Indução Matemática

Prof. Juliano Foleis

Indução Matemática

O princípio da Indução Matemática é usado para provar que dado predicado é verdadeiro pra todos os inteiros positivos maiores ou iguais a certo a.

Exemplo

A Indução Matemática pode ser usada para provar que

$$P(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n | n \geq 1$$

- Neste caso, $P(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$; e
- $a = 1$;

Indução Matemática

Seja o predicado $P(n)$, onde n é um inteiro positivo. A prova que $P(n)$ é válido a partir de a é realizada em dois passos:

1. **Caso Base:** Provar que o predicado é verdadeiro para o menor valor possível que satisfaz o predicado, a proposição $P(a)$, onde a é tal valor.

2. **Passo Indutivo:** Provar que se a proposição $P(k)$ for verdadeira, então $P(k+1)$ também deve ser verdadeira.

Indução Matemática - Caso Base

Prove que o predicado é verdadeiro para $P(a)$. Para isto, basta aplicar a definição do predicado e verificar se a proposição $P(a)$ é verdadeira.

Exemplo

Seja $P(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ e $a = 1$. O caso base para $n = a = 1$ é verificado:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{1} i &= \mathbf{1} \\ &= \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = \mathbf{1} \end{aligned}$$

Portanto, $P(1) = P(a)$ é verdadeira.

Indução Matemática - Passo Indutivo

Provar que se a proposição $P(k)$ for verdadeira, então $P(k+1)$ também deve ser verdadeira. Esta parte é a mais difícil. Portanto, vamos quebrar este passo em vários estágios.

Passo Indutivo - Estágio 1

Escreva o que o predicado afirma para $P(k)$, onde $k < n$. É importante que esse k seja um k qualquer, ou seja, não seja um número fixo. Isto é o que vamos considerar que é verdade. A proposição $P(k)$ é conhecida como **Hipótese Indutiva**.

Exemplo

Seja $P(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ e $a = 1$.

Assumimos que

$$\text{p}/k < n,\ \sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$$

é verdadeiro.

Passo Indutivo - Estágio 2

Escreva o que o predicado afirma para $P(k+1)$. Isto é o que queremos provar. Mantenha esta proposição em mente durante todo o processo.

Exemplo

Seja $P(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Queremos provar que

$$\text{p}/n = k+1, \sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = I$$

Passo Indutivo - Estágio 3

Prove $P(k+1)$ (que escrevemos no estágio 2) considerando que a proposição $P(k)$ é verdade (como fizemos no estágio 1).

Exemplo

Seja $P(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Supondo que $P(k) = \sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$ é verdadeira (estágio 1),

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i &= 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) \text{ (pela notação } \Sigma) \\
&= \sum_{i=1}^{k} i + (k+1) \text{ (pela notação } \Sigma) \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \text{ (Pela hipótese indutiva)} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} = I \text{ (estágio 2)}
\end{aligned}$$

Indução Matemática

Uma vez que o caso base e passo indutivo são concluídos, podemos concluir imediatamente que o predicado é verdadeiro para todo $n \geq a$.

Intuição

- Para que esta conclusão seja um pouco mais “digerível”, vamos pensar na indução matemática como uma **máquina automática de provar proposições matemáticas**. Inicialmente provamos o predicado para $n = a$. Pelo passo indutivo, como $P(a)$ é verdadeira, então $P(a+1)$ também é verdadeira. Novamente, pelo passo indutivo, como $P(a+1)$ é verdadeira, então $P(a+2)$ também é verdadeira. E como também $P(a+2)$ é verdadeira, então $P(a+3)$ também é verdadeira, e assim por diante.
- **Como provamos o passo indutivo**, este processo nunca termina. Nós podemos deixar a “máquina” rodando, e ela iria continuar rodando para sempre, conseguindo provar até n, independentemente do n. Suponha que exista um número N para o qual $P(N)$ é falsa. Neste caso quando chegarmos no número $N-1$ teríamos a seguinte situação: $P(N-1)$ é verdadeira, mas $P(N)$ seria falsa. Esta situação contradiz o passo indutivo, portanto não é possível que aconteça. Desta forma, o predicado $P(n)$ deve ser verdadeiro para todos os inteiros $n \geq a$.

