 &= \tfrac{1}{8}(-7 - 2x_3) = -1, \\ x_1 &= \tfrac{1}{3}(8 - 5x_2 - 2x_3) = 4. \end{aligned}$$

■

Akan dikontruksi algoritma untuk n persamaan linier. Untuk memudahkan perhitungan, koefisien c_i dinyatakan sebagai koefisien $a_{i,n-1}$ dalam matriks yang diperbesar. Sehingga sistem linier dalam n persamaan adalah

$$\begin{array}{ll} P_1^{(1)} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1} \\ P_2^{(1)} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = a_{2,n+1} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_n^{(1)} & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = a_{n,n+1} \end{array}$$

Tahap I : Eliminasi (membuat matriks koefisien menjadi matriks segitiga atas)

Untuk k = 1, 2, ... , n – 1 kerjakan langkah eliminasi berikut

Langkah ke-k : Hilangkan x_k dari $P_{k+1}^{(k)}$ sampai $P_n^{(k)}$.

Hasil langkah ke 1, 2, ..., m-1 dengan $m \le k$ adalah sistem yang berbentuk

$$\begin{array}{lllll} P_1^{(1)} & a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 & + \cdots\cdots\cdots + a_{1n}^{(1)}x_n & = a_{1,n+1}^{(1)} \\ P_2^{(2)} & \quad a_{22}^{(2)}x_2 & + \cdots\cdots\cdots + a_{2n}^{(2)}x_n & = a_{2,n+1}^{(2)} \\ \vdots & \quad\ddots & & \vdots \\ P_m^{(m)} & \quad a_{mm}^{(m)}x_m & + \cdots + a_{mn}^{(m)}x_n & = a_{m,n+1}^{(m)} \\ P_{m+1}^{(m)} & \quad a_{m+1,m+1}^{(m)}x_m & + \cdots + a_{m+1,n}^{(m)}x_n & = a_{m+1,n+1}^{(m)} \\ & \quad\vdots & & \vdots \\ P_n^{(m)} & \quad a_{nm}^{(m)}x_m & + \cdots + a_{nn}^{(m)}x_n & = a_{n,n+1}^{(m)} \end{array}$$

Asumsikan $a_{mm}^{(m)} \ne 0$ dan definisikan pengali-pengali

$$p_{im} = \frac{a_{im}^{(m)}}{a_{mm}^{(m)}}, \quad \begin{array}{c} m = 1, 2, 3, ..., \ n-1 \\ i = m+1, m+2, \cdots, n \end{array}.$$

Untuk persamaan-persamaan $i = m + 1$, $m + 2$, ..., n kurangkan p_{im} kali $P_m^{(m)}$ dari persamaan $P_i^{(m)}$. Koefisien-koefisien dalam $P_{m+1}^{(m+1)}$ sampai $P_n^{(m+1)}$ didefinisikan sebagai

$$a_{ij}^{(m+1)} = a_{ij}^{(m)} - p_{im} a_{mj}^{(m)}, \qquad i = m+1, m+2, \cdots, n$$
$$j = m+1, m+2, \cdots, n, n+1.$$

Pada waktu langkah ke-(n + 1) telah dilaksanakan, maka diperoleh sistem segitiga atas yang berbentuk

$$\begin{array}{lllll}
P_1^{(1)} & a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + \cdots + a_{1n}^{(1)} x_n & = a_{1,n+1}^{(1)} \\
P_2^{(2)} & \qquad\quad a_{22}^{(2)} x_2 + \cdots + a_{2n}^{(2)} x_n & = a_{2,n+1}^{(2)} \\
\vdots & \qquad\qquad \ddots \qquad\quad \vdots & \ \ \vdots \\
P_k^{(k)} & \qquad\quad a_{kk}^{(k)} x_k + \cdots + a_{kn}^{(k)} x_n & = a_{k,n+1}^{(k)} \\
\vdots & \qquad\qquad \ddots \qquad\quad \vdots & \ \ \vdots \\
P_n^{(n-1)} & \qquad\qquad\qquad\quad a_{nn}^{(n)} x_n & = a_{n,n+1}^{(n)}
\end{array}$$

Tahap II : Penyulihan mundur

Secara berturut-turut mulai persamaan terakhir ke persamaan pertama dalam sistem yang terakhir, dengan penyulihan mundur diperoleh :

$$x_n = \frac{a_{n,n+1}^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}},$$

$$x_k = \frac{a_{k,n+1}^{(k)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k)} x_j}{a_{kk}^{(k)}}, \qquad k = n-1, n-2, \cdots, 1.$$

Adapun algoritmanya adalah sebagai berikut:

Algoritma Eliminasi Gauss

Masukan : Matriks yang diperbesar berukuran n x (n+1) $\tilde{A} = (a_{ij})$ di mana $a_{i,n+1} = c_i$

