2D-Vision Aufgabenblatt 9

1 Aufgabe 1:

Es sei $g(r,\theta)$ das Ergebnis der Transformation von $f(x,y)$ in Polarkoordinatengestalt, d.h. $x = x(r,\theta) = r \cdot \cos\theta$, $y = y(r,\theta) = r \cdot \sin t$ und $g(r,\theta) = f(x(r,\theta), y(r,\theta))$.
Die einzelnen partiellen Ableitung können einfach errechnet werden:

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \cdot \sin\theta,\ \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cdot \cos\theta,\ \frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta,\ \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta.$$

Somit gilt nach Kettenregel:

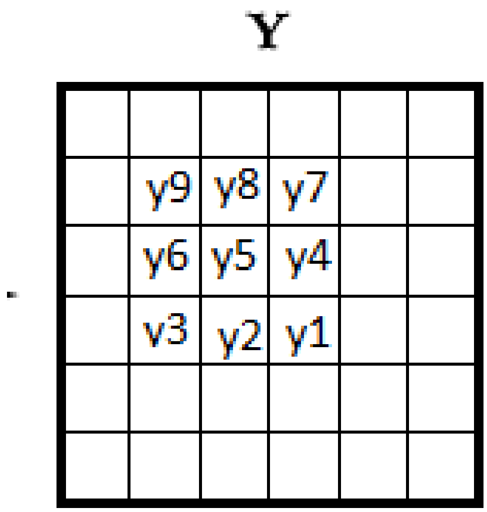
$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sin\theta \\
\frac{\partial g}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (-r) \cdot \sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot r \cdot \cos\theta
\end{aligned}$$

Und somit kann man mit $(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$ errechnen:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cdot (\cos\theta)^2 + 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cdot (\sin\theta)^2 \\
&\quad + \frac{1}{r^2} \cdot \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cdot r^2 \cdot (\sin\theta)^2 - 2 \cdot r^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cdot r^2 \cdot (\cos\theta)^2\right) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cdot \left((\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cdot \left((\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2\right) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2
\end{aligned}$$

2 Aufgabe 2:

2.1 a)



2.2 b)

So, wie ich in a) die y_i gewählt habe gilt:

$$y_i = w_i \cdot x_1 + C_i \;\forall i = 1, \ldots, 9$$

wobei die C_i nicht von x_i abhängen.

2.3 c)

Aus b) folgt offensichtlich:

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_i} = w_i \;\forall i = 1, \ldots, 9$$

Und somit gilt:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_1}\right)_{i=1,\ldots,9} = (w_i)_{i=1,\ldots,9}$$