EstimacionRegresion

December 26, 2018

1 Ejercicio 3 - Simulación de distribuciones condicionadas

1.0.1 Julian Ferres - Nro.Padrón 101483

1.1 Enunciado:

Sea $X \sim N(0,1)$ truncada al intervalo $[-1,1]$

Imagine $m(x) = E[Y|X = x]$ como:

$$m(x) := \begin{cases} \frac{(x+2)^2}{2} & \text{si } si - 1 \leq x < -0.5 \\ \frac{x}{2} + 0.875 & \text{si } -0.5 \leq x \leq 0 \\ -5(x-0.2)^2 + 1.075 & \text{si } 0 < x \leq 0.5 \\ x + 0.125 & \text{si } 0.5 \leq x < 1 \end{cases} \tag{1}$$

Dado un x, la distribución condicional de $Y - m(x)$ es $N(0, \sigma^2(x))$,
con $\sigma(x) = 0.2 - 0.1 * \cos(2x)$

- Se pide simular 200 puntos (X, Y), y graficarlos en un plano. Además, vamos a necesitar Los 200 pares ordenados en cuestión, para hacer análisis posteriores
- Reconstruir $m(x)$ con los 200 puntos, para eso:

Realizar una partición de $[-1,1]$ en intervalos de longitud h y en cada intervalo encontrar el polinomio f de grado M que minimice el error cuadratico medio

$$\frac{1}{n} \sum |f(X_i) - Y_i|^2$$

Usar:

1. $h = 0.5$, $M = 1$
2. $h = 0.1$, $M = 1$
3. $h = 0.25$, $M = 2$
4. $h = 0.5$, $M = 2$

1.2 Solución:

Importo todas las librerias e inicializo funciones

```
In [1]: import matplotlib.pyplot as plt
        import pandas as pd
        import numpy as np
        from math import cos, pi
        from scipy.stats import truncnorm
```

```
In [2]: m1 = lambda x: (x+2)**2/2
        m2 = lambda x: x/2 + 0.875
        m3 = lambda x: -5*(x-0.2)**2 + 1.075
        m4 = lambda x: x + 0.125
```

```
In [3]: def m(x):
            if -1 <= x < -0.5:
                return m1(x)
            if -0.5 <= x < 0:
                return m2(x)
            if 0 <= x < 0.5:
                return m3(x)
            if 0.5 <= x < 1:
                return m4(x)

        m = np.vectorize(m)
```

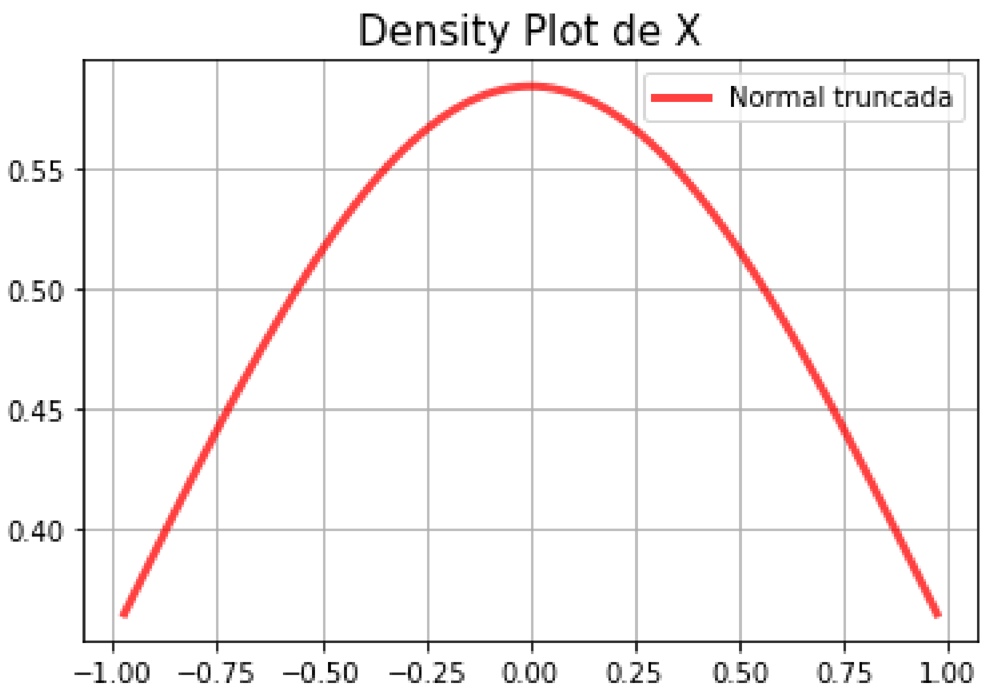
```
In [4]: #Me genero 1000 valores entre -1 y 1 para graficar m(x) 'suave'
        x_0 = np.linspace(-1,1,1000)
        y_0 = m(x_0)
```