Keluaran : Selesaian $X = (x_i)$ yaitu x_i untuk i = 1, 2, ..., n

Langkah-langkah :

I. Tahap Eliminasi

Untuk k = 1, 2, ..., n –1

(#) Cari j terkecil $j \geq k$ sedemikian sehingga $a_{jk} \neq 0$

Jika tidak ada j yang memenuhi maka " tidak ada solusi yang tunggal ". selesai. (karena A singular)

(##) Untuk $i = k+1, \ldots , n$

$$p = a_{ik} / a_{kk}$$

Untuk $j = k+1, \ldots , n+1$

$$a_{ij} = a_{ij} - pa_{kj}$$

Jika $a_{nn} = 0$ maka " Tidak ada solusi yang tunggal ". Selesai.

II. Tahap Penyulihan Mundur (setelah dipenuhi $a_{nn} \neq 0$)

$$x_n = \frac{a_{n,n+1}}{a_{nn}}$$

Untuk $i = n$-1,...,1

Jml = 0

Untuk $j = i+1, \ldots , n$

Jml = Jml + $a_{ij}x_j$

$$x_i = (a_{i,n+1} - \text{Jml}) / a_{ii}$$

Algoritma pencarian j terkecil (#)

Jika $a_{kk} \neq 0$ maka lanjutkan (##) [disini ditemukan $j = k$]

Uji = false

Untuk i = 2, 3, ... , n

Jika $a_{ik} \neq 0$ maka $z = i$; uji = true

Jika Uji = false maka " Tak ada solusi yang tunggal ". Selesai.

[disini tidak ditemukan j yang memenuhi]

Untuk $j = k, k+1, \ldots, n+1$

$x = a_{kj}$; $a_{kj} = a_{zj}$; $a_{zj} = x$ [disini ditemukan $j = z$]

Lanjutkan (##)

Lebih jauh tentang Tumpuan

Sebagaimana kita ketahui elemen tumpuan $a_{kk}^{(m)}$ harus tidak sama dengan nol. Jika elemen tumpuan tersebut nol, maka kita harus menukar persamaan sehingga diperoleh elemen tumpuan tak nol. Tetapi ini tidak dapat berlaku untuk semua, yaitu jika $a_{kk}^{(m)}$ nilai mutlaknya kecil dan ini kita gunakan sebagai elemen tumpuan, maka pengurangan perkalian konstanta besar dengan persamaan tumpuan dari persamaan yang lain akan memperkuat galat pembulatan. Ini dapat mempengaruhi keakuratan hasil yang diperoleh. Sebelum membicarakan bagaimana mengatasi kesulitan ini, untuk lebih jalasnya kita ilustrasikan dalam contoh sederhana berikut.

Contoh 4.3. Kesulitan dengan elemen tumpuan kecil

Penyelesaian dari sistem berikut adalah x_1 = 10 dan x_2 = 1.

$$\begin{aligned} 0{,}0004x_1 + 1{,}402x_2 &= 1{,}406 \\ 0{,}4003x_1 - 1{,}502x_2 &= 2{,}501 \end{aligned}$$

Kita selesaikan sistem tersebut dengan eliminasi Gauss dengan 4 bilangan titik kambang dalam perhitungannya.

(a). Pilih persamaan pertama sebagai persamaan tumpuan.

Maka kita peroleh p_{21} = 0,4003 / 0,0004 = 1001.

Dengan mengurangkan p_{21} kali persamaan pertama dari persamaan kedua, maka sistem tersebut berubah menjadi

$$\begin{aligned} 0{,}0004x_1 + 1{,}402x_2 &= 1{,}406 \\ -1405x_2 &= -1404. \end{aligned}$$

Dengan penyulihan mundur kita peroleh

$$x_2 = \frac{-1404}{-1405} = 0{,}9993$$

$$x_1 = \frac{1}{0{,}0004}(1{,}406 - 1{,}402 \cdot 0{,}9993) = 12{,}5.$$

Kegagalan ini terjadi sebab $|a_{11}|$ kecil dibandingkan dengan $|a_{12}|$, dan juga galat pembulatan yang kecil pada x_2 membawa ke suatu galat yang besar dalam x_1.

(b). Pilih persamaan kedua sebagai persamaan tumpuan, sehingga tukar persamaan pertama dengan persamaan kedua. Maka

$$0{,}4003x_1 - 1{,}502x_2 = 2{,}501$$
$$0{,}0004x_1 + 1{,}402x_2 = 1{,}406$$

Dengan demikian p_{21} = 0,0004 / 0,4003 = 0,000 9993.

