

Projeto 6

Juliana Naomi Yamauti Costa, n°USP 10260434

Existem diversos sistemas planetários espalhados pelo Universo, os quais são caracterizados por uma configuração de objetos que orbitam uma estrela. Dentre eles, existe aquele que podemos chamar de *lar*: o Sistema Solar. Seu nome é derivado do Latim, da palavra **Sol**, a estrela central que constitui mais 99,85 % da massa total do nosso sistema e que mantém a Terra e outros corpos celestes sob seu domínio gravitacional.

1 Tarefa A

O código abaixo calcula as coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ de um planeta pelo método de Verlet, com o intuito de analisar o movimento dos corpos que compõem o Sistema Solar. Os testes realizados tiveram o intuito de verificar a **influência do passo temporal** no cálculo da posição do planeta. Os parâmetros do planeta Mercúrio, Vênus e Marte foram utilizados na simulação: a posição inicial foi determinada como $(raio, 0.0)$, a velocidade inicial arbitrária igual a 2π para Vênus e Marte, e 4π para Mercúrio e **o mesmo tempo total para todas as simulações** (5 anos); os passos temporais testados foram 0.01, 0.001 e 0.0001. As posições foram armazenadas em vetores e a unidade de medida utilizada para distância foi U.A., enquanto a de tempo, anos. As informações apresentadas estão destacadas abaixo.

tarefaA-10260434.f90

```
Program Tarefa_A
2
3      IMPLICIT REAL*8 (a-h,o-z)
4      parameter (nmax=500)          !tempo total
5      dimension y(nmax), x(nmax)
6
7      r =           0.39 !raio do planeta (semieixo maior)
8      pi = 4.d0*datan(1.d0)
9      v_0 =  4.0*pi           !velocidade inicial
10
11
12     dt = 0.01            !passo temporal
13
14     !Condições iniciais
15     y(0) = 0.d0
16     y(1) = y(0) + v_0*dt
17
18     x(0) = r
19     x(1) = x(0)
20
21     open(10, file= 'saídaAMe_0.01-10260434.dat')
```

```

22 do i=1, nmax
23   r = sqrt(x(i)**2 + y(i)**2)
24   y(i+1) = 2.0*y(i) - y(i-1) - ((4.0*pi**2 *y(i))/r**3) * dt**2
25   x(i+1) = 2.0*x(i) - x(i-1) - ((4.0*pi**2 *x(i))/r**3) * dt**2
26   write(10,*) x(i+1), y(i+1)
27 end do
28
29 close(10)
30
End Program Tarefa_A

```

1.1 Resultados

Para simulações numéricas é importante determinar corretamente as condições iniciais, portanto, devemos encontrar os parâmetros adequados para órbitas circulares serem obtidas, determinadas tanto pelo passo temporal quanto pela posição e velocidade iniciais. Neste caso, estaremos testando apenas o efeito do passo temporal. Podemos observar os resultados nas Figuras 1 (Mercúrio), 2 (Vênus) e 3 (Marte).

Vemos que o passo temporal pode alterar de forma significativa a órbita, fator evidenciado em Mercúrio (Figura 2). Apesar do período de simulação ser o mesmo, intervalos de tempo maiores ocasionaram soluções numéricas físicamente impossíveis, enquanto o menor intervalo de tempo manteve a estabilidade da órbita do planeta.

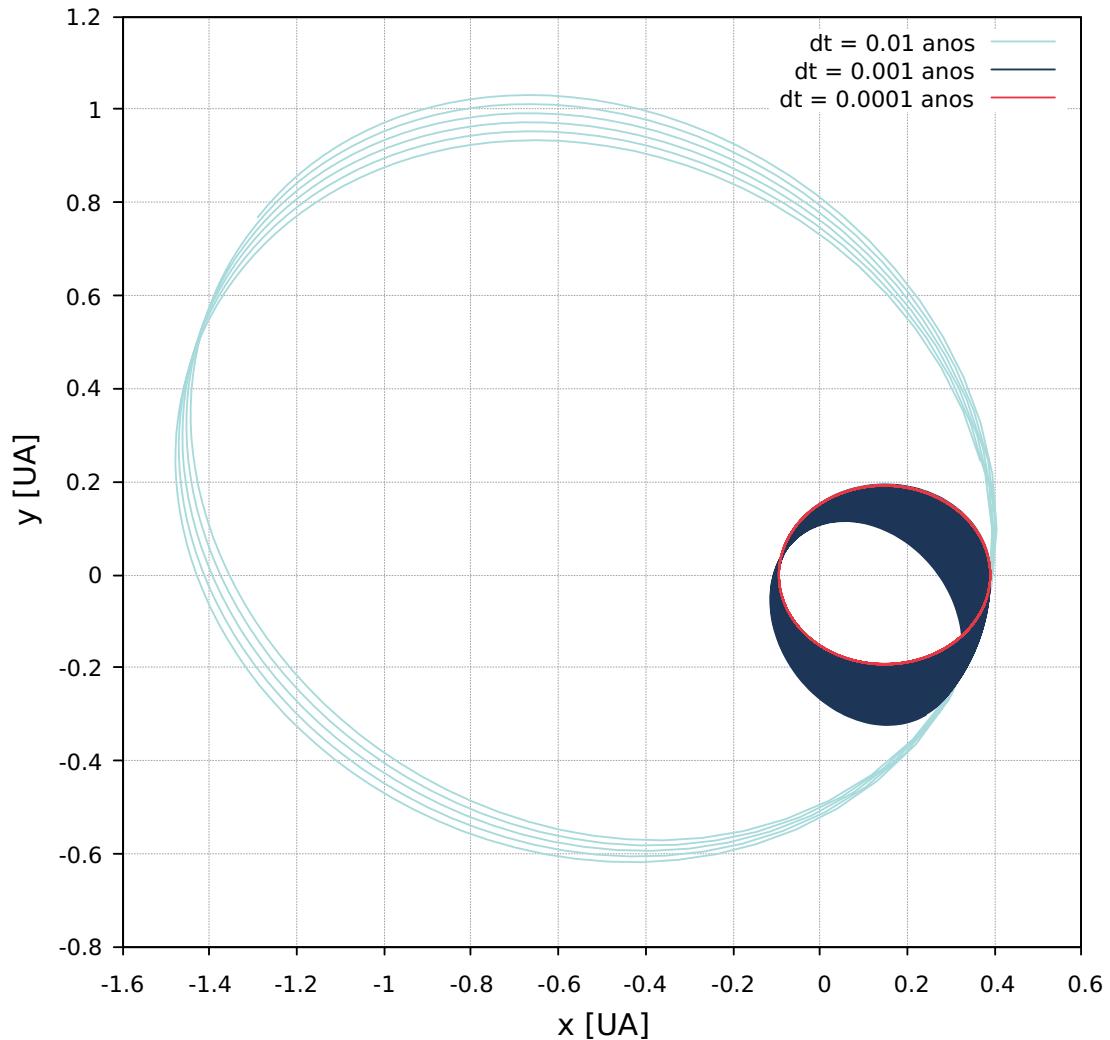


Figura 1: Mércurio

Os outros planetas não apresentaram órbitas tão distintas como no resultado anterior, porém as diferenças ainda são visíveis, além de serem significativas em simulações numéricas. Apesar do movimento se aproximar de um círculo, seus raios ainda não correspondem ao raios reais dos planetas e, ao ampliarmos a trajetória, podemos verificar que intervalos de tempo maiores continuam a ter menor precisão quando a comparamos com o mesmo resultado para intervalos menores (Figura 4).

