Colección de Ejercicios Propuestos y sus resoluciones

Sebastian Elizalde
Padrón Nro. 96092
sebi.elizalde@gmail.com

Julian Ferres
Padrón Nro. 101483
julianferres@gmail.com

2do. Cuatrimestre de 2018

Aprendizaje Estadístico - Sebastian Grymberg

Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires

Contents

1 Introducción

2 Lista de enunciados y sus soluciones

2.1 Clase 1

2.1.1 Ejercicio 1

Sea una función convexa $f(x)$ no negativa, x_0, x_1, x_2 tales que:

- $x_1 \leq x_0 \leq x_2$
- $x_0 = p_1x_1 + p_2x_2$
- $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 = 1$

Y sea una recta g tal que:

- $g(x_1) = f(x_1)$
- $g(x_2) = f(x_2)$

Comprobar la siguiente desigualdad:

$$f(p_1x_1 + p_1x_1) \leq p_1f(x_1) + p_2f(x_2)$$

Solución:
f(x) es convexa en el intervalo $[x_1, x_2]$ si y solo si para cualquier $x_0 = p_1x_1 + p_2x_2$ se cumple la condición a comprobar.
Para comprobar utilizaremos la recta l(x) que contiene a $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2) : \forall x_0 \in [x_1, x_2] : l(x_0) \geq f(x_0)$
Pero $l(x) = mx + b = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}x + \left(f(x_1) - \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}x_1\right)$
Por simplicidad llamo $y_0 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$
Evaluando:

$$l(x_0) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_0 + \left(y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1\right)$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(p_1x_1 + p_2x_2) + \left(y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1\right)$$

Usando que $p_2 = 1 - p_1$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(p_1x_1 - p_1x_2) + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_2 + \left(y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1\right)$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_1 - x_2)(-p_1) + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1) + y_1$$

$$= p_1y_1 - p_1y_2 + y_2$$

$$= p_1y_1 + (1 - p_1)y_2$$

$$= p_1y_1 + p_2y_2$$

Finalmente $f(p_1x_1 + p_2x_2) = f(x_0) \leq l(x_0) = p_1f(x_1) + p_2f(x_2)$

2.1.2 Ejercicio 2: Esperanza condicional

Utilizando que $\forall f(X) \in \mathcal{H} : E[m(x)f(x)] = E[Yf(x)]$ y $m(x) = E[Y|X = x]$ sii $Y - m(x) \perp \mathcal{H}$, con $\mathcal{H}$ el espacio de todas las funciones de X.

Demostrar que vale: $E[\phi(x)Y|X] = \phi(x)E[Y|X]$

<u>Solución:</u>

Sea $h(X) = \frac{f(X)}{g(X)}$, es claro que $h(X)$ puede adoptar cualquier valor de $\mathcal{H}$, por ejemplo, si busco adoptar $g(X)$ elijo $f(X) = g(X)\phi(X) \in \mathcal{H}$.

Usando la definición de $h(X)$ en la ecuación de hipotesis, se llega a que $\forall h(X) \in \mathcal{H}$:

$$E\left[m(X)\phi(X)h(X)\right] = E\left[Y\phi(X)h(X)\right]$$

Pero entonces como $m(X)\phi(X) \in \mathcal{H}$, tiene que ser la que minimice la distancia a $Y\phi(X)$, ya que:

$$E\left[m(X)\phi(X)h(X)\right] = E\left[Y\phi(X)h(X)\right]$$

sii

$$< m(X)\phi(X), h(X) >=< Y\phi(X), h(X) >$$

sii $\forall h(X) \in \mathcal{H}$:

$$< m(X)\phi(X) - Y\phi(X), h(X) >= 0$$

sii

$$m(X)\phi(X) - Y\phi(X) \perp \mathcal{H}$$

.

Por lo tanto $m(X)\phi(X)$ es la esperanza condicional de $Y\phi(X)$ en $\mathcal{H}$
Finalmente por definición:

$$m(X)\phi(X) = E\left[Y\phi(X)|X\right]$$

y con $m(X) = E\left[Y|X\right]$ se obtiene la igualdad a demostrar:

$$E\left[Y|X\right]\phi(X) = E\left[Y\phi(X)|X\right]$$

2.1.3 Ejercicio 3 (STOP) (SIMULACIÓN)

Sea $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ truncada al intervalo $[-1, 1]$
Imagine $m(x) = E[Y|X = x]$ como:

$$m(x) := \begin{cases} \frac{(x+2)^2}{2} & \text{si } si - 1 \leq x < -0.5 \\ \frac{x}{2} + 0.875 & \text{si } -0.5 \leq x \leq 0 \\ -5(x-0.2)^2 + 1.075 & \text{si } 0 < x \leq 0.5 \\ x + 0.125 & \text{si } 0.5 \leq x < 1 \end{cases}$$

Dado un x, la distribución condicional de $Y - m(x)$ es $\mathcal{N}(0, \sigma^2(x))$
Con $\sigma(x) = 0.2 - 0.1\cos(2x)$

Se pide simular 200 puntos (X, Y), y graficarlos en un plano.

