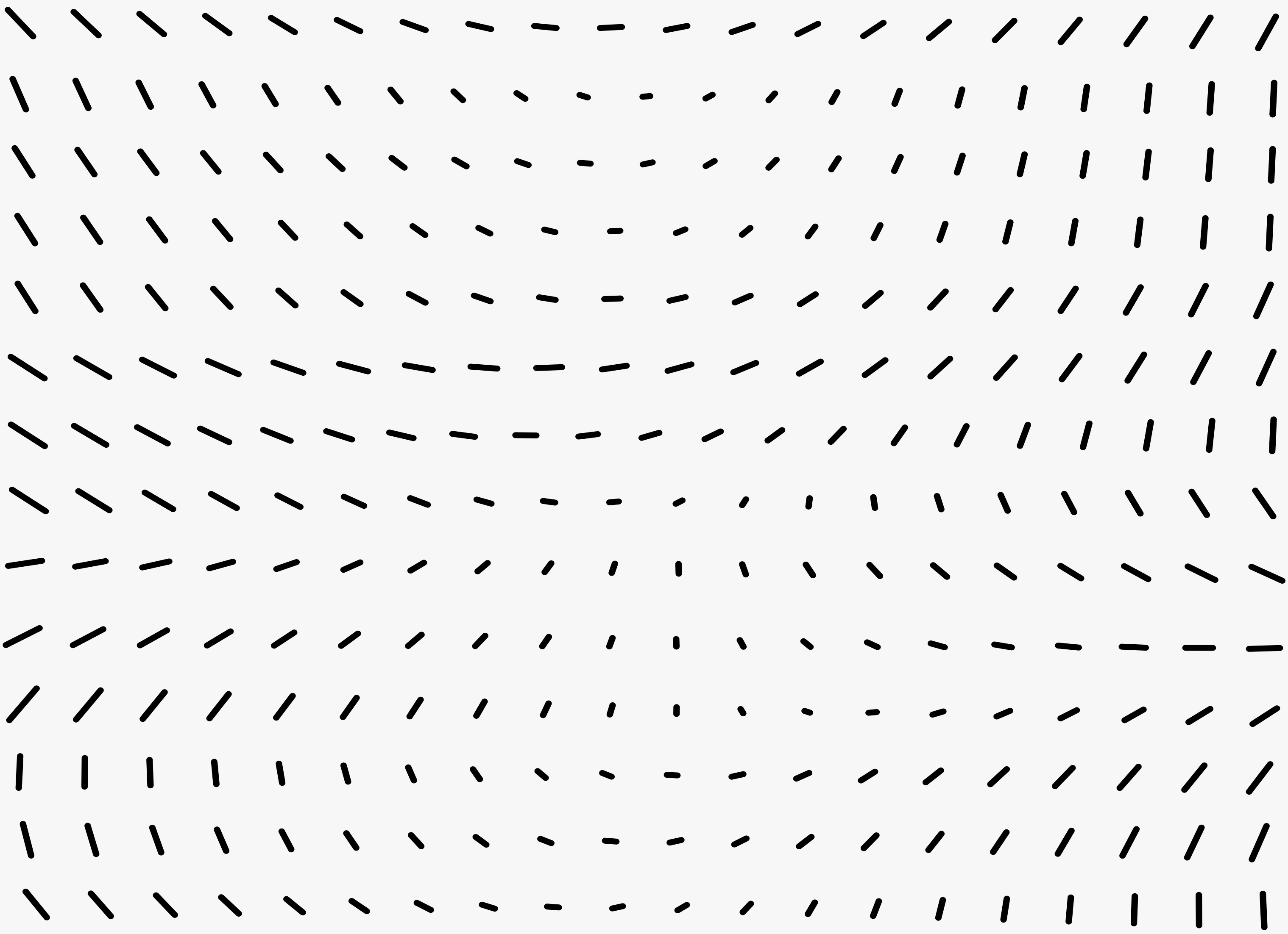
RÉVISIONS 2

CMS 2020, Exam. 2



PHYSIQUE

RAPPEL CONTRÔLE 1

- $\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{a}(t-t_0)^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$
  $\vec{v}(t) = \vec{a}(t-t_0) + \vec{v}_0$

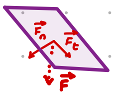
- $\vec{F} = \dot{\vec{P}} = m\vec{a}$
  $\vec{P} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k}$
  k représente un objet du système.

- $\vec{F}_{ressort} = -k\vec{d}$

- $p = \dfrac{\|\vec{F}_n\|}{S}$ ← force normale ; ← aire de la surface

---

Pression



$$\boxed{P_{moy} = \frac{\|\vec{F}_n\|}{S}}$$

Hydrostatique

fluides au repos.

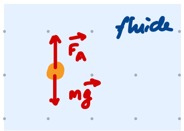
→ Intensité du fluide ne depend pas de l'orientation de la surface à une hauteur donnée

→ Loi de l'Hydrostatique :

$$\boxed{\underbrace{p(h_1) - p(h_2)}_{\Delta p} = \rho_{fluide}\,\underbrace{(h_2 - h_1)}_{\Delta h}\, g}$$

⚠ Δh est tel que $\Delta h > 0$.

→ Poussée d'Archimèdes



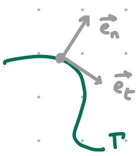
Tout objet dans un fluide subit une poussée d'Archimèdes. C'est la résultante des forces de pression qui agissent sur l'objet.

$$\vec{F_A} = -\rho_{fluide}\,\underbrace{V_{immergé}}_{\text{volume de l'objet immergé dans le fluide}}\,\vec{g}$$

VOLUME DE L'OBJET IMMERGÉ DANS LE FLUIDE.

I'M
LAZY
LAZY
LAZY

Repère non-fixe.



Le repère change avec le mouvement. C'est plus facile dans des situations telles que le mouvement circulaire.

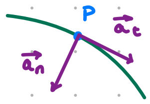
2 nouveaux axes : $\vec{e_t}$ tangent à la trajectoire
$\vec{e_n}$ normal à la trajectoire

Rappel. il faut toujours projeter sur les axes avant de manipuler les valeurs.

→ vitesse scalaire. TOUJOURS TANGENTE À LA TRAJECTOIRE.

$$\underbrace{\vec{v}}_{\text{vitesse (vecteur)}} = \underbrace{v}_{\text{vitesse scalaire le long de la traj.}} \vec{e_t}$$

→ accélération



$\vec{a_t} = \dot{v}\vec{e_t}$ (dérivée de v) accél. tangentielle

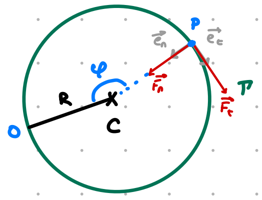
$\vec{a_n} = a_n \vec{e_n}$ accél. normale "centripède"

↳ $a_n = \frac{v^2}{R}$ où R est le rayon du cercle passant par 3 points de la traject.

↳ on définit avec cela les forces tangentielle et normale :

- $\vec{F_t} = m\vec{a_t} \xrightarrow[\vec{e_t}]{\text{selon}} F_t = ma_t$
- $\vec{F_n} = m\vec{a_n} \quad \vec{e_n} \quad F_n = ma_n = m\frac{v^2}{R}$

(mouvement circulaire)



[Valeurs angulaires

$\underbrace{s}_{\text{position abscisse curviligne}} = R\varphi$

$v = \dot{s} = R\dot{\varphi} = R\underbrace{\omega}_{\text{vitesse angulaire}}$

$a_t = \dot{v} = \ddot{s} = R\ddot{\varphi} = R\dot{\omega}$

$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2$

→ Période $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$

Énergie

$\Delta E = E(t_2) - E(t_1)$

système isolé : $\Delta E = 0$, $E = c^{ste}$

non-isolé : $\Delta E \neq 0$, $E \neq c^{ste}$

E_{cin} énergie cinétique.

$E_{cin, CM} = \frac{1}{2} m v_{CM}^2$

Théorème de l'E_{cin} :

$E_{cin, CM}(2) - E_{cin, CM}(1) = W^{ext}_{1\to 2}$

où $W^{ext}_{1\to 2}(\underbrace{\vec{F}}_{\text{force donnée e.g. } \vec{T}}) = \int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \vec{F}^{ext} \cdot d\vec{r}_{CM}$ "somme des déplacements vectoriels de $\vec{r_1}$ à $\vec{r_2}$"

E_{pot} énergie potentielle.
plusieurs formes

...grav $= mgh + c^{ste}$

...grav, génér $= -\frac{Gm_1m_2}{r^2} + c^{ste}$

...coulomb (charges élect.) $= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r} + c^{ste}$

→ le travail des forces conservatives (e.g gravitation) s'écrit comme une différence d'énergie potentielle :

$$\boxed{W_{1\to 2}(\vec{F}^{ext}_{cons.}) = E_{pot.}(\vec{r_1}) - E_{pot}(\vec{r_2})}$$

→ $E_{méc}$ énergie mécanique $\boxed{E_{méc} = E_{cin.} + E_{pot}.}$

Si toutes les forces sont conservatives, l'$E_{méc}$ du système est conservé.

$E_{méc}$ = cste.

Plus généralement

$$\boxed{E_{méc}(2) - E_{méc.}(1) = W_{1\to 2}\,(\vec{F}^{ext}_{non\text{-}conservatives})}$$

= 0 si toutes les forces sont conservatives.

Puissance

$$\boxed{P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta E}{\Delta t} = \dot{E}}$$

exprimé en $\frac{J}{s} = \underset{watt}{W}$

(changement de l'énergie au fil du temps.)

↪ rendement : ratio de l'énergie rendue lors d'une transformation d'énergie.

$$\boxed{\eta = \frac{P_{utile}}{P_{fournie}}}$$

Énergie après

Énergie avant

Gaz parfait

cste de Bolzman : $1.38 \times 10^{-23}\ JK^{-1}$ — $k \cdot N_A$

$$\boxed{pV = NkT} \iff \boxed{pV = nRT}$$

N : nombre concret de molécules de gaz

n : moles (1 mol = N_A molec.) de gaz

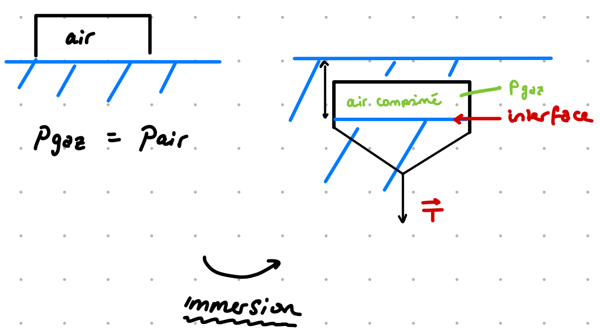
N_A : nombre d'Avogadro 6.022×10^{23}

où p pression
V volume du conteneur
T température

$$\boxed{\langle E_{cin,CM} \rangle = \frac{3}{2} NkT}$$

T température absolue [K]
$\langle E_{cin,CM} \rangle$: énergie cinétique MOYENNE du gaz.

CAS SPÉCIAL : immersion dans un bac d'eau



⚠ $P_{eau}(\delta) = P_{gaz}$

$p(\delta) - P_{air} = \rho_{eau}\, g\, \delta$

Donc $P_{gaz} = p(\delta)$

- Compression d'un gaz mène à une liquéfaction. On appelle la pression à ce moment $P_{saturation}$.

États de la matière

→ Compressibilité $\boxed{\Delta V = -\chi V_0 \Delta p}$ où χ est le coeff. de compressibilité du matériau

différence de pression

changement de volume

volume à la pression initiale

→ Dilatation thermique : dimensions d'un corps changent avec la température

- $\boxed{\Delta l = \alpha l_0 \Delta t}$ α coeff. de dilatation thermique linéique du matériau

longueur

long. init.

- $\boxed{\Delta S = 2\alpha S_0 \Delta T}$

surface

surf. initi.

- $\boxed{\Delta V = +\gamma V_0 \Delta T}$ γ coeff. de dilatation thermique volumique du matériau

volume initial

- U énergie interne d'un système : $\Sigma(E_{pot}, E_{cin})$ interne des constituants microscopiques de l'objet

↳ modifié par travail d'une force macroscopique

↳ par transmission de chaleur — contact ou rayonnement lumière-matière.

→ 1[er] principe de la Thermodynamique

$\boxed{\Delta U = W + Q}$ ⇔ $\Delta U = \underset{reçu}{W} + \underset{reçu}{Q}$ ⇔ $\underset{reçu}{Q} = \Delta U + \underset{fourni}{W}$

variation de l'énergie interne.

travail

chaleur échangée

↳ Q Chaleur spécifique

capacité thermique

$\boxed{Q = C \Delta T}$ où $C = cm$

chaleur massique spécifique.

Chaleur donnée ou restituée par le corps

⇔ $\boxed{Q = cm \Delta T}$

→ Rayonnement

Energie transportée par des ondes EM (électromagnétiques) sous forme de paquets :

$\boxed{E = h\nu}$ (h : cste de Planck 6.625×10^{-34} J ; ν : fréquence de l'onde) et sachant que $\boxed{c = \lambda \nu}$ (c : vitesse lumière 3×10^8 m/s) $\forall$ onde, on obtient :

$$\boxed{E = \frac{hc}{\lambda}}$$

→ Changement d'état.

Certains matériaux changent d'état dans certaines conditions (notamment changement de température).

À chaque état, la chaleur massique est différente, et donc Q sera différent.

(cas de l'eau) $c_{glace} \neq c_{liquide} \neq c_{vapeur}$

$$\Leftrightarrow \quad (Q_{glace} = mc_{glace}\Delta T) \neq (Q_{liq} = mc_{liq}\Delta T) \neq (Q_{vap} = mc_{vap}\Delta T)$$

À chaque changement d'état, il faut apporter (ou enlever) de la chaleur pour briser (ou créer) les liens entre les molécules → "transition de phase"

$Q_{trans} = \pm \lambda m$ où λ est la <u>chaleur latente</u> (caractéristique liée au changement d'état)

Pression de saturation

→ $P_{sat} = P_{max,\ gaz}$ → pression maximale pour rester en état gazeux

→ $P_{sat} = P_{min,\ liquide}$ → pression minimale pour rester en état liquide.

