Transformaciones en imágenes

Araguás, Gastón   Redolfi, Javier

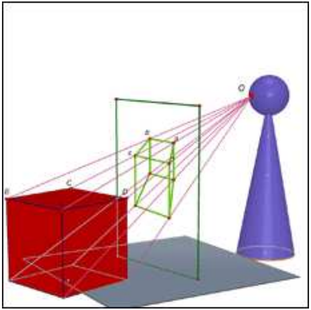
22 de abril del 2020

Geometría proyectiva

Geometría proyectiva

La geometría proyectiva puede entenderse como la geometría que se obtiene cuando nos colocamos en un punto, mirando desde ese punto. Esto es, cualquier línea que incide en nuestro “ojo” nos parece ser solo un punto, en el plano proyectivo, ya que el ojo no puede “ver” los puntos que hay detrás.

La geometría proyectiva equivale a la proyección sobre un plano de un subconjunto del espacio en la geometría euclidiana tridimensional. Las rectas que llegan al ojo del observador se proyectan en puntos. Los planos definidos por cada par de ellas se proyectan en rectas.

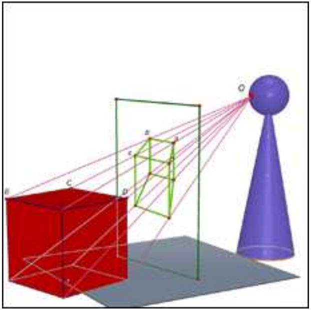


Geometría proyectiva

Coordenadas homogéneas

Un espacio euclidio $\mathbb{R}^n$ está contenido en un espacio proyectivo $\mathbb{P}^{n+1}$.
Para representación en $n + 1$ hacen falta coordenadas ampliadas, llamadas coordenadas homogéneas.
Las coordenadas homogéneas fueron introducidas por el matemático alemán August Ferdinand Möbius en el año 1837.

Wikipedia.



Coordenadas homogéneas

Puntos y rectas

Un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ puede representarse por el vector $\boldsymbol{x}$ formado por sus coordenadas

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x, y]^T$$

Coordenadas homogéneas

Puntos y rectas

Un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ puede representarse por el vector $\boldsymbol{x}$ formado por sus coordenadas

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x, y]^T$$

Una recta en el plano $ax + by + c = 0$ puede representarse por el vector $\boldsymbol{l}$ formado por las constantes que la definen

$$\boldsymbol{l} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = [a, b, c]^T$$

Un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ puede representarse por el vector $\boldsymbol{x}$ formado por sus coordenadas

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x, y]^T$$

Una recta en el plano $ax + by + c = 0$ puede representarse por el vector $\boldsymbol{l}$ formado por las constantes que la definen

$$\boldsymbol{l} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = [a, b, c]^T$$

Pero el vector $\boldsymbol{l} = [ka, kb, kc]^T$, con $k \neq 0$, representa la misma recta, de donde:

- Una recta tienen 2 DOF, dado por los cocientes de sus componentes $\{a : b : c\}$.
- Estos vectores equivalentes se conocen como vectores homogeneos.
- El conjunto de vectores homogeneos en $\mathbb{R}^3$, menos el vector $[0, 0, 0]^T$, forman el espacio proyectivo $\mathbb{P}^2$.

Si seguimos … un punto (x_1, y_1) pertenece a la recta $\boldsymbol{l}$ si $ax_1 + by_1 + c = 0$. Matricialmente

$$[x_1, y_1, 1][a, b, c]^T = 0$$

donde el vector $[x_1, y_1, 1]$ representa el punto (x_1, y_1).

Si seguimos … un punto (x_1, y_1) pertenece a la recta $\boldsymbol{l}$ si $ax_1 + by_1 + c = 0$. Matricialmente

$$[x_1, y_1, 1][a, b, c]^T = 0$$

donde el vector $[x_1, y_1, 1]$ representa el punto (x_1, y_1).

Pero para el mismo punto se tiene que $kax_1 + kby_1 + kc = 0$

$$[kx_1, ky_1, k][a, b, c]^T = 0$$

es decir, los vectores $[kx_1, ky_1, k]^T$ y $[x_1, y_1, 1]^T$ representan el mismo punto.