Kurangkan p_{21} kali persamaan pertama dari persamaan kedua, sehingga kita peroleh sistem baru yang setara

$$0{,}4003x_1 - 1{,}502x_2 = 2{,}501$$
$$1{,}404x_2 = 1{,}404$$

Dengan penyulihan mundur kita peroleh x_2 = 10 dan x_1 = 1. Keberhasilan ini disebabkan karena $|a_{21}|$ tidak terlalu kecil dibandingkan dengan $|a_{22}|$ di mana a_{21} dan a_{22} koefisisen dalam sistem semula. Juga galat pembulatan yang kecil pada x_2 tidak membawa ke galat yang besar dalam x_1. Memang, misalnya kita mempunyai x_2 = 1,002, kita akan tetap mempunyai dari persamaan kedua x_1 yang baik yaitu x_1 = (2,501 +1,505) / 0,4003 = 10,01. ■

Tumpuan Parsial

Dalam tumpuan parsial, langkah pertama kita biasanya memilih sebagai persamaan tumpuan adalah persamaan dengan nilai mutlak koefisien x_1 -nya yang terbesar. Dalam langkah kedua kita juga memilih persamaan tumpuan yang kedua dengan nilai mutlak koefisien x_2 yang terbesar, begitu dan seterusnya. **Tumpuan total** berarti kita mencari koefisien dengan nilai mutlak terbesar dalam keseluruhan sistem dan memulai eliminasi dengan peubah yang bepadanan, dengan koefisien ini sebagai elemen tumpuan; begitu juga untuk langkah-langkah selanjutnya. Ini akan melibatkan penukaran baris dan juga penukaran kolom. Strategi penumpuan total jarang sekali dipakai dalam praktek karena jauh lebih mahal dari penumpuan parsial.

Ada pedoman : kita dapat memperbesar suatu koefisien dengan mengalikan keseluruhan persamaan, *tetapi ini tidak akan mengubah* *penyelesaian yang terhitung.* Perkalian suatu persamaan oleh suatu faktor dinamakan **penskalaan baris**; di sini seseorong secara normal menggunakan suatu pangkat dari 10 (atau basis mesin β) sedemikian sehingga sesudahnya koefisien dari persamaan yang nilai mutlaknya terbesar mempunyai nilai mutlak antara 0,1 dan 1 (atau masing-masing β^{-1} dan 1).

Dalam parktek, seseorang menggunakan penskalaan tumpuan parsial, yaitu dalam langkah ke-*k* (*k* = 1, 2, ...) pada eliminasi seseorang memilih sebagai persamaan tumpuan suatu persamaan dari *n* – *k* +1 persamaan-persamaan yang tersedia sedemikian sehingga hasil bagi dari koefisien-koefisien x_k dan nilai mutlak terbesar dari koefisien dalam suatu persamaan adalah nilai mutlak maksimum. Jika ada beberapa nilai maksimum yang sama, maka ambil nilai maksimum yang pertama.

Contoh 4.4

Gunakan metode penskalaan tumpuan parsial untuk memilih persamaan persamaan tumpuan dalam sistem persamaan berikut dan kemudian hitunglah penyelesaiannya.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= -1 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 6x_1 + 8x_2 - x_3 &= 35 \end{aligned}$$

Penyelesaian :

Kita mempunyai

$$\frac{|a_{11}|}{\max|a_{1k}|} = \frac{3}{5}, \quad \frac{|a_{21}|}{\max|a_{2k}|} = \frac{3}{3}, \quad \frac{|a_{31}|}{\max|a_{3k}|} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Berdasarkan hal di atas kita pilih persamaan kedua sebagai persamaan tumpuan dan dengan menghilangkan x_1 kita peroleh

$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 12x_2 + x_3 &= 37. \end{aligned}$$

Sehingga kita peroleh

$$\frac{|a_{22}^{(2)}|}{\max|a_{2k}^{(2)}|} = \frac{2}{6}, \quad \frac{|a_{32}^{(2)}|}{\max|a_{3k}^{(2)}|} = \frac{12}{12}.$$

Dengan demikian kita pilih persamaan terakhir sebagai persamaan tumpuan sehingga kita peroleh sistem segitiga atas

$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ 12x_2 + x_3 &= 37 \\ \tfrac{37}{6}x_3 &= \tfrac{37}{6} \end{aligned}$$

Dengan penyulihan mundur kita peroleh $x_3 = 1$, $x_2 = 3$, dan $x_1 = 2$. ■

D. Faktorisasi LU

Kita lanjutkan pembicaraan kita tentang metode numerik untuk menyelesaikan sistem linier dengan *n* persamaan dan *n* tak diketahui $x_1, x_2, \cdots, x_n$

$$\boldsymbol{AX = C} \tag{1}$$

di mana $A = (a_{ij})$ adalah matriks koefisien berordo *n* x *n* dan

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ dan } C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Kita akan bahsa tiga metode yang berhubungan yang merupakan modifikasi dari eliminasi Gauss. Ketiga metode tersebut adalah Doolittle, Crout, dan Cholesky dan menggunakan gagasan faktorisasi ***LU*** dari ***A***, yang mana kita jelaskan di muka.

