

## Ejercicios para entregar - Guía 1

1. Sea  $\mathbf{X} = [X_1, X_2, X_3]^T$  un vector aleatorio normal de media y matriz de covarianza conocidas:

$$\mu_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A partir de  $\mathbf{X}$  se define el vector aleatorio  $\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2]^T$  cuyas componentes son:

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 + X_2 - 2X_3, \\ Y_2 &= X_1 + X_3. \end{aligned}$$

- (a) Halle la densidad de  $\mathbf{Y}$ .
  - (b) Halle las densidades marginales de  $Y_1$  e  $Y_2$ .
- 

2. Sea  $X$  una variable aleatoria continua tal que:

$$\mathbb{E}[X^k] = \frac{k!}{\lambda}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

con  $\lambda > 0$ . Halle la función de densidad de  $X$ .

---

3. Se desea utilizar el método Monte Carlo para estimar la función de Bessel:

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \tau) d\tau, \quad x > 0.$$

Se cuenta para ello con un generador de números aleatorios que genera variables aleatorias independientes uniformes en  $(0, 1)$ .

- (a) Diseñe un experimento Monte Carlo que le permita estimar la función  $J_0(x)$  para un valor de  $x$  dado. Justifique el tipo de convergencia que considera en su experimento.
- (b) El objetivo de este inciso es utilizar el experimento que diseñó en el punto anterior, para estimar  $J_0(1)$ . Para ello, simule en la computadora 10000 realizaciones de las variables IID uniformes en  $(0, 1)$ .

$$U_1, \dots, U_{10000}.$$

Sea  $\hat{J}(n)$  el estimador que se obtiene con el experimento del inciso anterior, usando las primeras  $n$  uniformes,  $U_1, \dots, U_n$ , de las 10000 que tiene.

Realice un gráfico del cociente  $\hat{J}(n)/J_0(1)$  en función del número  $n$  de variables usadas y extraiga conclusiones.

*Aclaración:* para  $\hat{J}(1)$ , debe usar  $U_1$ ; para  $\hat{J}(2)$ , debe usar  $U_1, U_2$ , donde  $U_1$  es la misma que uso para  $\hat{J}(1)$ ; para  $\hat{J}(3)$  debe usar  $U_1, U_2, U_3$ , donde  $U_1$  y  $U_2$  fueron usadas previamente; y así sucesivamente.