Normal truncada

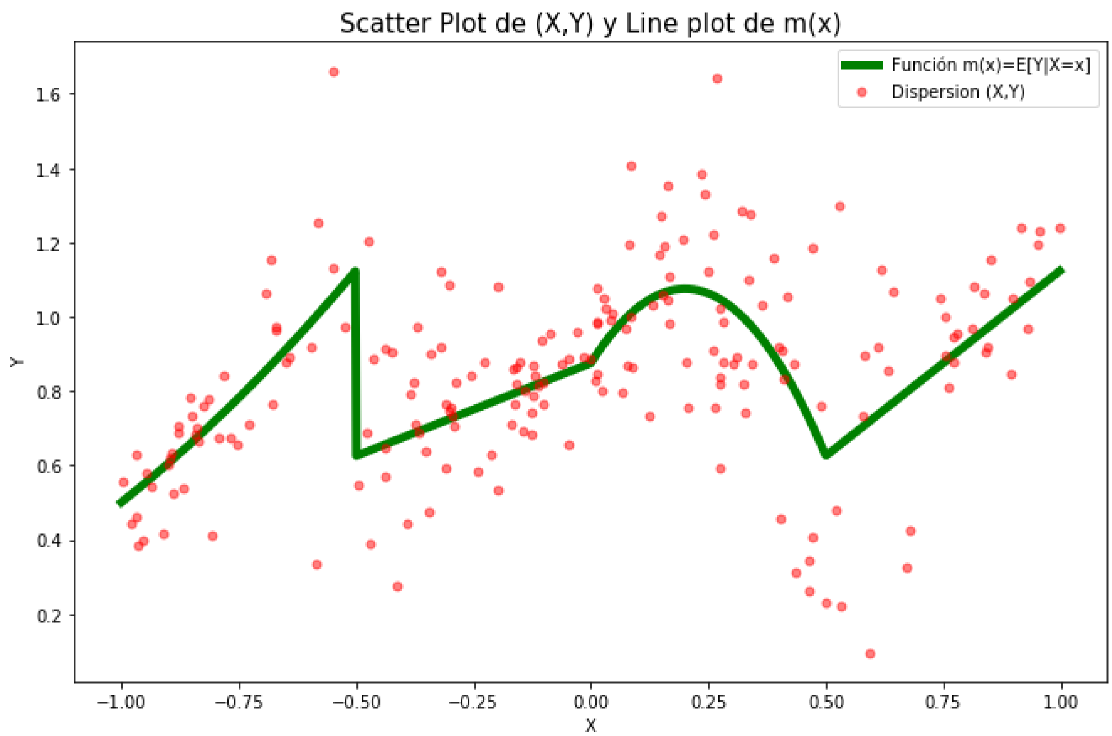
```
In [5]: a , b = -1 , 1 #Limites de la normal truncada
```

```
In [6]: #Genero 200 cuantiles de la normal truncada
        x1 = np.linspace(truncnorm.ppf(0.01, a, b),
                        truncnorm.ppf(0.99, a, b), 200)
```

```
In [6]: plt.plot(x1, truncnorm.pdf(x1, a, b),
                'r-', lw=3, alpha=0.75, label='Normal truncada')
        plt.title("Density Plot de X",fontsize='15')
        plt.legend(loc='best', frameon= True)
        plt.grid()
```




```
In [7]: x1 = truncnorm.rvs(a, b, size=200)
        #Me genero la muestra de distribucion X

In [8]: sigma = np.vectorize(lambda x : 0.2 - 0.1 * cos(2*pi*x))
        normal = np.vectorize(np.random.normal)

        y1 = normal( m(x1),sigma(x1))

In [9]: fig, ax = plt.subplots(figsize=(11,7))
        plt.plot(x_0, y_0, 'g-', linewidth = 5, label = 'Función m(x)=E[Y|X=x]')
        plt.legend(loc='best', frameon= True)

        plt.plot(x1, y1, 'ro' ,markersize= 5, alpha = 0.5 ,label = 'Dispersion (X,Y)')
        plt.legend(loc='best', frameon= True)

        plt.title("Scatter Plot de (X,Y) y Line plot de m(x)", fontsize='15')
        plt.xlabel('X')
        plt.ylabel('Y')

        plt.show()
```



