METODE NUMERIK

GALAT

BAB 1 GALAT

A. Galat
B. Aturan Pembulatan
C. Bilangan Titik Kambang
D. Perambatan Galat

GALAT

Dalam komputasi kita bekerja dengan sejumlah berhingga angka dan melaksanakan berhingga banyaknya langkah, sehingga metode-metode numerik adalah proses-proses berhingga, dan hasil numerik merupakan nilai hampiran dari hasil eksak. Dengan demikian dalam hasil numerik terdapat suatu galat.

Jika x^* adalah nilai hampiran dari suatu besaran yang nilai eksaknya adalah x, maka

- $E = x - x^*$ disebut *galat mutlak*
- $e = \dfrac{E}{x} = \dfrac{x - x^*}{x}$ disebut *galat relatif*

Disamping galat, keandalan suatu nilai numerik ditentukan pula oleh angka bena, yaitu angka yang dapat digunakan secara pasti. Bilangan *x** dikatakan menghampiri *x* sampai d angka bena apabila **d** merupakan bilangan bulat terbesar yang memenuhi

$$\boxed{|e| = \frac{|x - x^*|}{|x|} < \frac{10^{-d}}{2}}$$

Contoh

Tentukan galat mutlak, galat relatif dan angka bena jika $x^* = 3{,}14$ menghampiri $x = 3{,}141592$

Jawab:

Galat mutlak

$$E = x - x^* = 3{,}141592\text{-}3{,}14 = 0{,}001592$$

Galat relatif

$$e = \frac{E}{x} = \frac{0{,}001592}{3{,}141592} = 0{,}000507$$

Angka bena

$$\frac{|x - x^*|}{|x|} = |0{,}000507| = 0{,}000507 < 0{,}005 = \frac{10^{-2}}{2}$$

Dengan demikian x^* menghampiri x sampai 2 angka bena.

Jika $x^* = 3{,}141$ menghampiri $x = 3{,}141592$, maka

$|e| = \left|\frac{0{,}000592}{3{,}141592}\right| = 0{,}000188 < \frac{10^{-3}}{2}$, yaitu angka benanya 3.

Semakin besar angka bena yang dimiliki suatu data, maka data tersebut semakin teliti.

Berdasarkan sumber dari galat, galat dapat dibedakan menjadi lima jenis galat, yaitu :

1. **Galat percobaan**, yaitu galat yang melekat (bawaan) dari data yang diberikan yang (mungkin) diperoleh dari hasil pengukuran / percobaan.
2. **Galat pemotongan**, yaitu galat yang berasal dari pemotongan sejumlah tertentu (barisan) langkah komputasi. Galat pemotongan ini tergantung pada metode komputasi yang digunakan.

Contoh : $x = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$

$$x^* = x - \frac{x^3}{3!}$$

Dengan demikian galat pemotongannya adalah

$$E = \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

3. **Galat pembulatan**, yaitu galat yang ditimbulkan oleh proses pembulatan selama komputasi karena keterbatasan digit dari alat komputasinya.

Contoh : $x = \frac{2}{3} = 0,66666666...$

$x^* = 0,666667$

Dengan demikian galat pembulatannya adalah $|E| = 0,00000003333...$

4. **Galat pemrograman**, yaitu galat yang berasal dari kecerobohan program yang digunakan.
5. **Galat mesin**, yaitu galat yang berasal dari kecerobohan aritmatika dalam hitungan manual.

ATURAN PEMBULATAN

Pembulatan sampai k angka desimal berarti membuang angka yang ke $k + 1$ dan yang sesudahnya.

Setengah satuan dalam posisi ke-$k = 0{,}000 \ldots 05$

- **Pembulatan ke bawah**

Apabila bilangan yang dibuang lebih kecil dari setengah satuan dalam posisi ke-k maka biarkan angka desimal ke-k tidak diubah.

- **Pembulatan ke atas**

Apabila bilangan yang dibuang lebih besar dari setengah satuan dalam posisi ke-k maka tambahkan satu pada angka desimal ke-k.

- Jika bilangan yang dibuang tepat setengah satuan dalam posisi ke-k maka angka desimal ke-k diubah ke angka genap yang terdekat.

Contoh:

- Bulatkan ke-1 angka decimal, setengah satuan dalam posisi ke-1adalah 0,05

  9,42 $\rightarrow$ 9,4 karena 0,02 < 0,05

  9,47 $\rightarrow$ 9,5 karena 0,07 > 0,05

  9,45 $\rightarrow$ 9,4 karena 0,05 = 0,05 dan 4 adalah genap

  9,35 $\rightarrow$ 9,4 karena 0,05 = 0,05 dan 3 adalah ganjil

  9,650001 $\rightarrow$ 9,7 karena 0,050001 > 0,05

- 1,2535 $\rightarrow$ 1,254 (pembulatan sampai 3 angka desimal)

  $\rightarrow$ 1,25 (pembulatan sampai 2 angka desimal)

  $\rightarrow$ 1,3 (pembulatan sampai 1 angka desimal)

Jadi pembulatan 1,2535 ke-1 angka desimal adalah 1,3 karena setelah angka 5 dibelakang 2 (angka 5 pada desimal yang kedua) masih ada angka 35. Tapi pembulatan angka 1,25 ke satu angka desimal (tanpa informasi tambahan) akan memberikan 1,2.