Si seguimos ... un punto (x_1, y_1) pertenece a la recta $\boldsymbol{l}$ si $ax_1 + by_1 + c = 0$. Matricialmente

$$[x_1, y_1, 1][a, b, c]^T = 0$$

donde el vector $[x_1, y_1, 1]$ representa el punto (x_1, y_1).

Pero para el mismo punto se tiene que $kax_1 + kby_1 + kc = 0$

$$[kx_1, ky_1, k][a, b, c]^T = 0$$

es decir, los vectores $[kx_1, ky_1, k]^T$ y $[x_1, y_1, 1]^T$ representan el mismo punto.

Por lo que ...

Vectores homogéneos

Los vectores $[x_1, y_1, 1]^T$ y $[kx_1, ky_1, k]^T$ son vectores homogéneos, y son la representación del punto (x_1, y_1) en *coordenadas homogéneas*.

Punto en coordenadas homogéneas

Un punto en el plano de coordenadas finitas $(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3})$, (con $x_3 \neq 0$,) se representa en coordenadas homogéneas por el vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^2$ dado por

$$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$$

Nota: Un punto también tiene dos DOF, dados por $\{x_1 : x_2 : x_3\}$

Punto en coordenadas homogéneas

Un punto en el plano de coordenadas finitas $(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3})$, (con $x_3 \neq 0$,) se representa en coordenadas homogéneas por el vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^2$ dado por

$$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$$

Nota: Un punto también tiene dos DOF, dados por $\{x_1 : x_2 : x_3\}$

Por lo anterior ...

Punto en una recta

Sean el punto $\boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^2$ y la recta $\boldsymbol{l} \in \mathbb{P}^2$, entonces $\boldsymbol{x}$ está en $\boldsymbol{l}$ si

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}^T\boldsymbol{x} = ax + by + c = 0$$

Punto en coordenadas homogéneas

Un punto en el plano de coordenadas finitas $(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3})$, (con $x_3 \neq 0$,) se representa en coordenadas homogéneas por el vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^2$ dado por

$$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$$

Nota: Un punto también tiene dos DOF, dados por $\{x_1 : x_2 : x_3\}$
Por lo anterior . . .

Punto en una recta

Sean el punto $\boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^2$ y la recta $\boldsymbol{l} \in \mathbb{P}^2$, entonces $\boldsymbol{x}$ está en $\boldsymbol{l}$ si

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}^T\boldsymbol{x} = ax + by + c = 0$$

Notar que . . . El producto escalar entre $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{l}$ también es nulo, ya que

$$\boldsymbol{x}.\boldsymbol{l} = xl\cos\theta = ax + by + c = 0 \rightarrow \theta = \pi/2$$

por lo que los vectores $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{l}$ son perpendiculares.

Intersección de dos rectas

Sean $\boldsymbol{l}_1$ y $\boldsymbol{l}_2$ dos rectas en $\mathbb{P}^2$. Definiendo $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2$, que es un vector perpendicular a ambas rectas, tal que el producto escalar

$$\boldsymbol{l}_1.(\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2) = \boldsymbol{l}_2.(\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2) = 0$$

es decir

$$\boldsymbol{l}_1^T \boldsymbol{x} = \boldsymbol{l}_2^T \boldsymbol{x} = 0$$

luego, si $\boldsymbol{x}$ representa a un punto, este es el punto de intersección de $\boldsymbol{l}_1$ y $\boldsymbol{l}_2$.

Recta por dos puntos

Sean $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$ dos puntos en $\mathbb{P}^2$. Definiendo $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2$ se tiene

$$\boldsymbol{l}^T \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{l}^T \boldsymbol{x}_2 = 0$$

luego, el vector $\boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2$ representa a la recta $\boldsymbol{l}$ que pasa por los puntos $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$.

Recta por dos puntos

Sean $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$ dos puntos en $\mathbb{P}^2$. Definiendo $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2$ se tiene

$$\boldsymbol{l}^T \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{l}^T \boldsymbol{x}_2 = 0$$

luego, el vector $\boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2$ representa a la recta $\boldsymbol{l}$ que pasa por los puntos $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$.