La muestra de los 200 pares con distribución (X,Y) se encuentra en la variable output

1.2.1 Dejo los 200 puntos en el archivo simulacion.csv

```
In [32]: d = {'X': x1 , 'Y': y1 }
         output = pd.DataFrame(data=d)

In [33]: output.to_csv("simulacion.csv" , index = False)
```

1.3 Reconstruyo la regresión

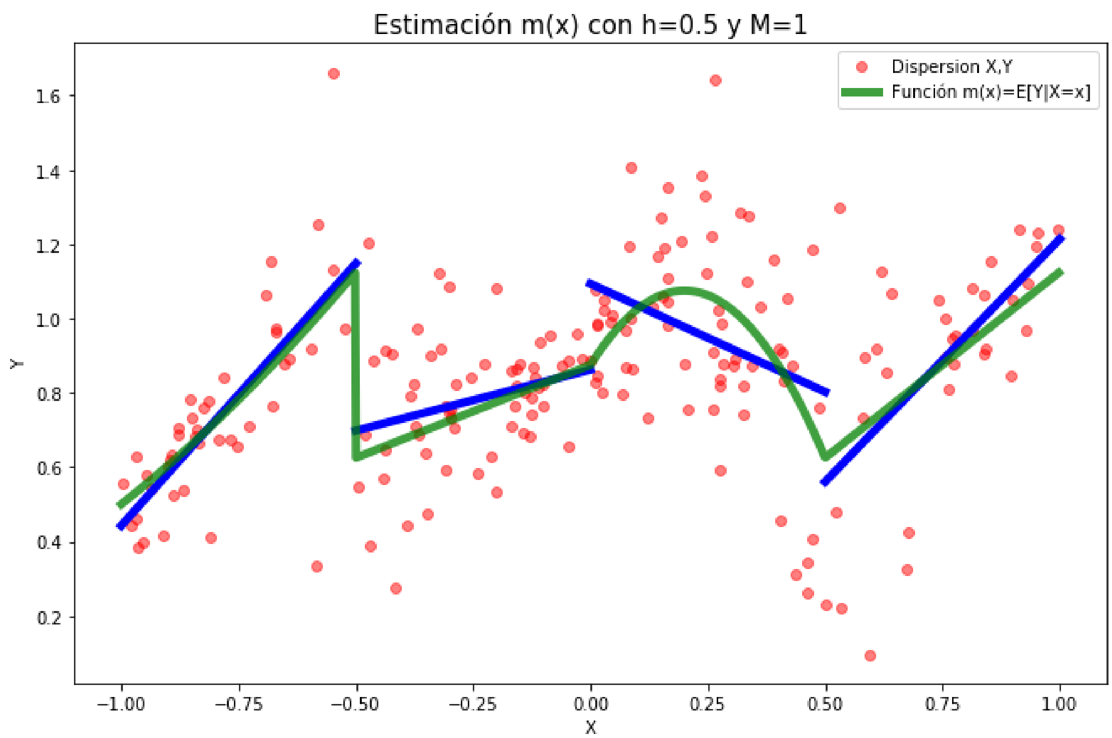
Con h=0.5 y M=1

```
In [10]: partition = [[],[],[],[]]
         for i in range(200):
             partition[int(2*(x1[i]+1))].append(i)

In [11]: polinomio_a_trozos = []

         cuadrado_de_los_errores1 = 0

         for i in range(4):
             x_aux , y_aux = [x1[j] for j in partition[i]],[y1[j] for j in partition[i]]
             z = np.polyfit(x_aux,y_aux,1)
```

```
        polinomio_a_trozos.append(np.poly1d(z))

        #sumo los errores para cada trozo del polinomio
        for j in range(len(x_aux)):
            cuadrado_de_los_errores1 += (polinomio_a_trozos[i](x_aux[j])-y_aux[j])**2
```

