Colección de Ejercicios Propuestos y sus resoluciones

Sebastian Elizalde
Padrón Nro. 96092
sebi.elizalde@gmail.com

Julian Ferres
Padrón Nro. 101483
julianferres@gmail.com

2do. Cuatrimestre de 2018

Aprendizaje Estadístico - Sebastian Grymberg

Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires

Contents

1 Introducción

2 Lista de enunciados y sus soluciones

2.1 Clase 1

2.1.1 Ejercicio 1

Sea una función convexa $f(x)$ no negativa, x_0, x_1, x_2 tales que:

- $x_1 \leq x_0 \leq x_2$
- $x_0 = p_1 x_1 + p_2 x_2$
- $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 = 1$

Y sea una recta g tal que:

- $g(x_1) = f(x_1)$
- $g(x_2) = f(x_2)$

Quedan dudas de cuál de los siguientes era el planteo: Comprobar la siguiente desigualdad: f(p?x?+p?x?) p?f(x?) + p?f(x?)

Probar que: g(x0) = p1 g(x1) + p2 g(x2)

2.1.2 Ejercicio 2: Esperanza condicional

Utilizando que $E[m(x)f(x)] = E[Yf(x)]$ y $m(x) = E[Y|X = x]$

Demostrar que vale: $E[\Phi(x)Y|X] = \Phi(x)E[Y|X]$

2.1.3 Ejercicio 3 (STOP) (SIMULACIÓN)

Sea $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ truncada al intervalo $[-1, 1]$

Imagine $m(x) = E[Y|X = x]$ como:

$$m(x) := \begin{cases} \frac{(x+2)^2}{2} & \text{si } si - 1 \leq x < -0.5 \\ \frac{x}{2} + 0.875 & \text{si } -0.5 \leq x \leq 0 \\ -5(x-0.2)^2 + 1.075 & \text{si } 0 < x \leq 0.5 \\ x + 0.125 & \text{si } 0.5 \leq x < 1 \end{cases}$$

Dado un x, la distribución condicional de $Y - m(x)$ es $\mathcal{N}(0, \sigma^2(x))$

Con $\sigma(x) = 0.2 - 0.1\cos(2x)$

Se pide simular 200 puntos (X, Y), y graficarlos en un plano.

Además, se piden los 200 pares ordenados en cuestión, para hacer análisis posteriores.

2.1.4 Ejercicio 4 (no entregable)

Dado el problema de decisión introducido en el 'Diseño del receptor de una comunicación binaria', verificar que:

$\delta(r) = \mathbb{1}\{P(S = 1|R = r) > P(S = 0|R = r)\}$

maximiza:

$P(S = \delta(r)) = P(S = \delta(0)|R = 0)P(R = 0) + P(S = \delta(1)|R = 1)P(R = 1)$

2.2 Clase 2

2.2.1 Ejercicio 5

Terminar la cuenta:

$$P(X,Y) = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} xdx$$

<u>Solución:</u>

$$\begin{aligned} P(X,Y) &= \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} xdx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} 1dx - \int_0^{\frac{1}{2}} xdx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} xdx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + (\frac{9}{32} - \frac{1}{8}) \\ &= 17/32 \end{aligned}$$

2.2.2 Ejercicio 6

Sean T, F y E exponenciales de intensidad 1 y tenemos que

$$Y = \mathbb{1}\{T + F + E < 7\}$$

Se tenia que E era inobservable. Y se concluyó que:

$$g^*(T,F) = \mathbb{1}\{T + F < 7 - \ln 2\}$$

Se pide calcular el error:

$$L^* = P(g * (T,F) \neq Y)$$

<u>Solución:</u>

$$L^* = P(g * (T,F) \neq Y)$$

$$= P(T + B < 7 - log2, T + B + E \geq 7) + P(T + B \geq 7 - log2, T + B + E < 7)$$

$$= E(e^{-(7-T-B)}\mathbb{1}\{T+B < 7-log2\}) + P((1-e^{-(7-T-B)})\mathbb{1}\{7 > T+B \geq 7-log2\})$$

$$= \int_0^{7-log2} xe^{-x}e^{-(7-x)}dx + \int_{7-log2}^{7} xe^{-x}(1 - e^{-(7-x)})dx$$

(porque la densidad de T + B es ue^u en $[0, \infty)$)

$$= e^{-7}\left(\frac{(7-log2)^2}{2} + 2(8-log2) - 8 - \frac{7^2}{2} + \frac{(7-log2)^2}{2}\right)$$

(ya que $\int_x^\infty ue^{-u}du = (1+x)e^{-x}$)

$$= 0.0199611...$$

2.3 Clase 3

2.3.1 Ejercicio 7

Se quería acotar:

$$E\left[|\eta^*(x) - \eta(x)|\right] < \epsilon$$

Para $\epsilon > 0$ existe una función η_ϵ uniformemente continua a valores en el intervalo $[0,1]$ sobre un conjunto compacto C que se anula fuera de C, y que tiene la siguiente propiedad:
$E[|\eta_\epsilon(x) - \eta(x)|] < \epsilon$