Dualidad

Debido a la representación dual de rectas y puntos, los enunciados tiene siempre su forma dual.

En este caso la recta que pasa por dos puntos es dual al anterior, que puede leerse como “el punto que pasa por dos rectas”.

Que pasa con las paralelas?

Intersección de rectas paralelas

Sean $\boldsymbol{l} = [a, b, c]^T$ y $\boldsymbol{l}' = [a, b, c']^T$ dos rectas paralelas en $\mathbb{P}^2$, la intersección de las rectas $\boldsymbol{l}$ y $\boldsymbol{l}'$ será

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{l}' = [b, -a, 0]^T$$

con $\boldsymbol{x}$ un punto ideal o punto en el infinito.

Que pasa con las paralelas?

Intersección de rectas paralelas

Sean $\boldsymbol{l} = [a, b, c]^T$ y $\boldsymbol{l}' = [a, b, c']^T$ dos rectas paralelas en $\mathbb{P}^2$, la intersección de las rectas $\boldsymbol{l}$ y $\boldsymbol{l}'$ será

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{l}' = [b, -a, 0]^T$$

con $\boldsymbol{x}$ un punto ideal o punto en el infinito.

Punto en el infinito

Un punto en $\mathbb{P}^2$ de coordenadas

$$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, 0]^T$$

no representa ningún punto finito en el plano, se le llama punto ideal o punto en el infinito.

Recta en el infinito

Todo punto ideal $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, 0]^T$ pertenece a la recta $\boldsymbol{l}_\infty = [0, 0, 1]^T$, ya que

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{l}_\infty = 0$$

$\boldsymbol{l}_\infty$ se llama recta en el infinito.

Recta en el infinito

Todo punto ideal $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, 0]^T$ pertenece a la recta $\boldsymbol{l}_\infty = [0, 0, 1]^T$, ya que

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{l}_\infty = 0$$

$\boldsymbol{l}_\infty$ se llama recta en el infinito.

Intersección con l_∞

La intersección de las rectas paralelas $\boldsymbol{l}$ y $\boldsymbol{l}'$ con $\boldsymbol{l}_\infty$ es en el punto ideal $\boldsymbol{x} = [b, -a, 0]^T$ (recordar que $\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{l}' = [b, -a, 0]^T$)

$$[b, -a, 0]^T \boldsymbol{l} = [b, -a, 0]^T \boldsymbol{l}' = [b, -a, 0]^T \boldsymbol{l}_\infty = 0$$

Recta en el infinito

Todo punto ideal $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, 0]^T$ pertenece a la recta $\boldsymbol{l}_\infty = [0, 0, 1]^T$, ya que

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{l}_\infty = 0$$

$\boldsymbol{l}_\infty$ se llama recta en el infinito.

Intersección con l_∞

La intersección de las rectas paralelas $\boldsymbol{l}$ y $\boldsymbol{l}'$ con $\boldsymbol{l}_\infty$ es en el punto ideal $\boldsymbol{x} = [b, -a, 0]^T$ (recordar que $\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{l}' = [b, -a, 0]^T$)

$$[b, -a, 0]^T \boldsymbol{l} = [b, -a, 0]^T \boldsymbol{l}' = [b, -a, 0]^T \boldsymbol{l}_\infty = 0$$

- Notar que el vector $[b, -a]^T \in \mathbb{R}^2$ representa la dirección de la recta $\boldsymbol{l} = [a, b, c]^T$. Por lo tanto

$$\boldsymbol{l}_\infty : \{\text{Conjunto de direcciones de rectas de } \mathbb{R}^2\}$$

Definición

Una proyectividad es un mapa invertible h de $\mathbb{P}^2$ en $\mathbb{P}^2$ que lleva un conjunto de puntos $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ pertenecientes a una recta a otro conjunto $\{h(\boldsymbol{x}_1), \cdots, h(\boldsymbol{x}_n)\}$ pertenecientes también a una recta.

es decir mapea rectas en rectas (lo que hacen las cámaras).