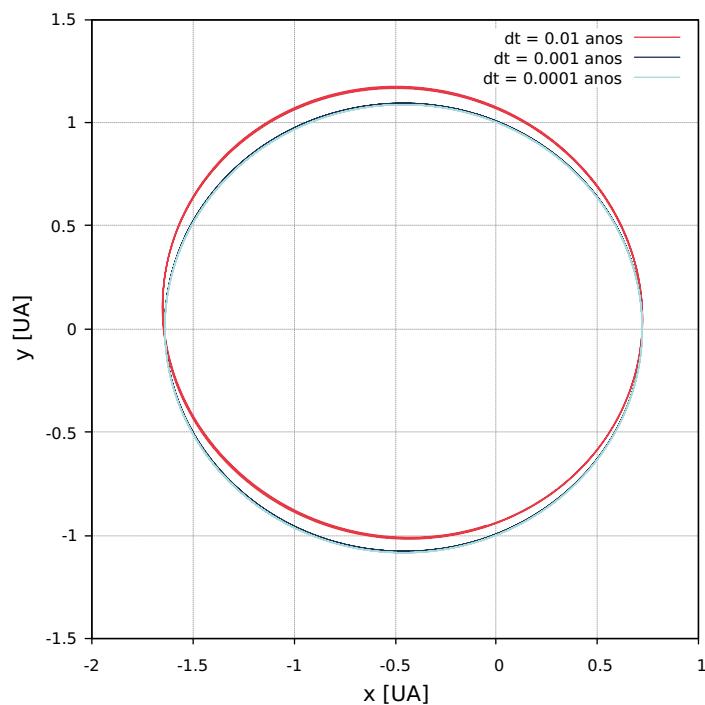


Figura 2: Vênus

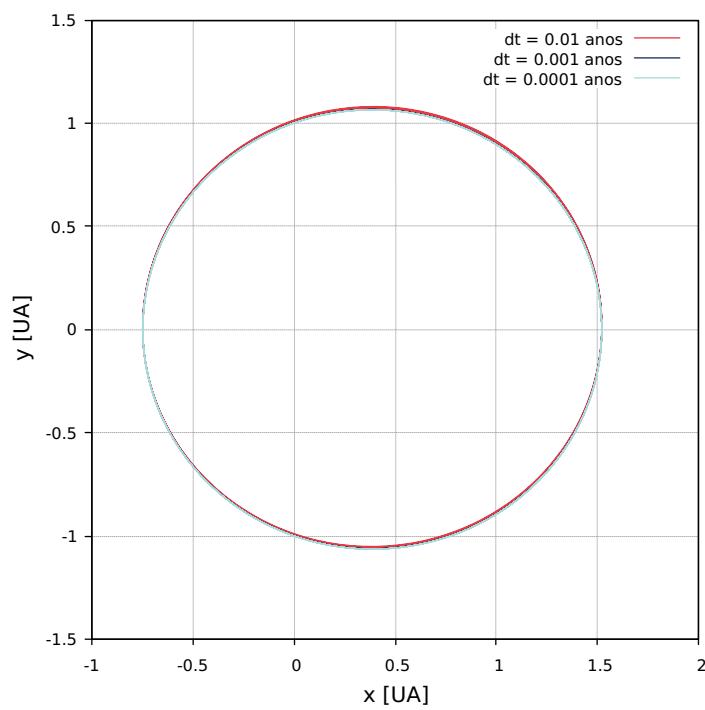


Figura 3: Marte

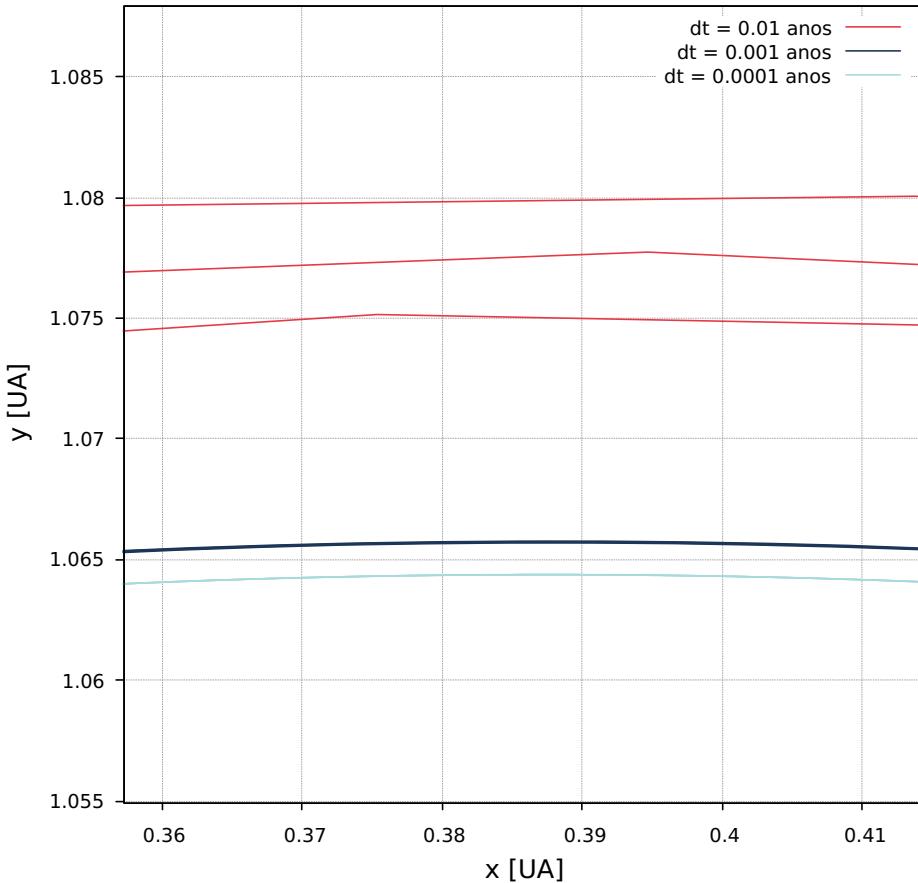


Figura 4: Órbitas de Marte

Com estes resultados, podemos concluir que o passo temporal não altera apenas a precisão, mas também pode alterar drasticamente a física do problema. Provavelmente este erro está associado a conservação de energia e do momento angular, que quando alterados levam a instabilidade do sistema. Dessa forma, para **todas** as tarefas seguintes foi utilizado o menor espaçamento temporal testado, $dt = 0.0001$

2 Tarefa A1

Utilizando o mesmo algorítmo anterior, foi testada a influênciā da velocidade inicial no movimento dos planetas. Foram comparados os resultados do planeta Vênus com as seguintes velocidades: 2π , 5π , π e $2\pi/\sqrt{raio}$ e tempo total de simulação equivalente a 6 meses. Já o código abaixo foi utilizado separadamente para calcular o período e a razão T^2/R^3 . O tempo de simulação total foi equivalente a 250 anos (tempo para Plutão completar uma volta). Para calcular o período, foi encontrado o tempo em que o planeta demora para voltar a origem no eixo y, o que indica que foi completada meia volta. Em seguida, esse tempo é dobrado e utilizado para calcular a razão, repetido esse mesmo procedimento para cada planeta.

tarefaA1-10260434.f90

```
Program Tarefa_A1
```

```
IMPLICIT REAL*8 (a-h,o-z)
```

```

4   parameter (nmax=2500000, nplan=8)           !tempo total e número de
   ↵ planetas
5   character(10) planeta
6   dimension y(nmax), x(nmax), planeta(0:nplan), r(0:nplan), t(nmax)

7   planeta = (/ 'Mercurio', 'Vênus ', 'Terra ', 'Marte ', 'Júpiter', &
8             & 'Saturno ', 'Urano ', 'Netuno ', 'Plutão ' /)

9   r = (/0.39,0.72,1.0,1.52,5.20,9.24,19.19,30.06,39.53/)           !raios
10
11
12   pi = 4.d0*datan(1.d0)
13   dt = 0.0001

14
15   do j = 0, nplan

16       v_0 = 2.0*pi / sqrt(r(j))           !velocidade inicial
17       y(0) = 0.0
18       x(0) = r(j)           !posição inicial
19       t(0) = 0.0

20
21       x(1) = x(0)
22       y(1) = y(0) + v_0*dt
23       t(1) = dt

24
25       do i=1, nmax
26           raio = sqrt(x(i)**2 + y(i)**2)
27           y(i+1) = 2.0*y(i) - y(i-1) - ((4.0*pi**2 *y(i))/raio**3) * dt**2
28           x(i+1) = 2.0*x(i) - x(i-1) - ((4.0*pi**2 *x(i))/raio**3) * dt**2
29           t(i+1) = t(i) + dt           !contagem do tempo
30
31       end do

32
33       !Cálculo do período
34       do k=0, nmax
35           !Condição em que o planeta da meia volta
36           if (y(k) .lt. 0.0) then
37               periodo = abs(t(k)*2.0)           !Obtenção do
38
39           → período completo
40               exit
41           end if
42       end do

43
44       razao = (periodo**2)/raio**3           !razão T^2/R^3
45       print*, planeta(j), periodo, razao

46   end do
End Program Tarefa_A1

```

2.1 Resultados para o teste de velocidade

Por tentativa e erro, foram testados os valores 2π , 5π e π para a velocidade inicial. Porém, podemos obter a velocidade que estamos procurando assumindo que a órbita é circular e resolvendo o problema fisicamente. Assim, podemos igualar a força centrípeta à força gravitacional, obtendo que:

$$\frac{M_P v^2}{r} = \frac{GM_S M_P}{r^2} \quad (1)$$

Sendo M_P a massa do planeta, M_S a massa do Sol e r a distância entre o planeta e o Sol. Como foi dado que $GM_{Sol} = 4\pi^2$, chegamos que

$$v = \frac{2\pi}{\sqrt{r}} \quad (2)$$

Ao assumir esta velocidade, obtemos uma órbita circular centralizada na origem, como mostra a Figura 5. Quando este valor é superior a velocidade de escape, o planeta escapa de sua órbita e, quanto mais próximo do valor dado pela Equação 2, mais a órbita se aproxima do comportamento esperado.

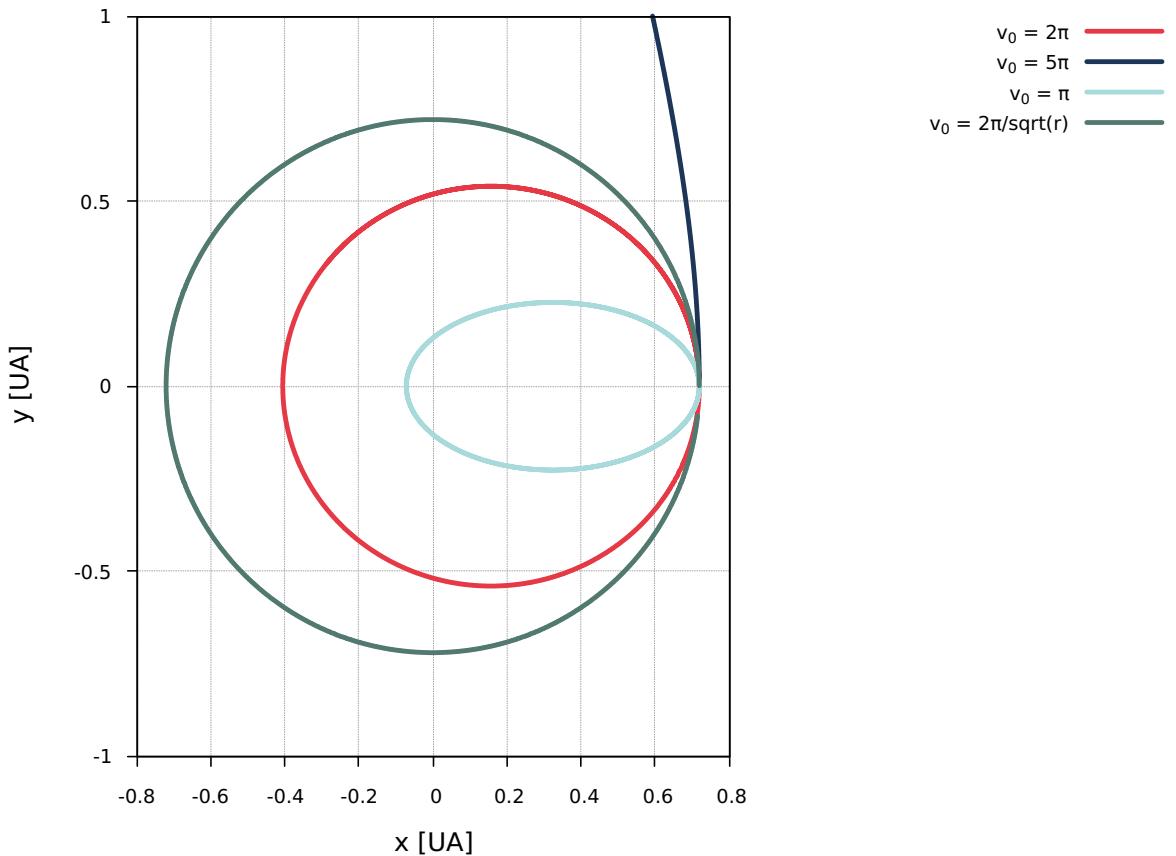


Figura 5: Órbitas de Vênus com diferentes velocidades iniciais.

Ao generalizar para todo o Sistema Solar utilizando a velocidade inicial $2\pi/\sqrt{raio}$, podemos verificar que o comportamento se mantém o mesmo para todos os planetas, apenas alterando o raio da órbita, o qual é correspondente ao semieixo maior.