Faktorisasi ***LU*** dari matriks kuadrat ***A*** adalah berbentuk

$$\boldsymbol{A = LU} \tag{2}$$

Di mana ***L*** adalah matriks segitiga bawah dan ***U*** adalah matriks segitiga atas. Contohnya

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Kini gagasan pentingnya adalah ***L*** dan ***U*** dalam (2) dapat dihitung secara langsung, tanpa menyelesaikan persamaan-persamaan secara simultan (dengan demikian tanpa menggunakan eliminasi Gauss).

Setelah kita mempunyai faktorisasi ***LU*** dari ***A***, maka kita dapat menyelesaikan ***AX = C*** dalam dua langkah. Untuk menyederhanakan notasi, ***AX = LUX = C*** dapat ditulis sebagai

$$\boldsymbol{LY} = \boldsymbol{C} \text{ di mana } \boldsymbol{UX} = \boldsymbol{Y}. \tag{3}$$

Langkah pertama adalah menyelesaikan $LY = C$ untuk Y dan langkah kedua adalah menyelesaikan $UX = Y$ untuk X.

Agar matriks L dan U tunggal maka elemen-elemen diagonalnya tidak boleh sembarang. Ada dua macam pemfaktoran yaitu

1. Metode Doolittle

Untuk metode ini matriks segitiga bawahnya, yaitu L, semua elemen diagonalnya bernilai 1. Contohnya untuk matriks A yang berukuran 3 x 3 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = LU\,.$$

Contoh 4.6.

Selesaikan sistem

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 8 \\ 8x_2 + 2x_3 &= -7 \\ 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 &= 26 \end{aligned}$$

dengan metode Doolittle.

Penyelesaian :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = LU\,.$$

Kita akan menentukan l_{ij} dan u_{ij} dengan perkalian matriks. Dengan menyamakan elemen-elemen A dengan LU baris demi baris kita peroleh

(i) $a_{11} = 3 = u_{11}$

$a_{12} = 5 = u_{12}$

$a_{13} = 2 = u_{13}$

(ii) a_{21} = 0 = $l_{21}\,u_{11}$, sehingga l_{21} =0

a_{22} = 8 = $l_{21}\,u_{12}$ + u_{22}, sehingga u_{22} = 8

a_{23} = 2 = $l_{21}\,u_{13}$ + u_{23}, sehingga u_{23} = 2

(iii) a_{31} = 6 = $l_{31}\,u_{11}$ = l_{31}.3, sehingga l_{31} = 2

a_{32} = 2 = $l_{31}\,u_{12}$ +$l_{32}\,u_{22}$ = 2 . 5 + l_{32} . 8, sehingga l_{32} = -1

a_{33} = 8 = $l_{31}\,u_{13}$ + $l_{32}\,u_{23}$ + u_{33}, sehingga u33 = 6.

Dengan demikian faktorisasi dari *A* adalah

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = LU\,.$$

Langkah I :

Menyelesaikan $LY = C$ untuk mencari *Y* dengan penyulihan maju, yaitu

dari $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 26 \end{pmatrix}$ diperoleh $Y = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Langkah II :

Menyelesaikan $UX = Y$ untuk mencari *X* dengan penyulihan mundur, yaitu

dari $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ diperoleh $X = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

X yang diperoleh terakhir ini adalah penyelesaian yang ditanyakan. ■

Rumus (4) memberikan motivasi untuk kasus umum, yaitu matriks koefisien *A* berordo *n* x *n*. Matriks *A* tersebut mempunyai faktorisasi *LU* dengan metode Doolittle sebagai berikut :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} = LU\,.$$

Dengan mengalikan matriks *LU* dan kemudian menyamakan dengan *A* masing-masing elemennya baris per baris, maka kita peroleh

$$
\begin{aligned}
&u_{1j} = a_{1j} && j = 1,2,\cdots,n \\
&u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} && j = i, i+1,\cdots,n; \quad i \ge 2 \\
&l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}} && i = 2,3,\cdots,n \\
&l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \right) && i = j+1,\cdots,n; \quad j \ge 2.
\end{aligned} \tag{4}
$$

2. Metode Crout

Untuk metode ini matriks segitiga atasnya, yaitu *U*, semua elemen diagonalnya bernilai 1. Contohnya untuk matriks *A* yang berukuran 3 x 3 :

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = LU \quad .
$$

Langkah-langkah selanjutnya serupa dengan metode Doolittle.