[!] à chaque température correspond une P_{sat} ($pV = NkT$; p : cste, N : cste, T : changé)

Applications

→ Brouillard : normalement $P_{vap} < P_{sat}$ (reste gazeux) mais lorsque T désend c'est possible que $P_{vap} > P_{sat}$ ⇒ formation de gouttelettes

→ Barrage 

Il y a une compression soudaine de vapeur ce qui mène à la condensation ainsi que des variations de température en altitude.

→ Évaporation d'eau lorsque $P_{vap} < P_{sat} = P_{max,\ vap}$.

↳ Humidité absolue $= P_{vap}$ (en Pa), où $P_{vap} \leq P_{sat}$.

↳ Humidité relative $H = \frac{P_{vap}}{P_{sat}}$: à quel point l'air est saturée / liquide

• Température d'ébullition

$p_{sat} = p_{min, liq}$ lorsqu'un liquide bout.

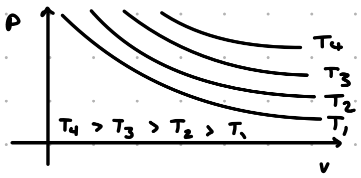
si $p_{air} > p_{min, liq}$
stabilité, pas d'échange

si $p_{air} < p_{min, liq}$
instabilité, ébullition

La température d'ébullition est définie par $p_{air} = p_{sat}(T_{ébull.})$

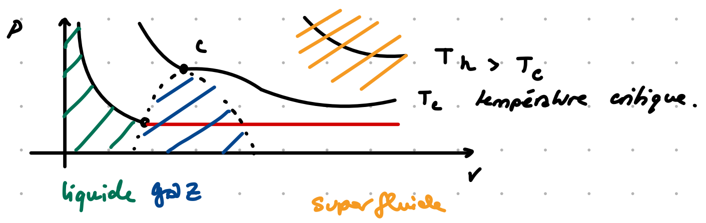
Diagramme p-V d'une substance

gaz parfait



et pas de changement d'état.

gaz réel : avec changement d'état



ALGÈBRE LINÉAIRE

RÉVISION CONTRÔLE 1.

"Les ensembles." Collections d'objets

$E_1 = \{a, b, c\}$ $\quad E_2 = \{b, c, d\}$

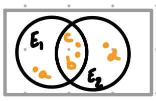
↑ élément de E_1

Si $a, b, c,$ et d sont des réels, on dit que

$E_1 \subset \mathbb{R}$ et $E_2 \subset \mathbb{R}$:

↑ sous-ensemble de
inclus dans

$\mathbb{R}$



$\mathbb{R}$ est le référentiel pris : notre "univers".

$E_1 \cup E_2 = \{x \mid x \in E_1 \text{ ou } x \in E_2\}$

↑ union   tel que

"tous les $x \in E_1$ ou les $x \in E_2$"

$= \{a, b, c, d\}$

$E_1 \cap E_2 = \{x \mid x \in E_1 \text{ et } x \in E_2\}$

↑ inter (intersection)   nombre quelconque

$= \{b, c\}$

$C_{\mathbb{R}}(E_1) = \mathbb{R} \setminus \{a, b, c\} = \mathbb{R} - \{a, b, c\}$

complémentaire dans $\mathbb{R}$ de E_1

↑ "sans" on exclut $a, b,$ et c

→ on écrit aussi $\overline{E_1}$ si le référentiel est évident.

"Les propositions" Des expressions qui sont soit vraies soit fausses.

$\forall$ pour tout

$\exists$ il existe

, ou | ou tq (virgule) tel que

$\Rightarrow$ implique
implication
$A \Rightarrow B$
↑ si A est vraie
alors
B l'est aussi

$\Leftrightarrow$ ou ssi
si et seulement si
double implication
$A \Rightarrow B$ <u>et</u> $B \Rightarrow A$

Négation non T

et $\cap$ devient ou $\cup$

ou $\cup$ devient et $\cap$

$A \Rightarrow B$ devient A et non (B)

Contraposée

$A \Rightarrow B$
↓ contraposée
non $B \Rightarrow$ non A

→ des fois, il est plus facile de prouver par la contraposée.
→ ce sont

Réciproque $A \Rightarrow B \downarrow$ réciproque $B \Rightarrow A$: si $A \Rightarrow B$ VRAI et $B \Rightarrow A$ VRAI. alors $A \Leftrightarrow B$

les deux propositions se vérifient.

Équivalence $A \Leftrightarrow B$ une implique l'autre, et vice versa

↪ il faut prouver que $A \Rightarrow B$ et que $B \Rightarrow A$.

Égalité entre deux ensembles $E_1 = E_2$

↪ il faut prouver que $E_1 \subset E_2$ et $E_2 \subset E_2$

"Preuve par récurrence"

→ On cherche un cas de base pour l'hypothèse

e.g. $n = 1$

→ Si ce cas de base fonctionne, alors on prend un cas général comme hypothèse (e.g. n)

puis on prouve que ça marche pour le prochain cas $n+1$

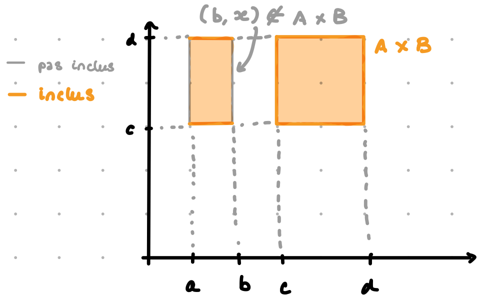
STRUCTURE GÉNÉRALE

- Cas de base
- Hypothèse : n
- Pas de récurrence : $n+1$

→ si hypothèse est vraie pour le cas de récurrence alors la proposition initiale est VRAIE.

"Produit cartésien d'ensembles" $A \times B$

e.g. $A =]a, b[\cup [c, d]$ et $B = [c, d]$. $(A, B \subset \mathbb{R})$ $(a < b < c < d)$



→ L'espace 2D correspond donc à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (noté $\mathbb{R}^2$)

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \}$$

"APPLICATIONS"

E, F deux ensembles

$f : E \to F$ application $\Leftrightarrow$ $\forall x \in E, \exists! \, y \in F$ tq. $y = f(x)$.

$x \mapsto f(x)$

"f fait correspondre tout élém. dans E à un élém. dans F"

E ensemble de départ

F ensemble d'arrivée

⚠ tout élément de E doit avoir une image par f mais pas tout élément dans F doit avoir un antécédent, et une image peut avoir plusieurs antécédents.

- $\mathrm{Im}\, f$ ensemble des images par f $\quad (\mathrm{Im}\, f \subset F)$ — F : ens. arrivée

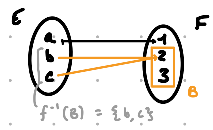
$\mathrm{Im}\, f = \{ y \in F \mid \exists x \in E,\ y = f(x) \}$

→ Pour trouver $\mathrm{Im}\, f$, il suffit de résoudre paramétriquement $f(x) = y$.

- Ensemble des images d'un ss-ens. $A \subset E$ par f

$f(A) = \{ y \in F \mid \exists x \in A,\ y = f(x) \}$

- Ensemble des images réciproques par F d'un ss-ens. $B \subset F$



$f^{-1}(B) = \{ x \in E \mid f(x) \in B \}$ → pour pouvoir utiliser $f^{-1}(y)$, $y \in F$, il faut que f soit <u>bijective</u>.

- Graphe d'une application

$G_f = \{ (x, y) \in E \times F \mid \forall\, x \in E,\ y = f(x) \}$ → ensemble de points sur un plan cartésien

- Application identité $\quad \mathrm{id}_E : E \to E,\ x \mapsto x$

ens. de départ = ens. d'arrivée

- Composition d'applications

Soient f et g deux appl. $\quad f : E \to F,\ x \mapsto f(x) \qquad g : G \to H,\ x \to g(x)$

$g \circ f$ définie si $\mathrm{Im}\, f \subset G$

$g \circ f : E \to H$
$x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$

$f \circ g$ définie si $\mathrm{Im}\, g \subset E$

$f \circ g : G \to F$
$x \mapsto f \circ g(x) = f(g(x))$

RÈGLES. ① $g \circ f \neq f \circ g$ en général (non - commutatif)
② $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ (associatif)

"Injection"

$f : E \to F$ injective $\Leftrightarrow$ Chaque élément dans E possède une <u>unique</u> image par f.
$\forall x, x' \in E,\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

Pour prouver qu'une fonction est injective, on utilise la <u>contraposée</u>. (non $Q \Rightarrow$ non P)
$\forall x, x' \in E,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ → "solution triviale"

Pour prouver qu'une fonction n'est <u>pas</u> injective on utilise la négation :
$\exists x, x' \in E,\ x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$

"Surjection"

$f : E \to F$ surjective $\Leftrightarrow$ chaque élément de F (arrivée) possède <u>au moins un</u> antécédent par f.
$\forall y \in F,\ \exists x \in E$ tq. $y = f(x)$

Pour prouver app. surj. il faut montrer que $y = f(x)$ a une solution $\forall y \in F$
$\Rightarrow \forall y \in F, \; f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$

Pour prouver non-surjective, il faut montrer la négation de la définition
$\exists y \in F, \; \forall x \in E, \; y \neq f(x)$

Ensemble des $y \in F$ c'est $\text{Im} f$. Donc forcément f surj. $\Leftrightarrow \text{Im} f = F$

"Bijection"

$f : E \to F$. f bijective $\Leftrightarrow$ f inject. et f surj.
$\forall y \in F, \; \exists! \, x \in E, \; y = f(x)$
Tout élément de F est l'image par f d'un unique élément de E.

→ On définit donc $f^{-1} : F \to E$
$y \longmapsto f^{-1}(y) = x$

⚠ f doit être bijective !
$\underbrace{f^{-1}(B)}_{\text{ensemble}} \neq \underbrace{f^{-1}(y)}_{\text{élément}}$
ensemble peut valoir $\emptyset$ — élément doit être défini

Propriétés $f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in E$
$f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in F$

→ Conséquences.
Deux ens. E et F : $\text{card}(E) = \text{card}(F) \Leftrightarrow \exists$ bijection de E dans F
(E et F finis ou infinis)

CALCUL MATRICIEL.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $A \in M_2(\mathbb{R})$ matrice 2×2 dont les élems. $\in \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$ SOMME

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ MATRICE-COLONNE

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$ PRODUIT MATRICIEL ⚠ pas commutatif. $AB \neq BA$
pas intègre. $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$

$\boxed{\text{tr } A = a + d}$ TRACE

$\boxed{\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc}$ DÉTERMINANT

: $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$: $\det(AB) = \det(BA) = \det A \det B$

RANG $\text{rg}()$

: $\det A = 0$ (et $A \neq 0$) $\Leftrightarrow$ lignes et colonnes de A sont proportionnelles $\Leftrightarrow \text{rg } A = 0$

↪ $A = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{rg } A = 0$ (MATRICE NULLE) ↪ sinon, $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \text{rg } A = 2$

INVERSE D'UNE MATRICE

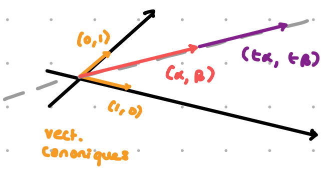
Si $\det A > 0 \Leftrightarrow \text{rg } A = 2$, alors $\exists B \in M_2(\mathbb{R})$ tq. $AB = BA = I_2$

$\Rightarrow$ On note $B = A^{-1}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

APPLICATIONS LINÉAIRES $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

→ Droite vectorielle engendrée



↳ Si $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$, c'est

$\{t(\alpha,\beta),\ t \in \mathbb{R}\} = \{(t\alpha, t\beta),\ t \in \mathbb{R}\}$

(droite d'équation $\beta x = \alpha y$)

→ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ applic. linéaire $\Leftrightarrow$ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x, y) \mapsto f(x,y) = (ax + by,\ cx + dy)$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ <u>matrice</u> de f (dans B_{can} de $\mathbb{R}^2$)

* $f(0,0) = (0,0)$ $\Rightarrow$ Pour définir f, il suffit de connaître $f(0,1)$ et $f(1,0)$.
  $f(1,0) = (a,c)$
  $f(0,1) = (b,d)$

• Si f est linéaire de matrice A et g linéaire de matrice B, alors $f \circ g$ linéaire de matrice AB

• f linéaire $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2, & f(x+x', y+y') = f(x,y) + f(x',y') \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, & f(tx, ty) = t f(x,y). \end{cases}$ Respecte add. et mult. scalaire dans $\mathbb{R}^2$

⚠ $\text{rg } f = \text{rg } A$ $\qquad \det f = \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ $\qquad$! POURQUOI PAS ?

$\text{tr } f = \text{tr } A = a + d$

• $\text{Im } f$ ens. des images.

$\text{Im } f = \{ f(x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$

$= \{ (ax + by,\ cx + dy),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$

↙ $\text{rg } f = 0$: $\text{Im } f = \{(0,0)\}$

↓ $\text{rg } f = 1$: $(a,c) = \alpha(b,d)$ droite vectorielle engendrée par (a,c) et (b,d)

↘ $\text{rg } f = 2$: l'espace $\mathbb{R}^2$ $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exists (x',y') = f(x,y))$

• $\text{Ker } f$ "noyau" l'ensemble des antécédents de $(0,0)$.

$\text{Ker } f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (0,0) \}$

↙ $\text{rg } f = 0$: L'espace $\text{Ker } f = \mathbb{R}^2$ tout (x,y) par la matrice nulle aura comme image $(0,0)$.

↓ $\text{rg } f = 1$: droite vectorielle engendrée par $(b,-a)$ et $(-c,d)$

↘ $\text{rg } f = 2$: $\text{Ker } f = (\{0,0\})$

$\begin{cases} 0 = ax + by \\ 0 = cx + dy \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -ax = by \\ -cx = dy \end{cases}$ proportionnels

- Antécédents de f : $f^{-1}(\{(x,y)\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R},\ f(x,y) = (x',y')\}$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x' = ax+by \\ y' = cx+dy \end{cases} \right\}$$

↙ $\mathrm{rg}\, f = 0$

$\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \text{si } (x',y') = (0,0) \\ \emptyset & \text{si } (x',y') \neq (0,0) \end{cases}$

↓ $\mathrm{rg}\, f = 1$

$\begin{cases} \emptyset & \text{si } (x',y') \notin \mathrm{Im} f \\ \text{droite parallèle à } \mathrm{Ker}\, f & \text{si } (x',y') \in \mathrm{Im} f \end{cases}$

↘ $\mathrm{rg}\, f = 2$

{ unique couple soln. }

Si $\mathrm{rg}\, f = 2$, f est bijective (1 seul antécédent par image $\forall$ antéc. $\in \mathbb{R}^2$)

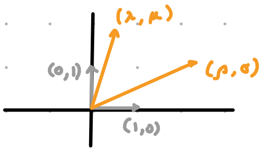
et $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \to \frac{1}{ad-bc}(dx-by,\ -cx+ay)$$

matrice $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Si $\mathrm{rg}\, f \in \{0, 1\}$ alors ni surj. ni inj.