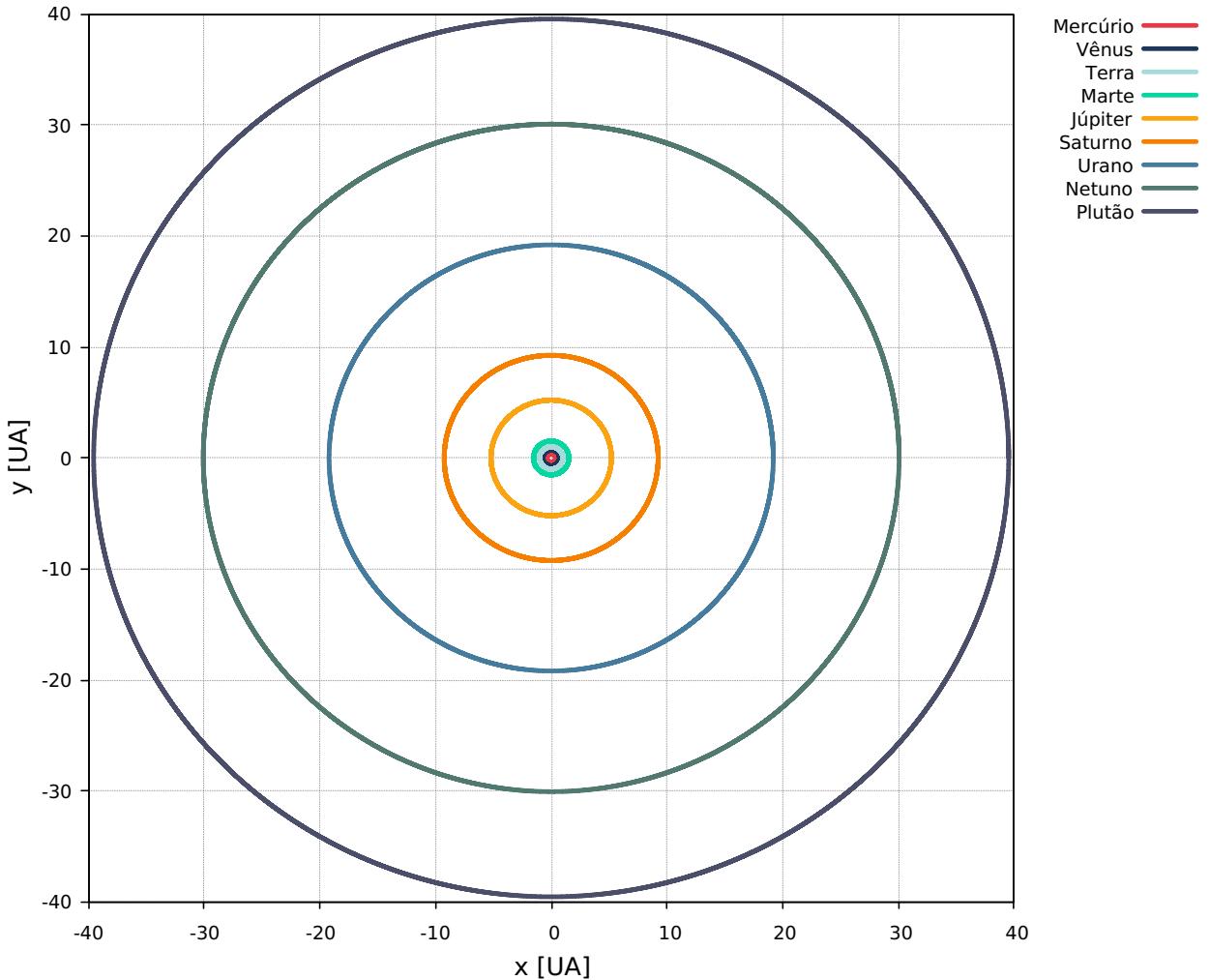


Figura 6: Órbitas circulares obtidas de todos os planetas do Sistema Solar.

2.2 Resultados para o cálculo da razão T^2/R^3

Os resultados para a razão podem ser encontrados na Tabela 1. Serão comparados os períodos obtidos com os períodos reais para verificar a precisão da aproximação. Os resultados do período indicam uma precisão de até duas casas decimais, porém, podemos observar que ela não é a mesma para todos os planetas, apontando que apesar de se apresentar como uma boa aproximação, ainda há imprecisão pois as órbitas reais não são circulares, como foi considerado para este caso. Quanto a razão T^2/R^3 , esperávamos que seu resultado fosse próximo a 1.0, pois pela Terceira Lei de Kepler

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S} \quad (3)$$

e, neste caso, $GM_S = 4\pi^2$. Como mostrado na Tabela abaixo, obtivemos o resultado esperado com valores muito próximos a 1.

Planeta	Período real [ano]	Período [ano]	T^2/R^3
Mercurio	0.240846	0.24399999383604154	1.0026502064139919
Vênus	0.615	0.61139998455473687	1.0000220442513308
Terra	1	1.0005999747227179	1.0012006148465338
Marte	1.881	1.8743999526486732	1.0001651060847383
Júpiter	11.86	11.858399700431619	1.0000574841765892
Saturno	29.46	28.087599290447542	1.0000503380125696
Urano	84.01	84.064997876339476	1.0000143728967779
Netuno	164.8	164.81039583653910	1.0000059361437792
Plutão	248.1	248.53699372142728	1.0000036015694862

Tabela 1

3 Tarefa A2

Com o programa da Tarefa A foram testadas diferentes velocidades para serem obtidas as órbitas elípticas. O planeta utilizado na simulação foi Mercúrio, com posição inicial ($raio, 0.0$), velocidades iniciais testadas $\sqrt{2r}/r$, $\sqrt{2\pi}/r$ e $\sqrt{5\pi}/r$ e tempo total equivalente a 10 anos. Ao ser determinada uma velocidade inicial adequada, os parâmetros iniciais foram colocados no código a seguir, o qual é uma adaptação do programa anterior. Ele recalcula a razão T^2/R^3 considerando que as órbitas são elípticas, obtendo o semieixo maior a partir dos dados, como destacado no programa abaixo. Com este mesmo código a órbita de todos os planetas foi calculada para elaboração dos gráficos (arquivos *11.dat* a *19.dat*). Em suma, investigamos o efeito da velocidade na forma das órbitas e verificamos a conservação da Terceira Lei de Kepler.

tarefaA2-10260434.f90

```

Program Tarefa_A2
2
IMPLICIT REAL*8 (a-h,o-z)
4 parameter (nmax=1250000, nplan=8) !tempo total e número de planetas
6 character(10) planeta, fn
dimension y(0:nmax), x(0:nmax), planeta(0:nplan), r(0:nplan), t(0:nmax)

8
10 planeta = ('Mercurio','Vênus ','Terra ','Marte ','Júpiter', &
& 'Saturno ','Urano ','Netuno ','Plutão ')
12 r = (/0.39,0.72,1.0,1.52,5.20,9.24,19.19,30.06,39.53/)

14 pi = 4.d0*datan(1.d0)
16 dt = 0.0001
ifilenum = 10

18 do j = 0, nplan
20      !Condições iniciais determinadas de acordo com o planeta
21      v_0 = sqrt(5*pi/r(j))
22      y(0) = 0.0

```

```

24      x(0) = r(j)
25      t(0) = 0.0

26      x(1) = x(0)
27      y(1) = y(0) + v_0*dt
28      t(1) = dt

29      ifilenum = ifilenum + 1           !numeração dos arquivos
30      write(fn,fmt='(i0,a)' ifilenum,'.dat'
31      open(unit=ifilenum,file=fn)

32      do i=1, nmax

33          raio = sqrt(x(i)**2 + y(i)**2)
34          y(i+1) = 2.0*y(i) - y(i-1) - ((4.0*pi**2 *y(i))/raio**3) * dt**2
35          x(i+1) = 2.0*x(i) - x(i-1) - ((4.0*pi**2 *x(i))/raio**3) * dt**2
36          t(i+1) = t(i) + dt

37          write(ifilenum,*) x(i+1), y(i+1)
38      end do

39      close(ifilenum)

40      do k=0, nmax
41          if (y(k) .lt. 0.0 ) then
42              periodo = abs(t(k)*2.0)
43              exit
44          end if
45      end do

46      i=0
47      m=0
48      do while (i .lt. 2)           !Calcular semieixo maior apenas da
49          → primeira órbita
50      !para calcular razão  $T^2/R^3$ 
51          if ((y(m)*y(m+1) .lt. 0.0) .and. (x(m) .gt. 0.0)) then
52              !encontra posição em que há cruzamento no eixo
53              → x, mas
54              !no quadrante positivo
55              amaximo = x(m)
56              i = i + 1
57          else if ((y(m)*y(m+1) .lt. 0.0) .and. (x(m) .lt. 0.0))
58              → then
59                  aminimo = x(m)
60                  !encontra posição em que há cruzamento no eixo
61                  → x, mas
62                  !no quadrante negativo
63                  i = i + 1
64          end if
65          m = m + 1

```

```

    end do

70      semimaior = (amaximo-aminimo)/2.0
72      razao = (periodo**2.d0)/semimaior**3           !T^2/R^3

74      print*, ifilenum, planeta(j), periodo, razao, semimaior

76  end do
End Program Tarefa_A2

```

3.1 Resultados para o teste de velocidade

Podemos observar na Figura 7 que todas as órbitas são fechadas e elípticas, no entanto, nem todas são estáveis para longos períodos de tempo. A trajetória com velocidade inicial igual $\sqrt{5\pi/r}$ teve maior estabilidade, assim, ela foi utilizada para o cálculo da órbita de todos os planetas seguintes, obtendo-se então o resultado da Figura 8.

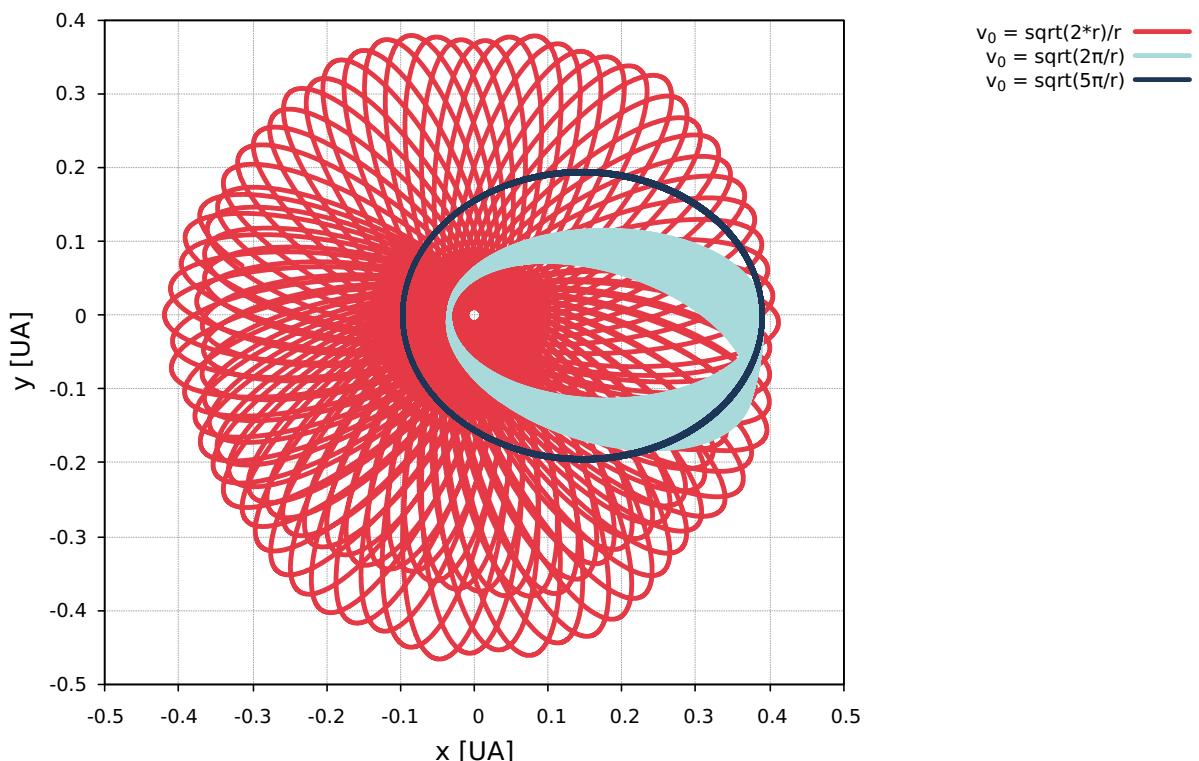


Figura 7: Trajetórias de Mercúrio com diferentes velocidades iniciais.

