

# **MATEMÁTICA**

## **UNIDAD 1: LOGICA:**

Lógica Proposicional y Función Proposicional

## **UNIDAD 2: CONJUNTO:**

Noción de conjuntos. Inclusión. Subconjuntos. Conjuntos numéricos. Unión. Intersección. Complemento. Diferencia. Diferencia simétrica. Leyes de De Morgan. Problemas de conteo. Traducción de lenguaje coloquial a notación conjuntista.

## **UNIDAD 3: MATRICES**

Matriz. Orden. Fila. Columna. Matrices cuadradas y rectangulares. Propiedades. Matriz traspuesta. Matriz simétrica. Operación: suma, resta y multiplicación de matrices.

## **UNIDAD 4: RELACIONES**

Producto cartesiano. Relaciones binarias. Dominio. Imagen. Representación. Relaciones en un conjunto. Grafos dirigidos como representación de una relación. Camino. Álgebra de Boole, operación OR y operación AND, multiplicación. Matriz asociada a una relación. Propiedades. Representación en computadoras de relaciones y grafos. Propiedades de una relación. Clasificación. Relaciones de equivalencia y orden. Análisis de las propiedades según la matriz asociada a la relación y el dígrafo correspondiente. Diagrama de Hasse.

## **UNIDAD 5: SISTEMA BINARIO**

Pasajes de sistema binario a decimal y viceversa. Operaciones: suma, resta y multiplicación

## **UNIDAD 6: GRAFOS Y ARBOLES**

Grafos no dirigidos. Camino, circuito, trayectoria. Árboles binarios. Recorrido en orden inicial, intermedio y final. Valor numérico. Redes. Problemas de aplicación.

## **Bibliografía:**

- **Álgebra I.** Armando Rojo. Editorial El Ateneo
- **Álgebra II.** Armando Rojo. Editorial El Ateneo
- **Matemática discreta.** Grassman. Editorial PRENTICE - HALL

## **TABLA DE SÍMBOLOS O NOTACIONES:**

$\mathbb{N}$  conjunto de números naturales

$\mathbb{N}_0$  conjunto de números naturales incluido el cero

$\mathbb{Z}$  conjunto de números enteros

$\mathbb{Q}$  conjunto de números racionales

$\mathbb{I}$  conjunto de números irracionales

$\mathbb{R}$  conjunto de números reales

$\mathbb{C}$  conjunto de números complejos

$\mathbb{R}^+$  conjunto de números reales positivos

$\mathbb{R}^-$  conjunto de números reales negativos

$\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  conjunto de números reales positivos incluido el cero

$\subset$  se lee "está incluido estrictamente en" o "incluye estrictamente en"

$\subseteq$  se lee "está incluido ampliamente en" o "incluye ampliamente en"

$\not\subset$  se lee "no está incluido" o "no contiene"

$\in$  se lee "pertenece"

$\notin$  se lee "no pertenece"

$\exists$  se lee "existe por lo menos uno"

$\nexists$  se lee "no existe"

$\exists^*$  se lee "existe uno y solo uno"

$\Rightarrow$  se lee "implica"

$\Leftrightarrow$  se lee "si y solo si"

$\forall$  se lee "para todo"

$|x|$  se lee "valor absoluto de  $x$ "

$\emptyset$  se lee "conjunto vacío"

$\mathbb{U}$  se lee "conjunto universal"

$/$  se lee "tal que"

$\wedge$  se lee "y"

$\vee$  se lee "o"

$<$  se lee "menor" estrictamente

$\leq$  se lee "menor o igual"

$>$  se lee "mayor" estrictamente

$\geq$  se lee "mayor o igual"

$\cong$  se lee "igual o semejante"

$\neq$  se lee "no es igual"

$\equiv$  se lee "equivalente"

$\cup$  se lee "unión"

$\cap$  se lee "intersección"

$\notin$  se lee "no pertenece"

$\#$  se lee "cardinal"

# Unidad 1. Lógica

1) Determine cuál de las sigs. oraciones son **proposiciones**.

- a) En 1990 Argentina se consagró campeón mundial de fútbol.
- b) Si  $x \in \mathbb{N}$ , entonces  $x + 3$  es un número entero positivo.
- c) Quince es un número par.
- d) ¿Qué hora es?
- e) Cristóbal Colón descubrió América en 1810?

2) Determine el **valor de verdad** de las sig. **proposiciones**.

- a) El 25 de Mayo de 1810 se declaró la independencia de Argentina.
- b) El 9 de Julio de 1816 se formó la Primera Junta de Gobierno.
- c) Hipólito Irigoyen fue presidente de Argentina.
- d) El 25 de Mayo de 1810 se nombró la Primera Junta de Gobierno patrio.
- e) Todos los números impares son primos.
- f) En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

3) Construya la **tabla de verdad** de cada una de las sigs. proposiciones.

- a)  $p \wedge (\neg p)$
- b)  $[p \wedge (\neg q)] \Rightarrow r$
- c)  $[(p \vee q) \wedge (q \vee p)] \Rightarrow (p \vee q)$
- d)  $[p \wedge (\neg p)] \Rightarrow q$
- e)  $[p \wedge (q \vee r)] \Rightarrow p$
- f)  $\{[p \wedge (\neg q)] \Rightarrow r\} \wedge [(p \vee q) \Rightarrow r]$

4) Indicar si las proposiciones del ejercicio anterior son, **Tautología, Contradicción o Contingencia**.

5) Considerando las sigs. proposiciones

**p: “5 es un número mayor que 3 “**

**q: “13 es un número mayor que 15 “**

Analizar el **valor de verdad** de las sigs. proposiciones

- a)  $(p \wedge q)$
- b)  $(q \wedge p)$
- c)  $(\neg p) \wedge q$
- d)  $(\neg p) \wedge (\neg q)$

6) Determinar el valor de verdad de la proposición compuesta

$$[(\neg p \wedge q) \vee r] \Rightarrow (p \wedge q)$$

Siendo las proposiciones **p: “3 es un número menor que 5 “**

**q: “13 es un número mayor que 15 “**

**r: “24 es múltiplo de 6 “**

7) Considerando las sig. proposiciones **p: “Estudiaré Matemática Discreta “**

**q: “Iré al cine “**

**r: “Hoy estoy de buen humor “**

Escribir en lenguaje simbólico las sigs. oraciones

a) Si no estoy de buen humor, entonces iré al cine “.

b) No iré al cine y estudiaré Matemática Discreta.

c) Si hoy no estoy de buen humor, iré al cine y no estudiaré Matemática Discreta.

d) Si no estudio Matemática Discreta, entonces hoy no estoy de buen humor.

8) Realizar la **tabla de verdad** para las **proposiciones** de los ítems, a) , b) , c) y d) del **ejercicio anterior**.

9) Si  $V_{(p \Rightarrow q)} = 0$  , determinar el **valor de verdad** de la sig. **proposición**  $\neg(p \wedge q) \Rightarrow q$  .

10) Considerando los **valores de verdad de las sigs. proposiciones**

$$V_{(\neg p \Rightarrow r)} = 0$$

$$V_{[\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg r)]} = 0$$

Deducir, si es posible, los **valores de verdad de todas las proposiciones simples** que intervienen.

11) Con los valores hallados en el ejercicio 10) calcule el **valor de verdad** de la sig. **proposición**.

$$V_{[(q \Rightarrow \neg r) \wedge (\neg p \vee r)]}$$

12) Sea el conjunto Universal  $U = \mathbb{R}$  (Números Reales) y las sigs. formas proposicionales

$p_{(x)} : “ x \text{ es solución de } 2x^3 - 8x = 0 “$

$q_{(x)} : “ 4x + 3 = -3 “$

a) Hallar el conjunto de valores de verdad de las formas proposicionales,  $p_{(x)}$  y  $q_{(x)}$  .

b) Como se modifican los conjuntos de valores de verdad si el conjunto Universal es

i )  $U = \mathbb{N}$  ( Naturales                      ii)  $U = \mathbb{Z}$  ( Enteros                      iii)  $U = \mathbb{Q}$  ( Racionales  
iiii)  $U = \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$

c) Hallar el valor de verdad de  $p_{(-2)}$  ,  $q_{(2)}$  ,  $q_{(-2)}$  .

d) Hallar el valor de verdad de

$$i) \neg p_{(2)} \wedge q_{(-2)}$$

$$ii) p_{(2)} \Rightarrow q_{(2)}$$

$$iii) \forall x : q_{(x)}$$

$$iiii) \exists x / q_{(x)}$$

e) Si el conjunto Universal es  $U = \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$  ¿ qué valor de verdad tiene  $\forall x : q_{(x)}$  ?

13) Dado el conjunto Universal  $= \{-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$  y las formas proposicionales.

- a)  $p_{(x)}$  : “  $x$  es un entero negativo mayor o igual a  $-4$  “  
 b)  $q_{(x)}$  : “  $x$  es un entero mayor que  $-2$  “  
 c)  $r_{(x)}$  : “  $x$  es un entero y  $x^2$  es par “

i) Hallar el conjunto de Valores de Verdad de las sigs. formas proposicionales,  $p_{(x)}$ ,  $q_{(x)}$ ,  
 $\neg q_{(x)}$ ,  $r_{(x)}$ .

ii) Visualizar los conjuntos en un solo diagrama de Venn.

iii) Hallar el conjunto de Valores de Verdad de las sigs. formas proposicionales.

- A)  $r_{(x)} \vee p_{(x)}$       B)  $r_{(x)} \wedge \neg p_{(x)}$       C)  $r_{(x)} \Rightarrow p_{(x)}$       D)  $\neg [r_{(x)} \Leftrightarrow p_{(x)}]$   
 E)  $[r_{(x)} \wedge p_{(x)}] \Rightarrow \neg q_{(x)}$

## Unidad 1. Lógica. Respuestas

1)

- a) Proposición  
 b) Proposición  
 c) Proposición  
 d) No es una Proposición, es una pregunta  
 e) Proposición

2)

- a) Falso  
 b) Falso  
 c) Verdadero  
 d) Verdadero  
 e) Falso  
 f) Verdadero

3)

a)

p	$\neg p$
1	0
0	1

b)

p	q	$\neg q$	$p \wedge (\neg q)$	r	$[p \wedge (\neg q)] \Rightarrow r$
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1

c)

p	q	p	$p \vee q$	$q \vee p$	$(p \vee q) \wedge (q \vee p)$	$p \vee q$	$[(p \vee q) \wedge (q \vee p)] \Rightarrow (p \vee q)$
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	1

p	q	$\neg q$	$p \wedge (\neg q)$	r	$[p \wedge (\neg q)] \Rightarrow r$	$p \vee q$	r	$(p \vee q) \Rightarrow r$	$\{[p \wedge (\neg q)] \Rightarrow r\} \wedge [(p \vee q) \Rightarrow r]$
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0	0

d)

e)

p	$\neg p$	$p \wedge (\neg p)$	q	$[p \wedge (\neg p)] \Rightarrow q$
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1

f)

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	p	$[p \wedge (q \vee r)] \Rightarrow p$
1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1

4)

- a) Contradicción      b) Contingencia      c) Tautología      d) Tautología  
e) Tautología      f) Contingencia

5)

- a)  $V_{(p \wedge q)} = 0$       b)  $V_{(q \wedge p)} = 0$       c)  $V_{[(\neg p) \wedge q]} = 0$

d)  $V_{[(\neg p) \wedge (\neg q)]} = 0$

6)  $V_{\{[\neg p \wedge q] \vee r\} \Rightarrow (p \wedge q)} = 0$

7)

- a)  $(\neg r) \Rightarrow q$       b)  $(\neg q) \wedge p$       c)  $(\neg r) \Rightarrow [q \wedge (\neg p)]$

d)  $(\neg p) \Rightarrow (\neg r)$

8)

a)

r	$\neg r$	q	$(\neg r) \Rightarrow q$
1	0	0	1
1	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1

b)

q	$\neg q$	p	$(\neg q) \wedge p$
1	0	0	0
1	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1

c)

r	$\neg r$	q	p	$\neg p$	$q \wedge (\neg p)$	$(\neg r) \Rightarrow [q \wedge (\neg p)]$
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1

p	¬p	r	¬r	$(¬p) \Rightarrow (¬r)$
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0

0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1

d)

9)

$$V_{[-(p \wedge q)] \Rightarrow q} = 0$$

10)

$$V_{(p)} = 0 \quad V_{(q)} = 0 \quad V_{(r)} = 0$$

11)

$$V_{[(q \Rightarrow ¬r) \wedge (¬p \vee r)]} = 1$$

12)

$$\text{a) } C_V[p_{(x)}] = \{-2, 0, 2\} \quad C_V[q_{(x)}] = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$$

b)

$$\text{i) } C_V[p_{(x)}] = \{0, 2\} \quad C_V[q_{(x)}] = \{ \}$$

$$\text{ii) } C_V[p_{(x)}] = \{-2, 0, 2\} \quad C_V[q_{(x)}] = \{ \}$$

$$\text{iii) } C_V[p_{(x)}] = \{-2, 0, 2\} \quad C_V[q_{(x)}] = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$$

$$\text{iiii) } C_V[p_{(x)}] = \{ \} \quad C_V[q_{(x)}] = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$$

c)

$$V_{p(-2)} = 1 \quad V_{q(2)} = 0 \quad V_{q(-2)} = 0$$

d)

$$\text{i) } V_{[-p(2) \wedge q(-2)]} = 0$$

$$\text{ii) } V_{[p(2) \Rightarrow q(2)]} = 0$$

$$\text{iii) } V_{[\forall x: q_{(x)}]} = 0$$

$$\text{iiii) } V_{[\exists x / q_{(x)}]} = 1$$

e)

$$V_{[\forall x: q_{(x)}]} = 1$$

13)

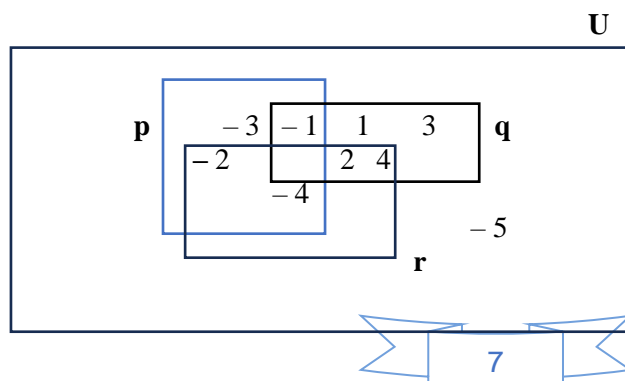
$$\text{i) } C_V[p_{(x)}] = \{-4, -3, -2, -1\}$$

$$C_V[q_{(x)}] = \{-1, 1, 2, 3, 4\}$$

$$C_V[-q_{(x)}] = \{-5, -4, -3, -2\}$$

$$C_V[r_{(x)}] = \{-4, -2, 2, 4\}$$

ii)



iii)

- A)  $C_V = \{-4, -3, -2, -1, 2, 4\}$   
 B)  $C_V = \{2, 4\}$   
 C)  $C_V = \{-5, -4, -3, -2, -1, 1, 3\}$   
 D)  $C_V = \{-3, -1, 2, 4\}$   
 E)  $C_V = \{-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$

## Unidad 2. CONJUNTOS

**DEFINICIÓN:** Cuando decimos  $A = \{x / x \text{ tiene la propiedad "p"}\}$ , cualquier elemento que tenga esa propiedad pertenece al conjunto. En símbolos es  $x \in A$ , en consecuencia (  $\therefore$  ) la pertenencia es una relación de elemento a conjunto.