→ Bases de $\mathbb{R}^2$



$(1,0)$ et $(0,1)$ sont les vecteurs canons

Ils forment B_{can}. (base canonique de $\mathbb{R}^2$)

(a,b) et (c,d) forment une nouvelle base

Prenons deux vecteurs $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} \rho \\ \sigma \end{pmatrix}$

tels que $t_{\vec{v_1}}(0,0) = (\lambda,\mu)$ et $t_{\vec{v_2}}(0,0) = (\rho,\sigma)$

Si $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont linéairement indépendants $(\det(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = 0)$
non-proportionnels

alors $B = (\lambda,\mu), (\rho,\sigma)$ est une base dans $\mathbb{R}^2$, c.à.d un système de coordonnées dont les transformations sont décrites différemment que dans B_{can} (voir dessin), mais dans le même "repère"

On note $P = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \rho & \sigma \end{pmatrix}$ la matrice de passage de B_{can} à B

↳ coordonnées dans B.

On peut décomposer des coordonnées de B_{can} $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ dans B :

$$\underbrace{(x,y)}_{\text{dans } B_{can}} = x'(\lambda,\mu) + y'(\rho,\sigma) \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

et (x',y') coordonnées dans B.

$$\Rightarrow [(x,y)]_B = (x',y')$$

On peut trouver $(x';y')$ en calculant :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Projection sur la droite vectorielle engendrée par (λ,μ) parallèlement à celle engendrée par (ρ,σ) :

$$(x,y) \to \underbrace{x'}_{\text{on remplace...}}(\lambda,\mu) = \frac{1}{\lambda\sigma-\mu\rho}(\underbrace{dx-\rho y}_{\text{noyau}})\underbrace{(\lambda,\mu)}_{\text{image}}$$

↪ représentations matricielles de fonctions dans B

On reprend $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$

et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Représentation de f dans B : $[f]_B = P^{-1} A P$

et $\underbrace{[f(x,y)]_B}_{\text{image de } (x,y)\ (B_{can}) \text{ par } f\ (B_{can}) \text{ dans } B} = \underbrace{[f]_B}_{f \text{ dans } B} \underbrace{[(x,y)]_B}_{\text{coordonnées de } (x,y) \text{ dans } B}$.

on aura comme colonnes de $[f]_B$:

$\underbrace{[f(\lambda, \mu)]_B}_{\text{image de } (\lambda,\mu)\ (\text{coord. } B_{can}) \text{ par } f\ (B_{can}) \text{ dans } B}$ et $\underbrace{[f(\rho, \sigma)]_B}_{\text{image de } (\rho, \sigma) \text{ par } f \text{ dans } B}$

$= [f]_B \underbrace{[(\lambda, \mu)]_B}_{\text{c'est } (1, 0)}$ $\qquad$ $= [f]_B \underbrace{[(\rho, \sigma)]_B}_{\text{c'est } (0, 1)}$

⚠ $\det [f]_B = \det f = \det A$, $\operatorname{tr} [f]_B = \operatorname{tr} f = \operatorname{tr} A$, $\operatorname{rg} [f]_B = \operatorname{rg} f = \operatorname{rg} A$

DIAGONALISATION DE MATRICES

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diagonalisable $\Leftrightarrow$ $\exists$ base B tq. $[f]_B = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix}$

↪ on appelle cette base "base propre" pour f $\qquad$ (matrice diagonale)

↪ Pour trouver $[f]_B$, on utilise le <u>polynôme caractéristique</u> de f :

$\chi_f(X) = X^2 - \operatorname{tr} A + \det A \Leftrightarrow \chi_f(X) = \det(A - X I_2)$ $\qquad$ [2 façons de trouver]

↪ On appelle ω et ξ "<u>valeurs propres</u>" de f.

ω val. propre de f $\Leftrightarrow \chi_f(\omega) = 0$ $\qquad$ [ω racine de χ_f]

$\Leftrightarrow \operatorname{rg}(f - \omega\, id_{\mathbb{R}^2}) \leq 1$

$\Leftrightarrow \underbrace{\operatorname{Ker}(f - \omega\, id_{\mathbb{R}^2})}_{\text{sous-espace propre associé à } \omega} \neq \{(0,0)\}$ → c-à-d il existe des solutions autre que $(0,0)$ [sol. triviale]

⚠ CLARIFICATION. Pourquoi utilise-t-on $f - \omega id_{\mathbb{R}^2}$?

Une valeur propre est une valeur telle que $f(x, y) = \omega(x, y)$

$$\Leftrightarrow f(x,y) - \omega\underbrace{(x,y)}\, = (0,0)$$
$$f(x,y) - \omega\, id_{\mathbb{R}^2} = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow (x,y) \in \begin{cases} 0 = f_1(x,y) - x \\ 0 = f_2(x,y) - y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x,y) \in Ker(f - \omega id_{\mathbb{R}^2})$$

→ On a donc pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: $f(\lambda, \mu)$ multiple scalaire de (λ, μ) $\Leftrightarrow$ $\exists$ valeur propre ω de f tq. $(\lambda, \mu) \in Ker(f - \omega id_{\mathbb{R}^2})$

$(f(\lambda, \mu) = \omega(\lambda, \mu))$

$\Leftrightarrow$ (λ, μ) vecteur propre de f (pour ω).

→ Pour diagonaliser une matrice A, il faut donc, dans une base $\mathcal{B} = (\lambda, \mu), (\rho, \sigma)$

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\lambda, \mu) = \omega(\lambda, \mu) \\ f(\rho, \sigma) = \xi(\rho, \sigma) \end{cases}$$

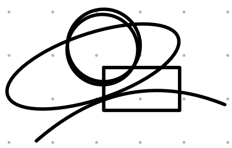
$\Rightarrow$ il faut que $[f]_{\mathcal{B}}$ soit formé de vecteurs propres.

↪ il faut donc savoir si $\exists$ base $\mathcal{B}$ tq. $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix}$

Pour cela, on se sert de $\chi_f(X)$:

Δ_{χ_f} (discriminant)

- $\Delta < 0$ → f n'est pas diagonalisable
- $\Delta = 1$ → f diagonalisable $\Leftrightarrow$ f est une homothétie et A est déjà diagonalisée
- $\Delta > 0$ → f diagonalisable



RÉDUCTIONS D'APPLICATIONS NON DIAGONALISABLES.

- si $\Delta = 0$ et f n'est pas une homothétie, alors $\chi_f(X) = (X - \omega)^2$

$Ker(f - \omega id_{\mathbb{R}^2}) = Im(f - \omega id_{\mathbb{R}^2})$ → droite vectorielle de vecteurs propres de ω

Donc $\forall (\rho, \sigma) \notin Ker(f - \omega id_{\mathbb{R}^2})$,

$\exists\ \mathcal{B} = (\lambda, \mu), (\rho, \sigma)$ tq. $(\lambda, \mu) = (f - \omega id_{\mathbb{R}^2})(\rho, \sigma)$

et $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$ (ou) $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 1 & \omega \end{pmatrix}$

Pour trouver B, il suffit de prendre $(\rho, \sigma) \in \mathbb{R}^2$ quelconque et trouver (λ, μ) par $(A - \omega I_2)\begin{pmatrix}\rho\\ \sigma\end{pmatrix}$.

- Si $\Delta < 0$, alors $\chi_f(X)$ peut être écrit sous la forme $\chi_f(x) = (x-\omega)^2 + \xi^2$

 (on trouve sinon $\omega = \frac{\operatorname{tr} A}{2}$, $\xi = \pm\sqrt{\det A - \left(\frac{\operatorname{tr} A}{2}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{-\Delta}{2}}$)

 χ_f n'a pas de racines réelles.

 Cependant pour tout choix de $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$, $\exists$ base $B : (\lambda, \mu), (\rho, \sigma)$ tq.

 $[f]_B = \begin{pmatrix}\omega & -\xi\\ \xi & \omega\end{pmatrix}$ ou $[f]_B = \begin{pmatrix}\omega & \xi\\ -\xi & \omega\end{pmatrix}$

 et (μ, σ) est déterminé en résolvant $f(\lambda, \mu) = [(\omega, \xi)]_B$
 (car $(\omega, \xi) = [f(\lambda,\mu)]_B$)

 Formes à résoudre : $\Leftrightarrow f(\lambda,\mu) = \omega(\lambda,\mu) + \xi(\sigma,\lambda)$
 $\Leftrightarrow (\sigma, \lambda) = \frac{1}{\xi}\left(f(\lambda,\mu) - \omega(\lambda,\mu)\right)$

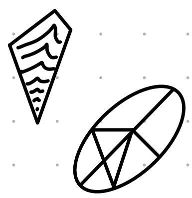
FORME RÉDUITE

On dit que la forme réduite d'une application f dans une base B est simplement $[f]_B$ comme on a trouvé ci-dessus. On note la forme réduite R :

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$, homothétie	$\Delta = 0$, pas homothétie	$\Delta < 0$
$R = \begin{pmatrix}\omega & 0\\ 0 & \xi\end{pmatrix}$	$R = \begin{pmatrix}\omega & 0\\ 0 & \omega\end{pmatrix}$	$R = \begin{pmatrix}\omega & 0\\ 1 & \omega\end{pmatrix}$	$R = \begin{pmatrix}\omega & -\xi\\ \xi & \omega\end{pmatrix}$
$R = \begin{pmatrix}\xi & 0\\ 0 & \omega\end{pmatrix}$		$R = \begin{pmatrix}\omega & 1\\ 0 & \omega\end{pmatrix}$	$R = \begin{pmatrix}\omega & \xi\\ -\xi & \omega\end{pmatrix}$

→ Applications

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (x,y) \longmapsto (ax+by,\ cx+dy)$
avec $A = [f]_{B_{can}} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$



- Puissance n-ième.

 On peut trouver f^n en passant par la forme réduite.

$$R = P^{-1}AP \Leftrightarrow \begin{aligned} A &= PRP^{-1}\\ A^n &= (PRP^{-1})^n\\ &= PR\underbrace{P^{-1}P}_{I_2}RP^{-1}PRP^{-1}\dots PRP^{-1}\\ &= PRRR\dots RP^{-1}\end{aligned}$$

$$\boxed{A^n = PR^nP}$$

 R^n est plus facile à calculer.

Si $\Delta > 0$

$$R^n = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \omega^n & 0 \\ 0 & \xi^n \end{pmatrix}$$

Si $\Delta = 0$ (pas homothétie)

$$R^n = \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \omega^n & n\omega^{n-1} \\ 0 & \omega \end{pmatrix}^n$$

Si $\Delta < 0$

Il faut convertir R sous forme polaire.

$$\begin{pmatrix} \omega & -\xi \\ \xi & \omega \end{pmatrix} = \rho \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{R_\theta}$$

$\rho = \sqrt{\det A}$, $\cos\theta = \frac{\omega}{\rho}$, $\sin\theta = \frac{\xi}{\rho}$

$$R^n = \begin{pmatrix} \omega & -\xi \\ \xi & \omega \end{pmatrix}^n = \rho^n R_\theta^{\ n}$$

- Représentation Matricielle

On cherche à savoir si pour une matrice donnée $[\sigma]_B$, $\exists$ base B qui transforme $[\sigma]_{B_{can}} = A$ en $[\sigma]_B$

↳ On a, si $\Delta \neq 0$:

$$\{ [\sigma]_B, \ B \text{ base de } \mathbb{R}^2 \} = K \in M_2(\mathbb{R}), \ \underbrace{\operatorname{tr} K = \operatorname{tr} A \text{ et } \det K = \det A}_{\chi_K(x) = \chi_A(x)}.$$

⚠ Il faut que $\chi_A = \chi_K$!

↳ Et si $\Delta = 0$, $\chi_A = (x-\omega)^2$:

$$\{ [\sigma]_B, \ B \text{ base de } \mathbb{R}^2 \} < \begin{array}{l} \{\omega I_2\} \text{ si } \sigma = \omega\, id_{\mathbb{R}^2} \\ \{K, \chi_K(x) = (x-\omega)^2\} \setminus \{\omega I_2\} \\ \text{(même } \omega) \end{array}$$

★ Pour trouver B sachant que $\underline{\chi_K = \chi_A}$, val. propr. $\{\omega, \xi\}$

★ GOLD STAR for you!

On cherche :
- S matrice de projection pour A
- T matrice de projection pour K

} → Même R

(rappel : on trouve S et T en trouvant les espace vectoriels engendrés $A - \omega\, id_{\mathbb{R}^2}$, $A - \xi\, id_{\mathbb{R}^2}$ et $K - \omega\, id_{\mathbb{R}^2}$, $K - \xi\, id_{\mathbb{R}^2}$ puis en trouvant des bases).

On aura éventuellement $\begin{cases} R = S^{-1}AS \\ R = T^{-1}KT \end{cases} \Leftrightarrow S^{-1}AS = T^{-1}KT$

$$\Leftrightarrow K = \underbrace{TS^{-1}}_{P^{-1}} A \underbrace{ST^{-1}}_{P}$$

on résoud ensuite pour $P = ST^{-1}$.

↳ des fois c'est possible d'exprimer $[f]_{(\lambda,\mu),(\rho,\sigma)} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

comme $\begin{cases} f(\lambda,\mu) = [(a,c)]_B = a(\lambda,\mu) + c(\rho,\sigma) \\ f(\rho,\sigma) = [(b,d)]_B = b(\lambda,\mu) + d(\rho,\sigma) \end{cases}$ et comparer à un autre $[f]_B$ pour trouver une nouvelle base.