Exemplo 2

Prove, pelo princípio da Indução Matemática, que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall n | n \geq 1$$

Exemplo 2 - Caso Base

No caso precisamos mostrar que $P(1)$ é verdadeira, pois 1 é o menor valor de n tal que $n \geq 1$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = \mathbf{1} \\ = \frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6} = \frac{6}{6} = \mathbf{1}\end{aligned}$$

Portanto, $P(1) = P(a)$ é verdadeira.

Exemplo 2 - Passo Indutivo

Estágio 1: Assumimos que,

$$\text{p}/k < n,\ \sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Estágio 2: Queremos provar que,

$$\begin{aligned}
&\text{p}/n = k+1, \\
&\qquad \sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6} \\
&\qquad\qquad = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = I.
\end{aligned}$$

Exemplo 2 - Passo Indutivo (Estágio 3)

Como podemos mostrar que o predicado do estágio 2 é verdadeiro, considerando que a proposição do estágio 1 é verdadeira?

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 \text{ (Pela notação } \Sigma) \\
&= \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2 \text{ (Pela notação } \Sigma) \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \text{ (Pela hipótese indutiva)} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = I.
\end{aligned}$$

Exemplo 2 - Conclusão

Supondo que $P(k)$ é verdadeira para $k < n$, mostramos que $P(k+1)$ é verdadeira. Como k pode ser um inteiro qualquer, pelo princípio da Indução Matemática, mostramos que $P(n)$ é verdadeira $\forall n | n \geq 1$.

Exemplo 3

Prove, pelo princípio da Indução Matemática, que

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1, \forall n | n \geq 0$$

Exemplo 3 - Caso Base

No caso precisamos mostrar que $P(0)$ é verdadeira, pois 0 é o menor valor de n tal que $n \geq 0$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 &= \mathbf{1} \\ &= 2^{0+1} - 1 = 2^1 - 1 = \mathbf{1} \end{aligned}$$

Portanto, $P(0) = P(a)$ é verdadeira.

Exemplo 3 - Passo Indutivo

Estágio 1: Assumimos que,

$$\text{p}/k < n, \sum_{i=0}^{k} 2^i = 2^{k+1} - 1.$$

Estágio 2: Queremos provar que,

$$\begin{aligned}
\text{p}/n = k + 1,& \\
\sum_{i=0}^{k+1} 2^i &= 2^{(k+1)+1} - 1 \\
&= 2^{k+2} - 1 = I
\end{aligned}$$

Exemplo 3 - Passo Indutivo (Estágio 3)

Como podemos mostrar que o predicado do estágio 2 é verdadeiro, considerando que a proposição do estágio 1 é verdadeira?

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} 2^i &= 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{(k+1)} \text{ (Pela notação } \Sigma\text{)} \\
&= \sum_{i=0}^{k} 2^i + 2^{(k+1)} \text{ (Pela notação } \Sigma\text{)} \\
&= 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} \text{ (Pela hipótese indutiva)} \\
&= 2.2^{k+1} - 1 \\
&= 2^{k+1+1} - 1 \\
&= 2^{k+2} - 1 = I.
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 - Conclusão

Supondo que $P(k)$ é verdadeira para $k < n$, mostramos que $P(k+1)$ é verdadeira. Como k pode ser um inteiro qualquer, pelo princípio da Indução Matemática, mostramos que $P(n)$ é verdadeira $\forall n | n \geq 1$.

Mais Exemplos

Mais exemplos estão disponíveis no resumo no Moodle.

Bibliografia

BARNES, M; GORDON S. Mathematical Induction. University of Sydney, 1987. [Link]