In [12]:
```
xp=[]
xp.append(np.linspace(-1, -0.5, 200))
xp.append(np.linspace(-0.5,0, 200))
xp.append(np.linspace(0, 0.5, 200))
xp.append(np.linspace(0.5,1, 200))
```

In [13]:
```
fig, ax = plt.subplots(figsize=(11,7))

plt.plot(x1, y1, 'ro', linewidth = 5, alpha = 0.5 ,label = 'Dispersion X,Y')
plt.legend(loc='best', frameon= True)

for i in range(4):
    plt.plot(xp[i], polinomio_a_trozos[i](xp[i]) ,'b-', linewidth = 5 )

plt.plot(x_0, y_0, 'g-', linewidth = 5, alpha = 0.75 ,label = 'Función m(x)=E[Y|X=x]')

plt.legend(loc='best', frameon= True)
plt.title("Estimación m(x) con h=0.5 y M=1", fontsize='15')
plt.xlabel('X')
plt.ylabel('Y')

plt.show()
```



La estimación parece ajustarse bien a la función de regresion, no obstante, el error cuadrático medio es alto ya que no esta Overfitteando a la muestra.

Estimación del error cuadrático medio

```
In [14]: (cuadrado_de_los_errores1 / 200)**0.5
```

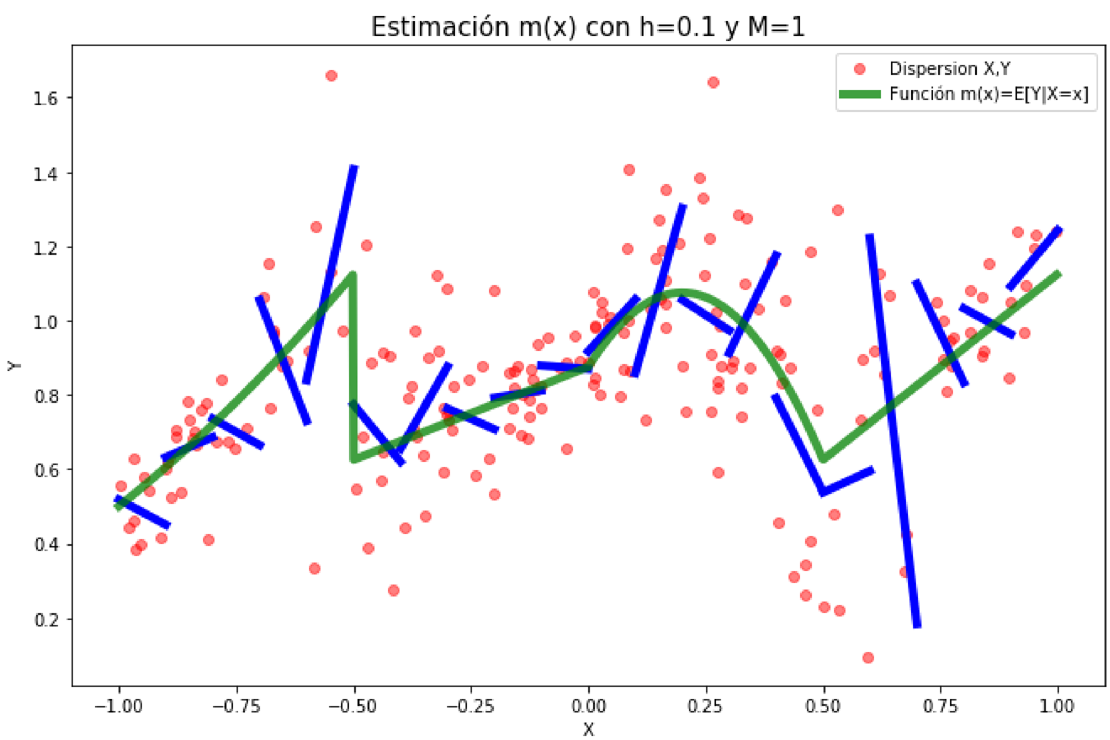
```
Out[14]: 0.21146615768136706
```

Con h=0.1 y M=1

```
In [15]: partition = [[] for i in range(20)]
         for i in range(200):
             partition[int(10*(x1[i]+1))].append(i)
```

```
In [16]: polinomio_a_trozos = []
         cuadrado_de_los_errores2 = 0

         for i in range(20):
             x_aux , y_aux = [x1[j] for j in partition[i]],[y1[j] for j in partition[i]]