ANALYSE 1

RÉVISION CONTRÔLE 1

→ **RESOLUTION DE PROBLÈMES ALGÉBRIQUES ...**

①. AVEC VALEUR ABSOLUE

• égalité $|x| = a$ ⇒ CONDITION DE POSITIVITÉ (D_{pos}) :

$$\boxed{a \geqslant 0}$$

$D_{pos} = \{x \in D_{def} \mid a \geqslant 0\}$

↑ DOMAINE DE DÉFINITION (e.g. $\mathbb{R}$)

$x = a$ $\boxed{\text{OU}}$ $x = -a$

$S_1 = \{x \mid x = a\} \underbrace{\cap D_{pos}}_{\text{" condition "}}$ $\quad S_2 = \{x \mid x = -a\} \underbrace{\cap D_{pos}}_{\text{" condition "}}$

$\Rightarrow S = S_1 \cup S_2$

↑ union : "ou"

• inégalité (2 cas)

CAS I : $|x| \leqslant a$ (marche aussi pour $|x| < a$)

⚠ Pas de D_{pos} (déjà défini par l'inégalité)

$x \in [-a, a]$

$x \in]-a, a[$

→ Faire dessin, c'est assez rapide.

⇔

$x \geqslant -a$ $\boxed{\text{ET}}$ $x \leqslant a$

($>$) ($<$)

$S_a = \{x \mid x \geqslant -a\}$ $\quad S_b = \{x \mid x \leqslant a\}$

$S = S_a \cap S_b$

inter : "et"

CAS II : $|x| \geqslant a$ (marche aussi pour $x > a$)

$x \in]-\infty, -a] \cup [a, \infty[$

[ ]

⇔

$x \leqslant -a$ $\boxed{\text{ou}}$ $x \geqslant a$

($<$) ($>$)

$S_a = \{x \mid x \leqslant -a\}$ $\quad S_b = \{x \mid x \geqslant a\}$

$S = S_a \cup S_b$

union : "ou"

② AVEC RACINE CARRÉE. "IRRATIONNELS"

• égalité : $\sqrt{x} = a$ $\Rightarrow$ DOMAINE DE DÉFINITION D_{def}

↳ donc $x = a^2$ $x \geqslant 0$ (on résoud dans $\mathbb{R}$)

$\Rightarrow S = \{x \mid x = a^2\} \cap D_{pos}$ (ici $x = a^2$, $S = \{a^2\} \cap D_{pos}$
$= \{a^2\}$ car $a^2 \geqslant 0$)

• inégalité (2 cas)

CAS I : $\sqrt{x} \leqslant a$ (ou $\sqrt{x} < a$)
+ 2 sous-cas

$\Rightarrow D_{def}$: $\boxed{x \geqslant 0}$

⚠ Si a contient une expression avec x, alors :

A Si $a \geqslant 0$:

CONDITION :
$\rightarrow D_{cond} = \{x \mid a \geqslant 0\}$

$\Rightarrow x \leqslant a^2$ ($<$)

$\Leftrightarrow S_A = \{x \mid x \leqslant a^2\} \cap D_{def} \cap D_{cond}$ ($<$)

(ici $]-\infty, a^2] \cap [0, \infty[\cap \mathbb{R}$) ($[$)

$= [0, a^2]$ ($[$)

B Si $a < 0$:

CONDITION :
$\rightarrow D_{cond} = \{x \mid a < 0\}$

$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{x}}_{\geqslant 0} \leqslant \underbrace{a}_{< 0}$

⊕ $\geqslant$ ⊖

⊕ $\leqslant$ ⊖ ? ($<$) ↪ pas possible !

$\Rightarrow S = \varnothing \cap D_{cond} \cap D_{def}$

$S = S_A \cup \underbrace{S_B}_{\varnothing}$ $\Rightarrow$ $\boxed{S = S_A}$

union : "ou"

CAS II : $\sqrt{x} \geqslant a$ (ou $x > a$)

$\Rightarrow D_{def}$: $\boxed{x \geqslant 0}$

⚠ Si a contient une expression avec x, alors :

A Si $a \geqslant 0$

CONDITION :
$\rightarrow D_{cond} = \{x \mid a \geqslant 0\}$

$\Rightarrow x \geqslant a^2$ ($>$)

$\Leftrightarrow S_A = \{x \mid x \geqslant a^2\} \cap D_{def} \cap D_{cond}$ ($>$)

(ici $[a^2, \infty[\cap [0, \infty[\cap \mathbb{R}$) ($]$)

$= [a^2, \infty[$ ($]$)

B Si $a < 0$

CONDITION :
$\rightarrow D_{cond} = \{x \mid a < 0\}$

$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{x}}_{\geqslant 0} \geqslant \underbrace{a}_{< 0}$ ($>$)

⊕ ⊖

↪ TOUJOURS VRAI $\Rightarrow \mathbb{R}$

$S_B = \mathbb{R} \cap D_{def} \cap D_{cond}$ (" plein ")

$S = S_A \cup S_B$

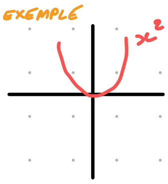
union : "ou"

③ AVEC LES DEUX (Astuce) : • Décomposer depuis le plus à l'extérieur puis résoudre les sous-cas, et éventuellement les sous-cas des sous-cas, etc.

• Faire un bilan des solutions à la fin.

④ AVEC DES QUADRATIQUES : (Pleurer. C'est horrible.).

EXEMPLE



$ax^2 + bx + c = 0$
→ RACINES D'UN TRINÔME.

$\Delta = b^2 - 4ac$

Si $\Delta > 0$: deux solutions.
$\Delta = 0$: une seule solution
$\Delta < 0$: pas de solution.

- Si b est divisible par 2, on peux utiliser la discriminante réduite :

$b' = \frac{b}{2}$ $\quad\quad \Delta' = (b')^2 - ac$ $\quad\quad \rightarrow$ même fonctionnement que Δ.

→ RÉSOLUTION DES RACINES :

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}} \xrightarrow{\text{(on avec } b')} \boxed{x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}}$$

→ simplifie les calculs

$$\frac{-2b' \pm \sqrt{(2b')^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-\cancel{2}b' \pm \cancel{2}\sqrt{b'^2 - ac}}{\cancel{2}a}$$

- On peut en déduire quelques formules utiles (formules de Viète) :

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \boxed{-\frac{b}{a}}$$

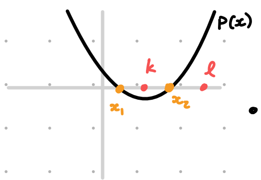
$$x_1 x_2 = \frac{(-b + \sqrt{\Delta})(-b - \sqrt{\Delta})}{(2a)^2} = \frac{(b^2 - \Delta)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4a}{4a^2} = \frac{\cancel{4}ac}{\cancel{4}a^2_{a}} = \boxed{\frac{c}{a}}$$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$$x_s = \underbrace{\frac{x_1 + x_2}{2}}_{\text{moyenne des produits}} = \frac{-\frac{b}{a}}{2} = \boxed{-\frac{b}{2a}}$$

↑ sommet de la parabole (abscisse)

- Quand on parle de valeur à l'intérieur ou à l'extérieur de racines...



$x_1 < k < x_2 < l$ $\quad$ et $\quad P(x) = ax^2 + bx + c$ $\quad a > 0$

Cette situation peut être exprimée autrement :

- $P(l) < 0 \quad , \quad a > 0$

  $\Rightarrow \text{sgn}(P(l)) = -\text{sgn}(a) \Leftrightarrow \underbrace{P(l) \cdot a}_{\text{signes opposés}} < 0$ $\quad \Rightarrow$ expression négative

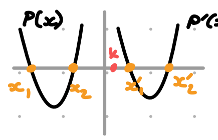
- $P(k) > 0, \quad a > 0$

  $\Rightarrow \text{sgn}(P(k)) = \text{sgn}(a) \Leftrightarrow \underbrace{P(k) \cdot a}_{\text{mêmes signes}} > 0$ $\quad \Rightarrow$ expr. positive

on utilise ces dernières inégalités dans des problèmes qui demandent certaines conditions

⚠ ATTENTION ! On ne sait des fois pas si $x_1 > x_2$ ou $x_1 < x_2$

Ex. graphique.



→ P(x) et P'(x) sont symétriques... c'est l'incertitude qu'on doit vérifier

Il faut donc comparer k au sommet $x_s - \frac{2b}{a}$

→ Si $x_s > k$, alors x_1 et x_2 strictement plus grands que k.

→ Si $x_s < k$, alors x_1 et x_2 strictement plus petits que k.

⑤ AVEC DES PARMÈTRES (notamment le fameux m)

→ MÉTHODE DE RÉSOLUTION : Toujours résoudre pour x (ce qu'on veut savoir).

↳ Lors de la résolution de x il y aura surement des comparaisons à zéro qu'il faudra faire, ce que donnera des intervalles pour m.

⇒ EXEMPLE $mx \geqslant m$

(Résoudre dans $\mathbb{R}$)

⚠ On ne peut pas toute de suite diviser par m car on ne connaît pas le signe de m.

→ donc :
- Si $m > 0$ (positif) :
  $\boxed{x \geqslant 1}$ $S = [1, +\infty[$
  division par m positif : pas de changement de sens
- Si $m < 0$: (négatif) :
  $\boxed{x \leqslant 1}$ $S =]-\infty, 1]$
  division par m négatif : changement de sens de l'inéq.
- Si $m = 0$:
  $0 \geqslant 0$ $\boxed{S = \mathbb{R}}$

⑥ ISOPÉRIMÉTRIQUES

C'est généralement des problèmes géométriques qui demande de trouver la valeur maximale en fonction de plusieurs conditions.

→ on veut optimiser ⇒ il faut donc généralement trouver le sommet de la fonction (quadratique : $-\frac{b}{2a}$)

IMPORTANT ! Il ne faut PAS oublier les restrictions géométriques associées

→ EXEMPLE angle α d'un triangle rectangle (qui n'est pas 90°) doit forcément satisfaire la condition :

$\boxed{0° < \alpha < 90°}$ ⇔ $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$

→ LES SÉRIES ... une suite de termes définie par un terme général.
* convergence : la série se "stabilise" à une certaine valeur lorsque n tend vers ∞. (converge).
* divergence : la série ne se "stabilise" jamais. Elle diverge.

⑦ LE THÉORÈME DES DEUX GENDARMES ...

Soit (a_n) une série, et b_n et c_n deux séries qui convergent vers k. tels que $b_n \leqslant a_n \leqslant c_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

"minorant" de (a_n) "majorant" de (a_n)

Alors on peut dire, par le théorème des deux gendarmes, que :

$$\lim_{n\to\infty} b_n \leqslant \lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} c_n$$

Or si (b_n) et (c_n) convergent vers k, alors (a_n) aussi converge vers k:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = k.$$

$$k \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq k \quad \to \text{forcément } \boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = k}$$

8 CALCUL DES LIMITES.

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ → c'est assez logique! plus en plus petit.
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$ ← $n \neq 0$ car $\to \infty$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}(1+\cancel{\frac{1}{n}}^{0})}{\cancel{n}(1+\cancel{\frac{2}{n}}^{0})} = \frac{1}{1} = 1$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{n} = \frac{\sqrt{n^2(\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2})}}{n} = \frac{\cancel{n}\sqrt{\cancel{\frac{1}{n}}^{0}+\cancel{\frac{2}{n^2}}^{0}}}{\cancel{n}} = \frac{0}{1} = 0.$

→ des fois il faut multiplier par le conjugé ... Donc $\sqrt{a}+n \Rightarrow \sqrt{a}-n$

⚠ changer le signe entre les deux termes

9 SÉRIES GÉOMÉTRIQUES.

$$A_n = aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^n \qquad n \in \mathbb{N}^*$$
$$= a\underbrace{(q + q^2 + \dots q^n)}$$

Terme général : $\frac{1-q^n}{1-q}$

$$\Rightarrow A_n = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) \quad (q \neq 1)$$

→ si $q = 1$: on a $A_n = \underbrace{a + a + \dots + a(1)^n}_{n \text{ fois}}$ $= na$

↳ Convergence :

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = a \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} 1-q^n}$$

$\boxed{q \neq 1}$

→ Étude de cette limite.

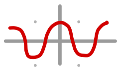
- $\lim_{n\to\infty} 1-q^n = 0$ si $0 < |q| \leq 1$
- $\lim_{n\to\infty} 1-q^n = \pm\infty$ si $|q| > 1$
- $\lim_{n\to\infty} 1-q^n = 1$ si $q = 0$

→ FONCTIONS RÉELLES $\quad f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ où $\forall x \in A$ on a au plus une image dans $\mathbb{R}$ que l'on note $f(x)$.

nom de la fonct. $\qquad \underbrace{A}_{D_f}$ domaine d'entrée

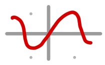
$Im\, f$: ensemble des images de f

$\mathcal{G}_f$: graphe de f

① PARITÉ  et

$\forall x \in D_f, \quad f(-x) = -f(x)$

e.g. $\cos x$, x^2, $|x|$ ...

IMPARITÉ 

$\forall x \in D_f, \quad f(-x) = -f(x)$

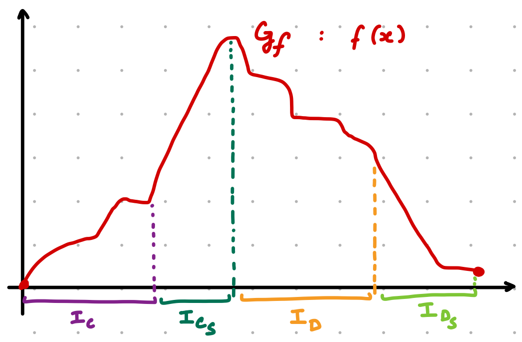
e.g. $\sin x$, x^3...

② PÉRIODICITÉ $\qquad \forall x \in D_f, \quad f(x+T) = f(x)$

f est donc T-périodique

* on doit noter que T est la seule période de f car elle doit être la plus petite

③ CROISSANCE, DÉCROISSANCE, MONOTONIE



① $\forall x \in I_c, \quad f(x+1) \geq f(x)$

f est CROISSANTE SUR I_c. (et I_{c_s})

② $\forall x \in I_{c_s}, \quad f(x+1) > f(x)$

f est STRICTEMENT CROISSANTE SUR I_{c_s}

③ $\forall x \in I_D, \quad f(x+1) \leq f(x)$

f est DÉCROISSANTE SUR I_D (et I_{D_s})

④ $\forall x \in I_{D_s}, \quad f(x+1) < f(x)$

f est STRICTEMENT DÉCROISSANTE SUR I_{D_s}

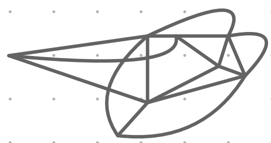
f MONOTONE sur $I \subset D_f$ ssi

→ $\forall x \in I$, f est décroissante / croissante

STRICTEMENT MONOTONE $I \subset D_f$ ssi

→ $\forall x \in I$, f est strictement décroissante / strictement croissante.

