PROJETO 4 - Introdução à Física Computacional - Turma 2 - IFSC - USP

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Data de entrega: 20/05/2020 (quarta feira)

Consideremos uma partícula que descreve uma trajetória unidimensional, submetida a uma aceleração $a(t)$. Todo o problema cinemático restringe-se ao cálculo de $x(t)$ para dadas condições iniciais, como por exemplo $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v(0) = v_0$. Podemos calcular numericamente $x(t)$ usando as versões discretizadas de derivadas que vimos no projeto anterior, isto é :

$$\frac{v(t+\epsilon/2) - v(t-\epsilon/2)}{\epsilon} = a(t) + O(\epsilon^2), \tag{1}$$

$$\frac{x(t+\epsilon/2) - x(t-\epsilon/2)}{\epsilon} = v(t) + O(\epsilon^2), \tag{2}$$

sendo ϵ um pequeno incremento temporal. De (1) e (2) obtemos

$$v(t+\epsilon/2) = v(t-\epsilon/2) + \epsilon a(t) + O(\epsilon^3), \tag{3}$$

$$x(t+\epsilon) = x(t) + \epsilon v(t+\epsilon/2) + O(\epsilon^3). \tag{4}$$

Temos da condição inicial os valores de $x(0)$ e $v(0)$, como calcular $v(\epsilon/2)$? Podemos usar:

$$v(\epsilon/2) = v_0 + \frac{\epsilon}{2} a(0). \tag{5}$$

As expressões (3).(4) e (5) nos fornecerão $x(t)$ e $v(t)$ para todos os tempos. A discretização usada acima é também denominada por método de Runge-Kutta de segunda órdem (se diminuirmos ϵ por um fator 2, o êrro diminuirá por um fator 2^2). Existem discretizações mais precisas, análogas às expressões mais precisas para a discretização das derivadas (veja projeto anterior). Estes métodos são os de Runge-Kutta de órdem superiores. Na presente aplicação usaremos apenas as relações (3), (4) e (5).

Subprojeto A) Consideremos inicialmente o problema de queda livre de uma massa. Consideremos $y(0) = y_0$, $v(0) = v_0$, e $a(t) = \dot{y}(t) = -g$. Faça um programa que calcule

$y(t)$, usando (3), (4) e (5), até que o corpo atinja o solo $y = 0$. Considere incrementos temporais $\epsilon = 0,01s$, $\epsilon = 0,001s$, $\epsilon = 0,0001s$; $y_0 = 100m$ e $g = 10m/s^2$, e os casos $v_0 = 0$ e $v_0 = 10m/s$.

Faça gráficos de $y(t)$ e de $v(t)$ a partir dos seus dados e justifique a confiabilidade dos mesmos.

Subprojeto B) Repita o problema anterior incluindo a resistência do ar. Neste caso $a(t) = -g - \gamma v(t)$. Considere $\gamma = 0,1/s$ e $\gamma = 0,01/s$. Em que casos a partícula atinge a velocidade limite? Qual é esta velocidade? Resolva analiticamente o problema para testar os resultados de seu programa e discuta os seus resultados.

Subprojeto C) Consideremos o caso de lançamento de um projétil. Neste caso o problema é calcular-se $\vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t))$ e $\vec{r} = (x(t), y(t))$ usando-se equações análogas às (3), (4) e (5). Temos agora dois conjuntos destas equações . Faça um programa que calcule a trajetória de um chiclete (mascado) lançado de um prédio de altura $y(0) = y_0 = h$, com velocidade de módulo v_0 e ângulo de lançamento α. Isto é: $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}) = (v_0 \cos(\alpha), v_0 \sin(\alpha))$ (veja figura abaixo).

Considere apenas o efeito da gravidade e que o chiclete grude no solo $y = 0$. Utilize $x_0 = 0$, $y_0 = 100m$, $v_0 = 10m/s$, $g = 10m/s^2$ e os ângulos $\alpha = 45^o$, $\alpha = 0^0$ e $\alpha = -45^0$. Faça um gráfico de $x(t)$, $y(t)$ e outro da trajetória $y(x)$, nos casos acima.

Brinque com outros dados para ver as modificações das trajetórias.

Subprojeto D) Faça uma adaptação à situação anterior adicionando a resistência do ar $\gamma = 0,1/s$ e repita os cálculos. Repare que agora o movimento na horizontal não será uniforme pois $\vec{a} = (a_x, a_y) = (-\gamma v_x, -g - \gamma v_y)$.

Subprojeto E) Considere a situação do lançamento de projétil como no subprojeto

C. Contudo consideremos o caso em que ao invés de ser um chiclete a massa que cai é uma pequena esfera (desprezemos as sua dimensões) que se choca com o solo ($y = 0$). Despreze inicialmente a resistência do ar (coloque $\gamma = 0$ no seu programa) e considere que no choque a esfera perde uma fração d_x e d_y das componentes v_x e v_y imediatamente antes do choque. Repita os casos do subprojeto B e escolha $d_x = d_y = 0,3$. Faça outras escolhas de α, d_x, v_0 para sentir a "física" em questão.

Subprojeto F) Resolva o subprojeto anterior incrementando a resistência do ar. Considere $\gamma = 0,1/s$.