             z = np.polyfit(x_aux,y_aux,1)
             polinomio_a_trozos.append(np.poly1d(z))

             #sumo los errores para cada trozo del polinomio
             for j in range(len(x_aux)):
                 cuadrado_de_los_errores2 += (polinomio_a_trozos[i](x_aux[j])-y_aux[j])**2
```

```
In [17]: xp=[]

         for i in range(20):
             xp.append(np.linspace(-1+i*(1/10), -0.9+i*(1/10), 200))

In [18]: fig, ax = plt.subplots(figsize=(11,7))

         plt.plot(x1, y1, 'ro', linewidth = 5, alpha = 0.5 ,label = 'Dispersion X,Y')
         plt.legend(loc='best', frameon= True)

         for i in range(20):
             plt.plot(xp[i], polinomio_a_trozos[i](xp[i]) ,'b-', linewidth = 5 )

         plt.plot(x_0, y_0, 'g-', linewidth = 5, alpha = 0.75,label = 'Función m(x)=E[Y|X=x]')
         plt.legend(loc='best', frameon= True)
         plt.title("Estimación m(x) con h=0.1 y M=1", fontsize='15')
         plt.xlabel('X')
         plt.ylabel('Y')
         plt.show()
```



Se puede observar un claro caso de Overfitting, donde el error cuadrático medio es medianamente bajo, pero no estima correctamente la regresión.

Estimación del error cuadrático medio

```
In [19]: (cuadrado_de_los_errores2 / 200)**0.5
```

```
Out[19]: 0.1885956312812796
```