1) Sea  $A = \{1, 2, 4, a, b, c\}$ . Indicar cada uno de los siguientes casos como verdadero "V" o falso "F".

- |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| a)                       | b)                       | c)                       | d)                       | e)                       |
| $2 \in A$                | $3 \in A$                | $c \notin A$             | $\emptyset \in A$        | $A \in A$                |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**DEFINICIÓN:** Cuando todos los elementos de un conjunto pertenecen a otro, se dice que está incluido. En consecuencia (  $\therefore$  ) la inclusión es una relación de conjunto a conjunto.

$\subseteq$  se lee " está incluido ampliamente en " o " incluye ampliamente a "  
 Simbólicamente:  $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$

$\subset$  se lee " está incluido estrictamente en " o " incluye estrictamente a "  
 Simbólicamente:  $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B \wedge \exists y \in B / y \notin A$

2) Sean  $A = \{1\}$ ,  $B = \{1, a, 2, b, c\}$ ,  $C = \{b, c\}$ ,  $D = \{a, b\}$ ,  $E = \{1, a, 2, b, c, d\}$

Completar con incluido:  $\subset$  o no incluido:  $\not\subset$ , para dar un enunciado verdadero.

- a)  $A \subset B$    b)  $\emptyset \subset A$    c)  $B \subset C$    d)  $C \subset E$    e)  $D \subset C$    f)  $B \subset E$

3) Escribir el conjunto de potencia de  $B$ , ( $P_B$ ), siendo el conjunto  $B = \{C\#; JAVA; VB.NET.\}$ .

4) A) Considerando los conjuntos  $A = \{a, b, c\}$  y  $B = \{b, c, d\}$  con dominio  $D = \{a, b, c, d, e\}$  y las formas proposicionales:

$p_{(x)} = x \text{ pertenece al conjunto } A$ ,  $q_{(x)} = x \text{ pertenece al conjunto } B$

Definir por extensión el conjunto de verdad correspondiente a:

- a)  $p_{(x)} \wedge q_{(x)}$    b)  $p_{(x)} \vee q_{(x)}$    c)  $p_{(x)} \wedge \neg q_{(x)}$    d)  $\neg p_{(x)} \wedge q_{(x)}$    e)  $\neg p_{(x)}$   
 f)  $\neg [p_{(x)} \wedge q_{(x)}]$    g)  $\neg p_{(x)} \vee \neg q_{(x)}$    h)  $\neg p_{(x)} \wedge \neg q_{(x)}$    i)  $\neg [p_{(x)} \vee q_{(x)}]$

B) Sombrear en un diagrama de Venn el conjunto verdad correspondiente a cada uno de los casos anteriores, considerando dominio  $D = U$

5) Considerando las formas proposicionales:

$p_{(x)} = x \text{ pertenece al conjunto } A$ ,  $q_{(x)} = x \text{ pertenece al conjunto } B$

a) Escribir en lenguaje simbólico la siguiente proposición:

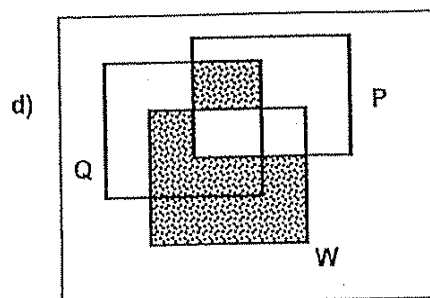
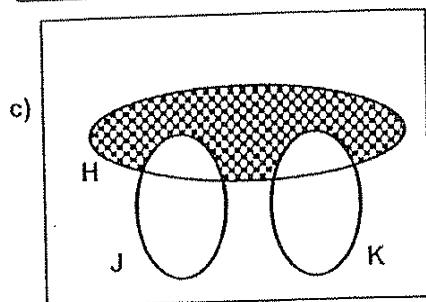
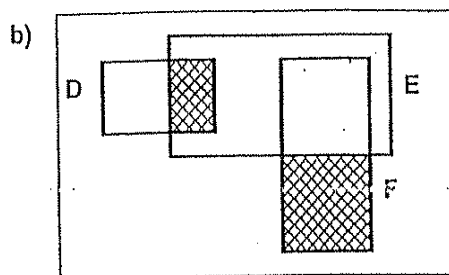
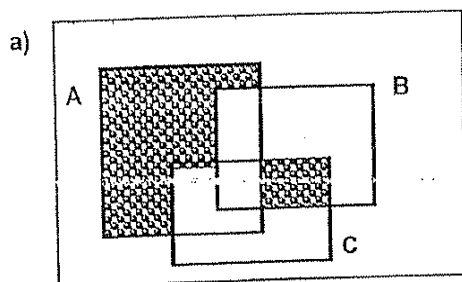
" Todos los elementos del dominio verifican que si pertenecen al conjunto A, entonces pertenecen al conjunto B".

b) Dar el valor de verdad siendo:

- b<sub>1</sub>)  $A = \{1, 2, 3\} \wedge B = \{1, 2, 3, 4, 0\}$   
 b<sub>2</sub>)  $A = \{1, 2, 3, 4, 0\} \wedge B = \{3, 2, 1\}$   
 b<sub>3</sub>)  $A = \emptyset \wedge B = \{-1, 0, 1\}$



6) Escribir con notación conjuntista una operación que represente las regiones sombreadas en los siguientes diagramas

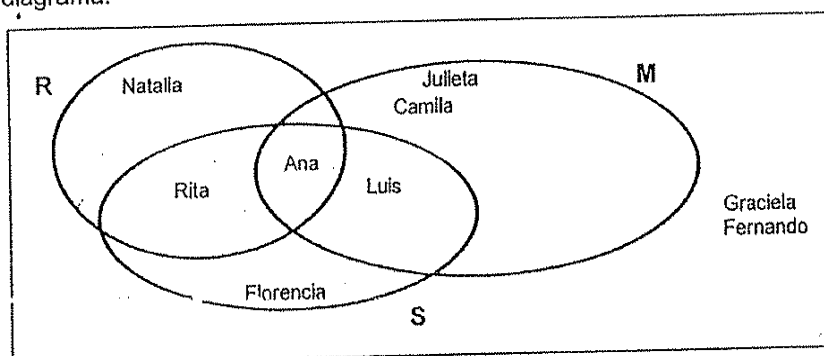


7) Verificar mediante diagramas de Venn las leyes de De Morgan para tres conjuntos.

### PROBLEMAS DE CONTEO

8) Dados los conjuntos:

R = personas de cabello rubio M = personas con ojos marrones S = personas que miden menos de 1,70 m y el siguiente diagrama:



Definir por extensión y describir las características de los elementos pertenecientes a los siguientes conjuntos:

- a)  $\overline{R \cap M \cap S}$  b)  $R - M$  c)  $\overline{R \cap M \cap S}$  d)  $M \cap S \cap \overline{R}$  e)  $\overline{R \cap S \cap M}$

9) Sombrar en un diagrama la región correspondiente a:

- a)  $A \cap B \cap \overline{C}$  b)  $A \cap B \cap \overline{C}$  c)  $\overline{A \cup B \cup C}$  d)  $\overline{A \cap B \cap C}$

10) Dados tres conjuntos sombrar en un diagrama de Venn la región donde ubicarla a:

- a) Los elementos que pertenecen por lo menos a dos de los conjuntos.  
b) Los elementos que pertenecen a sólo dos de los conjuntos.  
c) Los elementos que pertenecen a lo sumo a uno de los conjuntos.  
d) Los elementos que pertenecen exactamente a uno de los conjuntos.

11) Sabiendo que:

$$\#(A \cup B \cup C) = 65 \quad \#(A \cap B \cap C) = 3 \quad \#(A \cap B) = 20 \quad \#A = \#B = 35$$

$$\#(B \cap C) = 10 \quad \#[(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)] = 32$$

Calcular:

a)  $\#[C \cap (A \cap B)]$

b) La cantidad de elementos que pertenecen a sólo un conjunto, escribirlo en notación conjuntista.

12) Se tienen tres conjuntos A, B y C. Sabiendo que:

$$\#(A \cap B \cap C) = 90 \quad \#(A \cap B \cap \bar{C}) = 5 \quad \#(B \cap C) = 16 \quad \#[(A \cup B \cup C)] = 20$$

$$\#A = 50 \quad \#B = 30 \quad \#[(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)] = 30 \quad \#(A \cap B) = 17$$

a) ¿Cuántos elementos hay a lo sumo en dos conjuntos?

b) ¿Cuántos elementos hay solamente en dos conjuntos?

c) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto C?

Nota: en los siguientes problemas realizar el diagrama de Venn correspondiente y expresar los datos y las respuestas en notación conjuntista.

13) En un atlas hay 97 mapas de Argentina, de los cuales 35 están coloreados.

El atlas tiene un total de 128 mapas coloreados. Hay 30 mapas que no tienen color ni son de Argentina.

a) ¿Cuántos mapas tiene el atlas?

b) ¿Cuántos mapas son de Argentina pero sin color?

c) ¿Cuántos mapas coloreados no son de Argentina?

14) Sobre un total de 80 personas se sabe que:

44 se inscribieron en un curso de Windows

5 " " " " " " Windows y DOS solamente

16 en DOS y Cobol

17 en Windows y DOS

28 se inscribieron por lo menos en dos cursos

17 en ninguno de esos cursos

30 en DOS

Se pide

a) ¿Cuántos se anotaron en un solo curso?

b) ¿Cuántos se anotaron a lo sumo en dos cursos?

c) ¿Cuántos se anotaron solamente en dos cursos?

SOLUCIÓN: (no es única)

A partir de los datos podemos calcular los valores que necesitamos para completar el diagrama:

Primero:

$$D = (D \cap W \cap \bar{C}) \cup (D \cap C \cap W) \cup (D \cap C \cap \bar{W}) \cup (D \cap \bar{C} \cap \bar{W})$$

$$30 = 5 + 12 + 4 + \#(D \cap \bar{C} \cap \bar{W})$$

$$\#(D \cap \bar{C} \cap \bar{W}) = 9$$

Segundo:

$$U = (W \cup D \cup C) \cup W \cup (D \cap C \cap \bar{W}) \cup (D \cap \bar{C} \cap \bar{W}) \cup (C \cap \bar{D} \cap \bar{W})$$

$$80 = 17 + 44 + 4 + 9 + \#(C \cap \bar{D} \cap \bar{W})$$

$$\#(C \cap \bar{D} \cap \bar{W}) = 6$$

Tercero:

$$28 = \#(D \cap W \cap \overline{C}) + \#(D \cap C \cap \overline{W}) + \#(C \cap W \cap \overline{D}) + \#(D \cap C \cap W)$$

$$28 = 5 + 4 + \#(C \cap W \cap \overline{D}) + 12$$

$$\#(C \cap W \cap \overline{D}) = 7$$

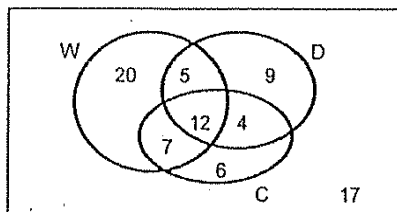
Cuarto:

$$W = \#(W \cap D \cap \overline{C}) + \#(W \cap D \cap C) + \#(W \cap C \cap \overline{D}) + \#(W \cap \overline{D} \cap \overline{C})$$

$$44 = 5 + 12 + 7 + \#(W \cap \overline{D} \cap \overline{C})$$

$$\#(W \cap \overline{D} \cap \overline{C}) = 20$$

El diagrama completo es:



a) Los que se anotan en un solo curso son:

$$\#(W \cap \overline{D} \cap \overline{C}) + \#(C \cap \overline{D} \cap \overline{W}) + \#(D \cap \overline{W} \cap \overline{C}) = 20 + 6 + 9 = 35$$

b) Los que se anotaron a lo sumo en dos cursos son:

$$\text{En ningún curso: } \#(W \cup D \cup C) = 17$$

$$\text{En un curso: } \#(W \cap \overline{D} \cap \overline{C}) + \#(C \cap \overline{D} \cap \overline{W}) + \#(D \cap \overline{W} \cap \overline{C}) = 20 + 6 + 9 = 35$$

$$\text{En dos cursos: } \#(W \cap D \cap \overline{C}) + \#(W \cap \overline{D} \cap C) + \#(\overline{W} \cap D \cap C) = 5 + 7 + 4 = 16$$

$$\text{El total será: } 17 + 35 + 16 = 68$$

c) Los que se anotaron **solamente** en dos cursos son:

$$\text{En dos cursos: } \#(W \cap D \cap \overline{C}) + \#(W \cap \overline{D} \cap C) + \#(\overline{W} \cap D \cap C) = 5 + 7 + 4 = 16$$

15) En una encuesta se supo que:

4 personas leen las revistas: Caras, El Gráfico y Muy Interesante.

