Aufgabe 1

a) $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{4} + (y-4)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{4} = -(y-4)^2 \quad |\sqrt{\ }$

$\Leftrightarrow \frac{x-2}{2} = \sqrt{-1}\,(y-4) = i(y-4) \quad |\cdot 2$

$\Leftrightarrow x-2 = 2i(y-4) \quad |+2$

$\Rightarrow x = 2i(y-4)+2$

Die Lösung ist i.A. komplex!
Es existiert eine reelle Lösung und zwar wenn $2(y-4) = 0$

$\Leftrightarrow y = 4 \Longrightarrow f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \wedge y = 4$

$\Rightarrow x = 2i\cdot 0 + 2 = 2$

d.h. die Null-Isolinie der Funktion ist der Punkt (2,4), welcher das Zentrum der Ellipse f(x,y) ist.

b) $P = (2{,}4,\ 4{,}2)$

$\frac{d}{dx} f(x,y) = \frac{1}{4}\cdot 2(x-2) + 0 = \frac{x-2}{2} =: f_x'(x)$

$f_x'(2{,}4) = \frac{2{,}4-2}{2} = 0{,}2$

$\frac{d}{dy} f(x,y) = 0 + 2(y-4) = 2y-8 =: f_y'(y)$

$f_y'(4{,}2) = 8{,}4 - 8 = 0{,}4$

~~⇒ An P steigt f in y-Richtung am schnellsten~~

$\Longrightarrow \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$ ist der Gradient von f

und ist die Richtung des steilsten Anstiegs von f

Aufgabe 3:

Sei $v = \binom{v_1}{v_2}$ ein Einheitsvektor, d.h. $|v| = 1$

so ist die Steigung von f an einem Punkt p

~~ge~~ in die Richtung v gegeben durch

$\langle \nabla f(p), v \rangle$.

Wir betrachten $p = \binom{2,4}{4,2} \Rightarrow \nabla f(p) = \binom{0,2}{0,4} =: \nabla f$

Wir suchen die (zwei) $v \in \mathbb{R}^2$ sodass $\langle \nabla f, v \rangle \geq -0,2$

minimal ist.

Offensichtlich gilt $\langle \nabla f, \binom{-1}{0} \rangle = 0,2 \cdot (-1) + 0,4 \cdot 0 \stackrel{!}{=} -0,2$

d.h. $v = \binom{-1}{0}$ ist eine optimale Lösung!

$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \stackrel{!}{=} 1 \Leftrightarrow v_2 = \pm\sqrt{1 - v_1^2}$.

Den Fall $v_2 = +\sqrt{1 - v_1^2}$ können wir uns sparen

(er führt nur zum Ergebnis $v = \binom{-1}{0}$)

Also $v_2 = -\sqrt{1 - v_1^2} \Rightarrow \langle \nabla f, v \rangle = \langle \binom{0,2}{0,4}, \binom{v_1}{-\sqrt{1 - v_1^2}} \rangle$

$= 0,2\, v_1 - 0,4\sqrt{1 - v_1^2} \stackrel{!}{=} -0,2$

Dies hat zwei Lösungen:

1. $v_1 = -1$ (kennen wir schon)
2. $v_1 = 0,6$, da $0,2 \cdot 0,6 - 0,4\sqrt{1 - 0,6^2} = -0,2$

$\Rightarrow v_2 = -\sqrt{1 - 0,6^2} = -0,8$

$\Rightarrow$ Die zweite Richtung ist $\binom{0,6}{-0,8}$.