Untuk matriks koefisien *A* yang berordo *n*, faktorisasinya adalah sebagai berikut

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = LU
$$

Serupa dengan metode Doolittle, dengan mengalikan matriks *LU* dan kemudian menyamakan dengan *A* masing-masing elemennya baris per baris, maka kita peroleh

$$
\begin{aligned}
&l_{i1} = a_{i1} && i = 1,2,\cdots,n \\
&l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} && i = j, j+1,\cdots,n; \quad j \ge 2 \\
&u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}} && j = 2,3,\cdots,n \\
&u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \right) && j = i+1,\cdots,n; \quad i \ge 2.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Metode kita yang ketiga adalah metode Cholesky. Adapun penjelasannya adalah sebagai berikut.

3. **Metode Cholesky**

Jika ***A* adalah matriks simetrik dan definit positif,** yaitu $A = A^T$ dan $X^T AX > 0$ untuk setiap $X \neq 0$, maka faktorisasi $A = LU$ dapat dipilih dengan $U = L^T$. Dengan demikian $u_{ij} = l_{ji}$.

Contohnya adalah

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 14 \\ 2 & 17 & -5 \\ 14 & -5 & 83 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 7 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Jika matriks koefisien berordo *n* x *n* (berukuran umum), maka maka faktorisasinya adalah sebagai berikut

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & \cdots & u_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} = LU = LL^T$$

Dengan menyamakan elemen-elemen matriks *A* dan *LU*, maka diperoleh

$$\begin{aligned} l_{11} &= \sqrt{a_{11}} \\ l_{ii} &= \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^{\,2}} & & i = 2,3,\cdots,n \\ l_{i1} &= \frac{a_{i1}}{l_{11}} & & i = 2,3,\cdots,n \\ l_{ij} &= \frac{1}{l_{jj}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}\right) & & i = j+1,\cdots,n; \quad j \geq 2 \end{aligned} \qquad (7)$$

Jika matriks *A* simetrik tetapi tidak definit pisitif, maka metode ini masih bisa digunakan, tetapi *L* merupakan matriks kompleks, sehingga tidak dapak dapat deterapkan.

Contoh 4.7.

Selesaikan sistem berikut dengan metode Cholesky.

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 14x_3 &= 14 \\ 2x_1 + 17x_2 - 5x_3 &= -101 \\ 14x_1 - 5x_2 + 83x_3 &= 155. \end{aligned}$$

Penyelesaian :

Faktorisasi dari matriks koefisien A adalah

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 14 \\ 2 & 17 & -5 \\ 14 & -5 & 83 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}.$$

Dengan (7) kita peroleh

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = 2, \qquad l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{2}{2} = 1, \qquad l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{14}{2} = 7$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^{\ 2}} = \sqrt{17-1} = 4$$

$$l_{32} = \frac{1}{l_{22}}\left(a_{32} - l_{31}l_{21}\right) = \frac{1}{4}(-5 - 7\cdot 1) = -3$$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^{\ 2} - l_{32}^{\ 2}} = \sqrt{83 - 7^2 - (-3)^2} = 5.$$

Hasil ini sesuai dengan (6). Langkah pertama adalah penyulihan maju untuk menyelesaikan Y dari $LY = C$, yaitu

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 7 & -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -101 \\ 155 \end{pmatrix} \text{diperoleh} \quad Y = \begin{pmatrix} 7 \\ -27 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Sedangkan langkah kedua adalah menyelesaikan $UX = Y$ untuk mencari X dengan penyulihan mundur, yaitu

$$\text{dari} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -27 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ diperoleh } \quad X = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$ ■

E. Eliminasi Gauss-Jordan

Variasi lain dari eliminasi Gauss adalah **eliminasi Gauss-Jordan**, yang diperkenalkan oleh W. Jordan tahun 1920, yang mana penyulihan mundur dalam eliminasi Gauss dihindari dengan melakukan perhitungan tambahan yang **mereduksi matriks A ke bentuk diagonal,** mengantikan bentuk segitiga dalam eliminasi Gauss. Tetapi untuk mereduksi dari bentuk segitiga ke bentuk diagonal memerlukan lebih banyak operasi dari pada penyulihan mundur, maka metode ini tidak menguntungkan untuk menyelesaikan sistem $AX = C$. Tetapi ini dapat digunakan untuk matriks invers, di mana situasinya adalah sebagai berikut.

Invers dari matriks bujur sangkar A tak singular dalam prinsipnya ditentukan dari penyelesaian n sistem

$$AX = e_i \qquad\qquad i = 1, 2, ..., n$$

di mana e_i adalah kolom ke-i dari matriks satuan berukuran $n \times n$.

Namun, lebih disukai untuk menghasilkan A^{-1} dengan cara mengoperasikan matriks satuan I dalam cara yang sama seperti algoritma Gauss-Jordan mereduksi A menjadi I. Jadi matriks lengkap [A, I] berukuran n x 2n. Dalam hal matriks A tidak dapat direduksikan menjadi matriks satuan I, maka dapat disimpulkan bahwa A singular, tidak mempunyai invers.

