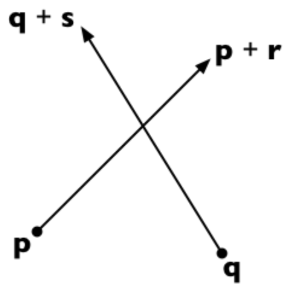
Intersección de Rayos y Segmentos

Intersección entre Segmentos

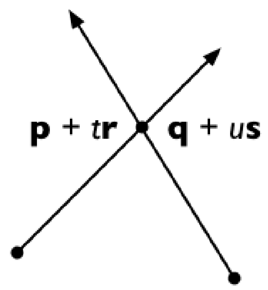
https://stackoverflow.com/questions/563198/how-do-you-detect-where-two-line-segments-intersect

La solución al problema emplea el producto cruz. Se define en 2D como $v \times w = v_x w_y - v_y w_x$

Suponemos que los dos segmentos van desde **p** a **p+r** y desde **q** a **q+s**. De esta forma, todo punto perteneciente al primer segmento se puede expresar como **p +** *t* **r** (para el parámetro *t* escalar) y cualquier punto perteneciente al segundo segmento como **q** + *u* **s** (para el parámetro *u* escalar).



Ambos segmentos se intersecan si podemos encontrar *t* y *u* tal que:
$\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{r} = \boldsymbol{q} + u\boldsymbol{s}$



Cruzamos ambos lados con **s**, obteniendo:

$$(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{s} = (\boldsymbol{q} + u\boldsymbol{s}) \times \boldsymbol{s}$$

Como $\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{s} = 0$, simplificamos:

$$t(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s}) = (\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}) \times \boldsymbol{s}$$

Resolviendo para *t*:

$$t = \frac{(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}) \times \boldsymbol{s}}{\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s}}$$

De la misma forma, podemos resolver para *u*:

$$(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{r} = (\boldsymbol{q} + u\boldsymbol{s}) \times \boldsymbol{r}$$
$$u(\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) \times \boldsymbol{r}$$

$$u = \frac{(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) \times \boldsymbol{r}}{\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}}$$

Para reducir el número de pasos, es conveniente rescribir de la siguiente forma (recordando que $s \times r = -r \times s$):

$$u = \frac{(q - p) \times r}{r \times s}$$

Ahora existe cuatro casos:

1. Si $r \times s = 0$ y $(q - p) \times r = 0$, entonces ambos segmentos son colineares. No los vamos a tener en consideración

2. Si $r \times s = 0$ y $(q - p) \times r \neq 0$, entonces son paralelos y no se están intersecando.

3. Si $r \times s \neq 0$, $0 \leq t \leq 1$ y $0 \leq u \leq 1$, los segmentos se encuentran en el punto $\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{r} = \boldsymbol{q} + u\boldsymbol{s}$.

4. Si no, no son paralelos, pero no se intersecan

Intersección Segmento vs Polígono

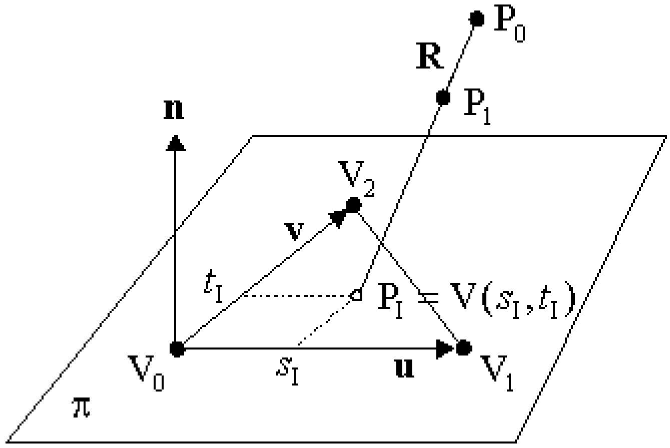
https://web.archive.org/web/20090618111606/http://www.cppblog.com:80/zmj/archive/2008/08/26/60039.html

Considere un segmento **S** desde P_0 a P_1, y un triángulo **T** con vértices V_0, V_1 y V_2. El triángulo **T** yace dentro del plano **π** a través de V_0 con vector normal $\boldsymbol{n} = (V_1 - V_0) \times (V_2 - V_0)$. Para obtener la intersección de **S** y **T**, primero debemos determinar la intersección de **S** y **π**. Si no intersecan, entonces el segmento tampoco lo hace con **T**. Sin embargo, si intersecan en el punto $P_I = P(r_I)$, debemos determinar si dicho punto está dentro del triángulo **T** para considerarla una intersección válida.