6 leen solamente la revista M I

16 las revistas M I y E G

20 leen C pero no M I

12 leen C y E G

4 sólo leen E G

26 leen C

50 ninguna de las tres revista

Se desea saber:

- a) ¿Cuántas personas leen alguna de las tres revistas?
- b) ¿Cuántas leen una sola revista?
- c) ¿Cuántas personas fueron encuestadas?
- d) ¿Cuántas personas leen por lo menos dos revistas?

- 16) En el primer año de una carrera de computación se registró la siguiente estadística:  
El 10% de los alumnos estudiaban **por lo menos** una de las siguientes materias: Matemática, Programación I e Inglés. Además 28 estudian Matemática, 22 Programación I, y 28 Inglés; sólo 2 alumnos estudian las tres materias, 12 estudian Matemática e Inglés, 12 estudian Programación I e Inglés y 10 sólo Matemática.  
Se pide:
- ¿Cuántos alumnos estudian alguna de las tres materias?
  - ¿Cuál es la cantidad total de alumnos?
  - ¿Cuántos estudian Matemática y Programación I pero no Inglés?
  - ¿Cuántos estudian sólo 2 materias?
- 
- 17) Un video club cuenta con 200 películas, de las cuales 125 son de cortometraje y 94 son de color. Además 38 de las películas de largometraje son de color.
- ¿Cuántas películas blanco y negro hay?
  - ¿Cuántas de las de cortometraje son de color?
- 
- 18) En una ciudad existen tres cadenas de supermercados: A, B, C.  
Una encuesta indicó que el 70 % de los habitantes compra en alguno de esos supermercados, el 30 % compra en por lo menos dos de ellos, mientras que el 25 % lo hace exactamente en dos de ellos.  
Hay un 5 % de habitantes que compra sólo en B y C.  
Se sabe, además, que el porcentaje de personas que compra sólo en A y B es igual al que compra sólo en A y C.  
La cadena A acapara el 40 % del público al igual que la cadena B.
- ¿Qué cantidad de personas compra sólo en la cadena B?
  - ¿Qué porcentaje lo hace en una sola de las cadenas existentes?
- 
- 19) Los empleados de una gran empresa de insumos para computación, cuando asisten a Buenos Aires, pueden hospedarse en tres grandes hoteles: el Sheraton, el Bauen y el Libertador, o bien por su cuenta en algún otro.  
Se sabe por experiencias anteriores, que el 80 % elige uno de los tres hoteles citados. Además, el 20 % se hospedó alguna vez en el Sheraton y el Bauen, el 15 % en los tres hoteles, el 12 % eligió sólo el Bauen y el Libertador y nadie eligió sólo el Sheraton y el Libertador.  
Si los porcentajes de personas que prefieren sólo uno de los hoteles mencionados son iguales, se pide:
- ¿Qué porcentaje de personas se aloja en sólo uno de los hoteles citados?
  - ¿Qué porcentaje lo hace en por lo menos dos de ellos?
- 
- 20) Un video – club ofrece a sus socios tres estrenos: una película de acción, una de terror y una comedia.  
Se sabe que 46 de los 100 socios que tiene el video aceptaron la propuesta, de los cuales 40 alquilaron por lo menos dos de las películas, 6 alquilaron las 3,  
30 alquilaron la película de acción y la de terror, mientras que 4 alquilaron sólo la película de acción y la comedia, 3 alquilaron sólo la comedia y la película de acción la alquilaron 37 personas.  
El dueño del video quiere saber:
- ¿Cuántas personas alquilaron sólo la película de terror?
  - ¿Cuántas personas alquilaron sólo dos películas?
- 
- 21) En el museo de Bellas Artes hubo una muestra de tres pintores: Joan Miró, Juan Gris y Kandinsky.  
Se sabe que el fin de semana fueron al museo 3540 personas de las cuales el 40 % visitaron las muestras, el 30 % visitaron por lo menos dos de las muestras, el 5 % visitaron las tres muestras.  
Las muestras de Joan Miró y Juan Gris la visitaron un 20 %, un 3 % fue sólo a la muestra de Joan Miró y Kandinsky, un 2 % fueron sólo a la de Kandinsky y a la muestra de Juan Gris fue un 32 %.
- Se pide:
- ¿Qué porcentaje visitó sólo la muestra de Joan Miró?
  - ¿Qué porcentaje visitó la muestra de Joan Miró y Juan Gris pero no la de Kandinsky?
  - ¿Cuántas personas no visitó ninguna de las tres muestras?
- 
- 22) Entre los 76 alumnos de primer año de un colegio, se efectuó un test de tres preguntas. Acerca de los resultados se tienen los siguientes datos:  
44 alumnos respondieron bien la segunda pregunta y 28 bien la tercera; 12 alumnos respondieron bien la primera y la segunda, 2 la primera y la tercera, 10 alumnos respondieron bien sólo la primera pregunta, en tanto 18 respondieron bien la tercera pero no la segunda, ninguno respondió bien sólo la primera y la tercera.

- a) ¿Cuántos alumnos no respondieron bien ninguna pregunta?
- b) ¿Cuántos alumnos respondieron bien la primer pregunta?
- c) ¿Cuántos alumnos respondieron por lo menos dos preguntas?

23) Se realiza una encuesta entre 50 alumnos de un aula preguntándoles que tipo de música les gustaba: clásica, heavy o tecno.

A 30 de los alumnos les agradaba la música clásica, pero a 10 de ellos les gustaba sólo la música clásica, 20 alumnos se inclinaron por heavy pero a 5 de ellos sólo heavy y tecno. Hubo 12 personas que admitieron no escuchar ningún tipo de música, uno dijo que escuchaba sólo heavy y 16 que escuchaban tecno.

- a) ¿Cuántos alumnos escuchaban los tres tipos de música?
- b) ¿Cuántos alumnos escuchaban sólo heavy y clásica?

24) En una cierta encuesta, se preguntó a 500 ejecutivos acerca de su lectura de los periódicos Barricada, Lucha y Construcción.

Las respuestas mostraron que

250 leían Barricada

270 leían Construcción

190 leían Lucha

70 leían Barricada y el Construcción

20 leían los tres periódicos.

50 leían el Barricada y el Lucha

110 leían Lucha y el Construcción

Calcular:

- a) La cantidad de personas que leían a lo sumo un periódico.
- b) La cantidad de personas que no leen ninguno de estos periódicos.

25) Se entrevistó a un universo de personas que solamente escuchan las siguientes radios ( en AM ): La Voz de las Madres ( 530 ), Cooperativa ( 740 ) y Nacional ( 870 ), obteniéndose los siguientes datos:

140 escuchan La Voz de las Madres , 40 escuchan La Voz de las Madres y Cooperativa,

100 escuchan Cooperativa, 50 escuchan La Voz de las Madres y Nacional, 60 escuchan Nacional .

Se sabe que nadie escucha las tres emisoras simultáneamente y no hay ningún oyente que escuche la emisora Nacional exclusivamente.

Calcular:

- a) La cantidad de personas que escuchan por lo menos una radio.
- b) La cantidad de personas que escuchan sólo Cooperativa.

26) De los 200 estudiantes a ingresar en una universidad, 98 son mujeres.

60 estudian comunicación.

60 son mujeres que no estudian comunicación.

¿ Cuántos hombres no estudian comunicación ?

27) En una academia se realiza una encuesta a 120 jóvenes y se obtienen los siguientes datos:

80 quieren ser actores.

70 quieren ser cantantes.

50 quieren ser actores y cantantes.

Determinar:

a) no quieren ser cantantes.

b) no quieren ser actores.

c) quieren ser cantantes, pero no actores.

d) quieren ser actores, pero no cantantes.

e) no quieren ser actores ni cantantes.

28) De 200 profesores de una universidad, 115 son licenciados y 60 son investigadores.

De los licenciados 33 son investigadores.

Indique cuántos de estos profesores:

a) son licenciados o investigadores

b) no son licenciados ni investigadores.

29) En un concurso de baile hay 55 parejas.

38 son latinas.

27 bailan tango y 46 bailan salsa.

13 son latinas y bailan tango.

18 bailan tango y salsa.

Todas las latinas bailan salsa.

Todas las parejas tienen al menos una de las características anteriores.

a) ¿ Cuántas tienen las tres características ?.

b) ¿ Cuántas tienen exactamente dos características ?.

c) ¿ Cuántas tienen exactamente una característica ?.

30) En una investigación hecha en un grupo de 100 estudiantes, la cantidad de personas que estudiaban varios idiomas fueron las siguientes:

Español, 28.

Español y alemán, 8.

Los tres idiomas, 3.

Alemán, 30.

Español y francés, 10.

Francés, 42.

Alemán y francés, 5.

a) ¿ Cuántos alumnos no estudian ningún idioma ?.

b) ¿ Cuántos alumnos tenían al francés como único idioma de estudio ?.

31) En un análisis posterior sobre los 100 estudiantes ( del ejercicio anterior ) la cantidad de personas que estudiaban varios idiomas resultaron ser:

Alemán únicamente, 18.

Alemán pero no español, 23.

Alemán y francés, 8.

Alemán, 26.

Francés, 48.

Francés y español, 8.

Ningún idioma, 24.

a) ¿ Cuántos estudiantes aprendían el español ?.

b) ¿ Cuántos estudiantes aprendían alemán y español pero no francés ?.



## Unidad 2. Conjunto. Respuestas

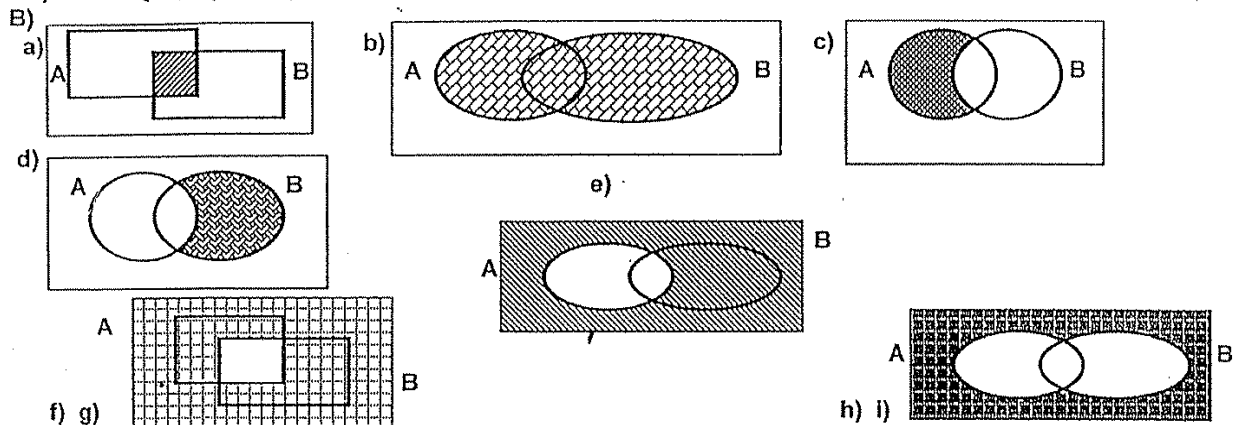
### PROBLEMAS DE TEORÍA DE CONJUNTOS

1) a) V    b) F    c) F    d) F    e) F

2) a)  $A \subset B$     b)  $\emptyset \subset A$     c)  $B \not\subset C$     d)  $C \subset E$     e)  $D \not\subset C$     f)  $B \subset E$

3)  $P_{(B)} = \{\{C\#; JAVA; VB.NET.\}; \{C\#, JAVA\}; \{C\#, VB.NET.\}; \{JAVA, VB.NET.\}; \{C\#\}; \{JAVA\}; \{VB.NET.\}; \emptyset\}$

4) A) a)  $C_v = \{b, c\}$     b)  $C_v = \{a, b, c, d\}$     c)  $C_v = \{a\}$     d)  $C_v = \{d\}$   
 e)  $C_v = \{d, e\}$     f)  $C_v = \{a, d, e\}$     g)  $C_v = \{a, d, e\}$     h)  $C_v = \{e\}$     i)  $C_v = \{e\}$



5) a)  $\forall x / x \in p(x) \Rightarrow x \in q(x)$     b<sub>1</sub>)  $V_v = 1$     b<sub>2</sub>)  $V_v = 0$     b<sub>3</sub>)  $V_v = 0$

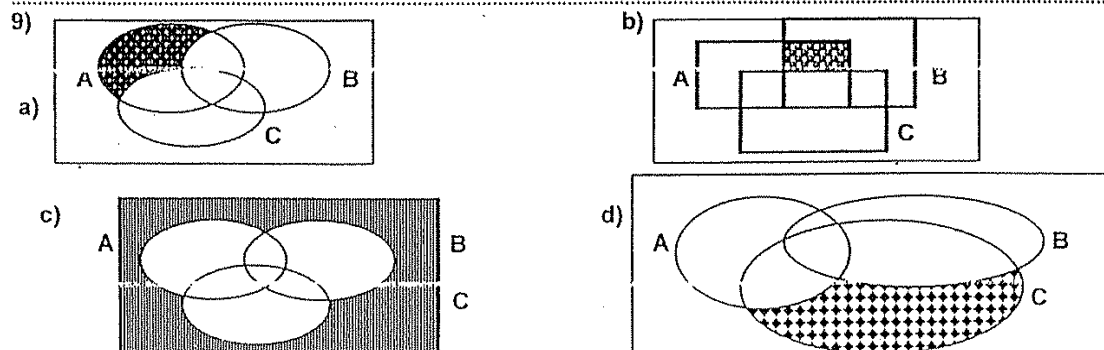
6) a)  $[A - (B \cup C)] \cup [(B \cap C) - A]$     b)  $(D \cap E) \cup (F - E)$