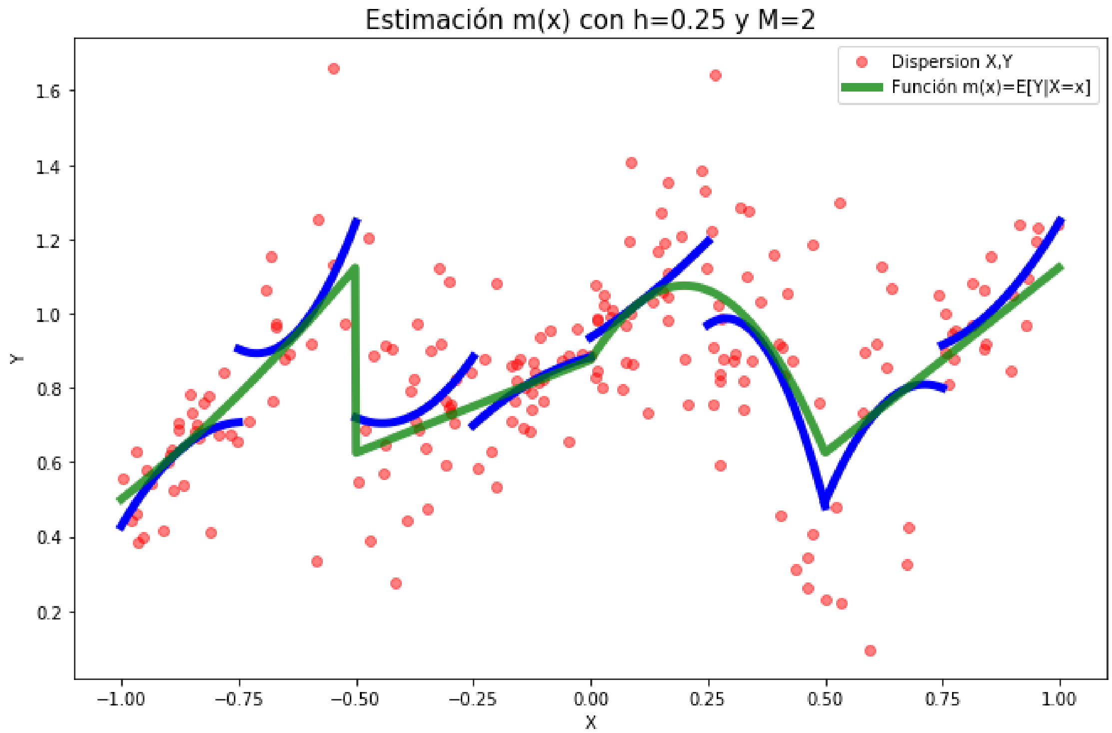
Con h=0.25 y M=2

```
In [20]: partition = [[] for i in range(8)]
         for i in range(200):
             partition[int(4*(x1[i]+1))].append(i)
```

```
In [21]: polinomio_a_trozos = []
         cuadrado_de_los_errores3 = 0

         for i in range(8):
             x_aux , y_aux = [x1[j] for j in partition[i]],[y1[j] for j in partition[i]]
             z = np.polyfit(x_aux,y_aux,2)
             polinomio_a_trozos.append(np.poly1d(z))

             #sumo los errores para cada trozo del polinomio
             for j in range(len(x_aux)):
                 cuadrado_de_los_errores3 += (polinomio_a_trozos[i](x_aux[j])-y_aux[j])**2
```

```
In [22]: xp=[]

         for i in range(8):
             xp.append(np.linspace(-1+i*(1/4), -1+(i+1)*(1/4), 200))
```

```
In [23]: fig, ax = plt.subplots(figsize=(11,7))

         plt.plot(x1, y1, 'ro', linewidth = 5,alpha = 0.5, label ='Dispersion X,Y')
         plt.legend(loc='best', frameon= True)

         for i in range(8):
             plt.plot(xp[i], polinomio_a_trozos[i](xp[i]) ,'b-', linewidth = 5 )

         plt.plot(x_0, y_0, 'g-', linewidth = 5,alpha = 0.75 ,label = 'Función m(x)=E[Y|X=x]')
         plt.legend(loc='best', frameon= True)
         plt.title("Estimación m(x) con h=0.25 y M=2", fontsize='15')
         plt.xlabel('X')
         plt.ylabel('Y')
         plt.show()
```



Se puede observar un claro caso de Overfitting, donde el error cuadrático medio es medianamente bajo, pero no estima correctamente la regresión.

Estimación del error cuadrático medio

```
In [24]: (cuadrado_de_los_errores3 / 200)**0.5
```

```
Out[24]: 0.20085090075741924
```