Definición

Una proyectividad es un mapa invertible h de $\mathbb{P}^2$ en $\mathbb{P}^2$ que lleva un conjunto de puntos $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ pertenecientes a una recta a otro conjunto $\{h(\boldsymbol{x}_1), \cdots, h(\boldsymbol{x}_n)\}$ pertenecientes también a una recta.

es decir mapea rectas en rectas (lo que hacen las cámaras).

Definición

Una proyectividad es un mapa invertible h de $\mathbb{P}^2$ en $\mathbb{P}^2$ que lleva un conjunto de puntos $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ pertenecientes a una recta a otro conjunto $\{h(\boldsymbol{x}_1), \cdots, h(\boldsymbol{x}_n)\}$ pertenecientes también a una recta.

es decir mapea rectas en rectas (lo que hacen las cámaras).

Definición

Una proyectividad es un mapa invertible h de $\mathbb{P}^2$ en $\mathbb{P}^2$ que lleva un conjunto de puntos $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ pertenecientes a una recta a otro conjunto $\{h(\boldsymbol{x}_1), \cdots, h(\boldsymbol{x}_n)\}$ pertenecientes también a una recta.

es decir mapea rectas en rectas (lo que hacen las cámaras).

- Proyectividad, transformación proyectiva, homografía, colinealidad, son sinónimos.
- Las homografías forman un grupo, ya que su inversa también es una homografía, como también la composición de homografías es otra homografía.

En términos algebraicos

Definición

Un mapa lineal $h : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ es una homografía si y sólo si existe una matriz H 3×3 invertible tal que

$$h(\boldsymbol{x}) = H\boldsymbol{x} \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^2$$

Prueba 1: Si $h : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ es una homografía entonces existe una matriz H 3×3 invertible que cumple $h(\boldsymbol{x}) = H\boldsymbol{x} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^2$

En términos algebraicos

Definición

Un mapa lineal $h : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ es una homografía si y sólo si existe una matriz H 3×3 invertible tal que

$$h(\boldsymbol{x}) = H\boldsymbol{x} \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^2$$

Prueba 1: Si $h : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ es una homografía entonces existe una matriz H 3×3 invertible que cumple $h(\boldsymbol{x}) = H\boldsymbol{x} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^2$

Se complica...

En términos algebraicos

Definición

Un mapa lineal $h : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ es una homografía si y sólo si existe una matriz H 3×3 invertible tal que

$$h(\boldsymbol{x}) = H\boldsymbol{x} \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^2$$

Prueba 1: Si $h : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ es una homografía entonces existe una matriz H 3×3 invertible que cumple $h(\boldsymbol{x}) = H\boldsymbol{x} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^2$

Se complica...

Prueba 2: Si H 3×3 es una matriz invertible entonces es una homografía.

En términos algebraicos

Definición

Un mapa lineal $h : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ es una homografía si y sólo si existe una matriz H 3×3 invertible tal que

$$h(\boldsymbol{x}) = H\boldsymbol{x} \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^2$$

Prueba 1: Si $h : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ es una homografía entonces existe una matriz H 3×3 invertible que cumple $h(\boldsymbol{x}) = H\boldsymbol{x} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^2$

Se complica…

Prueba 2: Si H 3×3 es una matriz invertible entonces es una homografía.

Sean $\boldsymbol{x}_i, i = 1, \cdots, n$ puntos en $\boldsymbol{l}$ tal que $\boldsymbol{l}^T \boldsymbol{x}_i = 0$. Sea H una matriz 3×3 invertible, se verifica que

$$\boldsymbol{l}^T H^{-1} H \boldsymbol{x}_i = (H^{-T} \boldsymbol{l})^T H \boldsymbol{x}_i = 0$$

todos los puntos $H\boldsymbol{x}_i$ pertenecen a la recta $\boldsymbol{l}' = H^{-T} \boldsymbol{l}$.

Transformación de puntos

Una homografía mapea el punto $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}'$ mediante

$$\boldsymbol{x}' = H\boldsymbol{x}$$

- La proyección no cambia si se multiplica H por cualquier escalar distinto de cero.

