FAKTORISASI LU

L = Matriks Segitiga Bawah

U = Matriks Segitiga Atas

Dimana

$$\boldsymbol{A = LU}$$

Contoh

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Dari contoh di atas dapat dilihat bahwa perkalian matriks L dan U menghasilkan matriks A. Dapat dikatakan LU merupakan **faktorisasi** dari A.

Faktorisasi LU digunakan untuk menyelesaikan $AX = C$

Dimana

$A = (a_{ij})$ matriks koefisien berordo $n \times n$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

Sehingga dari $AX = C$ (dan $A = LU$) diperoleh $AX = LUX = C$

Untuk menyerdahanakannya ditulis

$$LY = C \text{ (dimana } UX = Y\text{)}$$

Maka dalam Faktorisasi LU

Langkah 1 menyelesaikan $\boldsymbol{LY = C}$ untuk Y

Langkah 2 menyelesaikan $\boldsymbol{UX = Y}$ untuk X

1. Metode Doolittle

Matriks segitiga bawah (L) semua elemen diagonalnya bernilai 1

Contoh untuk matriks A berordo 3×3

Ingat $A = LU$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = LU$$

Contoh 4.6
Selesaikan SPL

$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8$

$8x_2 + 2x_3 = -7$

$6x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 26$

Penyelesaian

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = LU$$

Sekarang kita tentukan l_{ij} dan u_{ij} dengan perkalian matriks

Perhatikan matriks LU

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix}$$

diperoleh dari perkalian matriks LU

Maka

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix} = LU$$

(i)

$a_{11} = \mathbf{3} = \boldsymbol{u_{11}}$

$a_{12} = \mathbf{5} = \boldsymbol{u_{12}}$

$a_{13} = \mathbf{2} = \boldsymbol{u_{13}}$

(ii)

$a_{21} = 0 = l_{21}u_{11}$ maka $\boldsymbol{l_{21} = 0}$

$l_{21}u_{11} = 0$

$l_{21} \cdot 3 = 0$

$l_{21} = 0$

$a_{22} = 8 = l_{21}u_{12} + u_{22}$ maka $\boldsymbol{u_{22} = 8}$

$l_{21}u_{12} + u_{22} = 8$

$(0 \cdot 5) + u_{22} = 8$

$u_{22} = 8$

$a_{23} = 2 = l_{21}u_{13} + u_{23}$ maka $\boldsymbol{u_{23} = 2}$

$l_{21}u_{13} + u_{23} = 2$

$(0 \cdot 2) + u_{23} = 2$

$u_{23} = 2$

(iii)

$a_{31} = 6 = l_{31}u_{11}$ maka $\boldsymbol{l_{31} = 2}$

$a_{32} = 2 = l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22}$ maka $\boldsymbol{l_{32} = -1}$

$a_{33} = 8 = l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33}$ maka $\boldsymbol{u_{33} = 6}$

Dengan demikian faktorisasi dari A adalah

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = LU$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = LU$$

Langkah 1 menyelesaikan $\boldsymbol{LY = C}$ untuk Y dengan penyulihan maju

$LY = C$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 26 \end{pmatrix}$$

Dengan penyulihan maju diperoleh

$y_1 = 8$

$y_2 = -7$

$2y_1 - y_2 + y_3 = 26$ maka $y_3 = 3$

Maka

$$Y = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Langkah 2 menyelesaikan $\boldsymbol{UX = Y}$ untuk X dengan penyulihan mundur

$UX = Y$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dengan penyulihan mundur diperoleh

$6x_3 = 3$ maka $x_3 = 0{,}5$

$8x_2 + 2x_3 = -7$ maka $x_2 = -1$

$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8$ maka $x_1 = 4$

Maka

$$X = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Jadi, penyelesaian SPL diperoleh $x_1 = 4$, $x_2 = -1$, dan $x_3 = 0{,}5$

2. Metode Crout

Matriks segitiga atas (U) semua elemen diagonalnya bernilai 1

Contoh untuk matriks A berordo 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = LU$$

Langkah selanjutnya serupa dengan metode sebelumnya.

3. Metode Cholesky

Faktorisasi LU dengan $U = L^T$ pada matriks simetrik yaitu $A = A^T$

Contoh untuk matriks A berordo 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix} = LU = LL^T$$

Langkah selanjutnya serupa dengan metode sebelumnya.