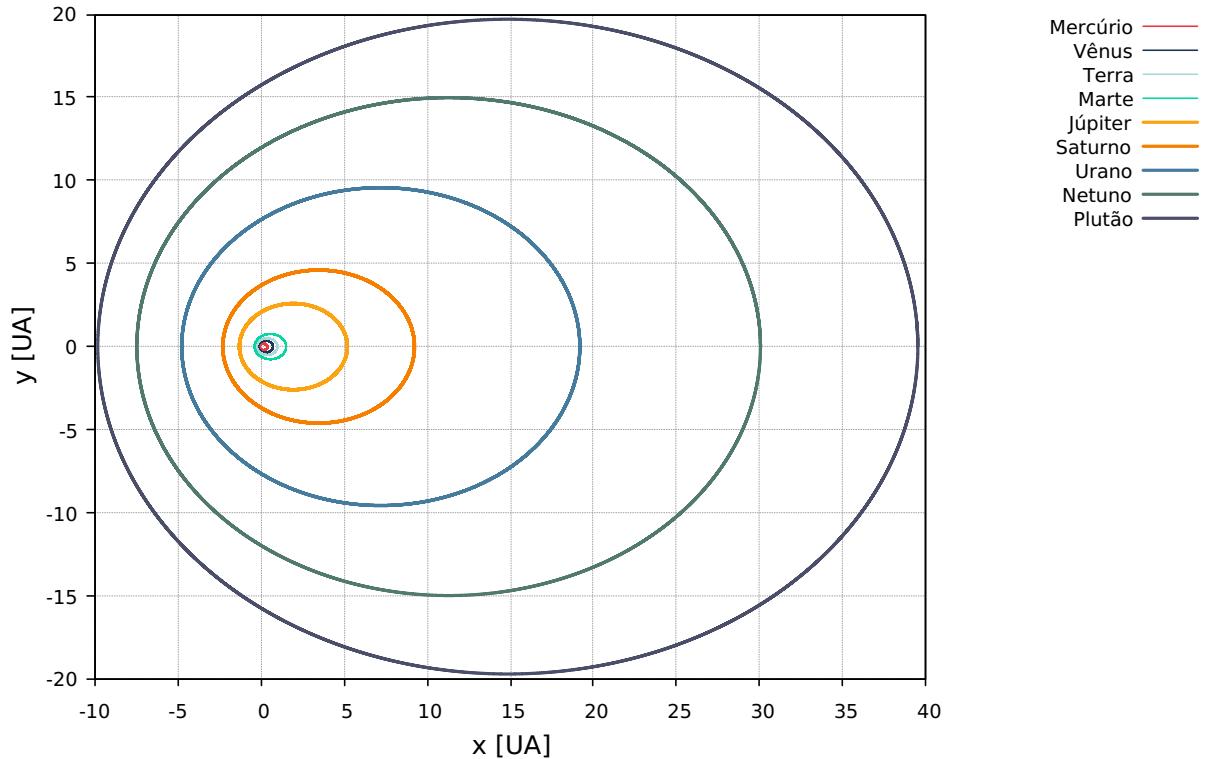


Figura 8: Órbitas elípticas de todos os planetas do Sistema Solar.

3.2 Resultados para o cálculo da razão T^2/R^3

Os resultados indicam que mesmo alterando as órbitas de circulares para elípticas, a razão permanece muito próxima a 1, considerando que o semieixo maior é recalculado. Apesar das órbitas não representarem as reais, ainda é possível verificar as Leis de Kepler, pois elas dependem das propriedades geométricas e físicas, que se estiverem corretamente colocadas resultarão na sua confirmação. Pelos resultados, temos a confirmação da Primeira e Terceira Lei de Kepler.

Arquivo [.dat]	Planeta	Período [ano]	T^2/a^3	a [UA]
11	Mercurio	0.12039999695844017	1.0049060790814905	0.24343096805240971
12	Vênus	0.30159999238094315	1.0021721487533051	0.44940728459679358
13	Terra	0.49339998753566761	1.0010989017056098	0.62417604132998428
14	Marte	0.92439997664769180	1.0006174302297768	0.94874739392352669
15	Júpiter	5.8475998522771988	1.0000563364507578	3.2457142008167503
16	Saturno	13.850799650099361	1.0000298344097769	5.7673845890768334
17	Urano	41.454798952763667	1.0000087789062142	11.977934612984530
18	Netuno	81.272797946876381	1.0000061319162894	18.762725283679266
19	Plutão	122.56079690385377	1.0000043776653673	24.673669910511205

4 Tarefa B

O sistema de três corpos é conhecido pela sua complexidade e por não possuir solução geral analítica, tornando necessário recorrer a simulações numéricas para o estudo da dinâmica do sistema. Neste caso, foi estudado o conjunto **Sol**, **Terra** e **Júpiter** utilizando o método de Verlet, simulando seu movimento de acordo com as Leis de Newton e a Lei da Gravitação Universal.

5 Tarefa B1

A posição do Sol será mantida fixa como o centro de massa do sistema. Com a adição das equações do movimento da Terra e de Júpiter, temos um problema de três corpos. Sem Júpiter, a órbita da Terra ainda é estável, portanto, o intuito é descobrir a influência deste corpo uma vez que é dado como o planeta mais massivo do Sistema Solar. O tempo total equivale a 15 anos na primeira simulação - para obter a órbita completa de Júpiter - e 5 anos na segunda simulação para obter 4 voltas completas da Terra e observar com mais detalhes seu movimento não periódico. Como na Tarefa A, as órbitas foram consideradas circulares.

tarefaB1B2-10260434.f90

```
Program Tarefa_B1B2
2
4 IMPLICIT REAL*8 (a-h,o-z)
parameter (nmax=150000)
6 dimension yt(0:nmax), xt(0:nmax), yj(0:nmax), xj(0:nmax), t(0:nmax)
8
10 pi = 4.d0*datan(1.d0)
12 dt = 0.0001           !ano
14 rt = 1.00            !AU
16 rj = 5.20            !AU
18 aMT = 6.0*10.d0**24 !kg
20 aMS = 2.0*10.d0**30 !kg
22 aMJ = 1.9*10.d0**27 !kg
24 xs = 0.0             !Sol fixo no centro
26 ys = 0.0
28
30 !Condições iniciais
32
34 vt_0 = (2.0*pi)/(sqrt(rt))
36 vj_0 = (2.0*pi)/(sqrt(rj))
38
40 yt(0) = 0.d0
42 yt(1) = yt(0) + vt_0*dt
44
46 xt(0) = rt
48 xt(1) = rt
50
52 yj(0) = 0.d0
54 yj(1) = yj(0) + vj_0*dt
```

```

32      xj(0) = rj
      xj(1) = rj

34      open(10, file= 'saidaB1_15anos-10260434.dat')
      do i=1, nmax

36          !Raio Terra-Sol
      rt_s = sqrt( ( xt(i) - xs )**2 + ( yt(i) - ys )**2)
      !Raio Terra-Júpiter
      rt_j = sqrt( ( xt(i) - xj(i) )**2 + ( yt(i) - yj(i) )**2)

42          !Equações Movimento Terra
      xt(i+1) = 2.0*xt(i) - xt(i-1) - &
      & 4.0*pi**2 *( xt(i)/rt_s**3 + (aMJ/aMS)*( xt(i)-xj(i) )/
      & rt_j**3 ) * dt**2

46          yt(i+1) = 2.0* yt(i) - yt(i-1) - &
      & 4.0*pi**2 *( yt(i)/rt_s**3 + (aMJ/aMS)*( yt(i)-yj(i) )/rt_j**3
      & ) * dt**2

48          !Raio Júpiter-Sol
      rj_s = sqrt( ( xj(i) - xs )**2 + ( yj(i) - ys )**2)
      !Raio Júpiter-Terra
      rj_t = sqrt( ( xj(i) - xt(i) )**2 + ( yj(i) - yt(i) )**2)

54          !Equações Movimento Júpiter
      xj(i+1) = 2.0 * xj(i) - xj(i-1) - &
      & 4.0*pi**2.0 * ( xj(i)/rj_s**3 + (aMT/aMS)*( xj(i)-xt(i) )/
      & rj_t**3) * dt**2

58          yj(i+1) = 2.0 * yj(i) - yj(i-1) - &
      & 4.0*pi**2.0 * ( yj(i)/rj_s**3 + (aMT/aMS)*( yj(i)-yt(i))/
      & rj_t**3 ) * dt**2

60      t(i) = i*dt
62      write(10,*) xt(i+1), yt(i+1), xj(i+1), yj(i+1)

64      end do
      close(10)

66      End Program Tarefa_B1B2

```

5.1 Resultados

5.1.1 Simulação com tempo total de 15 anos

Podemos observar que as órbitas de Júpiter e da Terra ainda permanecem estáveis, mesmo considerando a influência de Júpiter. Este é um resultado esperado, pois na realidade, há a influência dos outros planetas no movimento terrestre.

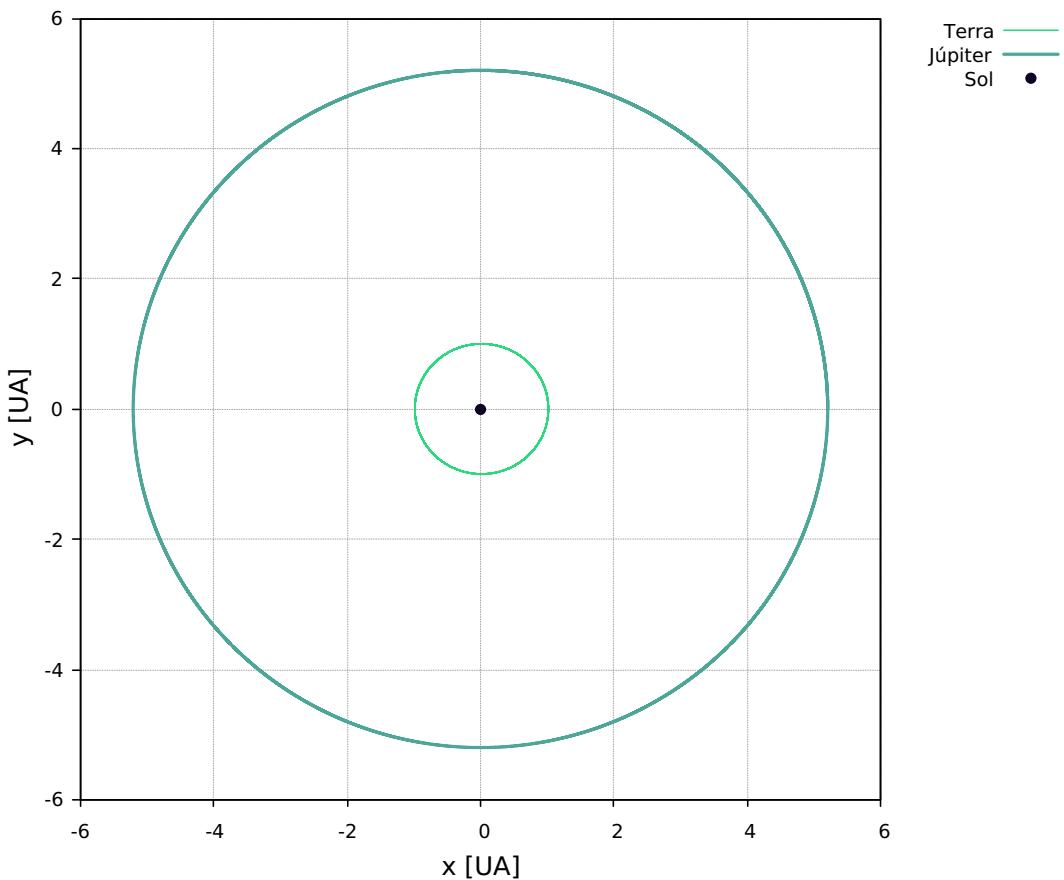


Figura 9: Terra e Júpiter com o Sol na origem do sistema de coordenadas.