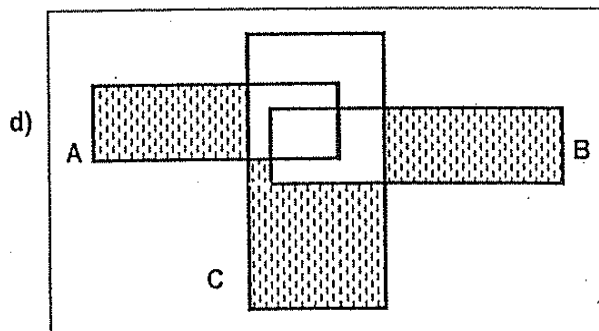
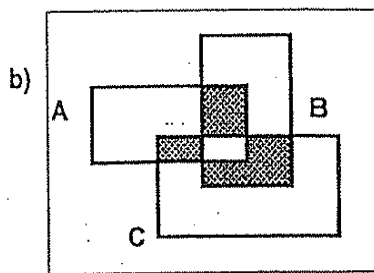
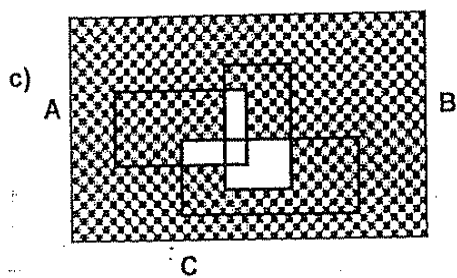
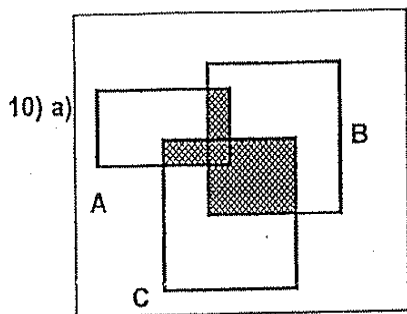
c)  $\overline{H \cap J \cap K}$     d)  $(P \cap Q \cap W) \cup (W - P)$

7) a)  $\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$     b)  $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

### PROBLEMAS DE CONTEO

8) a) Natalia    b) Natalia, Rita    c) Graciela, Fernando    d) Luis    e)  $\emptyset$





11) a) 15      b) 30

12) a) 98      b) 18      c) 52

13) a) 220      b) 62      c) 93

14) a) , b) , c) está resuelto

15) a) 48      b) 22      c) 98      d) 26

16) a) 48      b) 480      c) 6      d) 26

17) a) 106      b) 56

18) a) 20 %      b) 40 %

19) a) 48 %      b) 32 %

20) a) 0      b) 34

21) a) 3 %      b) 15 %      c) 2124

22) a) 4      b) 22      c) 20

23) a) 3      b) 11

24) a) 310      b) 0      25) a) 200      b) 50

26) 80

27) a) 50      b) 40      c) 20      d) 30      e) 20

28) a) 142      b) 58

29) a) 13      b) 30      c) 12

30) a) 20      b) 30

31) a) 18      b) 0



## Unidad 3. Matrices

Una matriz es un arreglo rectangular de elementos.  
El elemento  $a_{ij}$  de la matriz  $A$  ocupa la fila  $i$  y la columna  $j$  del arreglo.  
Se dice que una matriz con  $m$  filas y  $n$  columnas tiene el orden o el tamaño  $m \times n$ .

- a) Una matriz cuadrada tiene  $m = n$ .
- b) Un vector fila es una matriz con un renglón y  $n$  columnas.
- c) Un vector columna es una matriz con  $m$  filas y una columna.

1) Escriba las siguientes matrices definidas en forma explícita:

- a)  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4} / a_{ij} = 1 + j$
- b)  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / b_{ij} = (-1)^{i+j}$
- c)  $C \in \mathbb{R}^{4 \times 4} / c_{ij} = 1$  (si  $i + j$  es primo);  $c_{ij} = 0$  (si  $i + j$  no es primo)
- d)  $D \in \mathbb{R}^{n \times n} / d_{ij} = 1$  (si  $i = j$ );  $d_{ij} = 0$  (si  $i \neq j$ )

### SUMA DE MATRICES

La suma de matrices se define entre matrices que tienen el mismo número de renglones y de columnas (o sea del mismo tamaño:  $m \times n$ ). Matrices conformes.

Siendo:

$$A = [a_{ij}] \wedge B = [b_{ij}] \text{ y la operación: } A + B = C$$

Los elementos de la matriz  $C$  se obtienen haciendo:

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [c_{ij}]$$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+4 & 4+5 & -1+3 \\ 5+0 & 0+(-3) & -2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 2 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Sean las matrices de  $\mathbb{R}^{2 \times 3}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1/2 \\ \sqrt{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular:

- a)  $A + B$
- b)  $A - B$
- c)  $2A - 3B$
- d)  $\sqrt{2} A + 0B$

3) Hallar  $X \in \mathbb{R}^{2 \times 4} / A + X = B$  siendo:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

4) Calcular  $x, y, z$  para que las matrices  $A = [a_{ij}]$  y  $B = [b_{ij}]$  sean iguales.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & x & -1 \\ y & 5 & 2 \\ 4 & -4 & z \end{pmatrix}$$

## PRODUCTO DE MATRICES

Condición de existencia de producto:  $A \in \mathbb{R}^{m \times n} \wedge B \in \mathbb{R}^{n \times r}$

Si: ( la cantidad de columnas de A ) = ( la cantidad de filas de B )

Existe:  $A * B$  y su tamaño es:  $A * B \in \mathbb{R}^{m \times r}$

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & 5 \\ 8 & 0 & 12 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3/16 & 0 & -1/16 \\ -1/2 & 1 & -1/4 \\ -1/8 & 0 & 1/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 3/16 + 0 \cdot (-1/2) + 4 \cdot (-1/8) & 8 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 8 \cdot (-1/16) + 0 \cdot (-1/4) + 4 \cdot 1/8 \\ 6 \cdot 3/16 + 1 \cdot (-1/2) + 5 \cdot (-1/8) & 6 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 0 & 6 \cdot (-1/16) + 1 \cdot (-1/4) + 5 \cdot 1/8 \\ 8 \cdot 3/16 + 0 \cdot (-1/2) + 12 \cdot (-1/8) & 8 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 12 \cdot 0 & 8 \cdot (-1/16) + 0 \cdot (-1/4) + 12 \cdot 1/8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3/2 - 1/2 & 0 & -1/2 + 1/2 \\ 9/8 - 4/8 - 5/8 & 1 & -3/8 - 2/8 + 5/8 \\ 3/2 - 3/2 & 0 & -1/2 + 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5) Efectuar, si es posible, los siguientes productos:

a)

$$\begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

e)

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6) Siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Calcular  $A^2$  y  $A^3$

b) Dado  $P(x) = x^2 - 3x + 2 \cdot I$ , compruebe que:  $P(A) = A^2 - 3A + 2 \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Matriz identidad (I):**

se define con los elementos de la diagonal principal todos "1" y el resto "0"

Ejemplo:  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

## Unidad 3. Matrices. Respuestas

1) a)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$       b)  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$       c)  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$       d)  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

### SUMA DE MATRICES

2) a)  $A + B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \sqrt{2} & -1/2 \\ \sqrt{2} & 2 & & -1 \end{pmatrix}$       b)  $A - B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & \sqrt{2} + 1/2 \\ -\sqrt{2} & 4 & -1 \end{pmatrix}$

c)  $2A - 3B = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 2\sqrt{2} + 3/2 \\ -3\sqrt{2} & 9 & -2 \end{pmatrix}$       d)  $2A + 0B = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \\ 0 & 3\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

3)  $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & -6 \end{pmatrix}$       4)  $(x, y, z) = (-3, 0, 6)$

### PRODUCTO DE MATRICES

5) a)  $\begin{pmatrix} 13 & 35 & 18 \\ 20 & 26 & 20 \end{pmatrix}$       b)  $\begin{pmatrix} -1 & 58 \\ -8 & 15 \end{pmatrix}$       c)  $\begin{pmatrix} 19 & -17 & 34 \\ 8 & -12 & 20 \\ -8 & -11 & 7 \end{pmatrix}$       d)  $\begin{pmatrix} 7 & 16 \end{pmatrix}$       e) no existe

6) a)  $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$        $A^3 = \begin{pmatrix} -6 & -7 \\ 14 & 15 \end{pmatrix}$

## Unidad 4. Relaciones

Encontrar  $x$  ó  $y$  de manera que el enunciado sea verdadero.

- a)  $(x, 3) = (4, 3)$       b)  $(4x, 6) = (16, y)$       c)  $(3x + 1, 2) = (7, 2)$       d)  $(x^2, 5) = (49, y)$

Siendo  $A = \{p, q\}$  y  $B = \{4, 5, 6\}$  hallar:

- a)  $A \times B$       b)  $B \times A$       c)  $A^2$       d)  $B^2$

Un experimento de genética clasifica las moscas de la fruta de acuerdo con los dos siguientes criterios:

Género: masculino (M), femenino (F)

Alas extendidas: cortas (c), medianas (m), largas (l)

a) ¿Cuántas categorías hay en este esquema de clasificación?

b) Hacer una lista de todas las categorías de este esquema de clasificación.

Siendo  $A = \{a / a \text{ es un número real}\}$  y  $B = \{1, 2, 3\}$ .

Hacer un esquema de cada uno de los siguientes casos en el plano cartesiano.

- a)  $A \times B$       b)  $B \times A$

Siendo:  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$$A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$A_2 = \{5, 6, 7\}$$

$$A_3 = \{4, 5, 7, 9\}$$

$$A_4 = \{4, 8, 10\}$$

$$A_5 = \{8, 9, 10\}$$

$$A_6 = \{1, 2, 3, 6, 8, 10\}$$

Decir cuales de las siguientes son particiones de A. Justificar.

- a)  $\{A_1, A_2, A_5\}$       b)  $\{A_1, A_3, A_5\}$       c)  $\{A_3, A_6\}$       d)  $\{A_2, A_3, A_4\}$

Utilizar los conjuntos:

$$A = \{1, 2, 4\} \quad B = \{2, 5, 7\} \quad C = \{1, 3, 7\}$$

Para analizar si se cumple la siguiente igualdad:

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

Investigue que pasa en la unión.

Explique sus conclusiones.

**Relación:** Dados dos conjuntos A y B y una propiedad P, se llama relación al conjunto:

$$R = \{(x, y) \in A \times B / P(x, y)\}$$

**Interpretación:** De todos los pares ordenados de  $A \times B$ , tomo sólo los que cumplen la propiedad.

Si A tiene n elementos y B tiene m elementos. ¿Cuántas relaciones diferentes hay de A a B?

Dados los conjuntos  $A = \{a, b, c, d\}$  y  $B = \{1, 2, 3\}$

Se definen las relaciones  $R: A \rightarrow B$

I)  $R_1 = \{(a, 1); (a, 2); (a, 3)\}$

II)  $R_2 = \{(a, 1); (a, 2); (b, 1); (b, 2)\}$

III)  $R_3 = \{(a, 1); (b, 1); (c, 2); (d, 2)\}$

En cada caso indicar:

a) Dominio e imagen.

b) Su representación por tabla de doble entrada y diagramas de Venn.

c) Definir por extensión una relación  $R: B \rightarrow A$  tal que el dominio de la misma coincida con el conjunto de partida y la imagen con el conjunto de llegada.

Determinar, en cada caso, dominio, imagen, matriz y cuando  $A = B$  el dígrafo de la relación R.

a)  $A = \{a, b, c, d\}$        $B = \{1, 2, 3\}$

$$R: A \rightarrow B / R = \{(a, 1); (a, 2); (b, 1); (c, 2); (d, 1)\}$$

b)  $A = \{1, 2, 3, 4, 8\}$

$$R = \{(x, y) \in A^2 / x + y \leq 9\}$$

c)  $A = \{1, 2, 3, 4\}$   $B = \{1, 4, 6, 8, 9\}$

$$R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2\}$$

d)  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$$R = \{(a, b) \in A^2 \mid b < a\}$$

e)  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$

$$R = \{(x, y) \in A^2 \mid x - y < 0\}$$

- 10) Una línea aérea da servicio a cinco ciudades:  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ . La tabla muestra el costo (en dólares) del viaje desde  $C_i$  a  $C_j$ .

Hasta:	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$
Desde:					
$C_1$		140	100	150	200
$C_2$	190		200	160	220
$C_3$	110	180		190	250
$C_4$	190	200	120		150

Se define la siguiente relación  $R$  sobre el conjunto de las cinco ciudades:

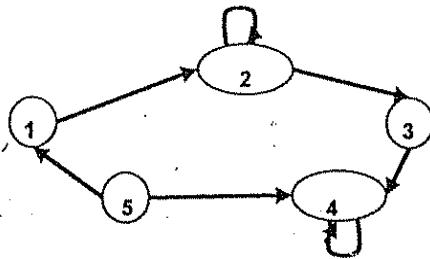
" $C_i R C_j$  si y sólo si el costo de ir de  $C_i$  a  $C_j$  es menor o igual a 180 dólares"

Determinar la relación  $R$  por extensión.

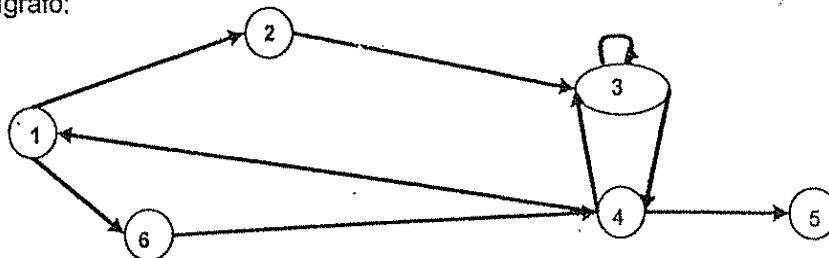
- 11) Dar por extensión la relación  $R$  definida en  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  y su dígrafo, siendo su matriz asociada:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 12) Dar por extensión la relación  $R$  y su matriz asociada, siendo su dígrafo:



- 13) Dado el siguiente dígrafo:



Indicar:

- Todas las trayectorias de longitud 2, que inicien en el vértice 2.
- Todas las trayectorias de longitud 3
- Un ciclo que comience en el vértice 6
- Todas las trayectorias de longitud 1

- 14) Dado el conjunto:  $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} : -3 < x \leq 2\}$  y la relación:  $R = \{(x, y) \in A^2 \mid x^2 - y \geq 2\}$

- Definir por extensión  $A$  y  $R$ .
- Determinar la matriz asociada y el dígrafo.
- Indicar dos trayectorias de longitud 4 que inicie en el vértice -2.
- Indicar un ciclo que comience en el vértice -1.