Pada prinsipnya **eliminasi Gauss-Jordan adalah merubah matriks [A, I] menjadi [I, A^{-1}], yaitu** $[A, I] \sim [I, A^{-1}]$.

F. **Metode Iterasi**

Eliminasi Gauss, Faktorisasi LU dan metode Gauss-Jordan merupakan **metode langsung** untuk menyelesaikan sistem persamaan linier; yang mana metode tersebut menberikan selesaian setelah dilakukan sejumlah perhitungan yang telah ditentukan sebelumnya. Kebalikannya, yaitu dalam **metode tak langsung** atau **metode iterasi** kita mulai dengan menghampiri selesaian eksaknya, jika berhasil, diperoleh hampiram yang lebih baik dengan perhitungan berulang sampai keakuratan yang diinginkan tercapai.

Jika proses kekonvergenan mengalami kegagalan (karena matriks mempunyai elemen diagonal utama yang besar), maka kita terapkan metode iterasi. Demikian juga yang kita lakukan pada sistem yang mempunyai banyak koefisien nol dengan sedikit variabel.

1. Metode Iterasi Gauss-Seidel

Metode ini sering dipakai dalam praktek. Untuk lebih jelasnya kita berikan contoh sederhana sebagai berikut.

Contoh 4.8.

Pandang sistem linier

$$
\text{(i)}\qquad
\begin{array}{rcrcrcrcl}
x_1 & - & 0{,}25\,x_2 & - & 0{,}25\,x_3 & & & = & 50 \\
-0{,}25\,x_1 & + & x_2 & & & - & 0{,}25\,x_4 & = & 50 \\
-0{,}25\,x_1 & & & + & x_3 & - & 0{,}25\,x_4 & = & 25 \\
 & - & 0{,}25\,x_2 & - & 0{,}25\,x_3 & + & x_4 & = & 25.
\end{array}
$$

(Persamaan dalam bentuk ini timbul dalam selesaian numerik dari persamaan diferensial parsial).

Tulis sistem tersebut dalam bentuk

$$
\text{(ii)}\qquad
\begin{array}{lcrcrcrcr}
x_1 & = & & & 0{,}25\,x_2 & + & 0{,}25\,x_3 & & +\ 50 \\
x_2 & = & 0{,}25\,x_1 & & & & +\ 0{,}25\,x_4 & & +\ 50 \\
x_3 & = & 0{,}25\,x_1 & & & & +\ 0{,}25\,x_4 & & +\ 25 \\
x_4 & = & & & 0{,}25\,x_2 & + & 0{,}25\,x_3 & & +25.
\end{array}
$$

Kita gunakan persamaan ini untuk iterasi, yaitu kita mulai dari hampiran selesaian (mungkin buruk), misalnya

$$x_1^{(0)} = 100, x_2^{(0)} = 100, x_3^{(0)} = 100, x_4^{(0)} = 100,$$

dan hitung dari (ii) barangkali memberikan hampiran yang bagus

Gunakan nilai-nilai 'lama'
(nilai-nilai 'baru' di sini belum diperoleh)

$x_1^{(1)} =$		$0{,}25\,x_2^{(0)}+$	$0{,}25\,x_3^{(0)}$		+50,00	=100,00
$x_2^{(1)} =$	$0{,}25\,x_1^{(1)}$			$+0{,}25\,x_4^{(0)}$	+50,00	=100,00
$x_3^{(1)} =$	$0{,}25\,x_1^{(1)}$			$+0{,}25\,x_4^{(0)}$	+25,00	=75,00
$x_4^{(1)} =$		$0{,}25\,x_2^{(1)}$	$0{,}25\,x_3^{(1)}$		+25,00	=68,75

Gunakan nilai-nilai 'baru'

Kita lihat persamaan-persamaan dalam tabel di atas diperoleh dari (ii) dengan menyulihkan pada ruas kanan hampiran yang terbaru. . Dalam kenyataannya, elemen-elemen yang dihitung langsung digunakan untuk menggantikan elemen-elemen sebelumnya satu per satu. Dengan demikian dalam persamaan kedua dan ketiga kita menggunakan $x_1^{(1)}$ (bukan $x_1^{(0)}$), dan dalam persamaan terakhir dalam tabel kita menggunakan $x_2^{(1)}$ dan $x_3^{(1)}$ (bukan $x_2^{(0)}$ dan $x_3^{(0)}$). Langkah selanjutnya adalah

$$\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= & 0{,}25\,x_2^{(1)} + 0{,}25\,x_3^{(1)} & & + 50\\
x_2^{(2)} &= 0{,}25\,x_1^{(2)} & & + 0{,}25\,x_4^{(1)} & + 50\\
x_3^{(2)} &= 0{,}25\,x_1^{(2)} & & + 0{,}25\,x_4^{(1)} & + 25\\
x_4^{(2)} &= & 0{,}25\,x_2^{(2)} + 0{,}25\,x_3^{(2)} & & + 25.
\end{aligned}$$

Langkah-langkah tersebut dapat dilanjutkan untuk memperoleh hampiran selesaian yang lebih akurat. Selesaian eksak dari perseamaan tersebut adalah $x_1 = x_2 = 87{,}5$; dan $x_3 = x_4 = 62{,}5$. ■

Untuk memperoleh suatu algoritma iterasi Gauss-Seidel, misal kita turunkan rumus umum untuk iterasi ini.