↪ e.g. f PAS monotone sur $I_{c_s} \cap I_D$.



THÉORÈME ✱ Si f est strictement monotone sur D_f, alors elle est injective

④ COMPOSITIONS

Soient f et g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq $Im\, f \subset D_g$

Alors $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto g \circ f(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in D_f$.

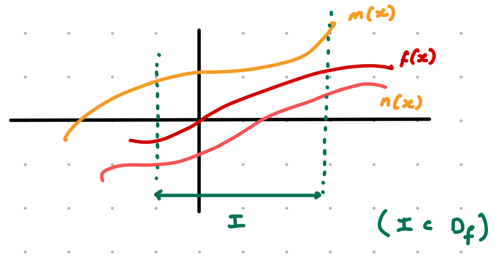
e.g $f(x) = x^2$ $\quad \{y \in \mathbb{R},\ y = x^2\}$

$g(x) = \sqrt{x}$ $\quad =$

$\Rightarrow g \circ f = g(f(x)) = \sqrt{x^2}$

$= \boxed{|x|}$

5. MAJORATION ET MINORATION.



$\forall x \in I, \quad m(x) \geq f(x)$

f est MAJORÉE PAR $m(x)$

$\forall x \in I, \quad n(x) \leq f(x)$

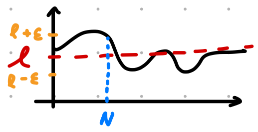
f est MINORÉE par $n(x)$

→ Puisque f est MAJORÉE <u>et</u> MINORÉE sur I, on dit qu'elle est BORNÉE sur I.

→ LIMITE D'UNE FONCTION...

6. À L'INFINI

Soit $f(x)$ définie au voisinage de ∞.



$f(x)$ converge vers $\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \ell$

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \ \exists N > 0, \ (N = N(\varepsilon)) \ \text{tq.} \\ x > N \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \end{array}}$$

même raisonnement pour voisinage de $-\infty$, MAIS

$$x < N \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$$

↳ pour prouver à l'aide de la définition, il faut donc résoudre une équation provenant de la proposition.

7. CARACTÉRISÉE PAR DES SUITES

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $+\infty$.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \underbrace{(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}}_{\text{suite}} \ \text{tq.} \ \lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$$

→ on en déduit que les limites de fonctions peuvent être calculées comme celles des suites

8. IMPROPRE (qui ne converge pas)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

a. f déf. voisinage de ∞

→ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \ \exists N < 0$ tq. $x > N \Rightarrow f(x) > A$

→ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A < 0, \ \exists N < 0$ tq. $x > N \Rightarrow f(x) < A$

b. f déf. voisinage de $-\infty$

→ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \ \exists N < 0$ tq $x < N \Rightarrow f(x) > A$

→ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A < 0, \ \exists N < 0$ tq. $x < N \Rightarrow f(x) < A$

⑨ RÈGLES DE CALCUL (limites infinies et finies)

[Soit $\lim_{x \to c} f(x) = a$ et $\lim_{x \to c} g(x) = b$ $\quad (c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\})$

$(a, b \in \mathbb{R})$

$(f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies au voisin. de c).

- $\lim_{x \to c} |f(x)| = |a|$
- $\lim_{x \to c} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$
- $\lim_{x \to c} f(x)\, g(x) = ab$

△ $g(x) \neq 0$ au voisinage de c et $b \neq 0$:

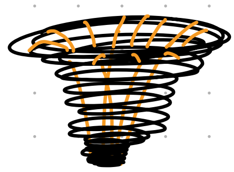
$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$$

[Cas spéciaux $\lim_{x \to c} f(x) = a$ et $\lim_{x \to c} g(x) = +\infty$ (marche aussi avec $-\infty$)

- $\lim_{x \to c} (f(x) \pm g(x)) = \pm\infty$
- $\lim_{x \to c} f(x)\, g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ -\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$
- $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ [$\frac{1}{\infty}$ devient tellement petit ...]

[ou encore $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = \infty$ [marche aussi avec $-\infty$]

- $\lim_{x \to \infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$
- $\lim_{x \to \infty} f(x)\, g(x) = +\infty$



⑩ INDÉTERMINATION ✗ TEACHER FAVORITE!

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$ → on ne connait pas les limites exactes car ces opérations rendent des expressions qui ne sont pas claires...

* Dans le cas des limites :

[Soient $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$ et $\lim_{x \to c} h(x) = \lim_{x \to c} i(x) = +\infty$ [on peut aussi prendre $\lim = -\infty$]

- $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ← interdit!
- $\lim_{x \to c} f(x) \cdot h(x) = 0 \cdot \infty$
- $\lim_{x \to c} (h(x) - i(x)) = \infty - \infty$
- $\lim_{x \to \infty} \frac{h(x)}{i(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ △ $(\neq 1)$

(11) THÉORÈMES UTILES POUR CALCULER DES LIMITES

→ Théorème des deux gendarmes

Soient $a, b, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

et a MAJORANT de f et b MINORANT de f au voisinage de $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

Alors $a(x) \geq f(x) \geq b(x)$ au voisinage de c

THEOR. DES GEND. $\Rightarrow \lim\limits_{x \to c} a(x) \geq \lim\limits_{x \to c} f(x) \geq \lim\limits_{x \to c} b(x)$

, THEOR. DES GEND : si $\lim\limits_{x \to c} a(x) = \lim\limits_{x \to c} b(x) = \ell$, alors $\underline{\lim\limits_{x \to c} f(x) = \ell}$.

→ Théorème du gendarme

Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

g MAJORANT ou MINORANT de f au voisinage de $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ et $\lim\limits_{x \to c} g(x) = -\infty$ / $+\infty$

Au voisinage de c, $g(x) \geq f(x)$ / $\leq$

th. gendarme $\Rightarrow \lim\limits_{x \to c} g(x) \geq \lim\limits_{x \to c} f(x)$ / $\leq$

$\Rightarrow -\infty \geq \lim\limits_{x \to c} f(x)$ / $+\infty \leq$

forcément par le théorème du gendarme, $\underline{\lim\limits_{x \to c} g(x) = \lim\limits_{x \to c} f(x) = -\infty}$ / $+\infty$

→ Théorème $0 \times$ borné

soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définis au voisinage de $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, et $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 0$

et $g(x)$ une fonction bornée sur D_g

Alors $\lim\limits_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x \to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to c} g(x) = 0 \cdot \underbrace{\lim\limits_{x \to c} g(x)}_{\text{borné}} = 0$

théorème $0 \times$ borné.

→ Théorème $\infty \times$ signe constant

On reprend f, g, et c comme avant, mais $\lim\limits_{x \to c} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$)

et $g(x) \geq n > 0$ (nombre non-nul) (g doit être donc de signe constant)

ou $g(x) \leq m < 0$ (STRICT.) au voisinage de c.

Alors $\lim\limits_{x \to c} \underbrace{f(x)}_{\infty} \underbrace{g(x)}_{>0} = +\infty$

∞, <0 $= -\infty$

→ Théorème "∞ + borné"

Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définis au voisn. de $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

↳ $g(x)$ <u>minorée</u> au voisn. de c et $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = +\infty$

↳ $g(x)$ <u>majorée</u> au voisin de c et $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = -\infty$

12 EN x_0 ($x_0 \in \mathbb{R}$)

→ VOISINAGE ÉPOINTÉ : $]x_0 - \delta, \underbrace{x_0 [\cup] x_0}_{\text{on exclut } x_0 \text{ du voisinage}}, x_0 + \delta[$ $(\delta > 0)$

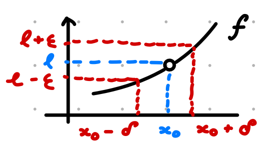
(on pourra quand même trouver la limite en x_0)

On exprime la LIMITE EN x_0 par la proposition suivante.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ déf. au voisinage épointé de x_0.

Alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff$ $\boxed{\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \delta = \delta(\varepsilon, x_0, f), \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon}$

"f converge vers ℓ"



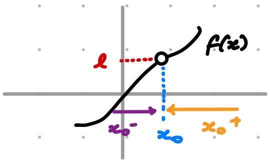
"Tout ε-voisinage de ℓ contient l'image par f d'un δ-voisinage épointé de f"

* souvent pour prouver la convergence à un c, on en revient à résoudre une inéquation avec la définition.

Sinon, on utilise les RÈGLES DE CALCUL (9)

→ LIMITE À GAUCHE et À DROITE

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff$ (ssi) $\underbrace{\lim_{x \to x_0^+}}_{\text{EN APPROCHANT PAR LA DROITE}} f(x) = \underbrace{\lim_{x \to x_0^-}}_{\text{EN APPROCHANT PAR LA GAUCHE}} f(x) = \ell$



définitions "officielles" :

GAUCHE. $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0$ tq.

$\underbrace{x_0 - \delta < x < x_0}_{\iff x \in]x_0 - \delta, x_0[} \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

DROITE. $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0$ tq.

$\underbrace{x_0 < x < x_0 + \delta}_{\iff x \in]x_0, x_0 + \delta[} \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

(13) INFINIMENT PETITS ÉQUIVALENTS (IPE).

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ déf. sur voisin. ép. de $x_0 \in \mathbb{R}$

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$, alors on note $f(x) \sim g(x)$

→ et $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$.

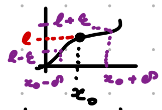
Au voisinage épointé de 0, on a :

$\boxed{\sin x \sim x}$ et $\boxed{1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}}$ et $\boxed{\tan x \sim x}$

* on peut donc remplacer une expression pour l'autre dans une évaluation de limite, mais que si la limite tend vers 0 et l'expression générale est factorisée (JAMAIS DANS UNE SOMME)

→ CONTINUITÉ D'UNE FONCTION

f continue en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$



$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq $0 \leq |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

3 conditions
- $x_0 \in D_f$ et $f(x_0)$ existe
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe, $f(x)$ converge vers ℓ en x_0.
- $\ell = f(x_0)$

(14) $C^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle I.

e.g. $\sin x \in C^0(\mathbb{R})$

(15) RÈGLES DE CALCUL (CONTINUITÉ)

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f, g \in C^0(\{x_0\})$
(continues en x_0)

- $|f| \in C^0(\{x_0\})$
- $f \pm g \in C^0(\{x_0\})$
- $f \cdot g \in C^0(\{x_0\})$
- $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow \dfrac{f}{g} \in C^0(\{x_0\})$

(16) CONTINUITÉ D'UNE COMPOSÉE

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq.
→ f déf. voisin. épointé de x_0
→ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ $(a \in \mathbb{R})$
→ $g \in C^0(\{a\})$.

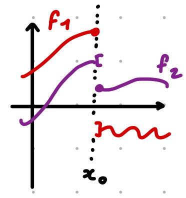
Alors $\lim\limits_{x \to x_0} g \circ f = \lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)) = g(a)$.

→ $g \circ f$ continue en $f(a)$.

(17) CONTINUITÉ À GAUCHE, À DROITE.

À GAUCHE $f(x)$ continue à gauche de x_0 $\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

À DROITE $f(x)$ continue à droite de x_0 $\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$



$\rightarrow$ f continue $\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

(18) PROLONGEMENT PAR CONTINUITÉ

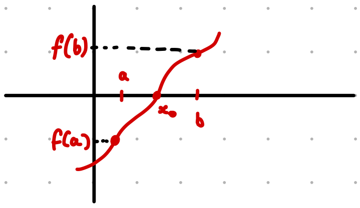
Soit f défini sur voisinage épointé de x_0 mais pas à x_0.

On peut prolonger f par continuité ssi $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tq. $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$.

On note alors $\hat{f}$ la fonction prolongée et $\hat{f}(x_0) = \ell$.

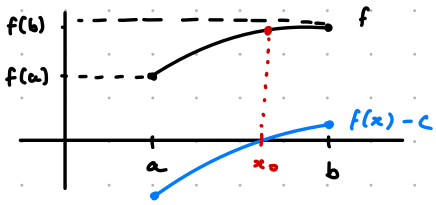
(19) THÉORÈME DE LA VALEUR INTERMÉDIAIRE

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle $[a,b]$.
Si $f(a) \cdot f(b) > 0$ alors $\exists x_0 \in [a,b]$ tq. $f(x_0) = 0$.



$\rightarrow$ pour utiliser ce théorème avec deux fonctions qui ne passent pas forcément par 0, on prend la <u>différence</u> des deux fonctions

$\rightarrow$ ou on utilise le <u>corollaire</u> :



$\forall x_0 \in [a,b]$, $\exists c$ tq $f(x_0) - c = 0$.

(ou)

c compris entre $f(a)$ et $f(b) \Rightarrow \exists x_0 \in \,]a,b[$ tq $f(x_0) = c$

$\rightarrow$ CALCUL DIFFÉRENTIEL

(20) NOMBRE DÉRIVÉ ET RAPPORT DE NEWTON.

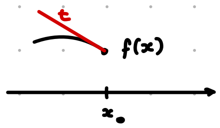
- $$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- f dérivable en $x_0 \Rightarrow f$ continue en x_0
- f continue $\cancel{\Rightarrow}$ f dérivable en x_0 ⚠

$\hookrightarrow$ c'est la pente (m) de f à x_0. Aussi : $\tan\theta$ où θ est l'angle avec l'horizontale.

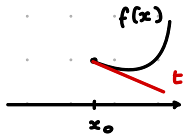
(21) DÉRIVÉE D'UNE FONCTION.

- ... À GAUCHE



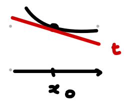
ssi $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ existe.

- ... À DROITE



ssi $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ existe.

- DÉRIVÉE EN x_0.



ssi $\lim_{x \to x_0}$ existe, c.à.d $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$.

"Fonction dérivée" sur $I =]a,b[\subset D_f$ ⚠ doit être dérivable sur I.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Alors $f' : I \to \mathbb{R}$

$: x_0 \to \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

qu'on note $f'(x_0)$.