15) Determinar en cada relación definida en  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  si es reflexiva, arreflexiva, simétrica, asimétrica, antisimétrica o transitiva.

a)  $R = \{(1, 1); (1, 2); (2, 1); (2, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 3); (4, 4)\}$

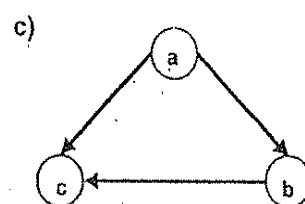
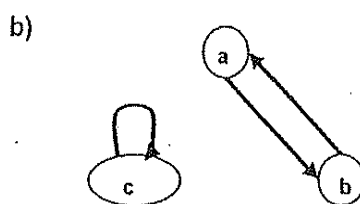
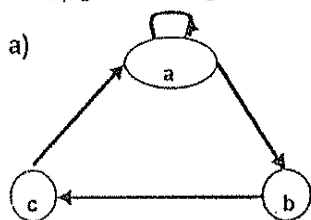
b)  $R = \{(1, 3); (1, 1); (3, 1); (1, 2); (3, 3); (4, 4)\}$

c)  $R = \{(1, 2); (1, 3); (3, 1); (1, 1); (3, 3); (3, 2); (1, 4); (4, 2); (3, 4)\}$

	a)	b)	c)
reflexiva			
irreflexiva			
simétrica			
asimétrica			
antisimétrica			
transitiva			

( completar con si √ no según corresponda )

16) Dados los siguientes dígrafos:



Analizar sus propiedades y clasificar si es posible.

	a)	b)	c)
reflexiva			
irreflexiva			
simétrica			
asimétrica			
antisimétrica			
transitiva			

( completar con si √ no según corresponda )

17) Para completar: ¿ qué características deben observarse en la matriz ? asociada a una relación que sea:

- a) reflexiva: .....
- b) Irreflexiva: .....
- c) simétrica: .....
- d) asimétrica: .....
- e) antisimétrica: .....
- f) transitiva: .....

18) Para completar: ¿ qué características deben observarse en el dígrafo ? asociado a una relación que sea:

- a) reflexiva: .....
- b) Irreflexiva: .....
- c) simétrica: .....
- d) asimétrica: .....
- e) antisimétrica: .....
- f) transitiva: .....

19) Escribir la matriz o el **dígrafo** que represente a una relación que resulte:

- a) Reflexiva pero no simétrica      b) Sólo transitiva  
c) Antisimétrica pero no reflexiva      d) Simétrica y no transitiva

Explicar el razonamiento.

**Relación de orden:** establecen jerarquías entre los elementos de un conjunto, pueden compararse.

Cumplen con ser: **reflexiva – antisimétrica – transitiva**

**Relación de equivalencia:** permite agrupar los elementos de un conjunto  $A$  en subconjuntos no vacíos del conjunto  $A$ , disjuntos, y tal que la unión resulta ser el conjunto  $A$ .  
(Estos subconjuntos se llaman **clases de equivalencia**).

Cumplen con ser: **reflexiva – simétrica – transitiva**

20) Analizar las propiedades y clasificar, si es posible, las relaciones  $R$  cuyas matrices asociadas son:

a)

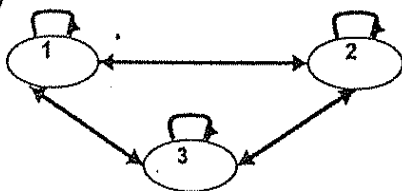
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

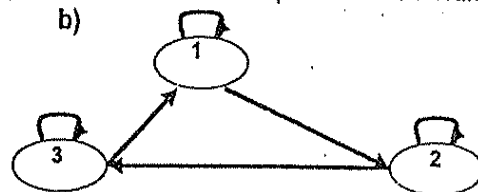
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

21) Determinar si la relación  $R$ , cuyo **dígrafo** se proporciona, es una **relación de equivalencia**. Justificar.

a)



b)



22) Siendo  $\{\{a, b, c\}, \{d, e, f\}\}$  una partición del conjunto  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$   
Determinar la relación de equivalencia correspondiente  $R$ .

23) Dado  $A = \{1, 2, 3, 4\}$

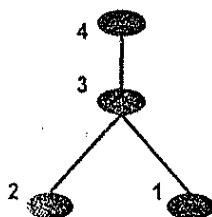
- a) analizar las propiedades de la relación:  
b) clasificar la relación si es posible

$$R = \{(1, 1); (1, 2); (2, 2); (2, 4); (1, 3); (3, 3); (3, 4); (1, 4); (4, 4)\}$$

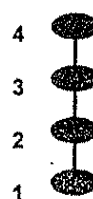
En caso de que resulte de orden parcial, determinar el **diagrama de Hasse**.

24) Escribir los pares ordenados en la relación determinada por el **diagrama de Hasse** sobre el conjunto  $A$ .

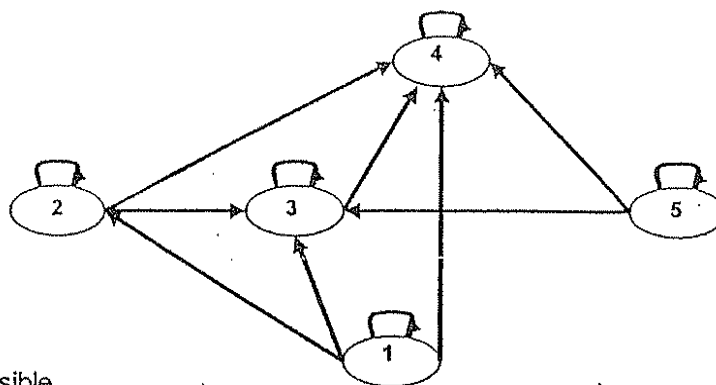
a)  $A = \{1, 2, 3, 4\}$



b)  $A = \{1, 2, 3, 4\}$



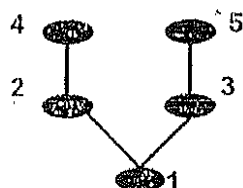
25) Dado el siguiente dígrafo:



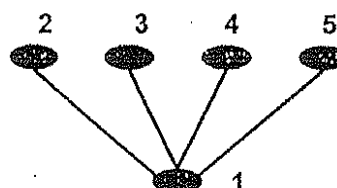
- Definir por extensión la relación.
- Hallar su matriz asociada.
- Analizar sus propiedades y clasificarla.
- Realizar el diagrama de Hasse, si es posible.

26) Determinar, en cada caso, las matrices de orden parcial con los diagramas de Hasse dados.

a)



b)



## PROBLEMAS

27) Sea  $(A, R)$

Siendo  $A = \{ \text{serpiente, pollito, canario, gato, león, hormiga, araña} \}$

Siendo  $R$ : "tiene menos patas que o es el mismo animal que"

Hacer el diagrama de Hasse.

28) Sea  $(B, R)$

Siendo  $B = \{ \text{Laura, Karina, Juan, Sebastián, Ariel} \}$

ALUMNO	Laura	Karina	Juan	Sebastián	Ariel
NOTA	7	9	8	7	10

Siendo  $R: x R y \Leftrightarrow "x \text{ sacó mayor nota que } y" \vee x = y$

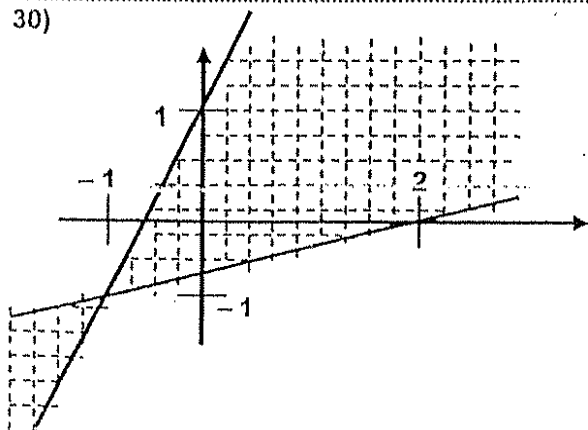
Hacer el diagrama de Hasse.

29) Sea  $A = \{1, 2, 4, 5, 9\}$

Se tiene en  $A$  la siguiente relación  $R = \{(1, 1), (2, 2), (4, 2), (2, 9), (9, 9)\}$

Se pide agregar a  $R$  la menor cantidad posible de pares ordenados para que resulte una relación de equivalencia en  $A$ .

30)



Si se considera la siguiente relación definida en  $R$  a través de su gráfica, decir si resulta:

reflexiva  
simétrica  
antisimétrica  
transitiva

(se sugiere utilizar argumentos de tipo gráfico)

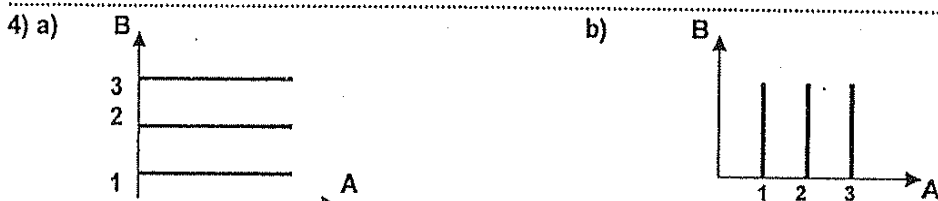


## Unidad 4. Relaciones. Respuestas

1) a)  $x = 4$       b)  $x = 4, y = 6$       c)  $x = 2$       d)  $x = 7 \vee x = -7 \wedge y = 5$

2) a)  $(p, 4); (p, 5); (p, 6); (q, 4); (q, 5); (q, 6)$   
 b)  $(4, p); (4, q); (5, p); (5, q); (6, p); (6, q)$   
 c)  $(p, p); (p, q); (q, p); (q, q)$   
 d)  $(4, 4); (4, 5); (4, 6); (5, 4); (5, 5); (5, 6); (6, 4); (6, 5); (6, 6)$

3) a) 6 categorías      b)  $G \times A = \{(M, c); (M, m); (M, l); (F, c); (F, m); (F, l)\}$



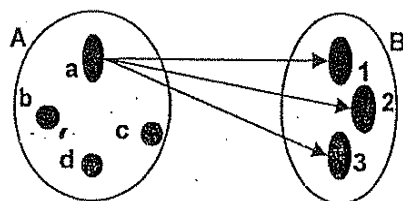
5) a) si      b) no      c) si      d) no

6) Conclusión: el producto cartesiano es distributivo en la unión y en la intersección      7)  $2^{nm}$

8) I) a)  $D_R = \{a\}$        $I_R = \{1; 2; 3\}$

b)

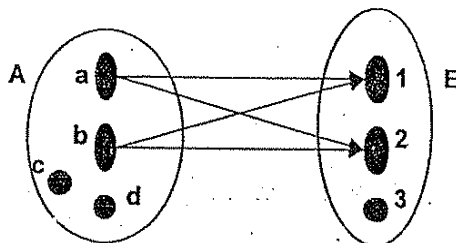
	B	1	2	3
A				
a	1	1	1	
b	0	0	0	
c	0	0	0	
d	0	0	0	



II) a)  $D_R = \{a; b\}$        $I_R = \{1; 2\}$

b)

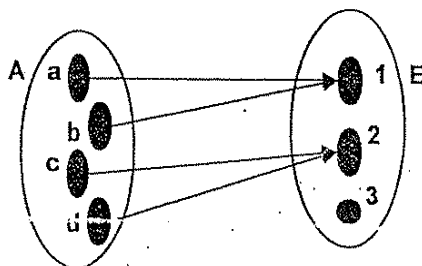
	B	1	2	3
A				
a	1	1	0	
b	1	1	0	
c	0	0	0	
d	0	0	0	



III) a)  $D_R = \{a; b; c; d\}$        $I_R = \{1; 2\}$

b)

	B	1	2	3
A				
a	1	0	0	
b	1	0	0	
c	0	1	0	
d	0	1	0	



9) a)

$D_R = \{a; b; c; d\}$

$I_R = \{1; 2\}$

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)  $D_R = I_R = \{1; 2; 3; 4; 8\}$   $M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

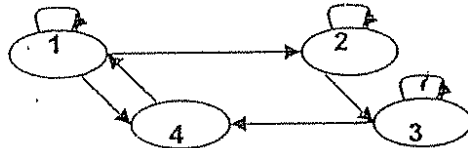
c)  $D_R = \{1; 2; 3\}$   $I_R = \{1; 4; 9\}$   $M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d)  $D_R = \{3; 5; 7; 9\}$   $I_R = \{1; 3; 5; 7\}$   $M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

e)  $D_R = \{1; 2; 3\}$   $I_R = \{2; 3; 4\}$   $M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

10)  $R = \{(C_1, C_2); (C_1, C_3); (C_1, C_4); (C_2, C_4); (C_3, C_1); (C_3, C_2); (C_4, C_3); (C_4, C_5)\}$

11)  $R = \{(1, 1); (1, 2); (1, 4); (2, 2); (2, 3); (3, 3); (3, 4); (4, 1)\}$



12)  $R = \{(1, 2); (2, 2); (2, 3); (3, 4); (4, 4); (5, 1); (5, 4)\}$

$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

13)a)

b)

1-2-3-3	2-3-3-3	3-3-3-3	4-1-2-3	6-4-1-2
1-2-3-4	2-3-3-4	3-3-3-4	4-1-6-4	6-4-1-6
1-6-4-1	2-3-4-1	3-3-4-1	4-3-3-3	6-4-3-3
1-6-4-3	2-3-4-3	3-3-4-3	4-3-3-4	6-4-3-4
1-6-4-5	2-3-4-5	3-3-4-5	4-3-4-1	
		3-4-1-2	4-3-4-3	
		3-4-1-6	4-3-4-5	
		3-4-3-3		
		3-4-3-4		

c)

d)