Misal $a_{ii} = 1$ untuk $i = 1, 2, \cdots, n$. Sebagai catatan, ini dapat dicapai jika kita dapat menyusun kembali persamaan-persamaan sedemikian sehingga tidak ada koefisien diagonal yang nol; kemudian kita membagi setiap persamaan dengan koefisien diagonal yang bersesuaian. Dengan demikian kita dapat menulis *A* sebagai

$$\boldsymbol{A = I + L + U} \qquad (8)$$

di mana *I* adalah matriks satuan *n* x *n* dan *L* dan *U* masing-masing adalah matriks segitiga bawah dan atas dengan diagonal utamanya nol. Jika kita sulihkan (8) ke $AX = C$, mka kita mempunyai

$$AX = (I + L + U)X = C.$$

Karena $IX = X$, maka dari persamaan di atas kita peroleh

$$\boldsymbol{X = C - LX - UX.} \qquad (9)$$

Ingat perhitungan kita dalam contoh 4.8, di bawah diagonal utama kita gunakan hampiran 'baru' dan di atas diagonal utaman digunakan hampiran 'lama', sehingga dari (9) kita peroleh rumus iterasi seperti yang kita inginkan sebagai

$$X^{(k+1)} = C - LX^{(k+1)}UX^{(k)} \quad (10)$$

di mana $X^{(k)} = \left(x_i^{(k)}\right)$ adalah hampiran yang ke-k dan $X^{(k+1)} = \left(x_i^{(k+1)}\right)$ adalah hampiran yang ke-($k+1$).

Algoritma Iterasi Gauss-Seidel

Algoritma ini menghitung selesaian X dari sistem $AX = C$ dengan hampiran awal $X^{(0)}$, di mana $A = \left(a_{ij}\right)$ adalah matriks n x n dengan $a_{ii} \neq 0$, i = 1, 2, $,\cdots,$ n.

Masukan : A, C, hampiran awal $X^{(0)}$, toleransi $\varepsilon > 0$, dan banyaknya iterasi maksimum N.

Keluaran : Hampiran selesaian atau $X^{(k)} = \left(x_i^{(k)}\right)$

Langkah-langkah :

Untuk k = 0, 1, $,\cdots,$ $N - 1$ kerjakan

Untuk i = 1, 2, $,\cdots,$ n kerjakan

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{m=1}^{i-1} a_{im}x_m^{(k+1)} + \sum_{m=i+1}^{n} a_{im}x_m^{(k)} - b_i\right)$$

Jika $\max_i \left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| < \varepsilon$ maka hampirannya $X^{(k+1)}$.

2. Iterasi Jacobi

Iterasi Gauss-Seidel merupakan metode yang selalu memeriksa secara berkelanjutan (successive corrections), karena kita menggunakan hampiran yang baru saja dihitung. Sedangkan metode iterasi Jacobi disebut sebagai metode koreksi simultan (*simultaneous corrections*), yaitu tidak ada komponen dari hampiran $X^{(k+1)}$ yang digunakan sampai semua komponen dari $X^{(k+1)}$ dihitung. Dengan demikian iterasi Jacobi menngunakan semua komponen hampiran'lama' untuk membangun semua komponen hampiran 'baru', sedangkan iterasi Gauss-Seidel memakai semua komponen hampiran 'baru' segera setelah komponen-komponen tersebut dihitung.

Jadi dalam iterasi Jacobi untuk menghitung semua komponen $X^{(k+1)}$ digunakan semua komponen $X^{(k)}$.

Jika $AX = C$ ditulis dalam bentuk $X = C + (I - A)X$, maka iterasi Jacobi dinotasikan dalam matriks berbentuk

$$X^{(k+1)} = C + (I - A)\, X^{(k)}. \tag{11}$$

Metode ini secara teori lebih menarik, karena dengan metode ini akan selalu konvergen untuk setiap hampiran awal $X^{(0)}$ jika dan hanya jika jari-jari spektral dari $I - A$ kurang dari 1 (dalam hal ini kita asumsikan $a_{ii} = 1$ untuk $i = 1, 2, \cdots, n$).