(22) RÈGLES DE DÉRIVATION

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables sur $I =]a,b[$

→ Somme / Différence

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x) \quad \forall x \in I$$

→ Amplifiée (constante).

$$(a f(x))' = a f'(x) \quad \forall x \in I \text{ et } a \in \mathbb{R}$$

→ Produit

$$(f(x) g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x) \quad \forall x \in I$$

→ Quotient

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g^2(x)} \quad \forall x \in I$$

→ Composition ⚠ Il faut que g soit dérivable en $f(x)$

$$(g \circ f)' = (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

(23) QUELQUES DÉRIVÉES PRATIQUES.

→ Constante $c \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dx} c = 0$$

→ Puissance

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n x^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{Q}$$

→ Trigonométrique. VOIR ANALYSE 2.

- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(\cot x)' = -1 - \cot^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$

- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

→ Logarithmique.

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

24 CONTINÛMENT DÉRIVABLE

→ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continûment dérivable sur $I \Leftrightarrow f'(x)$ continue $\forall x \in I$

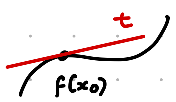
25 DÉRIVÉES D'ORDRE SUPÉRIEUR

$f^{(n)}(x)$ est la n-ième dérivée de f.

$$\Rightarrow \quad f^{(n)}(x) = (\ldots((f'(x))')'_{\ldots})' = f^{\overbrace{'''\ldots'}^{n \text{ fois}}}(x).$$

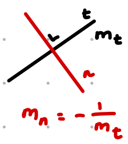
26 APPROXIMATION LINÉAIRE EN x_0.

$$\boxed{t : \quad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$



↳ au voisinage de x_0, on a $f(x) \sim t$

27 NORMALE À UNE PENTE



Soit m la pente de t.

Alors la pente de la normale de t vaut $-\frac{1}{m}$.

28 DÉRIVÉE DE PARAMÉTRIQUES

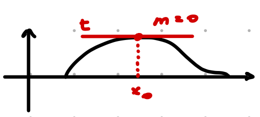
Paramétrique : $\begin{cases} x(t) = \cdots \\ y(t) = \cdots \end{cases}$

→ Grace aux notations de Leibniz, on peut trouver $\frac{dy}{dt}$ (pente de la courbe à un t donné) :

$$\underline{\underline{\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}}}.$$

29 THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS (TAF).

→ Théorème de Rolle



Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CONTINUE sur $[a, b]$ et DÉRIVABLE sur $]a, b[$. $(a, b) \in \mathbb{R}$

Si $f(a) = f(b)$ $(= 0)$, alors $\exists\, x_0$ tq. $f'(x_0) = 0$.

→ Conséquence du Théorème de Rolle : le TAF.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ <u>continue</u> sur $[a, b]$ et <u>dérivable</u> sur $]a, b[$. $(b > a)$

Alors forcément $\underline{\exists x_0 \in]a, b[\text{ tq. } f'(x_0) = \frac{f(a) + f(b)}{b - a}}$

ASTUCES.

- Calcul d'une limite infinie.

  Lors d'un cas d'indétermination $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty \ldots\right)$, il y a généralement 2 choses à faire :

  → factoriser la <u>plus grande</u> puissance, e.g. $(x^4 + x^3 + x) \to x^4\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)$
  → amplifier par le conjugué, e.g. $(\sqrt{x+2} + 1)(1 - \sqrt{x+2})$

  Si cela ne marche pas, il faudra alors utiliser les théorèmes appris en cours.

- Calcul d'une limite en x_0.

  Lors de cas d'indétermination, il y a 3 choses à faire

  → factoriser la <u>plus petite</u> puissance, e.g. $x^2 + x^3 + x \to x(x + x^2 + 1)$
  → amplifier par le conjugué
  → utiliser les IPE pour dégager les expressions trigo (attention, si $x_0 \neq 0$ il faut effectuer un changement de variable).

ANALYSE 2

RÉVISION CONTRÔLE 1

→ Ne pas oublier les domaines de définition des fonctions trigo

e.g. $\tan x \notin \{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

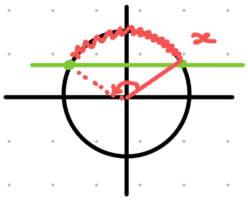
$\cot x \notin \{$

$\arccos x \in]-1, 1[$

→ Inégalités trigonométriques : FAIRE UN DESSIN DU CERCLE TRIGO.

e.g.

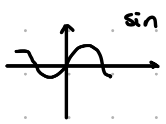
$\sin x > \frac{1}{2}$

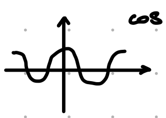


$x \in]\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k[$

→ FAIRE ATTENTION AUX FAUTES BÊTES DE CALCUL.

→ Déphasage sin → cos   cos → sin : ATTENTION !



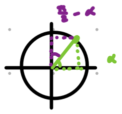


$\leftarrow + \frac{\pi}{2}$

$\rightarrow - \frac{\pi}{2}$

- $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos\alpha$
- $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin\alpha$
- $\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\cos\alpha$
- $\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin\alpha$

- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$
- $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$
- $\cos(\alpha \pm \pi) = -\cos\alpha$
- $\sin(\alpha \pm \pi) = -\sin\alpha$



- $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$
- $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$

(PARITÉ) $\cos\alpha$ paire : $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

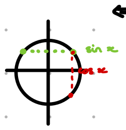
$\sin\alpha$ impaire : $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

② LES (IN)ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Méthode de résolution.

→ Équation simple

TYPE A $\sin x = c$



$\Leftrightarrow x = \arcsin(c) + 2\pi k$
ou
$x = \pi - \arcsin(c) + 2\pi k$

$\cos x = c$

$\Leftrightarrow x = \arccos(c) + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$
ou
$x = -\arccos(c) + 2\pi k$

$\tan x = c$ ⚠ $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$

$\Leftrightarrow x = \arctan c + \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\cot x = c$ ⚠ $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow x = \text{arccot}(c) + \pi k$.

autre forme : $A \sin x = B \cos x \Rightarrow c = \frac{B}{A}$ $A \cos x = B \sin x \Rightarrow c = \frac{B}{A}$

TYPE B

$\sin x = \sin y \Leftrightarrow x = y + 2\pi k$ $\cos x = \cos y \Leftrightarrow x = y + 2\pi k$ $\tan x = \tan y \Leftrightarrow x = y + \pi k$ $\cot x = \cot y \Leftrightarrow x = y + \pi k$

→ Type $A\cos(\omega t) \pm B\sin(\omega t) = C$

⚠ il faut que ωt soit le même pour les 2 !

Si $C = 0$, alors on peut en revenir à une équation simple du TYPE B

Si $C \neq 0$, alors il faut simplifier le côté rationnel à l'aide d'une superposition d'oscillations harmoniques

e.g. $\underline{A}\cos(\omega t) + \underline{B}\sin(\omega t) = X\cos(\omega t + \varphi)$*

$= X\cos(\omega t)\cos(\varphi) - X\sin(\omega t)\sin(\varphi)$

$= \underline{X\cos\varphi}\cos(\omega t) - \underline{X\sin\varphi}\sin(\omega t)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A = X\cos\varphi \\ B = -X\sin\varphi \end{cases}$ → résolution du système, on trouve X, φ et enfin t

* on peut aussi utiliser

$X\cos(\omega t - \varphi)$ $X\sin(\omega t + \varphi)$ $X\sin(\omega t - \varphi)$

→ Autres équations

- On peut essayer de simplifier des expressions avec des ωt différents mais sans constants dans la somme (e.g. $\cos x + 7 + \sin^2 x = 6$ et on ne peut pas les annuler, c.à.d amener à (expression qu'on tigo) = 0) en les factorisant avec des identités

EXEMPLE $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$

↪ on peut utiliser consécutivement des transformations somme-produit pour transformer la somme en produit.

$[\sin x + \sin 4x] + [\sin 3x + \sin 2x]$

$= 2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2} + 2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$= 2\sin\frac{5x}{2}\left[\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right]$

$= 4\sin\frac{5x}{2}\cos x \cdot \cos\frac{x}{2}$

→ on prend avantage du fait que $x + 4x = 3x + 2x$

$\Leftrightarrow 4\cdot\sin\frac{5x}{2}\cdot\cos x\cdot\cos\frac{x}{2} = 0$ → chaque membre peut valoir 0 ....

- Si aucune de ces méthodes ne fonctionnent, on se servira de la règle de Bioche.

* Il faut d'abord tout mettre en termes de x, e.g. $\cos(2x) \to \cos^2 x - \sin^2 x$
$\sin(2x) \to 2\sin x\cos x$

Puis on teste l'invariance de l'expression lorsqu'on remplace x par autre chose.

- $x \leftrightarrow -x$ → si c'est invariant, alors on prend $z = \cos x$
  ($\sin^2 x = 1 - z^2$, $\sin x = \sqrt{1-z^2}$)
- $x \leftrightarrow \pi - x$ → si invariant, on prend $z = \sin x$
  ($\cos^2 x = 1 - z^2$ $\cos x = \sqrt{1-z^2}$)
- $x \leftrightarrow x + \pi$ → si invariant, on prend $z = \tan x$
  ($\cos^2 x = \frac{1}{1+z^2}$, $\sin^2 x = \frac{z^2}{1+z^2}$ etc.)

• si aucun test ne fonctionne, alors on prend $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$
$\left(\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad \sin x = \frac{2z}{1+z^2}\right)$

→ Cas spécial : équations avec fonctions inverses.

eg. $\arccos(x) + 2\arccos(3x) = \frac{\pi}{2}$

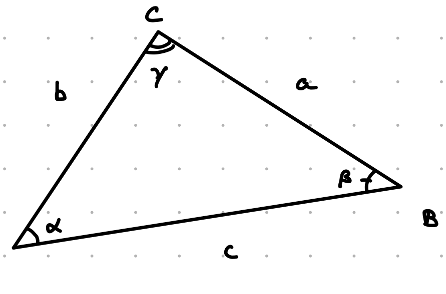
$c = 1$

* Il faut prendre l'expression où $c = 1$ (ou diviser par une constante l'équation de de sorte à ce qu'il y en ait et mettre le reste de l'autre côté.

* Puis appliquer la fonction trigo nécessaire de chaque côté (ici cos()) et ensuite résoudre avec les identités trigo.

③ RÉSOLUTION DES TRIANGLES (non-rectangles)

NOTATION STANDARDE



• LOI DES COSINUS

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

• LOI DES SINUS

$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$

④ DÉRIVÉES TRIGONOMÉTRIQUES

- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(\cot x)' = -1 - \cot^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$

- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\text{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

⑤ LOGARITHME NÉPERIEN

$\ln x = y \iff x = e^y \iff \int_1^x \frac{1}{x}\,dx$ $\quad \boxed{x > 0}$ et $y \in \mathbb{R}$. $\quad \boxed{D_{\ln} = \mathbb{R}_+^*}$

e.g. $\ln(1) = 0 \iff 1 = e^0 \iff \int_1^1 \frac{1}{x}\,dx = 0$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ et $(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

Règles de calcul

- $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$
- $n\ln(a) = \ln(a^n)$ $\quad (n \in \mathbb{Q})$
- $\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

RÉVISION CONTRÔLE 1

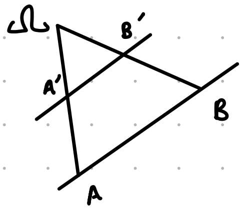
- **Homothétie** - $h_{\Omega,\alpha}(M) = M'$

  Ω : centre ; α : rapport ; M : point de départ ; M' : point d'arrivée (image)

  $\Leftrightarrow \quad \vec{\Omega M'} = \alpha\, \vec{\Omega M}$

  et "Ω fixe" $\Leftrightarrow$ Ω est le centre de l'homothétie
  $\Leftrightarrow$ Ω a comme image Ω par l'homothétie.

  - INVERSE D'UNE HOMOTHETIE : de rapport $1/\alpha$ (même centre).
    = RÉCIPROQUE
  - 2 homothéties centrées en un même point avec même rapport et deux points différents d'entrée (A et B) renvoit $\alpha\vec{AB} = \vec{A'B'}$



- **Compositions** : $B \circ A$ ← Transf. $\boxed{A}$ puis $\boxed{B}$

  ⟵ sens de lecture.

  - DEUX TRANSLATIONS

    $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} \Leftrightarrow$ translation par $\vec{v} + \vec{u}$

    fait en premier !

  - DEUX HOMOTHÉTIES (centres différents)

$$h_{T,\beta} \circ h_{\Omega,\alpha} = \begin{cases} \text{homothétie rapport } \alpha\beta & \text{si } \alpha\beta \neq 1 \\ \text{translation } (1-\beta)\,\vec{\Omega T} & \text{si } \alpha\beta = 1 \end{cases}$$

← ⚠ PAS $\boxed{-1}$

"deuxième" rapport

"premier" puis "deuxième" } sens de la composition

└ POINT FIXE DE LA COMPOSITION

Soit $f : h_{T,\beta} \circ h_{\Omega,\alpha}$

On cherche un point fixe Δ (centre de l'homothétie) tel que $f(\Delta) = \Delta$

On a $\vec{T\Delta} = \beta\, \vec{T\Delta}$, $\vec{\Omega\Delta} = \alpha\, \vec{\Omega\Delta}$.