1-2	2-3	3-3	4-1	6-4
1-6		3-4	4-3	
			4-5	

14) a)  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

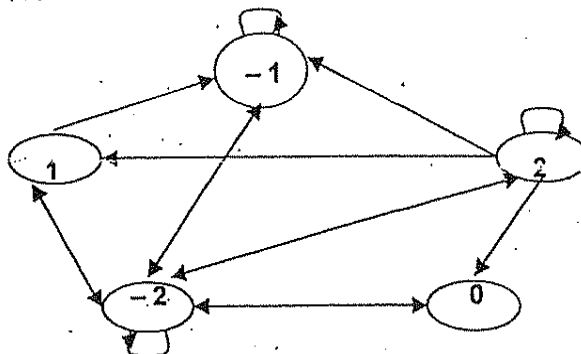
$R = \{(-2, -2); (-2, -1); (-2, 0); (-2, 1); (-2, 2); (-1, -2); (-1, -1); (0, -2); (1, -2); (1, -1); (2, -2); (2, -1); (2, 0); (2, 1); (2, 2)\}$

b) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c)  $-2, -2, -1, -1, -2$

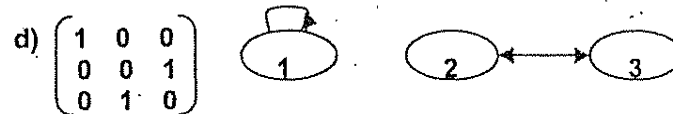
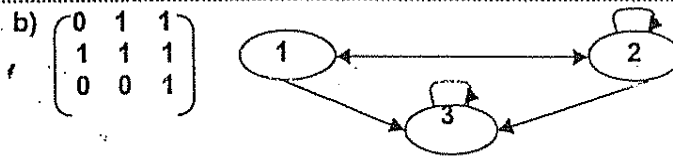
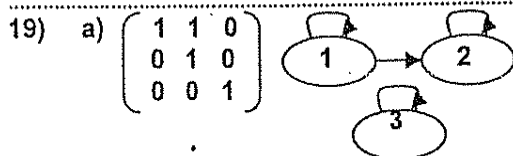
$-2, 1, -2, 0, -2$

d)  $-1, -2, -1$



	15)			16)		
	a)	b)	c)	a)	b)	c)
Reflexiva	si	no	no	no	no	no
Arreflexiva	no	no	no	no	no	si
Simétrica	si	no	no	no	si	no
Asimétrica	no	no	no	no	no	si
Antisimétrica	no	no	no	si	no	si
Transitiva	si	no	si	no	no	si

17)  $\wedge$  18) Ver teoría



20)

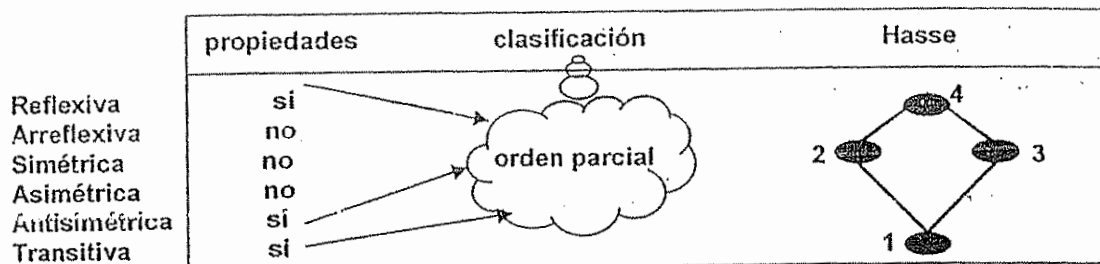
	a)	b)	clasificación
Reflexiva	no	si	equivalencia
Arreflexiva	si	no	
Simétrica	si	si	
Asimétrica	no	no	
Antisimétrica	no	no	
Transitiva	no	si	

21)

	b)	a)	clasificación
Reflexiva	si	si	equivalencia
Arreflexiva	no	no	
Simétrica	no	si	
Asimétrica	no	no	
Antisimétrica	si	no	
Transitiva	no	si	

22)  $R = \{(a, a); (a, b); (a, c); (b, a); (b, b); (b, c); (c, a); (c, b); (c, c); (d, d); (d, e); (d, f); (e, d); (e, e); (e, f); (f, d); (f, e); (f, f)\}$

23)



24) a)  $R = \{(1, 1); (1, 3); (1, 4); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 3); (3, 4); (4, 4)\}$

b)  $R = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 3); (3, 4); (4, 4)\}$

25) a)  $R = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 3); (3, 4); (4, 4); (5, 3); (5, 4); (5, 5)\}$

b) matriz

$$\begin{pmatrix}
 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 1
 \end{pmatrix}$$

Reflexiva  
Arreflexiva  
Simétrica  
Asimétrica  
Antisimétrica  
Transitiva

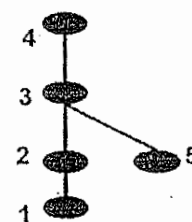
c) propiedades

si  
no  
no  
no  
si  
si

clasificación

orden parcial

d) Hasse



26)

a)

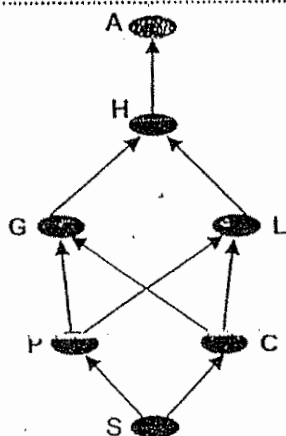
$$M_R = \begin{pmatrix}
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix}$$

b)

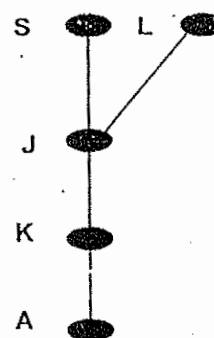
$$M_R = \begin{pmatrix}
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix}$$

## PROBLEMAS

27)



28)



29)  $R = \{(1, 1), (2, 2), (4, 2), (9, 9), (2, 9), (9, 9), (4, 4), (5, 5), (2, 4), (9, 2), (4, 9), (9, 4)\}$

30) Reflexiva (si) Simétrica (no) Antisimétrica (no) Transitiva (no)

## UNIDAD 5: SISTEMA BINARIO

- 1) Dados los sigs. números decimales pasarlos a **Sistema Binario**.  
a) 55    b) 48    c) 204    d) 10,4    e) 83,45    f) 2131,48    g) 376,4303
- 2) Dados los sigs. números binarios pasarlos a **Sistema Decimal**.  
a) 1011    b) 11101    c) 110011,11    d) 101010,01    e) 10000001,111    f) 1111111,11111
- 3) Expresar los sigs. números en potencias de **10**.  
a) 10    b) 1000    c) 0,01    d) 100000    e) 0,1    f) 10000000
- 4)Cuál es el **mayor número decimal** que se puede representar con **4 dígitos decimales**.
- 5)Cuál será el **mayor número decimal** que se puede representar con.  
a) 2 Bits    b) 7 Bits    c) 10 Bits
- 6) Cuántos bits necesitamos **en Sistema Binario** para representar los sigs. números decimales.  
a) 17    b) 81    c) 35    d) 32
- 7) Realizar las sigs. sumas en el Sistema Binario.  
a)  $11 + 01$     b)  $10 + 10$     c)  $101 + 11$     d)  $111 + 110$     e)  $1001 + 101$     f)  $101011,101 + 111100,01$
- 8) Realizar las sig. **restas** en el Sistema Binario.  
a)  $101 - 100$     b)  $110 - 101$     c)  $1110 - 11$     d)  $1100 - 1001$     e)  $11010 - 10111$
- 9) Realizar las sig. **multiplicaciones** en el Sistema Binario.  
a)  $11 \cdot 11$     b)  $100 \cdot 10$     c)  $1001 \cdot 110$     d)  $1101 \cdot 1101$     e)  $1110 \cdot 1101$
- 10) Realizar las sig. **divisiones** en el Sistema Binario.  
a)  $1101 \div 10$     b)  $10111 \div 101$     c)  $10001 \div 11$     d)  $1000 \div 11$     e)  $101101 \div 110$
- 11) Calcular la resta binaria  $110101 - 100110$ .  
Posteriormente convertir al sistema decimal los datos y el resultado.  
Comprobar que la resta es correcta.
- 12) Convertir a binario y calcular la división  $333 / 42$ .

## Unidad 5. Sistema Binario. Respuestas

- 1)  
a) 110111    b) 110000    c) 11001100    d)  $1010,0110$   
e) 10100111,0111001100110  
f) 100001010011,0000110001001.....  
g) 101111000,0110111000101000001001.....

**2)**

a) 11      b) 29      c) 51,75      d) 42,25      e) 65,875      f) 127,96875

**3)**

a)  $10^1$       b)  $10^3$       c)  $10^{-2}$       d)  $10^5$       e)  $10^{-1}$       f)  $10^7$

**4)** 9999

**5)**

a) 3      b) 127      c) 1023

**6)**

a) 5      b) 7      c) 6      d) 6

**7)**

a) 100      b) 100      c) 1000      d) 1101      e) 1110      f) 101110,101

**8)**

a) 1      b) 1      c) 1011      d) 11      e) 11

**9)**

a) 1001      b) 1000      c) 110110      d) 10101001      e) 10110110

**10)**

a) 110 , Resto 1      b) 100 , Resto 11      c) 101 , Resto 10      d) 10 , Resto 10  
e) 111 , Resto 11

**11)**

Resta 1111

**12)**

Resultado División 111 , Resto 100111

## Unidad 6. Grafos y arboles

### EJEMPLO – DEFINICIONES

**Red:** conjunto de nodos y conjunto de arcos

**Red dirigida:** la que tiene todos los arcos dirigidos

**Ruta:** secuencia de arcos distintos que unen dos nodos ( no importa la dirección del flujo de cada arco )

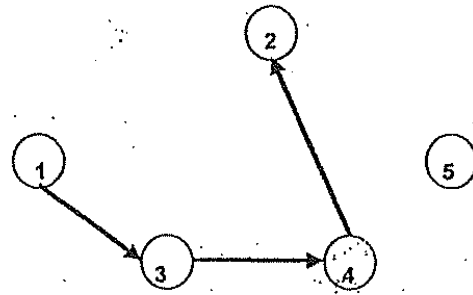
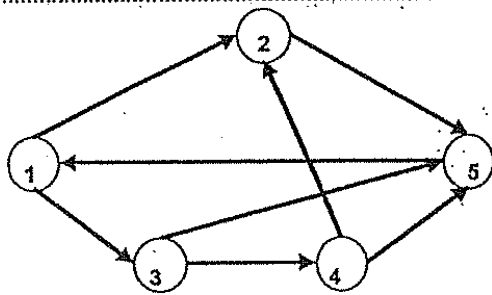
**Lazo o ciclo:** ruta que conecta un nodo con si mismo ( círculo )

**Lazo dirigido o circuito:** círculo en el que todos los arcos están orientados en la misma dirección

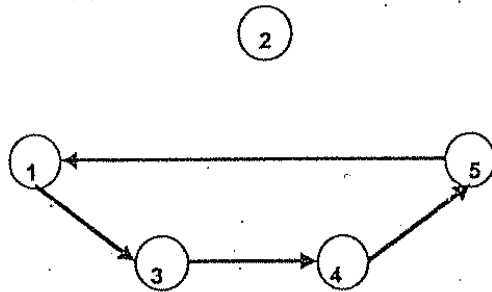
**Red conectada:** dos nodos distintos están unidos por lo menos por una ruta

**Árbol:** red conectada que puede incluir sólo un subconjunto de todos los nodos de la red

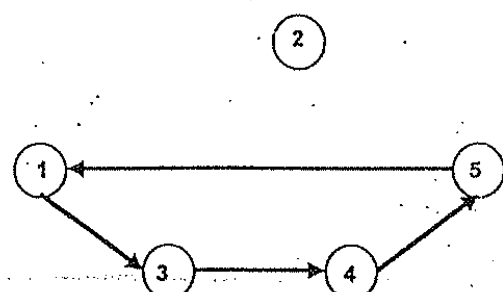
**Árbol de expansión:** une todos los nodos de la red sin permitir ningún lazo



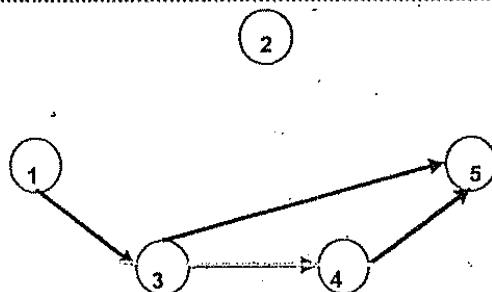
Ruta: 1 – 3 – 4 – 2



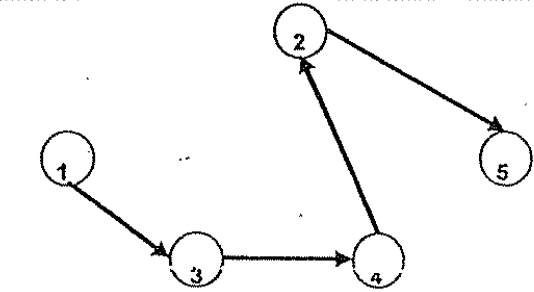
Lazo: 1 – 5 – 4 – 3 – 1



Lazo dirigido ( circuito ): 1 – 3 – 4 – 5 – 1



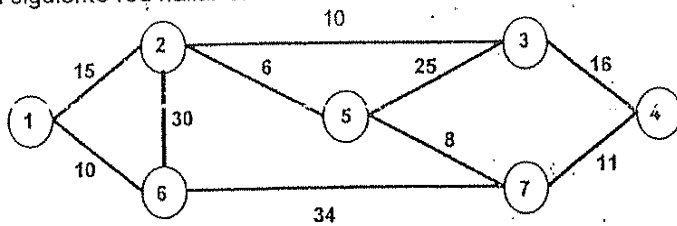
Árbol: { 1 – 3 , 3 – 4 , 3 – 5 , 4 – 5 }



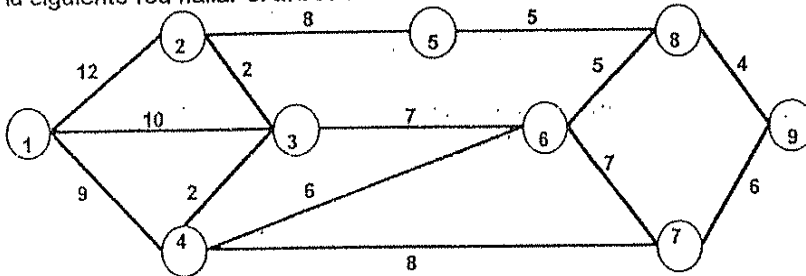
Árbol de expansión: { 1 – 3 , 3 – 4 , 4 – 2 , 2 – 5 }

# REDES – Arbol de extensión mínima

1) Para la siguiente red hallar el árbol de extensión mínima.