5.1.2 Simulação com tempo total de 4 anos

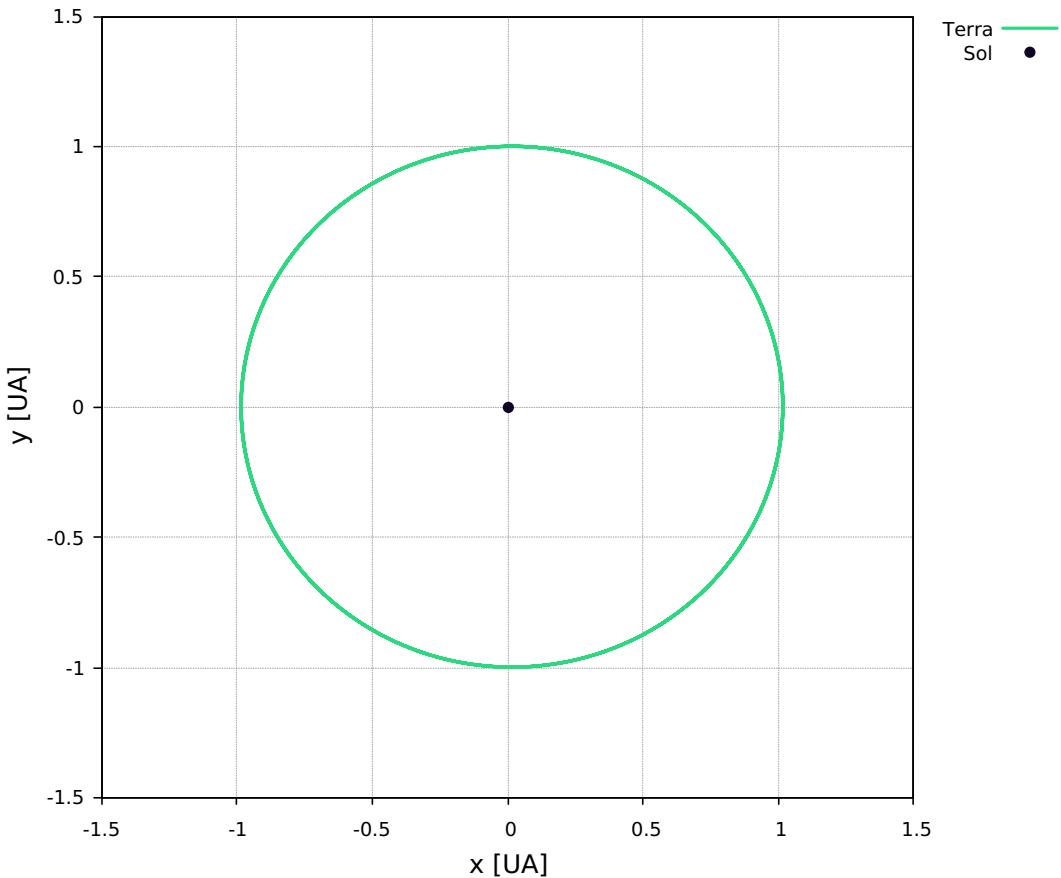


Figura 10: Terra e Júpiter com o Sol na origem do sistema de coordenadas.

A Figura 11 mostra uma ampliação da trajetória do planeta, mostrando que seu movimento não é mais periódico, pois o corpo não volta a sua posição inicial, com pequenos deslocamentos em relação a trajetória anterior. O fato do movimento orbital da Terra não ser periódico gera impactos na nossa sociedade, pois implica que uma volta não dura 365 dias. Devido a esse fenômeno, foi criado o ano bissexto, com o objetivo de manter o calendário anual ajustado ao movimento da Terra.

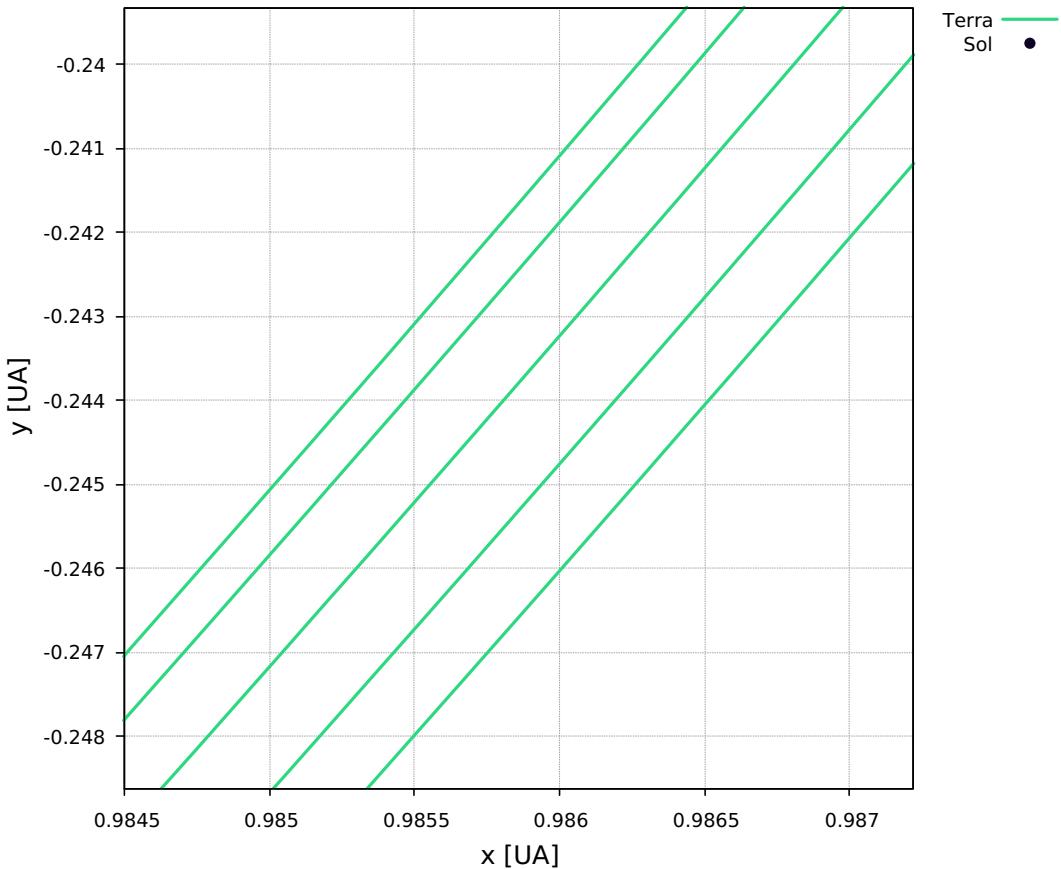


Figura 11: Ampliação da trajetória do movimento.

6 Tarefa B2

O código anterior foi modificado para as condições solicitadas, alterando a **massa de Júpiter** (aM_J) para valores **100** e **1000** vezes maiores, a fim de verificar a influência deste parâmetro no movimento da Terra. Como $M_S \gg M_J \gg M_E$, o movimento do Sol é considerado como estacionário, fixando sua posição na origem do sistema de coordenadas; as órbitas foram consideradas circulares e o tempo total de simulação equivale a 15 anos.

6.1 Resultados

O Gráfico 12 apresenta os movimentos da Terra e de Júpiter com suas massas reais, mostrando órbitas estáveis e indicando pouca influência do planeta de massa maior (como esperado, já que vivemos aqui!)

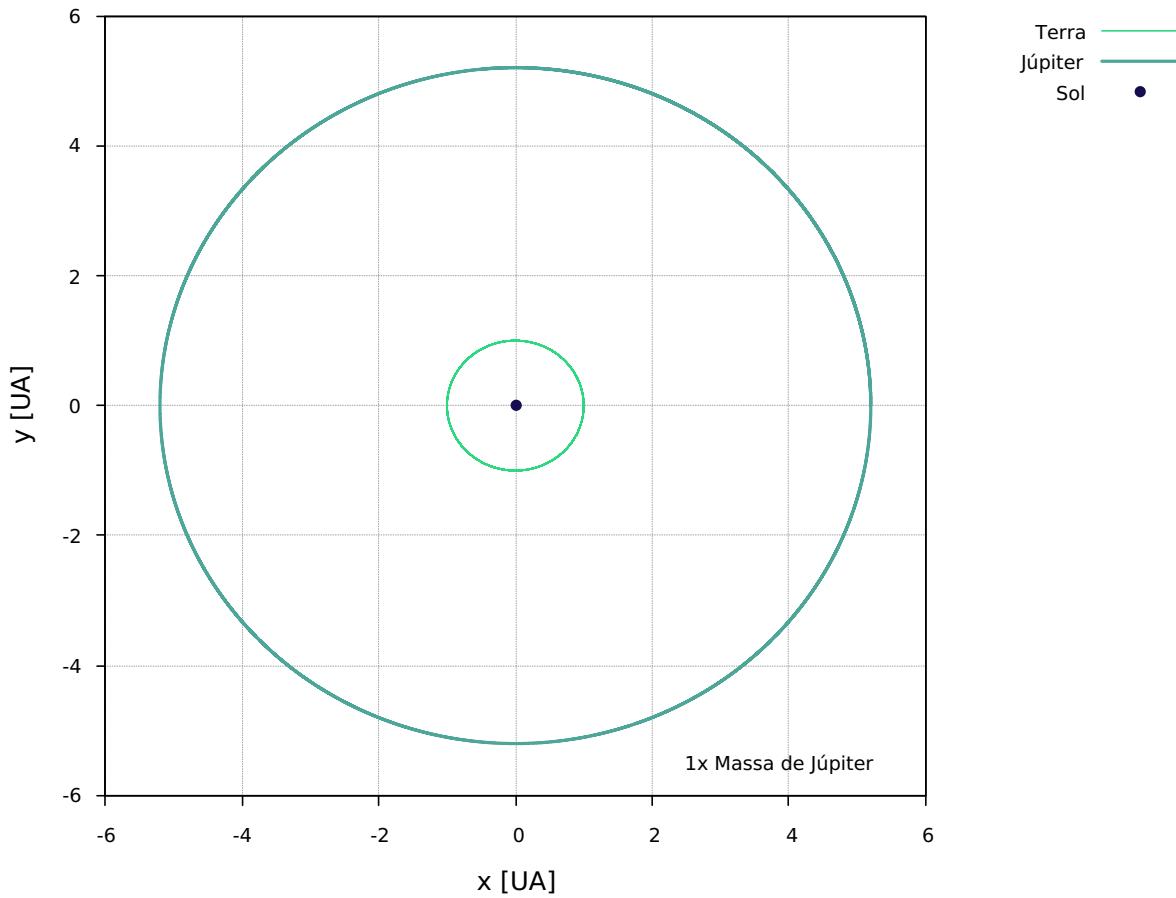


Figura 12: Terra e Júpiter com o Sol na origem do sistema de coordenadas. 1x a massa de Júpiter.