El método propuesto en el artículo para detectar la inclusión de un punto dentro de un triángulo 3D, emplea computaciones 3D directamente evitando las proyecciones en un plano 2D. Emplean la ecuación paramétrica de **π** relativa a **T**, y computa las **coordenadas paramétricas** de la intersección del punto en el plano. La ecuación paramétrica del plano está dada por:

$$\mathrm{V}(s,t) = \mathrm{V}_0 + s(\mathrm{V}_1 - \mathrm{V}_0) + t(\mathrm{V}_2 - \mathrm{V}_0) = \mathrm{V}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$$

Donde *s* y *t* son números reales, $\boldsymbol{u} = (V_1 - V_0)$ y $\boldsymbol{v} = (V_2 - V_0)$ son los vectores borde de **T**. Un punto P = V(s,t) está en el triángulo **T** donde *s* >= 0, *t* >= 0 y *s* + *t* <= 1. Entonces, dado P_I, uno solo tiene que encontrar sus coordenadas (s_I, t_I), y luego verificar las inequidades para verificar su inclusión en **T**. Además, un punto P = V(s,t) está en el borde de **T** si se cumple alguna de las condiciones: *s* = 0, *t* = 0 o *s* + *t* = 1 es verdadera (cada condición corresponde a un eje). Adicionalmente, los tres vértices están dados por: V_0 = V(0,0), V_1 = V(1,0) y V_2 = V(0,1).



Para resolver para s_I y t_I definimos una generalización 3D del **producto "perp-dot"** de Hill [Hill, 1994]. Para un plano 2D embebido **π** con vector normal **n**, y cualquier vector **a** dentro del plano (tal que **a** satisface $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{a} = 0$) se define ***"operador perp generalizado** en **π**"*** a $\boldsymbol{a}^{\perp} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{a}$. Entonces $\boldsymbol{a}^{\perp}$ es otro vector dentro del plano **π** (ya que $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{a}^{\perp} = 0$), y es perpendicular a **a** (ya que $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}^{\perp} = 0$). Además, este operador perp es lineal sobre vectores dentro de **π**, esto es: $(A\boldsymbol{a} + B\boldsymbol{b})^{\perp} = A\boldsymbol{a}^{\perp} + B\boldsymbol{b}^{\perp}$ donde **a** y **b** son vectores dentro de **π**, y A y B son escalares. Notar que si **π** está en el plano 2D XY (z=0) con **n =** (0,0,1), entonces esto es exactamente igual al operador perp 2D dado en [Hill, 1994].

Ahora podemos usar este operador perp generalizado para resolver la ecuación paramétrica del plano para el punto de intersección P_I. Definimos, $\boldsymbol{w} = (P_I - V_0)$ otro vector dentro de **π**. Entonces queremos resolver la ecuación **w** = *s***u** + *t***v** para *s* y *t*. Tomamos el producto punto en ambos lados con $\boldsymbol{v}^{\perp}$ para obtener $\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}^{\perp} = s\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}^{\perp} + t\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}^{\perp} = s\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}^{\perp}$ y resolver para s_I. De forma similar, tomando el producto punto con $\boldsymbol{u}^{\perp}$, obtenemos: $\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u}^{\perp} = s\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}^{\perp} + t\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}^{\perp} = t\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}^{\perp}$ y resolviendo para t_I. Obtenemos:

$$s_I = \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}^{\perp}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^{\perp}} = \frac{\mathbf{w} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{v})}{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{v})} \qquad t_I = \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}^{\perp}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}^{\perp}} = \frac{\mathbf{w} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{u})}{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{u})}$$

Los denominadores son distintos de cero cuando el triángulo **T** no está degenerado (esto es, tiene un área distinta de cero). Cuando **T** está degenerado, es o un segmento o un punto, y en cualquier caso no define inequívocamente un plano y el vector normal computado es (0,0,0). Así que este caso se debe tratar separadamente como una intersección segmento-segmento 3D.

En conjunto, usamos 3 productos cruzados lo que implica mucho cómputo. De todas formas, para tres vectores cualesquiera **a b c**, la siguiente identidad mantiene la asociación izquierda con el producto cruz: $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$. [**Nota**: el producto cruz no es asociativo, y por eso existe una identidad diferente (pero similar) para la asociación derecha]. Aplicando la identidad de asociación izquierda resulta en las simplificaciones:

$$\mathbf{u}^{\perp} = \mathbf{n} \times \mathbf{u} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}$$

$$\mathbf{v}^{\perp} = \mathbf{n} \times \mathbf{v} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}$$

Y ahora podemos computar s_I y t_I usando solo productos punto como:

$$s_I = \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})}{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})} \quad t_I = \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})}{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}$$

Con 5 productos punto distintos. Reorganizamos los términos para que los dos denominadores sean iguales y sólo se deba calcular una única vez.