2) Para la siguiente red hallar el árbol de extensión mínima.



3) Una zona de 7 chacras debe ser conectada mediante una **ruta** asfaltada al **menor costo** posible.

Los datos indican en Km. las distancias entre chacras, considerando el índice de la fila y de la columna el número de la chacra.

Se da una matriz simétrica, por lo que sólo se escribió el triángulo superior.

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 3 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ & & 0 & 5 & 0 & 2 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 3 & 0 \\ & & & & 0 & 4 & 7 \\ & & & & & 0 & 2 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Es necesario pavimentar el tramo 1 – 2 ya que en el medio se halla la estación de bomberos y se sabe que la ruta entre las chacras 6 – 7 ya está pavimentada.

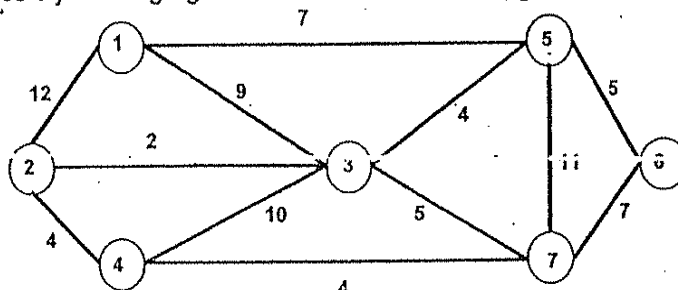
Determinar el costo de la **ruta de extensión mínima** que vincule todas las chacras con las condiciones dadas, sabiendo que el costo del Km. es de \$ 100.000

4) Cablevisión acaba de obtener la aprobación para ofrecer su servicio al barrio de Versalles.

Los nodos representan los puntos de distribución que deben llevar las líneas primarias de cables de la compañía. Los arcos indican las cuadras que hay entre los puntos de distribución.

a) Determinar la solución que permitirá a Cablevisión llegar a todos los puntos de distribución con una **longitud mínima** de la línea de cable primario.

b) Si entre los nodos 1 y 6 se agrega otro camino de 8 cuadras, ¿se modifica en algo la respuesta?





- 5) Ocho chacras de las cercanías de Mar del Plata se hallan conectadas por calles de tierra.

El intendente desea pavimentar la **menor cantidad** de calles de tal modo que se enlacen todas las chacras, pero desea que la calle E - H sea una de las asfaltadas, ya que allí se encuentra una sala de primeros auxilios.

¿Cuál sería el trayecto de pavimento?

Distancias:

$$A - B = 11 \text{ Km}$$

$$B - C = 13 \text{ Km}$$

$$A - D = 12 \text{ Km}$$

$$A - E = 14 \text{ Km}$$

$$B - D = 9 \text{ Km}$$

$$C - D = 18 \text{ Km}$$

$$D - G = 17 \text{ Km}$$

$$C - G = 12 \text{ Km}$$

$$E - F = 10 \text{ Km}$$

$$F - G = 11 \text{ Km}$$

$$G - H = 8 \text{ Km}$$

$$F - H = 10 \text{ Km}$$

$$E - H = 22 \text{ Km}$$

- 6) La zona cercana a la desembocadura del Salado tiene ocho esteros que deben ser comunicados mediante canales. Suponiendo que todos los canales tienen la misma sección, 3 m de ancho y 2 m de profundidad, Determinar que **cantidad mínima** de tierra se debe mover para que los esteros queden comunicados.

Distancias:

$$A - B = 11 \text{ Km}$$

$$B - C = 13 \text{ Km}$$

$$A - D = 12 \text{ Km}$$

$$A - E = 14 \text{ Km}$$

$$B - D = 9 \text{ Km}$$

$$C - D = 18 \text{ Km}$$

$$D - G = 17 \text{ Km}$$

$$C - G = 12 \text{ Km}$$

$$E - F = 10 \text{ Km}$$

$$F - G = 11 \text{ Km}$$

$$G - H = 8 \text{ Km}$$

$$F - H = 10 \text{ Km}$$

$$E - H = 22 \text{ Km}$$

- 7) La siguiente tabla muestra la distancia entre cada dos ciudades:

	Bloom	Evans	Fort	Gary	Indian	Southb
Evans	119					
Fort	174	290				
Gary			132			
Indian	51			153		
Southb		303	79	58	140	
Haute	58	113			71	196

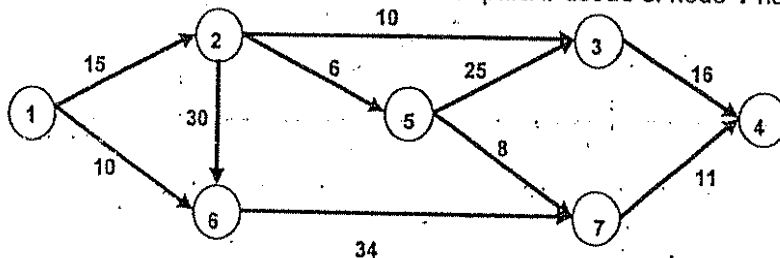
Se piensa construir un sistema de carreteras que comunique las siete ciudades.

Determinar que carreteras deben construirse para que el **costo de construcción sea mínimo**.

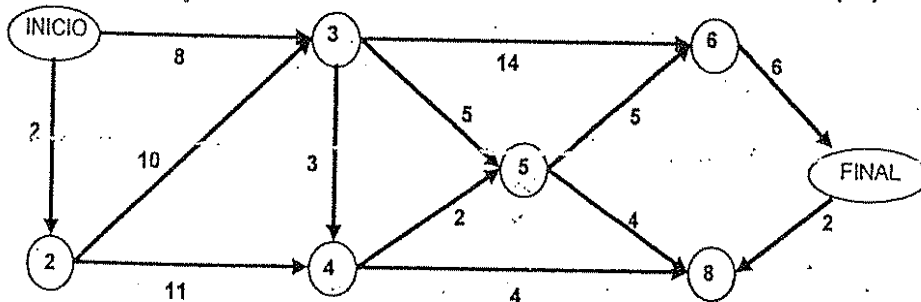
( Se supone que el costo de un Km. es el mínimo sin importar cuales son las ciudades ).

REDES - Ruta mas corta

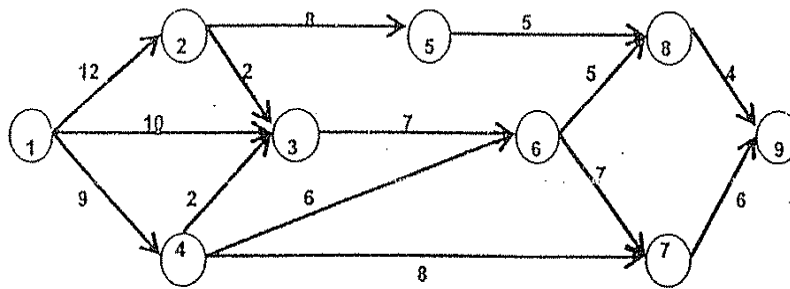
- 8) En la siguiente red hallar la **ruta mas corta** para ir desde el nodo 1 hasta el nodo 4.



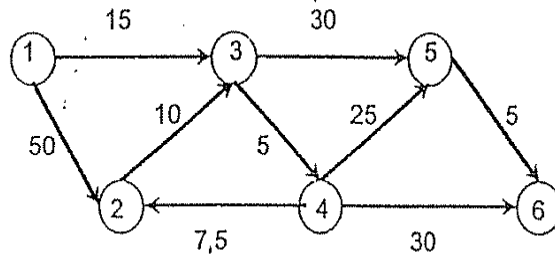
- 9) Encontrar la **ruta más corta** desde el nodo inicio ( 1 ) hasta el nodo final ( 7 ) correspondiente a la siguiente red.



10) En la siguiente red hallar la ruta mas corta para ir desde el nodo 1 hasta el nodo 7.



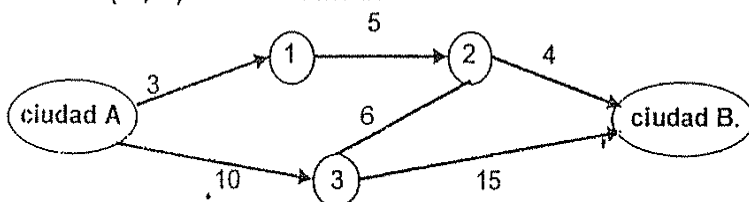
11) En la siguiente red hallar la ruta mas corta para ir desde el nodo 1 hasta el nodo 6. ¿ Es ruta única ?.



12) Para la red de la figura encuentre la ruta mas corta entre la ciudad A y la ciudad B.

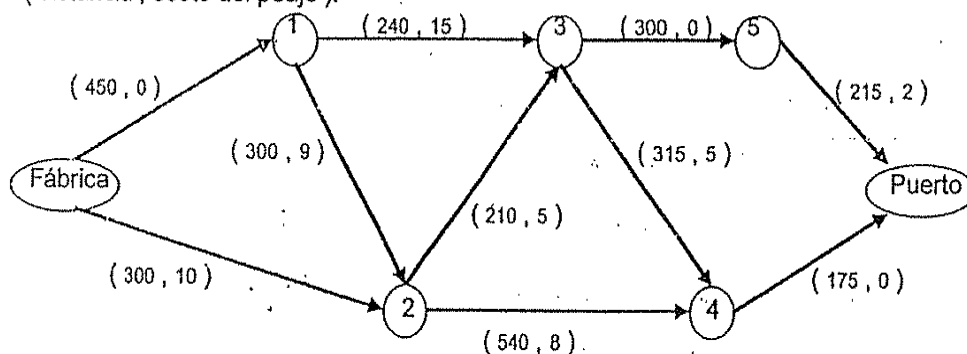
Las distancias están dadas en kilómetros.

El arco ( 2 , 3 ) es bi direccional.



13) La división transporte, de una fábrica, desea saber que ruta le conviene usar para llevar sus productos al puerto donde van a ser embarcados.

Para tomar la decisión se construye una red de los posibles caminos, en kilómetros, conjuntamente con el valor del peaje en cada tramo, en pesos; o sea que en cada arco de la red está indicado como par ordenado: ( distancia , costo del peaje ).



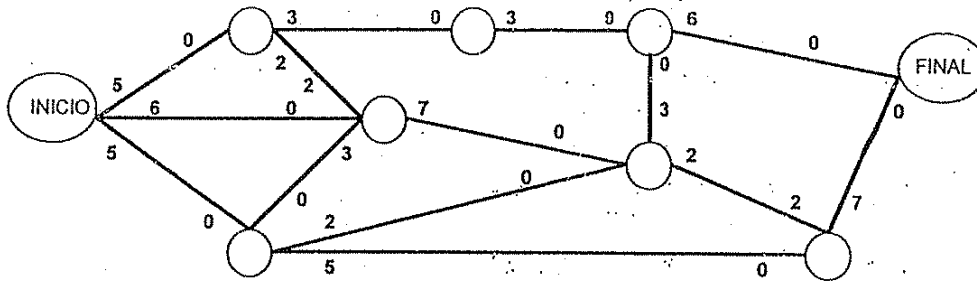
a) ¿Cuál es la ruta más conveniente desde la distancia recorrida ?.

b) ¿Cuál es la ruta más conveniente desde el costo del peaje ?.

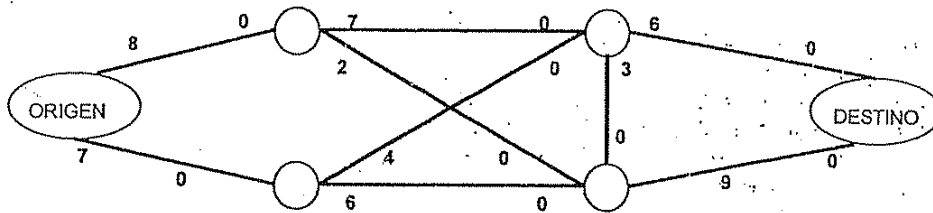
c) Dar el par ordenado en cada caso.

d) Si usted tuviera que decidir ¿ qué opción elige ?.

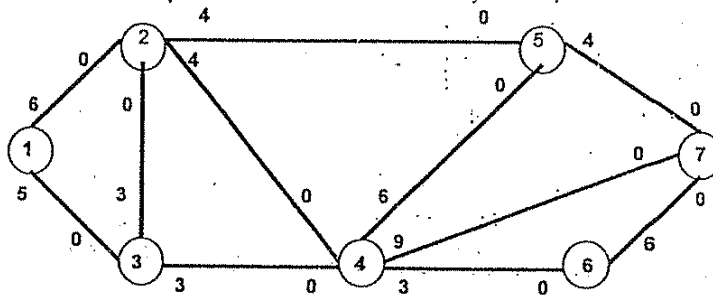
14) Encontrar el flujo máximo desde el nodo INICIO hasta el nodo FINAL, en la siguiente red:



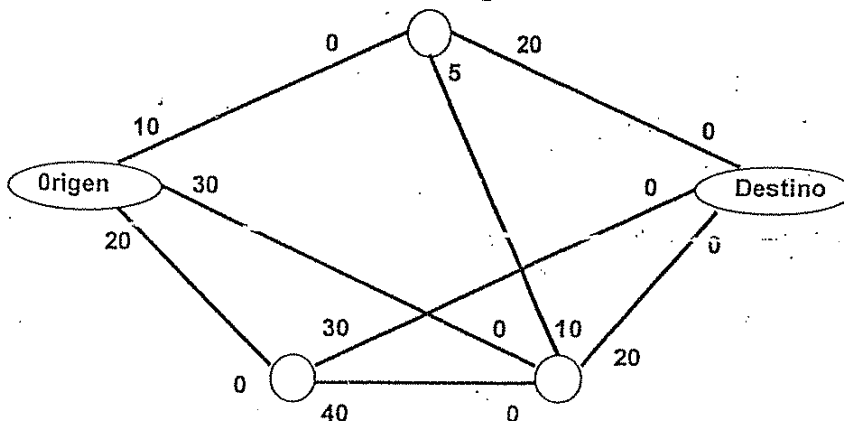
15) Para el sistema de red de carreteras que se muestra en la figura determinar el flujo máximo de vehículos por hora. Se sabe que cada unidad representa 1000 vehículos por hora.