Además, se piden los 200 pares ordenados en cuestión, para hacer análisis posteriores.

2.1.4 Ejercicio 4 (no entregable)

Dado el problema de decisión introducido en el 'Diseño del receptor de una comunicación binaria', verificar que:
$\delta(r) = \mathbb{1}\{P(S = 1|R = r) > P(S = 0|R = r)\}$
maximiza:
$P(S = \delta(r)) = P(S = \delta(0)|R = 0)P(R = 0) + P(S = \delta(1)|R = 1)P(R = 1)$

2.2 Clase 2

2.2.1 Ejercicio 5

Terminar la cuenta:

$$P(X,Y) = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} xdx$$

Solución:

$$\begin{aligned}
P(X,Y) &= \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} xdx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} 1dx - \int_0^{\frac{1}{2}} xdx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} xdx \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + (\frac{9}{32} - \frac{1}{8}) \\
&= 17/32
\end{aligned}$$

2.2.2 Ejercicio 6

Sean T, F y E exponenciales de intensidad 1 y tenemos que

$$Y = \mathbb{1}\{T + F + E < 7\}$$

Se tenia que E era inobservable. Y se concluyó que:

$$g^*(T,F) = \mathbb{1}\{T + F < 7 - \ln 2\}$$

Se pide calcular el error:

$$L^* = P(g * (T,F) \neq Y)$$

Solución:

$$L^* = P(g * (T,F) \neq Y)$$

$$= P(T + B < 7 - log2, T + B + E \geq 7) + P(T + B \geq 7 - log2, T + B + E < 7)$$

$$= E(e^{-(7-T-B)}\mathbb{1}\{T+B < 7-log2\}) + P((1-e^{-(7-T-B)})\mathbb{1}\{7 > T+B \geq 7-log2\})$$

$$= \int_0^{7-log2} xe^{-x}e^{-(7-x)}dx + \int_{7-log2}^{7} xe^{-x}(1-e^{-(7-x)})dx$$

(porque la densidad de T + B es ue^u en $[0, \infty)$)

$$= e^{-7}\left(\frac{(7-log2)^2}{2} + 2(8-log2) - 8 - \frac{7^2}{2} + \frac{(7-log2)^2}{2}\right)$$

(ya que $\int_x^\infty ue^{-u}du = (1+x)e^{-x}$)

$$= 0.0199611...$$

2.3 Clase 3

2.3.1 Ejercicio 7

Se quería acotar:

$E\left[|\eta^*(x) - \eta(x)|\right] < \epsilon$

Para $\epsilon > 0$ existe una función η_ϵ uniformemente continua a valores en el intervalo $[0, 1]$ sobre un conjunto compacto C que se anula fuera de C, y que tiene la siguiente propiedad:
$E[|\eta_\epsilon(x) - \eta(x)|] < \epsilon$

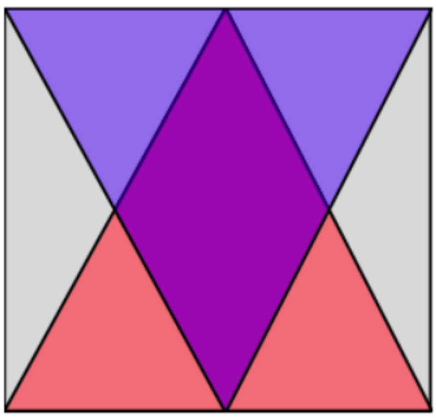
Por la desigualdad triangular:

$E\left[|\eta^*(x) - \eta(x)|\right] \leq E[|\eta^*(x) - \eta_\epsilon^*(x)|] + E[|\eta_\epsilon^*(x) - \eta_\epsilon(x)|] + E[|\eta_\epsilon(x) - \eta(x)|]$

En clase se acotaron tanto el tercer término como el segundo del segundo miembro de la desigualdad, y el ejercicio es entender por qué el primer término está acotado por el tercero.

2.3.2 Ejercicio 8 (STOP)(SIMULACIÓN)

Dado el siguiente diagrama:



Sean:

X una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el triangulo **azul**.

Y una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el triangulo **rojo**.

Z se define como: $Z = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y$

Se pide:

1. Generar muestras de X y de Y para aprender.
2. Generar muestras a clasificar uniformes sobre el cuadrado completo.
3. Construir una regla del histograma y clasificar las muestras de 2. según lo aprendido en 1. .
4. Graficar los resultados.

2.4 Clase 4

2.4.1 Ejercicio 9: KNN

Se pide simular dos normales bivariadas, ambas con matriz de covarianza $[[1, 0], [0, 1]]$, pero una centrada en $(-1, 0)$, y la otra en $(1, 0)$.

Se pide:

1. Generar muestras de N = 100, 1000, ... , otros valores. Estas dos serían las clases en las que clasificar los puntos.
2. Generar puntos con una distribución uniforme en $[-4, 4] \times [-4, 4]$.
3. Clasificar los puntos de la uniforme usando KNN, con $K = 1, 3$ y 13, utilizando las clases del primer item.
4. Graficar los resultados.