$f(\Delta) = \Delta \Leftrightarrow h_{T,\beta} \circ h_{\Omega,\alpha}(\Delta) = \Delta$

$$\Leftrightarrow \quad h_{T,\beta}\big(\underbrace{h_{\Omega,\alpha}(\Delta)}_{\text{point}}\big) = \Delta$$

point

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{T\Delta} = \beta\, \overrightarrow{T h_{\Omega,\alpha}(\Delta)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{T\Delta} = \beta\big(\overrightarrow{T\Omega} + \underbrace{\overrightarrow{\Omega h_{\Omega,\alpha}(\Delta)}}\big)$$

→ c'est juste $\alpha\overrightarrow{\Omega\Delta}$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{T\Delta} = \beta\overrightarrow{T\Omega} + \alpha\beta\overrightarrow{\Omega\Delta}$$

$(\overrightarrow{T\Omega} = \overrightarrow{T\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Omega})$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{T\Omega} + \overrightarrow{\Omega\Delta} = \beta\overrightarrow{T\Omega} + \alpha\beta\overrightarrow{\Omega\Delta}$$

$$\overrightarrow{T\Omega} - \beta\overrightarrow{T\Omega} = \alpha\beta\overrightarrow{\Omega\Delta} - \overrightarrow{\Omega\Delta}$$

$$(1-\beta)\overrightarrow{T\Omega} = (\alpha\beta - 1)\overrightarrow{\Omega\Delta}$$

$$\overrightarrow{\Omega\Delta} = \frac{1-\beta}{\alpha\beta-1}\overrightarrow{T\Omega}$$

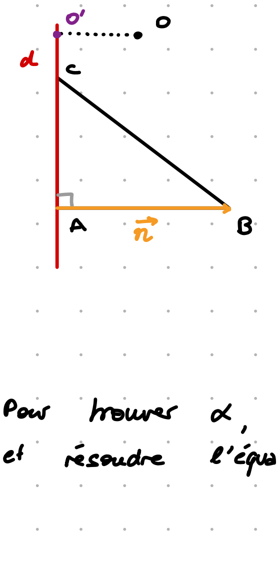
$$\overrightarrow{\Omega\Delta} = \frac{\beta-1}{1-\alpha\beta}\overrightarrow{\Omega T}$$

- TRANSLATION + HOMOTHÉTIE

$t_{\overrightarrow{AB}} \circ h_{\Omega,\alpha}$ On ajoute l'homothétie à la translation.

- Équations vectorielles :

→ NORMALES



La droite d (= l'ensemble des points $M \in d$) est décrite par l'équation :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{n} = \alpha$$

constante

point d'origine

vecteur perpendiculaire

→ dans le dessin, on prend par exemple le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

point variable

"tous les points M tels que $M \in d$"

Pour trouver α, il faut chercher un point connu sur d (prenons X) et résoudre l'équation :

$$\overrightarrow{OX} \cdot \vec{n} = \alpha$$

→ on "substitue" X à la place de M dans l'équation vectorielle.

→ $\alpha \in \mathbb{R}$ (peut être n'importe quelle constante)

La manière la plus sûre est généralement de prendre le projeté orthogonal de l'origine O sur d : O'

Par exemple, dans le dessin au dessus, en fonction de $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{OO'} = P_{\overrightarrow{AC}}(\overrightarrow{OA}) = \frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AC}$$

On trouve alors quelque chose du style de :

$$\alpha = \overrightarrow{OO'} \cdot \vec{n}$$

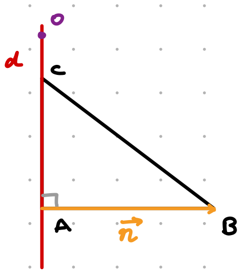
$$\Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|^2} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

en utilisant les données du dessin

Donc on aura à la fin, avec les données du dessin :

$$\underbrace{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AB}}_{\text{équation - ne pas calculer}} = \underbrace{\frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|^2} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}_{\text{valeur à calculer}}$$

Il est important de noter que si l'origine O est sur la droite, alors on peut écrire :

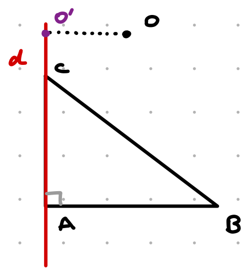


$$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{n} = \underbrace{0}_{\text{le numéro zéro } (\emptyset)} \Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$$

car $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{n}$ formeront toujours un angle de 90°.

→ VÉCTORIELLES

On choisit un point de depart puis on exprime la droite avec des vecteurs de la relation de Chasles



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + t(\overrightarrow{O'C})$$

$$\text{(ou bien)} = \overrightarrow{OC} + t(\overrightarrow{CA})$$

$$= \overrightarrow{OO'} + t(\overrightarrow{O'A})$$

- Équations analytiques de droites.

Soit d droite passant par $A(x_A, y_A)$ et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

→ PARAMÉTRIQUES.

On note $d : \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + t\vec{u}$ [éqn. vectorielle].

$$\Leftrightarrow d : \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} at \\ bt \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow d : \begin{cases} x = ta + x_A \\ y = \underbrace{tb}_{\text{DIRECTION}} + \underbrace{y_A}_{\text{POSITION}} \end{cases}$$

[éqn. paramétrique]

→ CARTÉSIENNES.

En élimant t on obtient :

$$\begin{cases} x - x_A = ta \\ y - y_A = tb \end{cases} \qquad t = \frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b}$$

$$\Leftrightarrow \quad b(x - x_A) = a(y - y_A)$$

$$bx - bx_A = ay - ay_A$$

$$\underbrace{bx - ay = bx_A - ay_A}_{\text{équation cartésienne.}} \qquad \vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ directeur}$$

On généralise donc à $\boxed{ax + by = c}$ dirigée par vecteur $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et on trouve c par la résolution de $A(x_A, y_A) \in d$.

→ DANS UN REPÈRE ORTHONORMÉ

↳ On a $\forall \vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} = ac + cd$.

↳ On observe aussi que $ax + by = c$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ vecteur directeur a comme vecteur normal $\vec{v}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé.

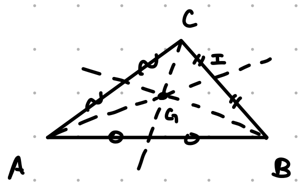
↳ Pour toute droite $d : ax + by = c$ et point $M(x_M, y_M) \in \mathbb{R}^2$:

$$\delta(M, d) = \frac{|c - ax_M - by_M|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

distance

• ## Géométrie du triangle

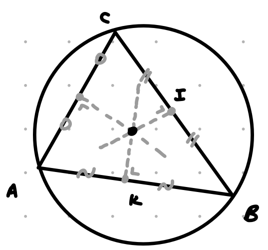
→ MÉDIANES — Droite issue d'un sommet passant par le milieu du côté opp.



Les médianes du triangle se rencontrent au centre de gravité G :

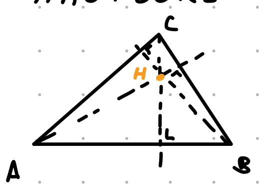
$\vec{AG} = \frac{2}{3} \vec{AI}$ $\quad I$ milieu du côté opposant A (BC).

→ MÉDIATRICES — droites coupant chaque côté du triangle en son milieu



Les médiatrices du triangle ABC se rencontre au centre du cercle circonscrit à ABC.

→ **HAUTEURS** – Droites issues de chaque sommet du triangle perpendiculaire au côté opposé.

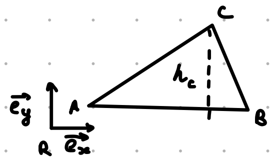


Les hauteurs du triangle se rejoignent en un point H appelé <u>orthocentre</u>.

H est tel que $\tan \hat{A} \cdot \overrightarrow{HA} + \tan \hat{B} \cdot \overrightarrow{HB} + \tan \hat{C} \cdot \overrightarrow{HC} = 0.$

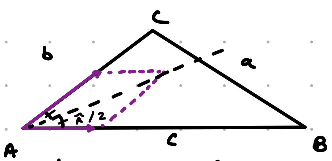
→ **AIRE**

Soit R repère orthonormé du plan.

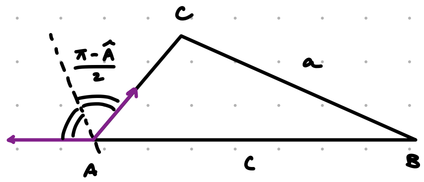


$$\text{aire}(ABC) = \frac{1}{2}\left|\det_R(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right| = \frac{1}{2}\left|\det_R(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})\right|$$
$$= \frac{1}{2}\left|\det_R(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})\right|$$

→ **BISSECTRICES** – droite issue d'un sommet qui coupe un angle en deux



bissectrice intérieure en A



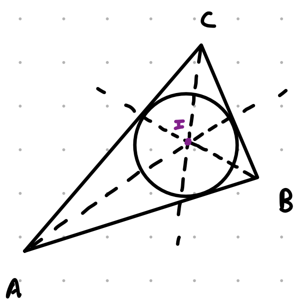
bissectrice extérieure en A

dirigée par $\underbrace{\frac{1}{c}\overrightarrow{AB}}_{\text{unitaire}} + \underbrace{\frac{1}{b}\overrightarrow{AC}}_{\text{unitaire.}}$

dirigée par $-\frac{1}{c}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{b}\overrightarrow{AC}$

⚠ ces deux droites sont perpendiculaires : $\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\pi - \hat{A}}{2} = \frac{\pi}{2}$.

- Le lieu des points du plan (ABC) équidistants de (AB) et (AC) est la réunion des deux bissectrices en A.

- 

Les bissectrices intérieures se rencontrent au centre I du cercle inscrit.

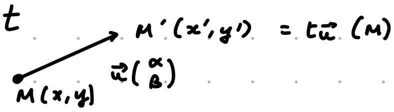
$\underset{\sim}{\text{et}}$

I est tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

TRANSFORMATIONS géométriques du plan (les pires ...)

On fixe un repère $(0, \vec{a}, \vec{b})$ du plan.

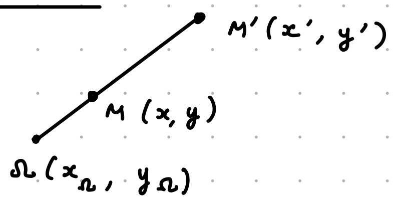
- <u>Translation</u> t



Expression analytique et matricielle

$$\begin{cases} x' = x + \alpha \\ y' = y + \beta \end{cases} \qquad \binom{x'}{y'} = \underbrace{\binom{\alpha}{\beta}}_{\vec{u}} + \binom{x}{y}$$

- **Homothétie** h



EXPR. ANALYTIQUE

$$h_{\Omega,\alpha} \begin{cases} x' = \alpha x + (1-\alpha) x_\Omega \\ y' = \alpha y + (1-\alpha) y_\Omega \end{cases}$$

obtenus en exprimant que Ω est fixe par la transformation.

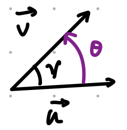
EXPR. MATRICIELLE

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (1-\alpha) \begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix}$$

Astuce : lorsqu'on cherche le centre d'une homothétie, il suffit de chercher le point fixe dans l'expression analytique. $(x' = x$ et $y' = y)$

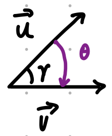
- **Orientation du plan**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et γ l'angle entre les deux



θ est l'angle orienté entre les deux du sens direct (antihoraire)

$\theta = \gamma$



θ est l'angle orienté du sens indirect (horaire).

$\theta = -\gamma$

Si on reprend le repère $(0, \vec{a}, \vec{b})$, on dit qu'il est orthonormé direct si l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$ vaut $\frac{\pi}{2}$, et orthonormé indirect s'il vaut $-\frac{\pi}{2}$.

$\boxed{\vec{u_\theta}}$ vecteur unitaire d'angle orienté θ avec $\vec{a}$

$$\vec{u_\theta} = \cos\theta \, \vec{a} + \sin\theta \, \vec{b}$$

* Si θ est l'angle orienté entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et le repère R est direct, alors

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{\det_R(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}$$

- **Rotation** ⚠ repère orthonormé direct.

$r_{\Omega,\theta} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto r_{\Omega,\theta}(x,y)$
rotation d'angle orienté θ et centré en Ω

application linéaire et de matrice

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{dans la base } (\vec{a}, \vec{b})$$

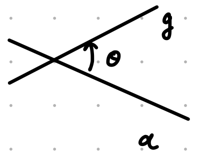
On définit $r_{\Omega,\theta}$ centrée en $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$:

$$r_{\Omega,\theta} : \begin{cases} x' = \cos\theta \, x - \sin\theta \, y + (1-\cos\theta) x_\Omega + \sin\theta \, y_\Omega \\ y' = \sin\theta \, x + \cos\theta \, y \underbrace{- \sin\theta \, x_\Omega + (1-\cos\theta) y_\Omega}_{\text{obtenus en exprimant que } \Omega \text{ est fixe}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & 1-\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (I_2 - R_\theta)\begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix}$$

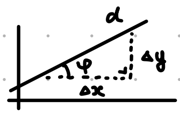
- <u>Angle orienté entre deux droites</u>



angle orienté entre d et g

défini <u>mod π</u>

(repère orthonormé direct uniq.) :



angle avec l'horizontale représenté par

$\underset{\text{pente de } d}{m} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \tan(\varphi)$

↑ angle avec horiz.

RAPPEL normale $\Leftrightarrow -\dfrac{1}{m}$

- <u>Projection orthogonale</u> ⚠ repère o.n. direct

→ SUR UNE DROITE PASSANT PAR L'ORIGINE.

Soit $d : y = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pente}}}{m}x$ passant par $(0,0)$ et $d_i : x = 0$ (pente infinie)

Alors on note les projections orthognales d'un point $K(x,y)$ sur ces droites

ANALYT. $P_d(K) : \begin{cases} x' = \dfrac{x}{1+m^2} + \dfrac{my}{1+m^2} \\ y' = \dfrac{mx}{1+m^2} + \dfrac{m^2 y}{1+m^2} \end{cases}$ et $P_{d'}(K) : \begin{cases} x' = 0 \\ y' = y \end{cases}$

MATR. $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\dfrac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{pmatrix}}_{P \text{ matrice de proj.}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (pente infinie)

P matrice de projection sur d. — Propriétés

↳ $\boxed{\text{rg } P = 1 \;:\; P \text{ symmétrique. et } \operatorname{tr} P = 1}$

↳ le vecteur directeur de d (posons $\vec{u}$) est colinéaire aux vecters-colonnes de P $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} m \\ m^2 \end{pmatrix}$

↳ tous les points sur d sont fixes par P_d.

↳ $\operatorname{Ker} P = \ell$ où $\ell \perp d$ et ℓ passant par O.

→ SUR UNE DROITE QUELCONQUE

Soit d une droite quelconque passant par $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$.

On utilise P comme avant : $P = \dfrac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{pmatrix}$ (m pente de d).

et on a.

MATR. $P_d : \begin{pmatrix} x' - x_\Omega \\ y' - y_\Omega \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x - x_\Omega \\ y - y_\Omega \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{(I_2 - P)\begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix}}_{\text{terme const.}}$$

ANALYT. P_d : $\begin{cases} x' = \frac{x}{1+m^2} + \frac{ym}{1+m^2} + \frac{x_\Omega m^2}{1+m^2} - \frac{y_\Omega m}{1+m^2} \\ y' = \frac{xm}{1+m^2} + \frac{ym^2}{1+m^2} - \frac{x_\Omega m}{1+m^2} + \frac{y_\Omega}{1+m^2} \end{cases}$ (vaut mieux apprendre la version matricielle...)