Transformación de puntos

Una homografía mapea el punto $\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{x}'$ mediante

$$\boldsymbol{x}' = H\boldsymbol{x}$$

- La proyección no cambia si se multiplica H por cualquier escalar distinto de cero.
- Se dice que H está definida hasta un factor de escala. Por lo tanto H tiene 8 DOF.

Transformación de puntos

Una homografía mapea el punto $\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{x}'$ mediante

$$\boldsymbol{x}' = H\boldsymbol{x}$$

- La proyección no cambia si se multiplica H por cualquier escalar distinto de cero.
- Se dice que H está definida hasta un factor de escala. Por lo tanto H tiene 8 DOF.
- H es una matriz homogenea.

Transformación de puntos

Una homografía mapea el punto $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}'$ mediante

$$\boldsymbol{x}' = H\boldsymbol{x}$$

- La proyección no cambia si se multiplica H por cualquier escalar distinto de cero.
- Se dice que H está definida hasta un factor de escala. Por lo tanto H tiene 8 DOF.
- H es una matriz homogenea.

Transformación de rectas

De la prueba 2 dada en la definición de homografía

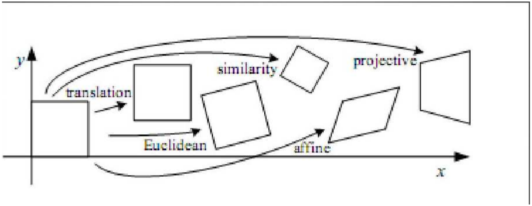
$$\boldsymbol{l}^T H^{-1} H\boldsymbol{x} = (H^{-T}\boldsymbol{l})^T H\boldsymbol{x} = 0$$

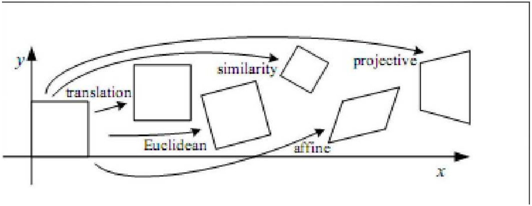
$$(\boldsymbol{l}')^T \boldsymbol{x}' = 0$$

y la recta $\boldsymbol{l}$ es mapeada a $\boldsymbol{l}' = H^{-T}\boldsymbol{l}$.

Jerarquía de transformaciones

Isometría



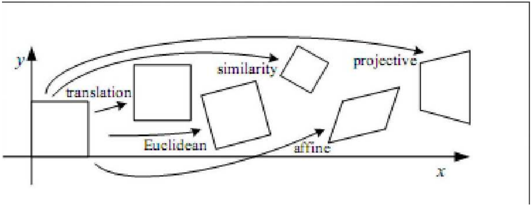


Isometría

Una isometría es una transformación que **preserva distancia** Euclidea.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \cos\theta & -\sin\theta & t_x \\ \varepsilon \sin\theta & \cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

con $\varepsilon = \pm 1$.



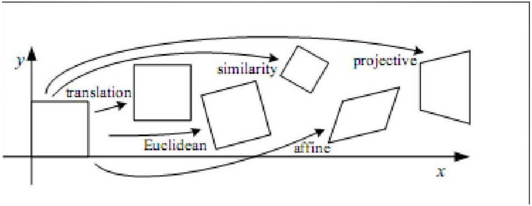
Isometría

Una isometría es una transformación que **preserva distancia** Euclidea.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \cos\theta & -\sin\theta & t_x \\ \varepsilon \sin\theta & \cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

con $\varepsilon = \pm 1$.

Si $\varepsilon = 1$, se llama transformación Euclidea, que además **preserva orientación**.



Isometría

Una isometría es una transformación que **preserva distancia** Euclidea.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \cos\theta & -\sin\theta & t_x \\ \varepsilon \sin\theta & \cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

con $\varepsilon = \pm 1$.

Si $\varepsilon = 1$, se llama transformación Euclidea, que además **preserva orientación**.

Es lo que conocemos como transformación del cuerpo rígido.

Transformación Euclidea

$$\mathbf{x}' = H_E \mathbf{x} = \begin{bmatrix} R & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

con R una matriz de rotación de 2×2 ($RR^T = R^T R = I$), $\mathbf{0}^T = (0, 0)$ y $\mathbf{t}$ un vector de traslación.