Ao compararmos o gráfico anterior ao Gráfico 13, notamos que a órbita de Júpiter permanece a mesma, no entanto, há a formação de um anel na trajetória da Terra. Podemos observá-la ampliada no Gráfico 14. Com o aumento da massa de Júpiter, há maior influência no movimento do planeta Terra, mas não o suficiente para causar uma trajetória caótica ou sua ejeção do Sistema Solar.

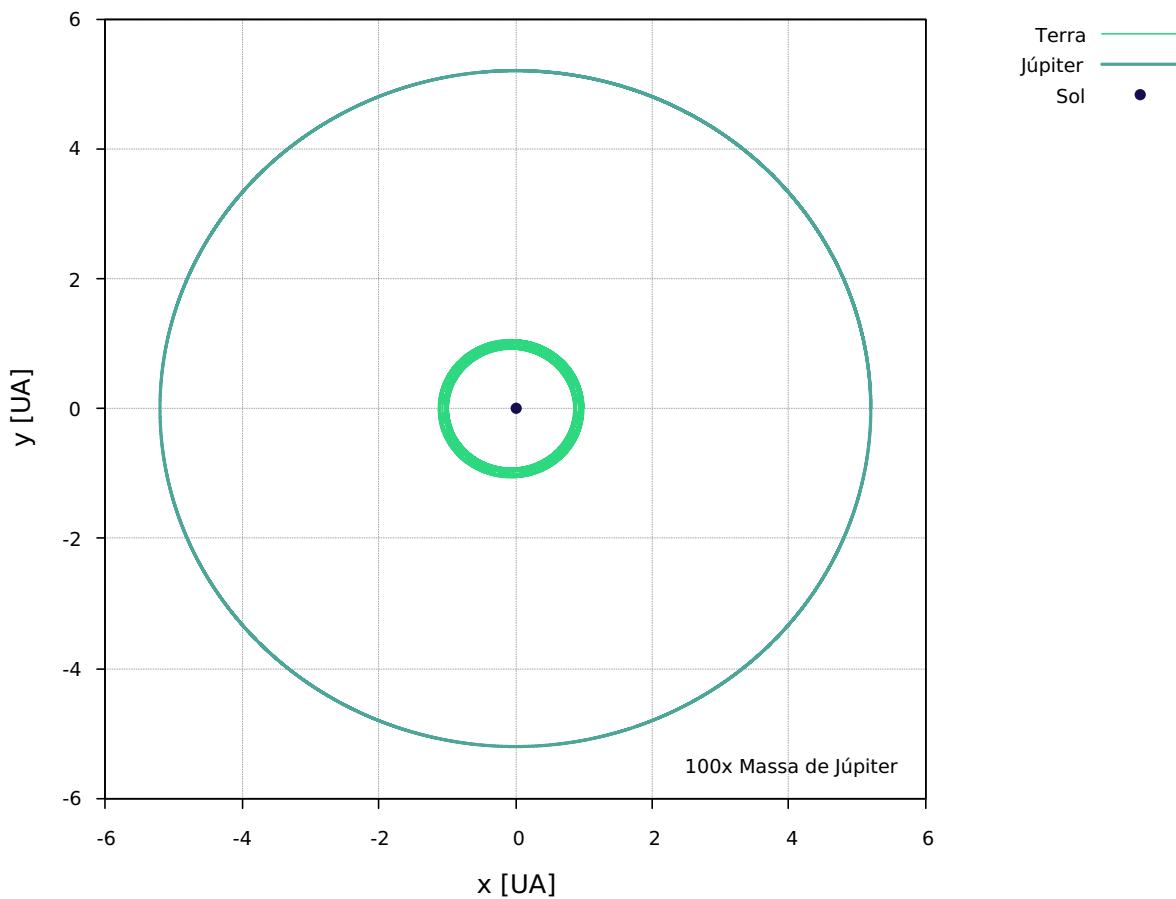


Figura 13: Terra e Júpiter com o Sol na origem do sistema de coordenadas. 100x a massa de Júpiter.

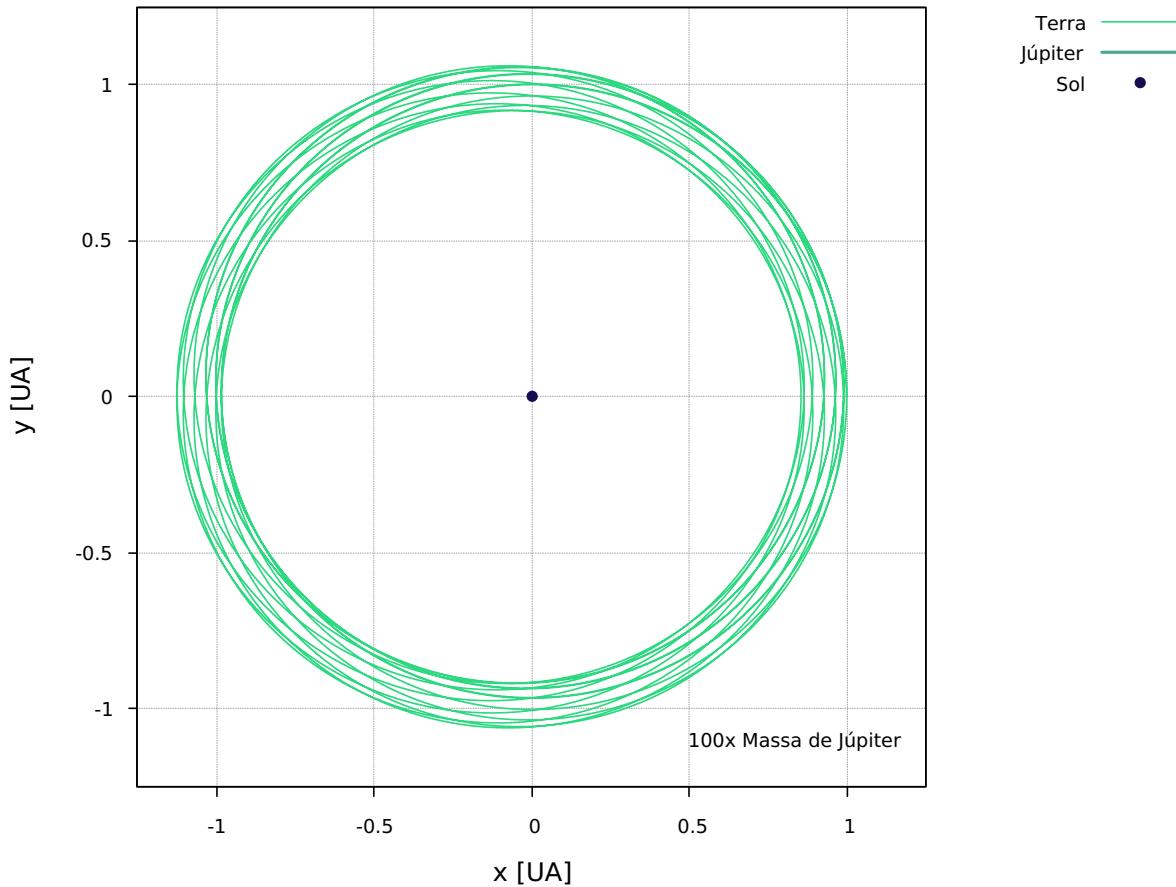


Figura 14: Terra. 100x a massa de Júpiter.

Escalando a massa de Júpiter para um valor 1000 vezes maior, obtemos o Gráfico 15. Essa massa possui a mesma ordem grandeza da massa do Sol, ocasionando um efeito muito maior no movimento da Terra, a ejetando de sua órbita. No entanto, vale notar que esta já não é uma boa aproximação, pois o Sol é mantido **estacionário**, portanto, seu movimento não é incluído na simulação e seu efeito sobre os outros planetas não é contabilizado.

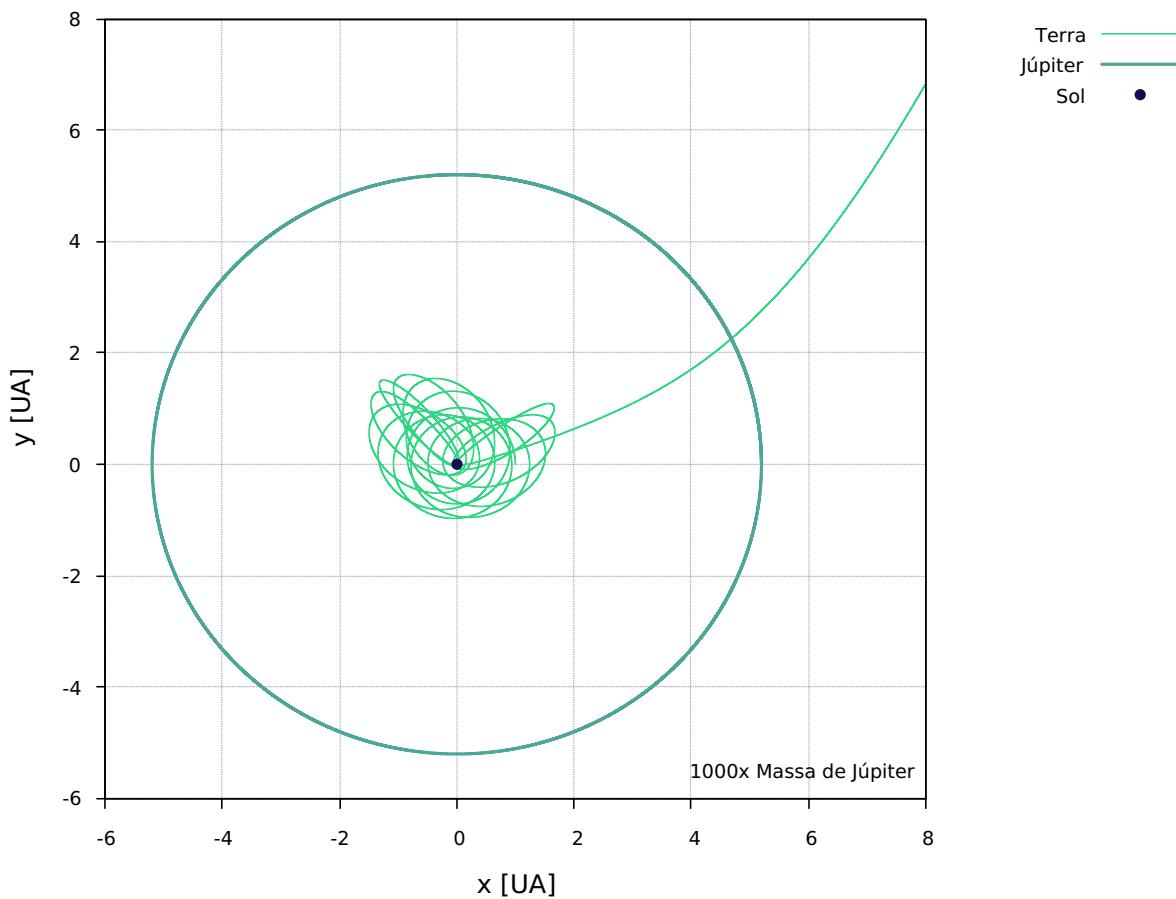


Figura 15: Terra e Júpiter com o Sol na origem do sistema de coordenadas. 1000x a massa de Júpiter.