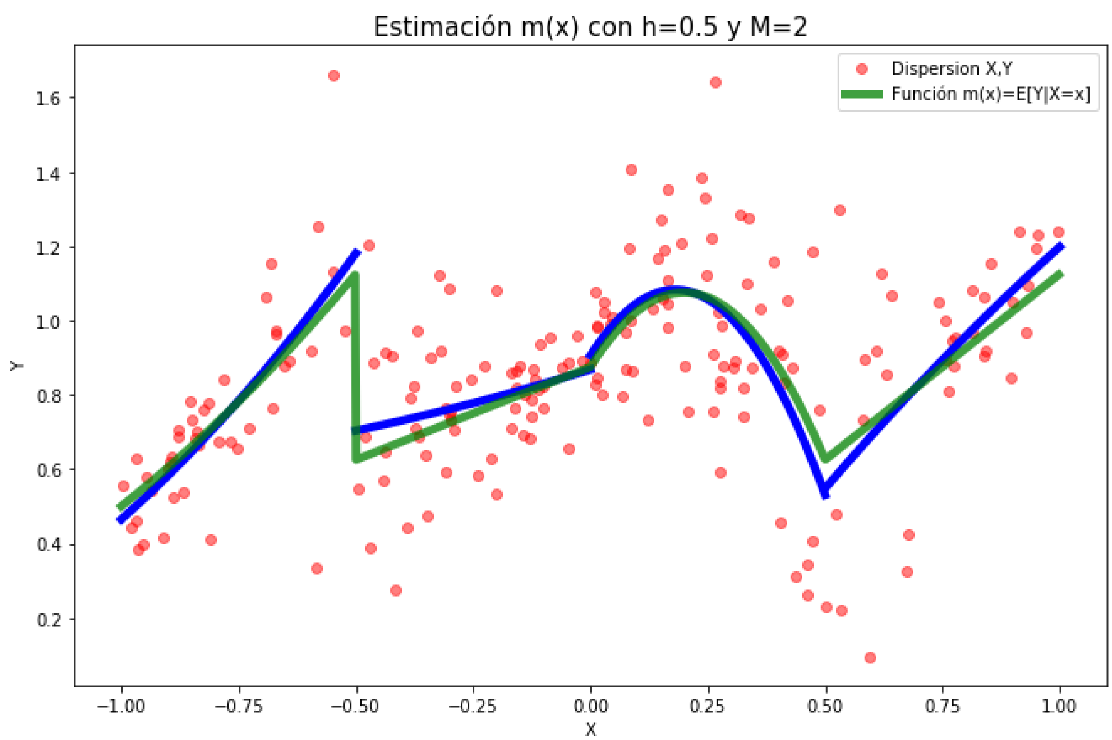
Con h=0.5 y M=2

```
In [25]: partition = [[] for i in range(4)]
         for i in range(200):
             partition[int(2*(x1[i]+1))].append(i)
```

```
In [26]: polinomio_a_trozos = []
         cuadrado_de_los_errores4 = 0

         for i in range(4):
             x_aux , y_aux = [x1[j] for j in partition[i]],[y1[j] for j in partition[i]]
             z = np.polyfit(x_aux,y_aux,2)
             polinomio_a_trozos.append(np.poly1d(z))

             #sumo los errores para cada trozo del polinomio
             for j in range(len(x_aux)):
                 cuadrado_de_los_errores4 += (polinomio_a_trozos[i](x_aux[j])-y_aux[j])**2
```

```
In [27]: xp=[]
         for i in range(4):
             xp.append(np.linspace(-1+i*(1/2), -1+(i+1)*(1/2), 200))
```

```
In [28]: fig, ax = plt.subplots(figsize=(11,7))

         plt.plot(x1, y1, 'ro', linewidth = 5,alpha = 0.5, label = 'Dispersion X,Y')
         plt.legend(loc='best', frameon= True)

         for i in range(4):
             plt.plot(xp[i], polinomio_a_trozos[i](xp[i]) ,'b-', linewidth = 5)

         plt.plot(x_0, y_0, 'g-', linewidth = 5,alpha = 0.75 ,label = 'Función m(x)=E[Y|X=x]')
         plt.legend(loc='best', frameon= True)
         plt.title("Estimación m(x) con h=0.5 y M=2", fontsize='15')
         plt.xlabel('X')
         plt.ylabel('Y')

         plt.show()
```



Se ve que el ECM es ligeramente superior a los casos con Overfitting, se ve que predice la regresión de forma bastante acertada.

Estimación del error cuadrático medio

```
In [29]: (cuadrado_de_los_errores4 / 200)**0.5
```

```
Out[29]: 0.20321524367619534
```

```
In [30]: (cuadrado_de_los_errores1 / 200)**0.5 ,\
         (cuadrado_de_los_errores2 / 200)**0.5 ,\
         (cuadrado_de_los_errores3 / 200)**0.5 ,\
         (cuadrado_de_los_errores4 / 200)**0.5
```

```
Out[30]: (0.21146615768136706,
          0.1885956312812796,
          0.20085090075741924,
          0.20321524367619534)
```

Link al Repo de GitHub: https://github.com/julianferres/Aprendizaje-Estadistico.git