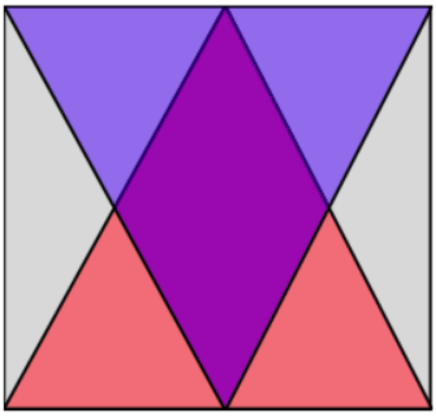
Por la desigualdad triangular:

$$E\left[|\eta^*(x) - \eta(x)|\right] \leq E[|\eta^*(x) - \eta^*_\epsilon(x)|] + E[|\eta^*_\epsilon(x) - \eta_\epsilon(x)|] + E[|\eta_\epsilon(x) - \eta(x)|]$$

En clase se acotaron tanto el tercer término como el segundo del segundo miembro de la desigualdad, y el ejercicio es entender por qué el primer término está acotado por el tercero.

2.3.2 Ejercicio 8 (STOP)(SIMULACIÓN)

Dado el siguiente diagrama:



Sean:

X una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el triangulo **azul**.

Y una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el triangulo **rojo**.

Z se define como: $Z = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y$

Se pide:

1. Generar muestras de X y de Y para aprender.
2. Generar muestras a clasificar uniformes sobre el cuadrado completo.

3. Construir una regla del histograma y clasificar las muestras de 2. según lo aprendido en 1. .
4. Graficar los resultados.

2.4 Clase 4

2.4.1 Ejercicio 9: KNN

Se pide simular dos normales bivariadas, ambas con matriz de covarianza $[[1, 0], [0, 1]]$, pero una centrada en $(-1, 0)$, y la otra en $(1, 0)$.

Se pide:

1. Generar muestras de N = 100, 1000, ... , otros valores. Estas dos serían las clases en las que clasificar los puntos.
2. Generar puntos con una distribución uniforme en $[-4, 4] \times [-4, 4]$.
3. Clasificar los puntos de la uniforme usando KNN, con $K = 1, 3$ y 13, utilizando las clases del primer item.
4. Graficar los resultados.

2.4.2 Ejercicio 9 bis

"Redactar una carilla que contenga la información relevante sobre la distribución normal multivariada. Llevar ejemplos, y mostrar como cambia el gráfico al variar la matriz de covarianza."

2.4.3 Ejercicio 10

Demostrar que $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^+$:

$$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

Sugerencia: usar Cauchy-Schwarz / Jensen.

2.5 Clase 5

2.5.1 Ejercicio 11

Dadas las desigualdades:

$$P(S_n - E[S_n] \geq \epsilon) \leq e^{-2\epsilon^2 / \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2}$$

$$P(S_n - E[S_n] \leq -\epsilon) \leq e^{-2\epsilon^2 / \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2}$$

Probar que se cumple la siguiente desigualdad:

$$P(|S_n - E[S_n]| \leq -\epsilon) \leq 2e^{-2\epsilon^2 / \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2}$$

Sugerencia: Usar que $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

2.5.2 Ejercicio 12

En clase se demostró la primer desigualdad de la hipotesis del ejercicio anterior. Se pide como ejercicio demostrar la segunda desigualdad de la hipotesis.

2.5.3 Ejercicio 13

Dada la función:

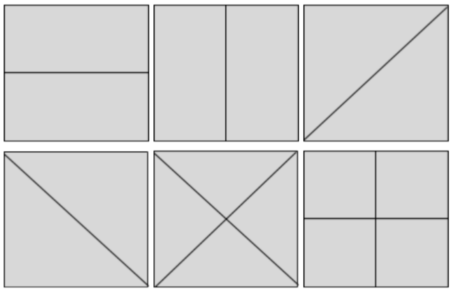
$$\Phi(u) = \ln pe^u + 1 - p - pu$$

Mostrar que:

- $\Phi(0) = 0$
- $\Phi'(0) = 0$

2.5.4 Ejercicio 14 (STOP)

Dados los siguientes clasificadores por particiones:



Elegir cuál es el mejor para las clases y los puntos generados en el ejercicio 8.

2.6 Clase 6

2.6.1 Ejercicio 15

Demostrar que la siguiente secuencia constituye una serie convergente:

$$a_n = 8(n+1)e^{-n\epsilon^2/32}$$

Y generalizar viendo que $\forall \lambda > 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-\lambda n} < \infty$$

(Sugerencia: Usar que $\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda^2}$)

2.6.2 Ejercicio 16

Sea la familia de intervalos:

$$A' = \{(a, b) : a < b\}$$

Luego de calcular $N_{A'}(z_1, z_2) = |\{\emptyset, \{z_1\}, \{z_2\}, \{z_1, z_2\}\}| = 4$ en clase, se pide calcular:

1. $N_{A'}(z_1, z_2, z_3)$
2. $N_{A'}(z_1, z_2, \cdots, z_n)$

3 Conclusiones

References

[1]