2.4.2 Ejercicio 9 bis

"Redactar una carilla que contenga la información relevante sobre la distribución normal multivariada. Llevar ejemplos, y mostrar como cambia el gráfico al variar la matriz de covarianza."

2.4.3 Ejercicio 10

Demostrar que $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^+$:

$$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

Sugerencia: usar Cauchy-Schwarz / Jensen.

Solución(CS):

Por CS se ve de forma directa que:

$$3(a^2+b^2+c^2) = (1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2) \geq (1^2a^2+1^2b^2+1^2c^2)^2 = (a+b+c)^2$$

2.5 Clase 5

2.5.1 Ejercicio 11

Dadas las desigualdades:

$$P(S_n - E\left[S_n\right] \geq \epsilon) \leq e^{-2\epsilon^2/\sum_{i=1}^n (b_i-a_i)^2}$$

$$P(S_n - E\left[S_n\right] \leq -\epsilon) \leq e^{-2\epsilon^2/\sum_{i=1}^n (b_i-a_i)^2}$$

Probar que se cumple la siguiente desigualdad:

$$P(|S_n - E\left[S_n\right]| \leq -\epsilon) \leq 2e^{-2\epsilon^2/\sum_{i=1}^n (b_i-a_i)^2}$$

Sugerencia: Usar que $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

Solución:

Por la definición de valor absoluto y la propiedad $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ se puede ver directamente el resultado pedido:

$$P(|S_n - E\left[S_n\right]| \leq -\epsilon) = P((S_n - E\left[S_n\right] \geq \epsilon) \cup (S_n - E\left[S_n\right] \leq -\epsilon))$$

$$\leq P(S_n - E\left[S_n\right] \geq \epsilon) + P(S_n - E\left[S_n\right] \leq -\epsilon)$$

$$= e^{-2\epsilon^2/\sum_{i=1}^n (b_i-a_i)^2} + e^{-2\epsilon^2/\sum_{i=1}^n (b_i-a_i)^2}$$

$$= 2e^{-2\epsilon^2/\sum_{i=1}^n (b_i-a_i)^2}$$

2.5.2 Ejercicio 13

Dada la función:

$$\Phi(u) = \ln pe^u + 1 - p - pu$$

Mostrar que:

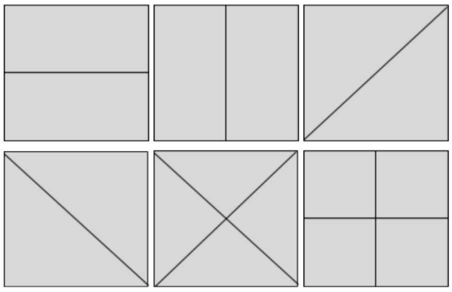
- $\Phi(0) = 0$
- $\Phi'(0) = 0$

Solución:

$\Phi(0) = \ln(1) = 0$
$\Phi'(u) = \frac{(pe^u)}{(pe^u - p + 1)} - p$, $\Phi'(0) = \frac{(pe^0)}{(pe^0 - p + 1)} - p = p - p = 0$

2.5.3 Ejercicio 14 (STOP)

Dados los siguientes clasificadores por particiones:



Elegir cuál es el mejor para las clases y los puntos generados en el ejercicio 8.

2.6 Clase 6

2.6.1 Ejercicio 15

Demostrar que la siguiente secuencia constituye una serie convergente:

$$a_n = 8(n+1)e^{-n\epsilon^2/32}$$

Y generalizar viendo que $\forall \lambda > 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-\lambda n} < \infty$$

(Sugerencia: Usar que $\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda^2}$)

Solución:

Teorema: Si f es positiva, continua y decreciente para $x \geq 1$ y $a_n = f(n)$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{y} \quad \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

convergen o divergen ambas simultáneamente.
Si $T \sim \exp(\lambda)$ y $a_n = ne^{-\lambda n}$,
es inmediato que como $\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}E\left[T\right] = \frac{1}{\lambda^2} < \infty$
entonces la serie asociada es convergente.

2.6.2 Ejercicio 16

Sea la familia de intervalos:

$$A' = \{(a,b) : a < b\}$$

Luego de calcular $N_{A'}(z_1, z_2) = |\{\emptyset, \{z_1\}, \{z_2\}, \{z_1, z_2\}\}| = 4$ en clase, se pide calcular:

1. $N_{A'}(z_1, z_2, z_3)$
2. $N_{A'}(z_1, z_2, \cdots, z_n)$

Solución:

El problema equivale a contar la cantidad de subconjuntos con elementos consecutivos hay en un conjunto $\{z_1, z_2, ..., z_n\}$ con $z_1 < z_2 < ... < z_n$.

Los subconjuntos con mas de un elemento quedan completamente definidos simplemente eligiendo sus elementos extremos,

Luego hay $nC2 = \frac{n(n-1)}{2}$ de estos, sumados a los n conjuntos de un elemento y al conjunto vacío, se tiene que:

$$N_{A'}(z_1, z_2, \cdots, z_n) = \frac{n(n-1)}{2} + n + 1$$

En caso $n = 3$ es inmediato habiendo deducido este.