Soal-soal

Selesaikan sistem linier berikut dengan metode Doolittle. Perlihatkan juga faktorisasi LU-nya

1. $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 18 \\ 18x_1 + 17x_2 &= 123 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 4x_1 - 6x_2 &= -17{,}0 \\ 8x_1 - 7x_2 &= -26{,}5 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= -11 \\ x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 9x_2 + 11x_3 &= -20 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 14 \\ 12x_1 + 13x_2 + 6x_3 &= 40 \\ -3x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= -28 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} 5x_1 + 4x_2 + x_3 &= 3{,}4 \\ 10x_1 + 9x_2 + 4x_3 &= 8{,}8 \\ 10x_1 + 13x_2 + 15x_3 &= 19{,}2 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2{,}6x_3 &= -4{,}94 \\ 0{,}5x_1 - 3{,}0x_2 + 3{,}3x_3 &= -8{,}27 \\ -1{,}5x_1 - 3{,}5x_2 - 10{,}4x_3 &= 10{,}51 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} 3x_1 + 9x_2 + 6x_3 &= 23 \\ 18x_1 + 48x_2 + 39x_3 &= 136 \\ 9x_1 - 27x_2 + 42x_3 &= 45 \end{aligned}$

9. Selesaikan soal nomor 1, 4 dan 5 dengan metode Crout.

Selesaikan sistem persamaan linier berikut dengan metode Cholesky.

10. $\begin{aligned} 9x_1 + 6x_2 + 12x_3 &= 174 \\ 6x_1 + 13x_2 + 11x_3 &= 236 \\ 12x_1 + 11x_2 + 26x_3 &= 308 \end{aligned}$

11. $\begin{aligned} 0{,}01x_1 + 0{,}03x_3 &= 0{,}14 \\ 0{,}16x_2 + 0{,}08x_3 &= 0{,}16 \\ 0{,}03x_1 + 0{,}08x_2 + 0{,}14x_3 &= 0{,}54 \end{aligned}$

12. $\begin{aligned} 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 &= 0 \\ 6x_1 + 34x_2 + 52x_3 &= -160 \\ 8x_1 + 52x_2 + 129x_3 &= -452 \end{aligned}$

13. $\begin{aligned} 4x_1 + 10x_2 + 8x_3 &= 44 \\ 10x_1 + 26x_2 + 26x_3 &= 128 \\ 8x_1 + 26x_2 + 61x_3 &= 214 \end{aligned}$

Carilah Invers dari matriks yang diberikan dengan eliminasi Gauss-Jordan.

14. $\begin{pmatrix} 2 & -0{,}5 \\ -1 & 1{,}5 \end{pmatrix}$ **15.** $\begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}7 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$ **18.** $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$.

Selesaikan sistem linier berikut dengan iterasi Gauss-Seidel dalam 5 iterasi dan 6D dengan hampiran awal $X^{(0)} = (1 \quad 1 \quad 1)^T$.

19. $4x_1 + 2x_2 + x_3 = 14$
$x_1 + \mathbf{5}x_2 - x_3 = \mathbf{10}$
$x_1 + x_2 + \mathbf{8}x_3 = \mathbf{20}$

20. $\mathbf{10}x_1 - x_2 - x_3 = \mathbf{13}$
$x_1 + \mathbf{10}x_2 + x_3 = \mathbf{36}$
$-x_1 - x_2 + \mathbf{10}x_3 = \mathbf{35}$

21. $6x_1 + x_2 + x_3 = 107$
$x_1 + 9x_2 - 2x_3 = 36$
$2x_1 - x_2 + 8x_3 = 121$

22. $2x_1 + 10x_2 - x_3 = -32$
$-x_1 + 2x_2 + 15x_3 = 17$
$10x_1 - x_2 + 2x_3 = 58$

Selesaikan sistem linier berikut dengan iterasi Jacobi dalam 5 iterasi dan 6D dengan hampiran awal $X^{(0)} = (1 \quad 1 \quad 1)^T$.

23. $10x_1 + x_2 + x_3 = 6$
$x_1 + 10x_2 + x_3 = 6$
$x_1 + x_2 + 10x_3 = 6$

24. $6x_1 + x_2 - x_3 = 3$
$-x_1 + x_2 + 7x_3 = -17$
$x_1 + 5x_2 + x_3 = 0$

Selesaikan sistem linier berikut dengan iterasi Jacobi dalam 5 iterasi dan 6D dengan hampiran awal $X^{(0)} = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)^T$.

25.
$$\begin{aligned} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 18 \\ -2x_1 + 12x_2 - x_3 &= -7 \\ 2x_1 + 16x_3 + 2x_4 &= 54 \\ x_2 + 2x_3 - 20x_4 &= -14 \end{aligned}$$

26.
$$\begin{aligned} 7x_1 + x_3 - x_4 &= 1{,}2 \\ -x_1 + x_2 + 8x_3 &= -8{,}3 \\ 10x_2 - x_3 + x_4 &= 2{,}6 \\ x_1 + x_2 + 30x_4 &= 22{,}1 \end{aligned}$$