7 Tarefa B3.1

De forma análoga, foram incluídas as equações do movimento dos asteróides, considerando apenas o efeito da Sol e de Júpiter e com o Sol estacionário na origem. Para Júpiter, foi considerada apenas a influência do Sol, tendo como tempo total de simulação 200 anos. O código abaixo foi utilizado.

tarefaB3.1-10260434.f90

```

2      Program Tarefa_B3
3
4      IMPLICIT REAL*8 (a-h,o-z)
5      parameter (nmax=2000000)
6      dimension yj(0:nmax), xj(0:nmax), y1(0:nmax), x1(0:nmax), &
7             & y2(0:nmax), x2(0:nmax), y3(0:nmax), x3(0:nmax)
8
9      pi = 4.d0*datan(1.d0)
10     dt = 0.0001           !ano
11
12    !raios
13    rj = 5.20              !AU
14    rI = 3.0
15    rII = 3.276

```

```

16      rIII = 3.7
17
18      !massas
19      aMS = 2.0*10.d0**30 !kg
20      aMJ = 1.9*10.d0**27 !kg
21
22      !Condições iniciais
23      vj_0 = 2.755 !UA/ano
24      vI_0 = 3.628
25      vII_0 = 3.471
26      vIII_0 = 3.267
27
28      !Júpiter
29      yj(0) = 0.d0
30      yj(1) = yj(0) + vj_0*dt
31
32      xj(0) = rj
33      xj(1) = rj
34
35      !Asteroide I
36      y1(0) = 0.d0
37      y1(1) = y1(0) + vI_0*dt
38
39      x1(0) = rI
40      x1(1) = rI
41
42      !Asteroide II
43      y2(0) = 0.d0
44      y2(1) = y2(0) + vII_0*dt
45
46      x2(0) = rII
47      x2(1) = rII
48
49      !Asteroide III
50      y3(0) = 0.d0
51      y3(1) = y3(0) + vIII_0*dt
52
53      x3(0) = rIII
54      x3(1) = rIII
55
56      open(10, file= 'saidaB3.1-10260434.dat')
57      do i=1, nmax
58
59          !Raio Júpiter-Sol
60          rj_s = sqrt( xj(i)**2 + yj(i)**2)
61
62          !Equações Movimento Júpiter
63          yj(i+1) = 2.0*yj(i) - yj(i-1) - ((4.0*pi**2 *yj(i))/rj_s**3) *
64              dt**2

```

```

xj(i+1) = 2.0*xj(i) - xj(i-1) - ((4.0*pi**2 *xj(i))/rj_s**3) *
        ↵ dt**2
64
!Raio Asteróide I-Sol
r1_s = sqrt( x1(i)**2 + y1(i)**2)
!Raio Asteróide I-Júpiter
r1_j = sqrt( ( x1(i) - xj(i) )**2 + ( y1(i) - yj(i) )**2)

y1(i+1) = 2.0 * y1(i) - y1(i-1) - &
& 4.0*pi**2.0 * ( y1(i)/r1_s**3 + (aMJ/aMS)*( y1(i)-yj(i))/
        ↵ r1_j**3 ) * dt**2
70
72
!Equações Movimento Asteróide I
x1(i+1) = 2.0 * x1(i) - x1(i-1) - &
& 4.0*pi**2.0 * ( x1(i)/r1_s**3 + (aMJ/aMS)*( x1(i)-xj(i) )/
        ↵ r1_j**3 ) * dt**2
74
76
!Raio Asteróide II-Sol
r2_s = sqrt( x2(i)**2 + y2(i)**2)
!Raio Asteróide II-Júpiter
r2_j = sqrt( ( x2(i) - xj(i) )**2 + ( y2(i) - yj(i) )**2)

y2(i+1) = 2.0 * y2(i) - y2(i-1) - &
& 4.0*pi**2.0 * ( y2(i)/r2_s**3 + (aMJ/aMS)*( y2(i)-yj(i))/
        ↵ r2_j**3 ) * dt**2
82
84
!Equações Movimento Asteróide II
x2(i+1) = 2.0 * x2(i) - x2(i-1) - &
& 4.0*pi**2.0 * ( x2(i)/r2_s**3 + (aMJ/aMS)*( x2(i)-xj(i) )/
        ↵ r2_j**3 ) * dt**2
86
88
!Raio Asteróide III-Sol
r3_s = sqrt( x3(i)**2 + y3(i)**2)
!Raio Asteróide III-Júpiter
r3_j = sqrt( ( x3(i) - xj(i) )**2 + ( y3(i) - yj(i) )**2)

y3(i+1) = 2.0 * y3(i) - y3(i-1) - &
& 4.0*pi**2.0 * ( y3(i)/r3_s**3 + (aMJ/aMS)*( y3(i)-yj(i))/
        ↵ r3_j**3 ) * dt**2
94
96
!Equações Movimento Asteróide III
x3(i+1) = 2.0 * x3(i) - x3(i-1) - &
& 4.0*pi**2.0 * ( x3(i)/r3_s**3 + (aMJ/aMS)*( x3(i)-xj(i) )/
        ↵ r3_j**3 ) * dt**2
100
write(10,*) yj(i), xj(i), x1(i+1), y1(i+1), x2(i+1), y2(i+1),
        ↵ x3(i+1), y3(i+1)
102
end do
close(10)
104

```

```
End Program Tarefa_B3
```

7.1 Resultados

Devido ao tempo total de simulação, fica clara a instabilidade do Asteróide II (curva azul), como mostra a Figura 16. Podemos associar o fenômeno observado as lacunas de Kirkwood - espaços relativamente vazios no Cinturão de Asteróides, que correspondem a zonas de ressonância onde a atração gravitacional de Júpiter impede a permanência de qualquer corpo celeste.

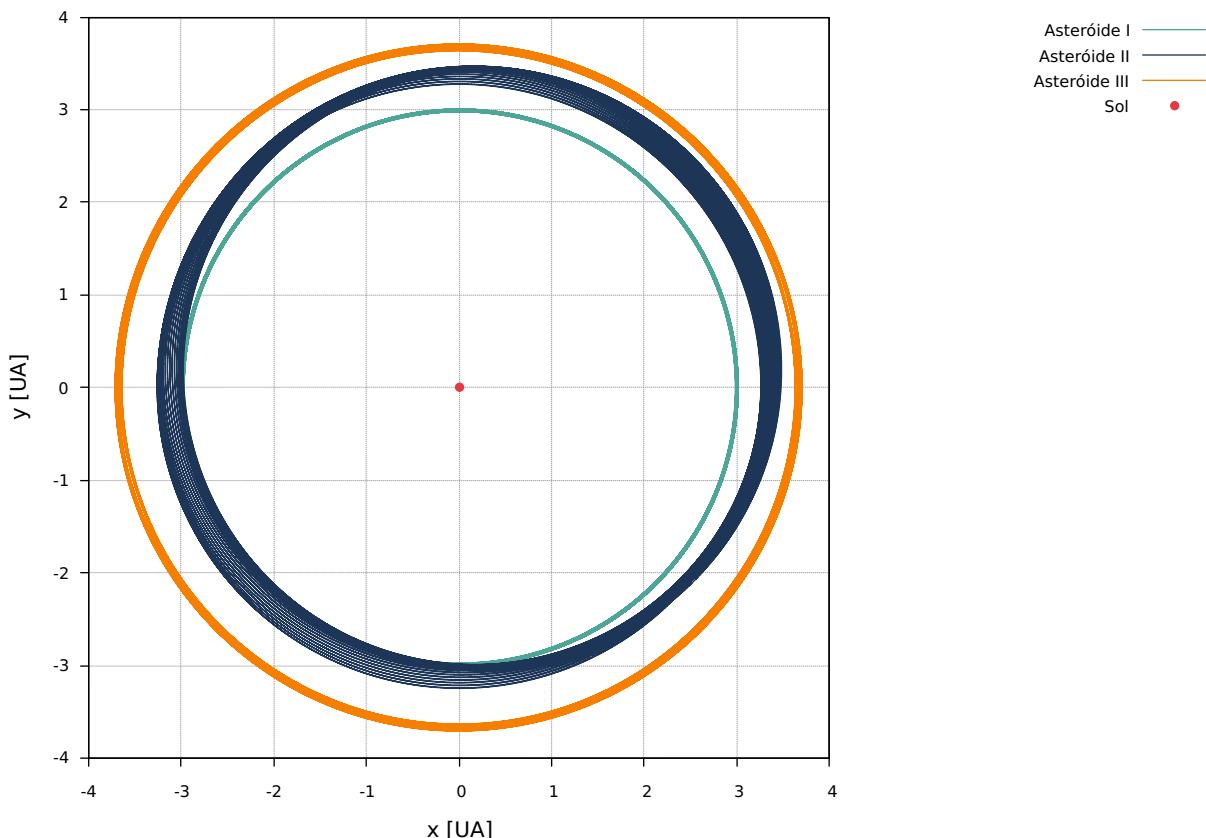


Figura 16: Órbitas dos asteróides com tempo de simulação equivalente a 200 anos.

A ressonância orbital ocorre quando os corpos exercem uma influência gravitacional regular e periódica entre eles, geralmente devido ao seus períodos estarem relacionados por uma razão de inteiros. Na maioria dos casos essa interação é instável, onde os corpos trocam momento, alterando sua posição até que não exista mais ressonância. Todos os asteróides analisados estão posicionados em lacunas de Kirkwood, no entanto, os Asteróides I e III estão em lacunas de fraca ressonância (9:4 e 5:3, respectivamente), enquanto o Asteróide I está no raio de uma órbita de forte ressonância (2:1), tornando visível esse efeito acentuado que causa a perturbação de sua órbita.

