

Colección de Ejercicios Propuestos y sus resoluciones

Sebastian Elizalde
Padrón Nro. 96092
sebi.elizalde@gmail.com

Julian Ferres
Padrón Nro. 101483
julianferres@gmail.com

2do. Cuatrimestre de 2018

Aprendizaje Estadístico - Sebastian Grymberg
Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires

Contents

1	Introducción	3
2	Lista de enunciados	3
2.1	Clase 1	3
2.1.1	Ejercicio 1	3
2.1.2	Ejercicio 2: Esperanza condicional	3
2.1.3	Ejercicio 3 (STOP) (SIMULACIÓN)	3
2.1.4	Ejercicio 4 (no entregable)	3
2.2	Clase 2	4
2.2.1	Ejercicio 5	4
2.2.2	Ejercicio 6	4
2.3	Clase 3	4
2.3.1	Ejercicio 7	4
2.3.2	Ejercicio 8 (STOP)(SIMULACIÓN)	4
2.4	Clase 4	5
2.4.1	Ejercicio 9: KNN	5
2.4.2	Ejercicio 9 bis	6
2.4.3	Ejercicio 10	6
2.5	Clase 5	6
2.5.1	Ejercicio 11	6
2.5.2	Ejercicio 12	6
2.5.3	Ejercicio 13	6
2.5.4	Ejercicio 14 (STOP)	7
2.6	Clase 6	7
2.6.1	Ejercicio 15	7
2.6.2	Ejercicio 16	7
2.6.3	Ejercicio 17	7
2.6.4	Ejercicio 18	7
3	Conclusiones	8

1 Introducción

2 Lista de enunciados

2.1 Clase 1

2.1.1 Ejercicio 1

Sea una función convexa $f(x)$ no negativa, x_0, x_1, x_2 tales que:

- $x_1 \leq x_0 \leq x_2$
- $x_0 = p_1 x_1 + p_2 x_2$
- $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 = 1$

Y sea una recta g tal que:

- $g(x_1) = f(x_1)$
- $g(x_2) = f(x_2)$

Quedan dudas de cuál de los siguientes era el planteo: Comprobar la siguiente desigualdad: $f(p_1 x_1 + p_2 x_2) \leq p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2)$

Probar que: $g(x_0) = p_1 g(x_1) + p_2 g(x_2)$

2.1.2 Ejercicio 2: Esperanza condicional

Utilizando que $E[m(x)f(x)] = E[Yf(x)]$ y $m(x) = E[Y|X = x]$

Demostrar que vale: $E[\Phi(x)Y|X] = \Phi(x)E[Y|X]$

2.1.3 Ejercicio 3 (STOP) (SIMULACIÓN)

Sea $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ truncada al intervalo $[-1, 1]$

Imagine $m(x) = E[Y|X = x]$ como:

$$m(x) := \begin{cases} \frac{(x+2)^2}{2} & \text{si } -1 \leq x < -0.5 \\ \frac{x}{2} + 0.875 & \text{si } -0.5 \leq x \leq 0 \\ -5(x-0.2)^2 + 1.075 & \text{si } 0 < x \leq 0.5 \\ x + 0.125 & \text{si } 0.5 \leq x < 1 \end{cases}$$

Dado un x , la distribución condicional de $Y - m(x)$ es $\mathcal{N}(0, \sigma^2(x))$

Con $\sigma(x) = 0.2 - 0.1 \cos(2x)$

Se pide simular 200 puntos (X, Y) , y graficarlos en un plano.

Además, se piden los 200 pares ordenados en cuestión, para hacer análisis posteriores.

2.1.4 Ejercicio 4 (no entregable)

Dado el problema de decisión introducido en el ‘Diseño del receptor de una comunicación binaria’, verificar que:

$$\delta(r) = \mathbb{1}\{P(S = 1|R = r) > P(S = 0|R = r)\}$$

maximiza:

$$P(S = \delta(r)) = P(S = \delta(0)|R = 0)P(R = 0) + P(S = \delta(1)|R = 1)P(R = 1)$$

2.2 Clase 2

2.2.1 Ejercicio 5

Terminar la cuenta:

$$P(X, Y) = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} xdx$$

2.2.2 Ejercicio 6

Sean T, F y E exponenciales de intensidad 1 y tenemos que

$$Y = \mathbb{1}\{T + F + E < 7\}$$

Se tenía que E era inobservable. Y se concluyó que:

$$g^*(T, F) = \mathbb{1}\{T + F < 7 - \ln 2\}$$

Se pide calcular el error:

$$L^* = P(g * (T, F) \neq Y)$$

2.3 Clase 3

2.3.1 Ejercicio 7

Se quería acotar:

$$E[|\eta^*(x) - \eta(x)|] < \epsilon$$

Para $\epsilon > 0$ existe una función η_ϵ uniformemente continua a valores en el intervalo $[0, 1]$ sobre un conjunto compacto C que se anula fuera de C , y que tiene la siguiente propiedad:

$$E[|\eta_\epsilon(x) - \eta(x)|] < \epsilon$$

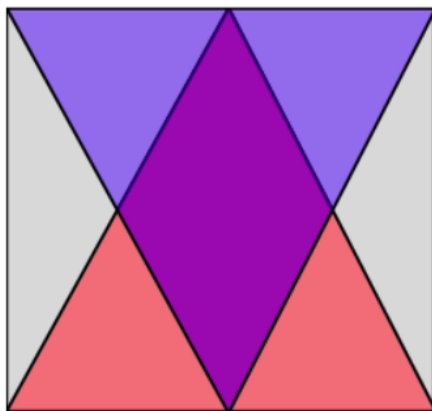
Por la desigualdad triangular:

$$E[|\eta^*(x) - \eta(x)|] \leq E[|\eta^*(x) - \eta_\epsilon^*(x)|] + E[|\eta_\epsilon^*(x) - \eta_\epsilon(x)|] + E[|\eta_\epsilon(x) - \eta(x)|]$$