- H_E tiene 3 DOF, uno de la rotación y dos de la traslación.

Invariantes (cantidades que se preservan en una transformación)

Longitudes, ángulos, orientación y áreas son invariantes de H_E.

Similaridad

Una similaridad es una isometría con escalado isotrópico.

$$\boldsymbol{x}' = H_S \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} sR & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

- H_S tiene 4 DOF, uno de la rotación, dos de la traslación y el escalado s.
- Esta transformación queda definida mediante un par de puntos correspondientes $\boldsymbol{x}' \leftrightarrow \boldsymbol{x}$.

Invariantes

Ángulos entre rectas, paralelismo, relación entre áreas son invariantes de H_S.

Transformación afín

Es una transformación no singular (invertible) seguida de una traslación. Se puede escribir

$$\boldsymbol{x}' = H_A \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

con A una matriz no singular.

- H_A tiene 6 DOF y puede ser recuperada con 3 puntos correspondientes $\boldsymbol{x}' \leftrightarrow \boldsymbol{x}$.

Que hace A?

Descomposición SVD

Puede verse mas claramente la acción de A a partir de su descomposición SVD

$$A = UDV = (UV)V^{-1}DV$$

$$A = R(\theta)R(-\varphi)DR(\varphi); \quad \text{con } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

λ_1 y λ_2 son los valores singulares de A.

Que hace A?

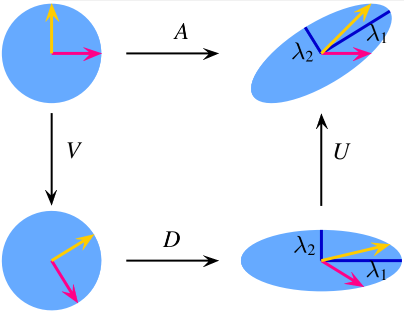
Descomposición SVD

Puede verse mas claramente la acción de A a partir de su descomposición SVD

$$A = UDV = (UV)V^{-1}DV$$

$$A = R(\theta)R(-\varphi)DR(\varphi); \quad \text{con } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

λ_1 y λ_2 son los valores singulares de A.



- El escalado es no isotrópico pero actúa en direcciones otrogonales.
- Si $\det A > 0$, la transformación preserva dirección.

Invariantes

Paralelismo:
Dos rectas paralelas intersectan a $\boldsymbol{l}_\infty$ en el punto $[x_1, x_2, 0]^T$, luego de la transformación

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = [x_1', x_2', 0]$$

Razón entre longitudes de segmentos paralelos:
El escalado es común a rectas de igual dirección.
Razón entre áreas:
Las áreas son todas escaladas una cantidad $\lambda_1 \lambda_2$.

Transformación proyectiva

Es una transformación general invertible de forma

$$\boldsymbol{x}' = H_P \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{v}^T & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

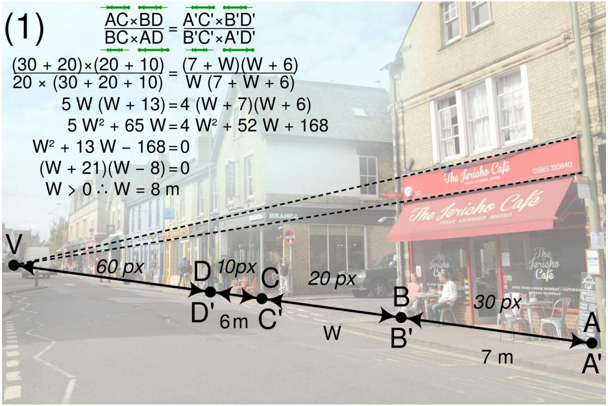
con $\boldsymbol{v}^T = [v_1, v_2]$ llamado vector de perspectiva.