- **Réflexion** S ⚠ repère orthonormé.

→ D'AXE PASSANT PAR L'ORIGINE.

Soit d une droite passant par l'origine.

$$S_d : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}}_{S_\theta} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

S_θ : matrice de réflexion
(⚠ $S_\theta \neq R_{2\theta}$)

Propriétés de S_θ : $\boxed{\begin{matrix} \det S_\theta = -1 \\ \operatorname{tr} S_\theta = 0 \end{matrix}}$

→ D'AXE QUELCONQUE (soit d passant par $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$)

EXPRESSION MATRICIELLE :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = S_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (I_2 - S_\theta) \begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix}$$ où $\theta = \measuredangle(Ox, d)$

ANGLE ENTRE AXE DES ABSCISSES ET d.

→ GLISSÉE ⟺ translation + réflexion
⟺ réflexion + translation (même chose des deux sens).

$$S = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{transl.} \\ \text{de vect. } \vec{u}}}{t_{\vec{u}}} \circ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{réflex. sur l'axe } d}}{S_d} = S_d \circ t_{\vec{u}}$$

⚠ <u>pas de points fixes</u> par cette transf. !

EXPRESSION.

$$S : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{MATRICE} \\ \text{DE RÉFLEX.}}}{S_\theta} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{\text{image de l'origine.}}$$

On trouve $\vec{u} = \frac{1}{2}(I_2 + S)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.
et l'axe d en cherchant les PF par $S_d = \underbrace{t^{-1}_{\vec{u}}}_{\text{soustraction de } \vec{u}} \circ S$

- **Compositions** (Géométrie ~~Analytique~~ Descriptive)

⚠ Repère orthonormé direct.

Toute transformation du type "translation / rotation / réflexion glissée" est <u>stable</u> par composition, et de type : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{A}_{\text{matrice de transform.}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{B}_{\text{terme const. } \binom{\alpha}{\beta}}$

Lorsqu'on compose, on garde les mêmes type selon les multiplications matricielles :

$$\boxed{① \; R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi} \qquad ② \; S_\theta S_\varphi = R_{2(\theta-\varphi)}}$$

à mémoriser !

(3) $S_\theta R_\varphi = S_{\theta - \frac{\varphi}{2}}$

$R_\varphi = S_\theta S_{\theta - \frac{\varphi}{2}}$

(4) $R_\theta S_\varphi = S_{\theta + \frac{\varphi}{2}}$

$R_\theta = S_{\theta + \frac{\varphi}{2}} S_\varphi$

→ de la ②

Attention : C'est généralement plus simple de trouver ces transformations graphiquement. Un schéma s'avère très utile

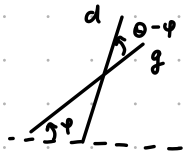
→ ROTATION / ROTATION

$\underbrace{\underset{R_\theta}{r_{\Omega,\theta}} \circ \underset{R_\varphi}{r_{\Omega,\varphi}}}_{① \; R_\theta R_\Omega = R_{\theta+\Omega}}$ est

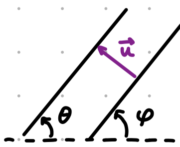
→ une rotation d'angle $\theta+\varphi$ si $\theta \neq -\varphi$ [mod 2π]

→ une translation si $\theta = -\varphi$ [mod 2π]

→ RÉFLEXION / RÉFLEXION



$\varphi \neq \theta$ (mod 2π)
(d et g sécantes)



$\varphi = \theta$ (mod 2π)
$d \parallel g$

On a : $S_d \circ S_g = \begin{cases} r_{\Omega, 2(\theta-\varphi)} & \text{si } \varphi \neq \theta \mod 2\pi \\ \text{translation } t_{2\vec{u}} & \text{si } \varphi = \theta \mod 2\pi \end{cases}$

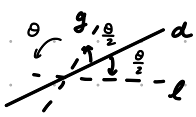
(② $S_\theta S_\varphi = R_{2(\theta-\varphi)}$)

et Ω point fixe par la transformation.

→ ROTATION / REFLÉXION

$$\left. \begin{matrix} r_{\Omega,\theta} \circ S_d & \text{ou} & S_d \circ r_{\Omega,\theta} \\ R_\theta S_\varphi = \underbrace{S_{\theta+\frac{\varphi}{2}}}_{\text{matr. réflex.}} & & S_\varphi R_\theta = \underbrace{S_{\varphi - \frac{\theta}{2}}}_{\text{matr. réflex.}} \end{matrix} \right\} \text{réflexion glissée (cas général)}$$

⚠ Dans le cas où $\Omega \in d$:



$$\begin{cases} r_{\Omega,\theta} \circ S_d = S_g \\ S_d \circ r_{\Omega,\theta} = S_\ell \end{cases}$$

où g correspond à d orienté de $+\frac{\theta}{2}$
ℓ — d orienté de $-\frac{\theta}{2}$

Bilan des transformations

TRANSFORMATION	MATRICE (M)	det M	tr M	rg M
⊙ projection d'axe	$P_m = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{pmatrix}$	$m^2 - m^2$ 0	$\frac{1}{1+m^2} + \frac{m^2}{1+m^2}$ 1	1
⊙ rotation r_{Ω},	$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$	$\cos^2\theta + \sin^2\theta$ 1	$\cos^2\theta$	2
⊙ symétrie S_d	$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$	$-\cos^2\theta - \sin^2\theta$ -1	0	2
⊙ homothétie $h_{\Omega,\alpha}$	$H_\alpha = \alpha I_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$	α^2	2α	2
translation $t_{\vec{u}}$ $\vec{u} = \binom{u_1}{u_2}$	I_2	1	2	2

TOUTE TRANSFORMATION AVEC UN ⊙ POSSÈDE AU MOINS UN POINT FIXE. L'EXPRESSION ANALYTIQUE S'ÉCRIT

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (M - I_2)\begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix}$$

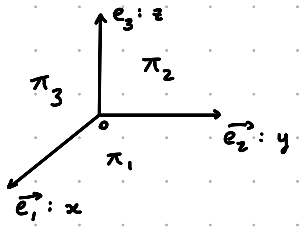
M : matrice de la transf.
$\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$: point fixe

À noter que si $(0,0)$ appartient aux points fixes, alors il ne restera que
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

→ Si une transformation ne possède pas de PF, c'est soit une translation si $M = I_2$, soit une réflexion glissée.

GÉOMÉTRIE dans L'ESPACE

Soit $O(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ un repère de l'espace



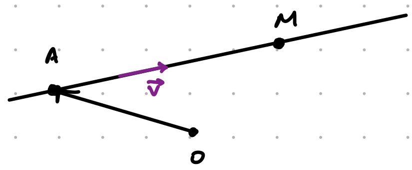
Plan	Nom	Notation	Equation
$(o, \vec{e_1}, \vec{e_2})$	π_1	Oxy	$z = 0$
$(o, \vec{e_2}, \vec{e_3})$	π_2	Oyz	$x = 0$
$(o, \vec{e_1}, \vec{e_3})$	π_3	Oxz	$y = 0$

Axe	Nom	Notation	Equation
$(o, \vec{e_1})$	abscisses	Ox	$\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$
$(o, \vec{e_2})$	ordonnées	Oy	$\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$
$(o, \vec{e_3})$	cotes	Oz	$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

→ les formules du plan se généralisent pour l'espace.

- **Équations d'une droite de l'espace.**

d : droite définie par point $A(a_1, a_2, a_3)$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ vecteur directeur d.



Alors d est le lieu des points M tels que

$$d : \vec{OM} = \vec{OA} + t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \\ z = a_3 + tv_3 \end{cases}$$

PARAMÉTRIQUE MATRICIELLE — PARAMÉTRIQUE ANALYTIQUE

En éliminant t on trouve

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3} \quad (v_1, v_2, v_3 \neq 0)$$

→ Si $\underset{(x)}{v_1} = 0$, alors $d \parallel \underset{(Oyz)}{\pi_2}$ et $d \in \pi_2 \underset{\text{ssi}}{\Leftrightarrow} A \in \pi_2$. (inclusе dans)

→ Si $\underset{(y)}{v_2} = 0$ alors $d \parallel \underset{(Oxz)}{\pi_3}$ et $d \in \pi_3 \Leftrightarrow A \in \pi_3$.

→ Si $\underset{(z)}{v_3} = 0$ alors $d \parallel \underset{(Oxy)}{\pi_1}$ et $d \in \pi_1 \Leftrightarrow A \in \pi_1$.

- **Positions relatives de deux droites de l'espace**

Soient d $\vec{OM} = \vec{OA} + t\vec{v}$ et d'. $\vec{OM} = \vec{OB} + s\vec{v'}$

d et d' sont ...

↪ sécantes $\Leftrightarrow \exists I \in \mathbb{R}^3$ tq $d \cap d' = \{I\}$

↪ parallèles $\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$ tq. $\vec{v} = \alpha \vec{v'}$ [colinéaires] et $A \notin d'$.

↳ confondues $\Leftrightarrow$ $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tq. $\vec{v'} = \alpha \vec{v}$ et
$A \in d'$ (et bien sûr $A \in d$ aussi).

↳ gauches $\Leftrightarrow$ ni confondues, ni parallèles, ni sécantes.

⚠ 2 droites distinctes de l'espace sont soit gauches, soit coplanaires.

- <u>Équation d'un plan dans l'espace</u>

Soit α un plan de l'espace.

On peut définir α avec :
→ 3 points
→ 2 droites concourantes
→ 2 droites non parallèles
→ 1 point P et une droite d $(P \notin d)$

<u>Définition vectorielle.</u>

1 point A et deux vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$
→ plan $\alpha : (A, \vec{u}, \vec{v})$.

On dit que $(\underset{\text{point } M}{M} \in \mathbb{R}^2) \in \alpha \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = a\vec{u} + b\vec{v}$ (comb. linéaire).

$\alpha(A, \vec{u}, \vec{v})$: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AM} + t\vec{u} + s\vec{v}$ $\quad t, s \in \mathbb{R}$

Bonjour

$A(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{u}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$ PARAMÉTR. MATRICIELLE.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a_1 + tu_1 + sv_1 \\ y = a_2 + tu_2 + sv_2 \\ z = a_3 + tu_3 + sv_3 \end{cases}$$ PARAMÉTR. ANALYT.

En éliminant les paramètres on obtient

$$\underbrace{\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}}_{a} x - \underbrace{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}}_{-b} y + \underbrace{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}}_{c} z = \text{cste}$$

on évalue en $A(a_1, a_2, a_3)$ pour trouver cste.

$$ax + by + cz = \underbrace{d}_{\text{cste.}}$$ CARTÉSIENNE.

→ Si $c = 0$, $\alpha : ax + by + d = 0$ (p. ex.) alors $\alpha \parallel \vec{e_3}$ (Oz)

→ Si $b = 0$, $\alpha : ax + cz + d = 0$ alors $\alpha \parallel \vec{e_2}$ (Oy)

→ Si $a = 0$, $\alpha : by + cz + d = 0$ alors $\alpha \parallel \vec{e_1}$ (Ox)

- Positions relatives des plans.

A). CARTÉSIENNES : $\alpha : ax + by + cz + d = 0$
$\alpha' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$

α et α' ...

↪ confondus $(\alpha \equiv \alpha') \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*$ tq $(a, b, c, d) = \lambda (a', b', c', d')$

↪ parallèles $(\alpha \parallel \alpha') \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*$ tq $(a, b, c) = \lambda (a', b', c')$

↪ sécants $\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ (a, b, c) \neq (a', b', c')$

B). VÉCTORIELLES : $\alpha : \vec{OA} + t\vec{u} + s\vec{v}$
$\alpha' : \vec{OA'} + t\vec{u'} + s\vec{v'}$

α et α' ...

↪ confondus $\Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}, \ \vec{u'} + \vec{v'} = a\vec{u} + b\vec{v}$ et $A' \in \alpha$

↪ parallèles $\Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}, \ \vec{u'} + \vec{v'} = a\vec{u} + b\vec{v}$ et $A' \notin \alpha$

↪ sécantes $\Leftrightarrow \forall a, b \in \mathbb{R}, \ \vec{u'} + \vec{v'} \neq a\vec{u} + b\vec{v}$

- Applications

① Vecteur normal à un plan

Soit $\alpha : \underbrace{ax + by + cz}_{\text{partie homogène.}} + d = 0$

Alors $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est le vecteur normal à ce plan.

⚠ on peut trouver des vecteurs directeurs qui annulent la partie homogène :

$$ax + by + cz = 0.$$

② Distance d'un point à un plan.
(α défini par A et $\vec{n} \perp \alpha$.)

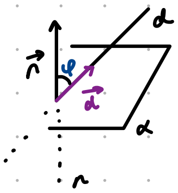
$$\text{dist}(P, \alpha) = \|\vec{AP'}\| = \left| \vec{AP} \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right| \quad \forall A \in \alpha.$$

⚠ α définit 2 demi-espaces

$\alpha_+ : ax + by + cz + d > 0$ et $\alpha_- : ax + by + cz + d < 0$

et $M \in \alpha_+ \iff a x_M + b y_M + c y_M > 0$
$M \in \alpha_- \iff a x_M + b y_M + c y_M < 0$

③ Angle entre une droite et un plan.



Soit $d \not\subset \alpha$, $\vec{d}$ son vecteur directeur et $\vec{n}$ un vecteur normal à α.

Alors $\underbrace{\sin \varphi}_{\varphi \text{ angle entre } \alpha \text{ et } d} = \dfrac{|\vec{n} \cdot \vec{d}|}{\|\vec{n}\| \, \|\vec{d}\|}$ et $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

④ Angle entre deux plans.

Soient α, β deux plans, et $\vec{n}_\alpha \perp \alpha$, $\vec{n}_\beta \perp \beta$.

Alors $\sphericalangle(\alpha, \beta) = \sphericalangle(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta) = \varphi$.

angle entre

et $\cos \varphi = \dfrac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{\|\vec{n}_\alpha\| \, \|\vec{n}_\beta\|}$ $\quad \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$