Revisão de Álgebra

Parte 1 - Geometria Analítica e Álgebra Linear

Juliana Santana <juliana.maria@fbter.org.br>

Orientador: Marco A. dos Reis

Robótica e Sistemas Autônomos, Senai Cimatec

Maio de 2022

Sistema FIEB

SENAI CIMATEC

PELO FUTURO DA INOVAÇÃO

A Álgebra Linear

É uma área da matemática que que permite estudos matemáticos mais aprofundados e soluções em aplicações práticas em diversos campos da ciência e negócios.

Álgebra Linear

- Equações Lineares
- Vetores
- Matrizes
- Determinantes
- Transformações Lineares
- Espaço de Vetores

Matriz e Vetores

- Permitem escrever sistemas lineares de uma forma mais compacta
- E, utilizar operações com as matrizes para solucionar o sistema.

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Operações básicas com matrizes

Soma e subtração

As **matrizes** devem ter a mesma dimensão.

Operação de soma

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 2+5 \\ 3+4 & 4+3 \\ 5+2 & 6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Operação de subtração

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-6 & 2-5 \\ 3-4 & 4-3 \\ 5-2 & 6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Operações básicas com matrizes

Multiplicação escalar

Operação de multiplicação por escalar

$$10 * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 * 1 & 10 * 2 \\ 10 * 3 & 10 * 4 \\ 10 * 5 & 10 * 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \\ 50 & 60 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Operações básicas com matrizes

Multiplicação

As **matrizes** só podem ser multiplicadas somente se o número de colunas no fator da esquerda é igual ao número de linhas no fator da direita.

$$mx\textcircled{n} * \textcircled{n}xp = mxp \tag{4}$$

Operação de multiplicação entre matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x_1 + 2x_2 & 1y_1 + 2y_2 \\ 3x_1 + 4x_2 & 3y_1 + 4y_2 \\ 5x_1 + 6x_2 & 5y_1 + 6y_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Tipos de matrizes

Matriz zero

A **matriz zero** possui todos os elementos iguais a zero.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Tipos de matrizes

Matriz transposta

A **matriz transposta** troca as linhas e as colunas em uma matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}^{\top} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Tipos de matrizes

Matriz simétrica

A **matriz simétrica** é uma matriz que é simétrica em volta da sua diagonal principal. Por causa desta característica, a matriz simétrica é sempre igual a sua transposta.

$$\begin{bmatrix} \color{red}{1} & 5 & 6 & 7 \\ 5 & \color{red}{2} & 8 & 9 \\ 6 & 8 & \color{red}{3} & 10 \\ 7 & 9 & 10 & \color{red}{4} \end{bmatrix} \tag{10}$$

Tipos de matrizes

Matriz triangular superior e triangular inferior

A **matriz triangular** é uma matriz quadrada onde os elementos ou acima ou abaixo da diagonal principal são todos iguais a zero.

Matriz triangular superior

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Matriz triangular inferior

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 3 & 0 \\ 7 & 9 & 10 & 4 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Tipos de matrizes

Matriz diagonal

A **matriz diagonal** é uma matriz quadrada onde todos os elementos que não fazem parte da diagonal principal são iguais a zero.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Tipos de matrizes

Matriz identidade

A **matriz identidade** é uma matriz quadrada com n linhas onde todos os elementos na diagonal principal são iguais a 1 e todos os outros elementos são 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Tipos de matrizes

Matriz inversa

Se o produto de duas **matrizes quadradas** é uma **matriz identidade**, então as duas matrizes são **inversas** uma da outra.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Relação entre a matriz inversa e a matriz identidade:

$$\boxed{A \ x \ A^{-1} = I}$$

Determinante

O determinante permite verificar se uma matriz possui uma inversa ou não. Caso o determinante da matriz seja **diferente** de zero, a matriz possui uma inversa.

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 3 * 2 - 0 * 0 = 6 \tag{16}$$

O cálculo do determinante envolve a regra de **Sarrus**.

$$\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Sistemas de equações lineares

Um dos problemas mais importantes na matemática é o da resolução de um **sistema de equações lineares**.
De acordo com [Leon 2011], mais de 75% de todos os problemas matemáticos encontrados em aplicações científicas e industriais envolvem a resolução de um sistema linear em algum estágio.

$$
\begin{gathered}
a_1x + 1 + a_2x + 2 + a_nx + n = b \\
a_1x + 1 + a_2x + 2 + a_nx + n = b \\
. \\
. \\
. \\
a_1x + 1 + a_2x + 2 + a_nx + n = b
\end{gathered}
$$

Mínimos Quadrados

O ajuste por mínimos quadrados é uma técnica de otimização matemática que busca **minimizar** a soma dos quadrados das diferenças entre o valor estimado e os dados observados.

A técnica dos mínimos quadrados foi desenvolvida independentemente por **Adrien-Marie Legendre** e **Carl Friendrich Gauss**.

Retrato de Gauss

References

[Baldin e FURUYA 2011] BALDIN, Y. Y.; FURUYA, Y. K. S. **Geometria analítica para todos e atividades com Octave e GeoGebra**. [S.l.]: EduFSCar: São Carlos, 2011.

[Boldrini et al. 1980] BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra linear**. [S.l.]: Harper & Row, 1980.

[Craig 2012] CRAIG, J. **Robótica. 3a edição.[SI]**. [S.l.]: São Paulo: Editora Pearson, 2012.

[Leon 2011] LEON, S. J. **Álgebra Linear com Aplicações .** [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2011.

Questions?

juliana.maria@fbter.org.br