En clase se acotaron tanto el tercer término como el segundo del segundo miembro de la desigualdad, y el ejercicio es entender por qué el primer término está acotado por el tercero.

2.3.2 Ejercicio 8 (STOP)(SIMULACIÓN)

Dado el siguiente diagrama:



Sean:

X una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el triángulo **azul**.

Y una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el triángulo **rojo**.

Z se define como: $Z = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y$

Se pide:

1. Generar muestras de X y de Y para aprender.
2. Generar muestras a clasificar uniformes sobre el cuadrado completo.
3. Construir una regla del histograma y clasificar las muestras de 2. según lo aprendido en 1. .
4. Graficar los resultados.

2.4 Clase 4

2.4.1 Ejercicio 9: KNN

Se pide simular dos normales bivariadas, ambas con matriz de covarianza $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, pero una centrada en $(-1, 0)$, y la otra en $(1, 0)$.

Se pide:

1. Generar muestras de $N = 100, 1000, \dots$, otros valores. Estas dos serán las clases en las que clasificar los puntos.
2. Generar puntos con una distribución uniforme en $[-4, 4] \times [-4, 4]$.
3. Clasificar los puntos de la uniforme usando KNN , con $K = 1, 3$ y 13 , utilizando las clases del primer ítem.
4. Graficar los resultados.

2.4.2 Ejercicio 9 bis

“Redactar una carilla que contenga la información relevante sobre la distribución normal multivariada. Llevar ejemplos, y mostrar como cambia el gráfico al variar la matriz de covarianza.”

2.4.3 Ejercicio 10

Demostrar que $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^+$:

$$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

Sugerencia: usar Cauchy-Schwarz / Jensen.

2.5 Clase 5**2.5.1 Ejercicio 11**

Dadas las desigualdades:

$$P(S_n - E[S_n] \geq \epsilon) \leq e^{-2\epsilon^2 / \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}$$

$$P(S_n - E[S_n] \leq -\epsilon) \leq e^{-2\epsilon^2 / \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}$$

Probar que se cumple la siguiente desigualdad:

$$P(|S_n - E[S_n]| \leq -\epsilon) \leq 2e^{-2\epsilon^2 / \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}$$

Sugerencia: Usar que $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

2.5.2 Ejercicio 12

En clase se demostró la primer desigualdad de la hipotesis del ejercicio anterior. Se pide como ejercicio demostrar la segunda desigualdad de la hipotesis.

2.5.3 Ejercicio 13

Dada la función:

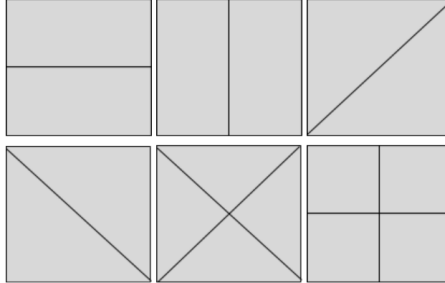
$$\Phi(u) = \ln pe^u + 1 - p - pu$$

Mostrar que:

- $\Phi(0) = 0$
- $\Phi'(0) = 0$

2.5.4 Ejercicio 14 (STOP)

Dados los siguientes clasificadores por particiones:



Elegir cuál es el mejor para las clases y los puntos generados en el ejercicio 8.

2.6 Clase 6

2.6.1 Ejercicio 15

Demostrar que la siguiente secuencia constituye una serie convergente:

$$a_n = 8(n+1)e^{-n\epsilon^2/32}$$

Y generalizar viendo que $\forall \lambda > 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-\lambda n} < \infty$$

(Sugerencia: Usar que $\int_0^{\infty} xe^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2}$)

2.6.2 Ejercicio 16

Sea la familia de intervalos:

$$A' = \{(a, b) : a < b\}$$

Luego de calcular $N_{A'}(z_1, z_2) = |\{\emptyset, \{z_1\}, \{z_2\}, \{z_1, z_2\}\}| = 4$ en clase, se pide calcular:

1. $N_{A'}(z_1, z_2, z_3)$
2. $N_{A'}(z_1, z_2, \dots, z_n)$

2.6.3 Ejercicio 17

Leer el capítulo 14 del libro “A Probabilistic Theory of Pattern Recognition” y hacer los tres ejercicios de cálculo de dimensión Vapnik-Chervonenkis.

2.6.4 Ejercicio 18

Luego de la demostración de los caballos, guitarras, La Pampa y la felicidad de Hoeffding, demostrar Glivenko-Cantelli. Aparentemente, la demostración es parecida a Vapnik-Chervonenkis (la hicimos en clase), pero menos general.

3 Conclusiones

References

[1]