16) La siguiente red representa una serie de autopistas interconectadas. En la misma se muestran las distintas capacidades de flujo de cada una de ellas. Determinar el flujo máximo desde el punto 1 al 7 durante un día, suponiendo que las unidades detalladas marcan un flujo de 1000 vehículos por hora.

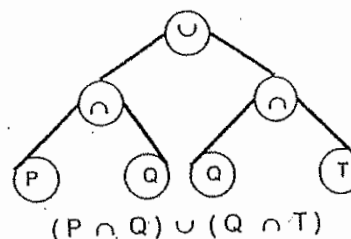
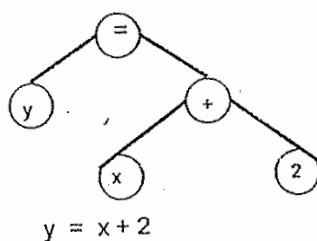
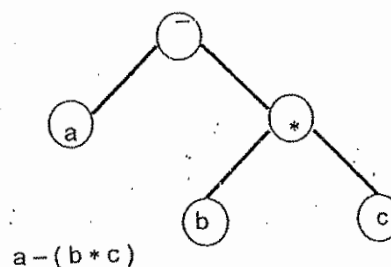
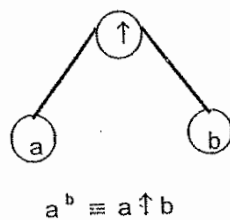
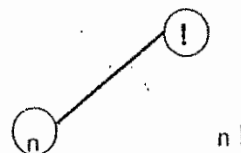
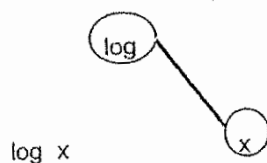
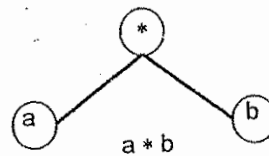
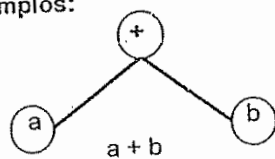


17) Encontrar el flujo máximo desde el nodo Origen hasta el nodo Destino en la siguiente red:



## ÁRBOLES – Representación de expresiones algebraicas

Cada operación binaria es representada por un subárbol, cuya raíz contiene la operación aritmética (operador), a izquierda y derecha están los operandos.  
Ejemplos:



1) Representar en un árbol binario las siguientes expresiones algebraicas:

a)  $(x+1)^4 * (y - \ln 2)$

c)  $\{[(A+B)/C] - (C+B)\} * [A * (B-C)]$

e)  $a^2 - b^2 = (a+b) * (a-b)$

g)  $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

i)  $\begin{cases} 5 * x + 5 * y = 9 \\ -5 * x + 9 * y = -9 \end{cases}$

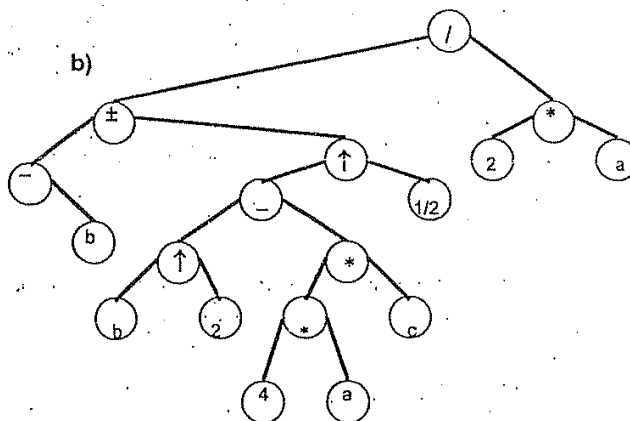
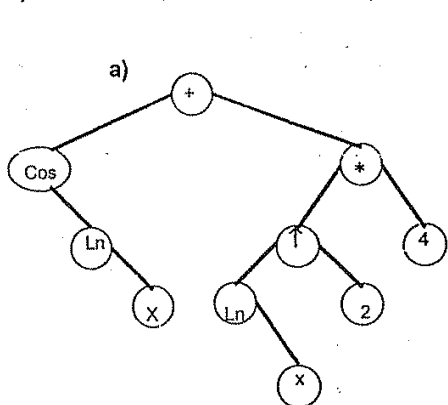
b)  $[-A + B^2] - [C * (A-B)^2 + 2A]$

d)  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

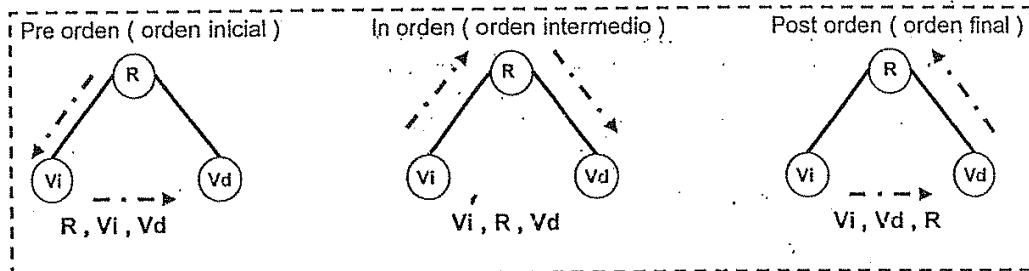
f)  $\cos(x+2)^5 * \log(2x-3)^3$

h)  $x=4 \wedge x=-1/2$

2) Dados los siguientes árboles binarios escribir la **expresión algebraica** correspondiente:



### ÁRBOLES – Recorrido



3) Efectuar los recorridos (pre orden, in orden, post orden) de los árboles binarios obtenidos a partir de las expresiones algebraicas del ejercicio 1).

4) Siendo:  $A = 1$ ,  $B = 2$ ,  $C = 3$ ,  $D = 4$

Calcular el valor numérico de las siguientes expresiones dadas en post orden.

a)  $A B + C -$

b)  $A B C + -$

c)  $A D B C D * - + *$

d)  $A B A B * + * D *$

e)  $A B C * * A B C + + -$

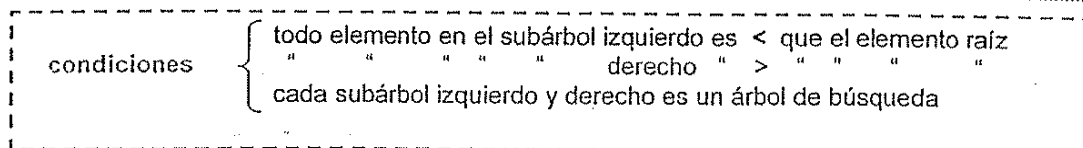
f)  $A B + C D * A A / - - B *$

5) Dada la siguiente escritura de un árbol según post orden:

$$3 \times 2 - 5 \uparrow * x 1 + ! *$$

Se pide dibujar el árbol en cuestión y luego dar su escritura según in orden.

### ÁRBOLES – Representación de árbol binario de búsqueda



6) El código de ciertos artículos está expresado en el siguiente conjunto de datos:

{ 30, 25, 98, 67, 31, 4, 22, 90, 100 }

a) construir el árbol binario de búsqueda.

b) ¿cómo insertaría en el árbol el código: 45?

c) recorrer el árbol en las tres formas canónicas (preorden – inorden – postorden).

d) ¿cuál es el recorrido conveniente para mostrar en pantalla los códigos ordenados en forma creciente?

7) Para ingeniosos ó ingeniosas

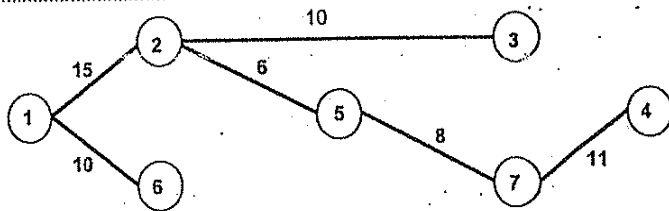
Ordenar alfabéticamente el siguiente conjunto de mujeres utilizando el árbol de búsqueda.

Mujeres = { Elena, Beatriz, Ana, Hilda, Graciela, Daniela; Carla; Florencia }.

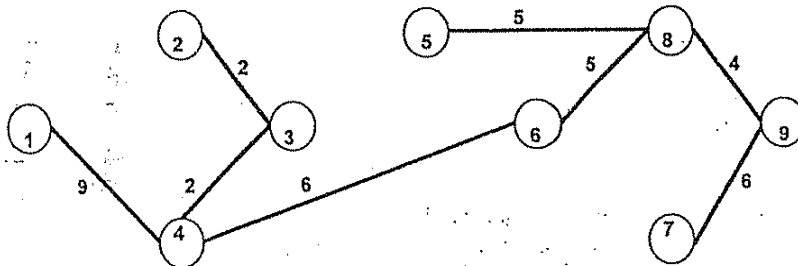
## Unidad 6. Árboles y grafos. Respuestas

REDES - Árbol de extensión mínima

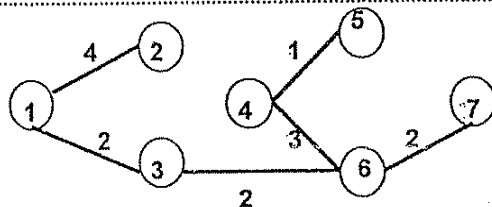
1)



2)

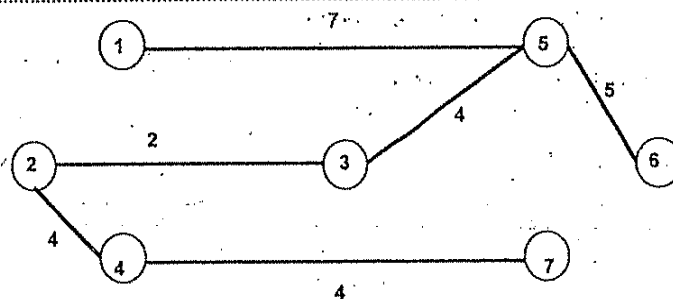


3)



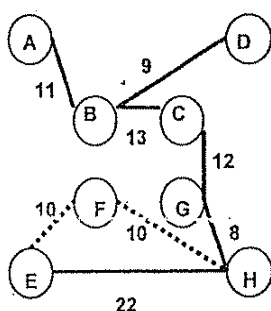
Costo = \$ 1 200 000

4)

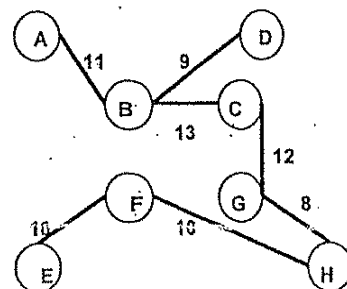


a) Longitud = 26  
b) No modifica

5)

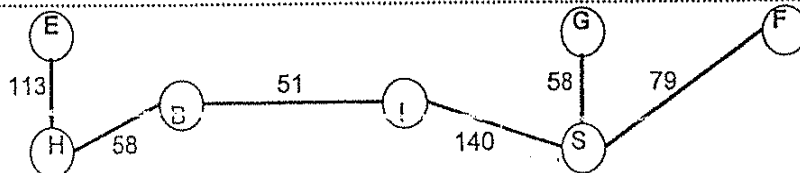


6)



Volumen de tierra = 438 000 m<sup>3</sup>

7)



### REDES - Ruta mas corta

- 8)  $1-2-5-7-4 = 40$     9) Inicio  $-3-4-5-6$  - Final  $= 24$      $\vee$  Inicio  $-3-5-6$  - Final  $= 24$   
 10)  $1-4-7 = 17$     11) 50. No es ruta única.    12) ciudad A  $-1-2$  - ciudad B distancia: 12 Km.  
 13) a) F  $-2-3-4-P$     b) F  $-1-2-3-5-P$     c) (1000Km, \$ 20)    (1475 Km, \$ 16)

### REDES - Flujo máximo

- 14) Flujo máximo  $= 13$     15) Flujo máximo de vehículos / hora  $= 15.000$  vehículos  
 16) Flujo máximo / día  $= 264.000$  vehículos    17) Flujo máximo  $= 60$

### ÁRBOLES - Representación de expresiones algebraicas

- 1) a) b) c) d) e) f) g) h) i)

2)

a)  $[\cos \ln(x)] + [\ln^2(x) * 4]$

b)  $-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} / 2a$

### ÁRBOLES - Recorrido

3)

	pre orden	in orden	post orden
a)	$* \uparrow + x 1 4 - y \ln 2$	$x + 1 \uparrow 4 y - \ln 2$	$x.1 + 4 \uparrow y 2 \ln - *$
b)	$- + - A \uparrow B 2 + * C \uparrow - A B 2 * 2 A$	$- A + B \uparrow 2 - C * A - B \uparrow 2 + 2 * A$	$A - B 2 \uparrow + C A B - 2 \uparrow * 2 A * + -$
c)	$* - / + A B C + C B * A - B C$	$A + B / C - C + B * A * B - C$	$A B + C / C B + - A B C - * *$
d)			
e)			
f)			
g)			
h)			
i)			

- 4) a) 0    b) -4    c) -6    d) 16    e) 0    f) -16

- 5) la lectura en in orden es:  $3(x-2)^5 * (x+1)!$

### ÁRBOLES - Representación de árbol binario de búsqueda

6)

- c) preorden: 30, 25, 4, 22, 98, 67, 31, 45, 90, 100  
 inorden: 4, 22, 25, 30, 31, 45, 67, 90, 98, 100  
 postorden: 22, 4, 25, 45, 31, 90, 67, 100, 98, 30  
 d) inorden

- 7) Mujeres = { Ana, Beatriz, Carla, Daniela, Elena, Florencia, Graciela, Hilda }.