8 Tarefa B3.2

Nesta tarefa foram considerados o movimento dos três planetas: **Sol, Terra e Júpiter**. Diferentemente das tarefas anteriores, a origem foi colocada como o centro de massa do sistema e o sol não foi considerado estacionário - seu movimento foi incluído, adaptando o código inserindo as coordenadas do sol e sua distância relativa aos outros dois planetas. As condições iniciais provavelmente não levam a evolução do sistema ao mais próximo à realidade, porém nos dão informações interessantes sobre seu comportamento. Assim como na Tarefa B2, foram analisadas as situações em que a **massa de Júpiter** (a_{MJ}) foi alterada para valores **10, 100 e 1000** vezes maiores, com mudanças na posição inicial, variando o ângulo de lançamento (θ) e tempo total de 20 anos. As condições iniciais estão destacadas no código abaixo.

tarefaB3.2-10260434.f90

```
Program Tarefa_B3
2
4      IMPLICIT REAL*8 (a-h,o-z)
4      parameter (nmax=150000)
6      dimension yt(0:nmax), xt(0:nmax), yj(0:nmax), xj(0:nmax), xs(0:nmax),
6      ys(0:nmax)
8
10     pi = 4.d0*datan(1.d0)
10
12     dt = 0.0001           !ano
12     rt = 1.00             !AU
12     rj = 5.20              !AU
12     aMT = 6.0*10.d0**24   !kg
12     aMS = 2.0*10.d0**30   !kg
12     aMJ = 1.9*10.d0**27 *1000 !kg
14
16     aM = aMT+ aMS + aMJ
16
18     theta = pi           !angulo inicial Júpiter
18     theta2 = pi/2         !angulo inicial Terra
20
22     !Condições iniciais
22
24     vt_0 = (2.0*pi)/(sqrt(rt))*sin(theta2)
24     vj_0 = (2.0*pi)/(sqrt(rj))*sin(theta)
24     vs_0 = - (aMT/aMS) * vt_0 - (aMJ/aMS) * vj_0
26
28     yt_0 = rt*sin(theta2)
28     xt_0 = -rt*sin(theta2)
30
32     yj_0 = -rj*sin(theta)
32     xj_0 = -rj*cos(theta)
34
36     !Centro de massa
36     xcm = (xt_0 + xj_0 + xs_0 )/ aM
```

```

38      ycm = (yt_0 + yj_0 + ys_0 )/ aM
40
41      !Condições iniciais em relação ao centro de massa
42
43      yt(0) = xt_0 - ycm
44      xt(0) = yt_0 - xcm
45      yt(1) = yt(0) + vt_0*dt
46      xt(1) = xt(0)
47
48      yj(0) = yj_0 - ycm
49      xj(0) = xj_0 - xcm
50      yj(1) = yj(0) + vj_0*dt
51      xj(1) = xj(0)
52
53      ys(0) = xs_0 - ycm
54      xs(0) = ys_0 - xcm
55      xs(1) = xs(0)
56      ys(1) = ys(0) + vs_0*dt
57
58      open(10, file= 'saidaB3.2-10260434.dat')
59      do i=1, nmax
60
61          !Raio Terra-Sol
62          rt_s = sqrt( ( xt(i) - xs(i) )**2 + ( yt(i) - ys(i) )**2)
63          !Raio Terra-Júpiter
64          rt_j = sqrt( ( xt(i) - xj(i) )**2 + ( yt(i) - yj(i) )**2)
65
66          !Equações Movimento Terra
67          xt(i+1) = 2.0*xt(i) - xt(i-1) - &
68              & 4.0*pi**2 *( ( xt(i) - xs(i) )/rt_s**3 + (aMJ/aMS)*(
69                  & xt(i)-xj(i) )/ rt_j**3 ) * dt**2
70
71          yt(i+1) = 2.0* yt(i) - yt(i-1) - &
72              & 4.0*pi**2 *( ( yt(i) - ys(i) )/rt_s**3 + (aMJ/aMS)*(
73                  & yt(i)-yj(i) )/ rt_j**3 ) * dt**2
74
75          !Raio Júpiter-Sol
76          rj_s = sqrt( ( xj(i) - xs(i) )**2 + ( yj(i) - ys(i) )**2)
77          !Raio Júpiter-Terra
78          rj_t = sqrt( ( xj(i) - xt(i) )**2 + ( yj(i) - yt(i) )**2)
79
80          !Equações Movimento Júpiter
81          xj(i+1) = 2.0 * xj(i) - xj(i-1) - &
82              & 4.0*pi**2.0 * ( ( xj(i) - xs(i) )/rj_s**3 + (aMT/aMS)*(
83                  & xj(i)-xt(i) )/ rj_t**3 ) * dt**2
84
85          yj(i+1) = 2.0 * yj(i) - yj(i-1) - &
86              & 4.0*pi**2.0 * ( ( yj(i) - ys(i) )/rj_s**3 + (aMT/aMS)*(
87                  & yj(i)-yt(i))/ rj_t**3 ) * dt**2

```

```

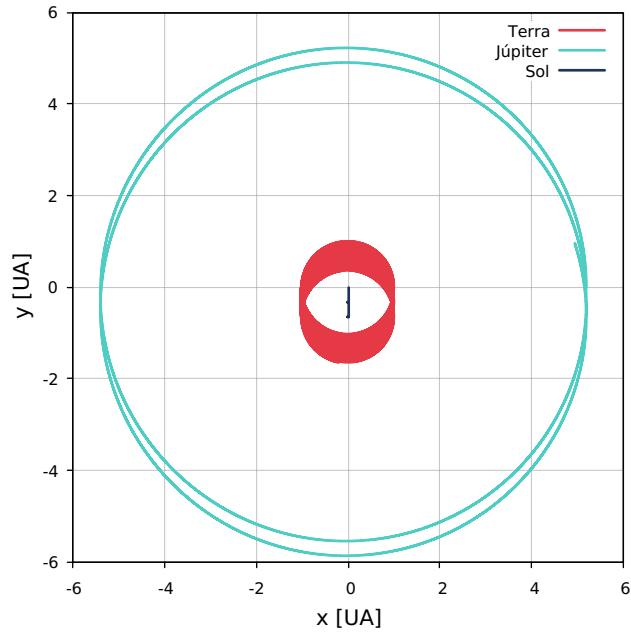
!Equações Movimento Sol
84    xs(i+1) = 2.0 * xs(i) - xs(i-1) - &
& 4.0*pi**2.0 * (aMT/aMS)*( (xs(i) - xt(i) )/rt_s**3 +
→   (aMJ/aMS)*( xs(i)-xj(i) )/ rj_s**3) * dt**2
86
88    ys(i+1) = 2.0 * ys(i) - ys(i-1) - &
& 4.0*pi**2.0 * (aMT/aMS)*( (ys(i)- yt(i))/rt_s**3 + (aMJ/aMS)*(
→   ys(i)-yj(i))/ rj_s**3 ) * dt**2
90
92    write(10,*) xt(i+1), yt(i+1), xj(i+1), yj(i+1), xs(i+1), ys(i+1)
94
end do
close(10)

End Program Tarefa_B3

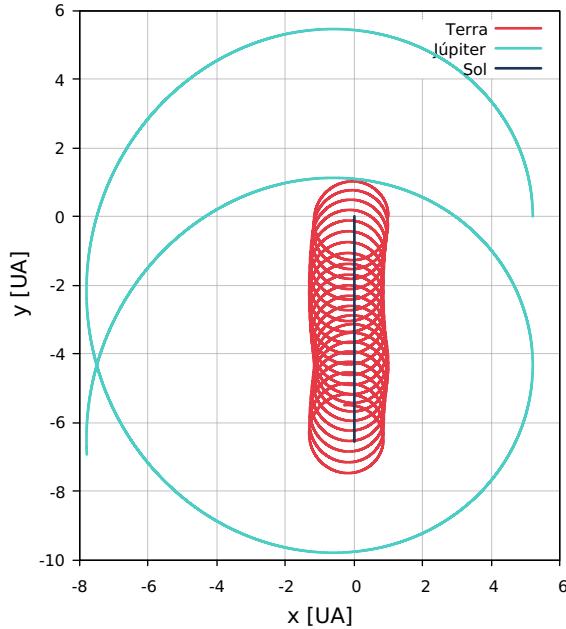
```

8.1 Resultados

Quando a massa de Júpiter é 10x maior que sua massa real, a trajetória da Terra é perturbada. Já 100x maior, ocorrem alterações drásticas tanto na órbita de Júpiter quanto na da Terra.



(a) Sistema Sol, Terra e Júpiter, este último com massa 100x maior.



(b) Sistema Sol, Terra e Júpiter, este último com massa 100x maior.

Figura 17: Simulações do sistema de três corpos com diferentes massas de Júpiter.

Ao aumentar em 1000x a massa, Júpiter é ejetado do sistema e a Terra continua orbitando o Sol em uma trajetória não circular e irregular. Porém, acredito que o código contém fatores físicos que não foram considerados, pois o movimento do Sol é retilíneo, indicando que não está ocorrendo contabilização da atuação dos outros corpos. Provavelmente, para uma melhor simulação, seria necessário estabelecer melhores parâmetros iniciais.

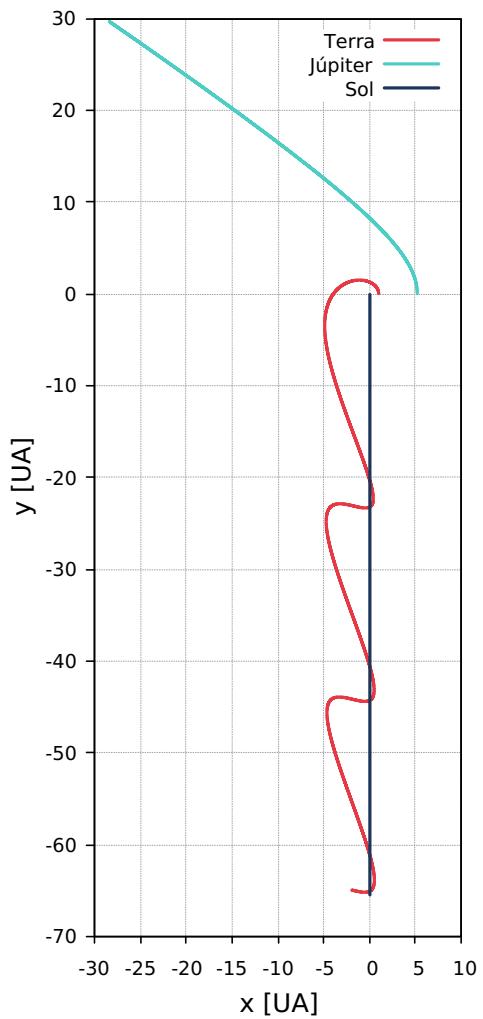


Figura 18: Sistema Sol, Terra e Júpiter, este último com massa 1000x maior.

Referências

- WIKIPÉDIA. **Problema dos três corpos** — Wikipédia, a encyclopédia livre. [S.l.: s.n.], 2019. [Online; accessed 27-dezembro-2019]. Disponível em: [\[https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Problema_dos_tr%C3%AAs_corpos&oldid=57054758\]](https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Problema_dos_tr%C3%AAs_corpos&oldid=57054758).
- _____. **Sistema planetário** — Wikipédia, a encyclopédia livre. [S.l.: s.n.], 2020. [Online; accessed 1-fevereiro-2020]. Disponível em: [\[https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Sistema_planet%C3%A1rio&oldid=57326900\]](https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Sistema_planet%C3%A1rio&oldid=57326900).
- WIKIPEDIA CONTRIBUTORS. **Orbital period** — Wikipedia, The Free Encyclopedia. [S.l.: s.n.], 2020. [Online; accessed 2-July-2020]. Disponível em: [\[https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Orbital_period&oldid=963678364\]](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Orbital_period&oldid=963678364).
- _____. **Orbital resonance** — Wikipedia, The Free Encyclopedia. [S.l.: s.n.], 2020. [Online; accessed 2-July-2020]. Disponível em: [\[https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Orbital_resonance&oldid=964477418\]](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Orbital_resonance&oldid=964477418).