- H_P tiene 8 DOF (los 9 elementos menos la escala) y puede computarse con 4 puntos correspondientes (3 deben ser no colineales).
- Mapea puntos ideales en puntos finitos

$$\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{v}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ v_1 x_1 + v_2 x_2 \end{bmatrix}$$

Invariantes

Relación cruzada (Cross ratio)



Invariantes

Relación cruzada (Cross ratio)

Descomposición

Cualquier H puede obtenerse componiendo las transformaciones anteriores

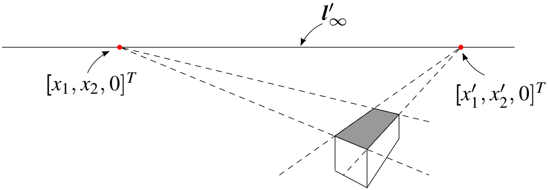
$$H = H_P H_A H_S$$

donde H_S tiene 4 DOF, H_A tiene 2 DOF mas y H_P 2 DOF mas, para hacer un total de 8 DOF.

Conociendo donde fue mapeado algún invariante de un espacio, pueden recuperarse las propiedades correspondientes.

Ejemplo: conociendo donde fue mapeada $\boldsymbol{l}_\infty$ (dos DOF) luego de una transformación proyectiva, se pueden recuperar las propiedades afín.

Sea $\boldsymbol{l}'_\infty = [l_1, l_2, l_3]^T$ la imágen de $\boldsymbol{l}_\infty = [0, 0, 1]^T$.



Luego si $l_3 \neq 0$ se puede elegir H_{PA} tal que $H_{PA}^{-T}\boldsymbol{l}'_\infty = \boldsymbol{l}_\infty$

$$H_{PA}^{-T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{l_1}{l_3} \\ 0 & 1 & -\frac{l_2}{l_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{l_3} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad H_{PA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix}$$

Aplicando H_{PA} a todos los puntos se realiza una “rectificación afín”

Ejemplo: si se conocen 4 pares de puntos correspondientes, la rectificación puede ser completa (8 DOF).

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1' = \frac{y_1}{y_3} = \frac{h_{11}x_1+h_{12}x_2+h_{13}x_3}{h_{31}x_1+h_{32}x_2+h_{33}x_3} \\ \\ y_2' = \frac{y_2}{y_3} = \frac{h_{21}x_1+h_{22}x_2+h_{23}x_3}{h_{31}x_1+h_{32}x_2+h_{33}x_3} \end{array}$$

y cada punto genera dos ecuaciones

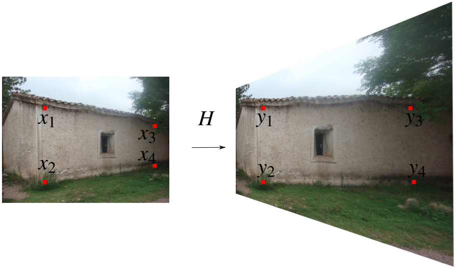
$$\begin{aligned} y_1'(h_{31}x_1 + h_{32}x_2 + h_{33}x_3) &= h_{11}x_1 + h_{12}x_2 + h_{13}x_3 \\ y_2'(h_{31}x_1 + h_{32}x_2 + h_{33}x_3) &= h_{21}x_1 + h_{22}x_2 + h_{23}x_3 \end{aligned}$$

Usando notación matricial

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 & -x_1y_1' & -x_2y_1' & -x_3y_1' \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 & -x_1y_2' & -x_2y_2' & -x_3y_2' \end{bmatrix} [\boldsymbol{h}] = 0$$

Estimación de H

Rectificación Completa



$$H \text{ mapea } \begin{array}{r} \boldsymbol{x}_1 = [35, 80, 1]^T \\ \boldsymbol{x}_2 = [35, 16, 1]^T \\ \boldsymbol{x}_3 = [131, 65, 1]^T \\ \boldsymbol{x}_4 = [131, 30, 1]^T \end{array} \text{ en } \begin{array}{r} \boldsymbol{y}_1 = [35, 80, 1]^T \\ \boldsymbol{y}_2 = [35, 16, 1]^T \\ \boldsymbol{y}_3 = [153, 80, 1]^T \\ \boldsymbol{y}_4 = [153, 16, 1]^T \end{array} \text{ es decir } \boldsymbol{y}_i = H\boldsymbol{x}_i$$

Aplicando H a todos los puntos se realiza una “rectificación completa”