BILANGAN TITIK KAMBANG

Dalam notasi desimal, setiap bilangan riil dinyatakan dalam barisan berhingga atau tak berhingga angka desimal. Untuk mesin hitung bilangan harus dinyatakan dalam sejumlah berhingga angka. Kebanyakan komputer digital mempunyai dua cara dalam menyatakan bilangan, yaitu titik tetap atau titik kambang. Dalam **sistem titik tetap** semua bilangan diberikan dalam sejumlah tetap tempat desimal. Contohnya **34,928; 0,026; 2,000**. Sistem titik tetap biasanya digunakan untuk melaksanakan perhitungan yang diketahui mempunyai nilai bulat. Pemakaian sistem ini juga terbatas dalam analisa numerik. Sedangkan dalam **sistem titik kambang**, bilangan diberikan dalam sejumlah tetap angka signifikan, yaitu dalam bentuk $\pm q \times 10^n$ dengan $0,1 \leq q < 1$, dimana q disebut mantis dan n (bilangan bulat) disebut eksponen.

Contoh bilangan dalam sistem titik kambang:

$$0{,}7498\times10^{3} \qquad 0{,}1743\times10^{-12} \qquad -0{,}4239\times10^{7}$$

bilangan-bilangan tersebut dapat juga ditulis dalam bentuk

0,7498E03   0,1743E-12   -0,4239E07

Angka signifikan (banyaknya angka) suatu bilangan c adalah banyaknya angka dalam c kecuali (mungkin) nol-nol pada awal bilangan (nol-nol di kiri angka tak nol pertama) yang hanya digunakan untuk menentukan posisi tanda desimal. Contohnya **87030**; **87,030**; **0,00087030** mempunyai 5 angka signifikan. Tetapi yang dimaksud banyaknya angka desimal adalah banyaknya angka dibelakang tanda desimal (koma). Sehingga nol-nol pada awal bilangan yang berada dikanan tanda koma desimal disertakan.

Contoh

- **0,00215** diberikan dalam **3** angka signifikan tetapi mempunyai **5** angka desimal
- **0,00215000** diberikan dalam **6** angka signifikan tetapi mempunyai **8** angka desimal
- **32,4671** diberikan dengan **6** angka signifikan tetapi mempunyai **4** angka desimal
- **32,004671** diberikan dengan **8** angka signifikan tetapi mempunyai **6** angka desimal

PERAMBATAN GALAT

Informasi ini sangat penting, yaitu menunjukkan dimana galat dimulai dan proses merambatnya galat akibat pembulatan, serta akibat yang diberikan terhadap keakuratan hasil perhitungan. Di sini akan dilihat bagaimana batas galat dalam penjumlahan dan pengurangan, serta batas galat untuk galat relatif penjumlahan terhadap perkalian dan pembagian.

<u>Teorema (Perambatan Galat)</u>

(a) Dalam penjumlahan dan pengurangan batas galat untuk hasil adalah jumlah dari batas galat mutlak suku-sukunya.

(b) Dalam perkalian dan pembagian batas galat relatif untuk hasil adalah jumlah dari batas galat relatif suku-sukunya.

Bukti:

Misal x dengan galat mutlak E_x dan galat relatif e_x dimana $|E_x| \leq \beta_x$ dan $|e_x| \leq \beta_{rx}$.

y dengan galat mutlak E_y dan galat relatif e_y dimana $|E_y| \leq \beta_y$ dan $|e_y| \leq \beta_{ry}$.

Maka $x^* = x - E_x = x - xe_x = x(1-e_x)$

$y^* = y - E_y = y(1-e_y)$

Akan dibuktikan

(a) $|E_{x+y}| \leq \beta_x + \beta_y$ dan $|E_{x-y}| \leq \beta_x + \beta_y$

(b) $|e_{x.y}| \leq \beta_{rx} + \beta_{ry}$ dan $|e_{x/y}| \leq \beta_{rx} + \beta_{ry}$

Bukti (a)

Misal E_{x+y} adalah galat mutlak dari $x + y$, maka

$$\begin{aligned}
\left|E_{x+y}\right| &= \left|x + y - (x^* + y^*)\right| \\
&= \left|x - x^* + (y - y^*)\right| \\
&= \left|E_x + E_y\right| \\
&\leq \left|E_x\right| + \left|E_y\right| \\
&\leq \beta_x + \beta_y
\end{aligned}$$

Untuk pengurangan dapat dibuktikan dengan jalan yang sama

Bukti (b)

Misal e_{xy} adalah galat relatif dari xy, maka

$$
\begin{aligned}
\left|e_{xy}\right| &= \left|\frac{xy - x^{*}y^{*}}{xy}\right| = \left|\frac{xy-(x-E_x)(y-E_y)}{xy}\right| \\
&= \left|\frac{E_x y + E_y x - E_x E_y}{xy}\right| \\
&\approx \left|\frac{E_x y + E_y x}{xy}\right| = \left|\frac{E_x}{x} + \frac{E_y}{y}\right| = \left| e_x + e_y \right| \\
&\leq \left|e_x\right| + \left|e_y\right| \leq \beta_{rx} + \beta_{ry}
\end{aligned}
$$

Dalam bukti di atas terdapat aproksimasi karena $\left|E_x E_y\right|$ adalah kecil dibandingkan dengan $\left|E_x\right|$ dan $\left|E_y\right|$. Untuk pembagiannya dapat dibuktikan dengan cara yang sama tetapi agak lebih rumit.