Análise Assintótica

Prof. Juliano Foleis

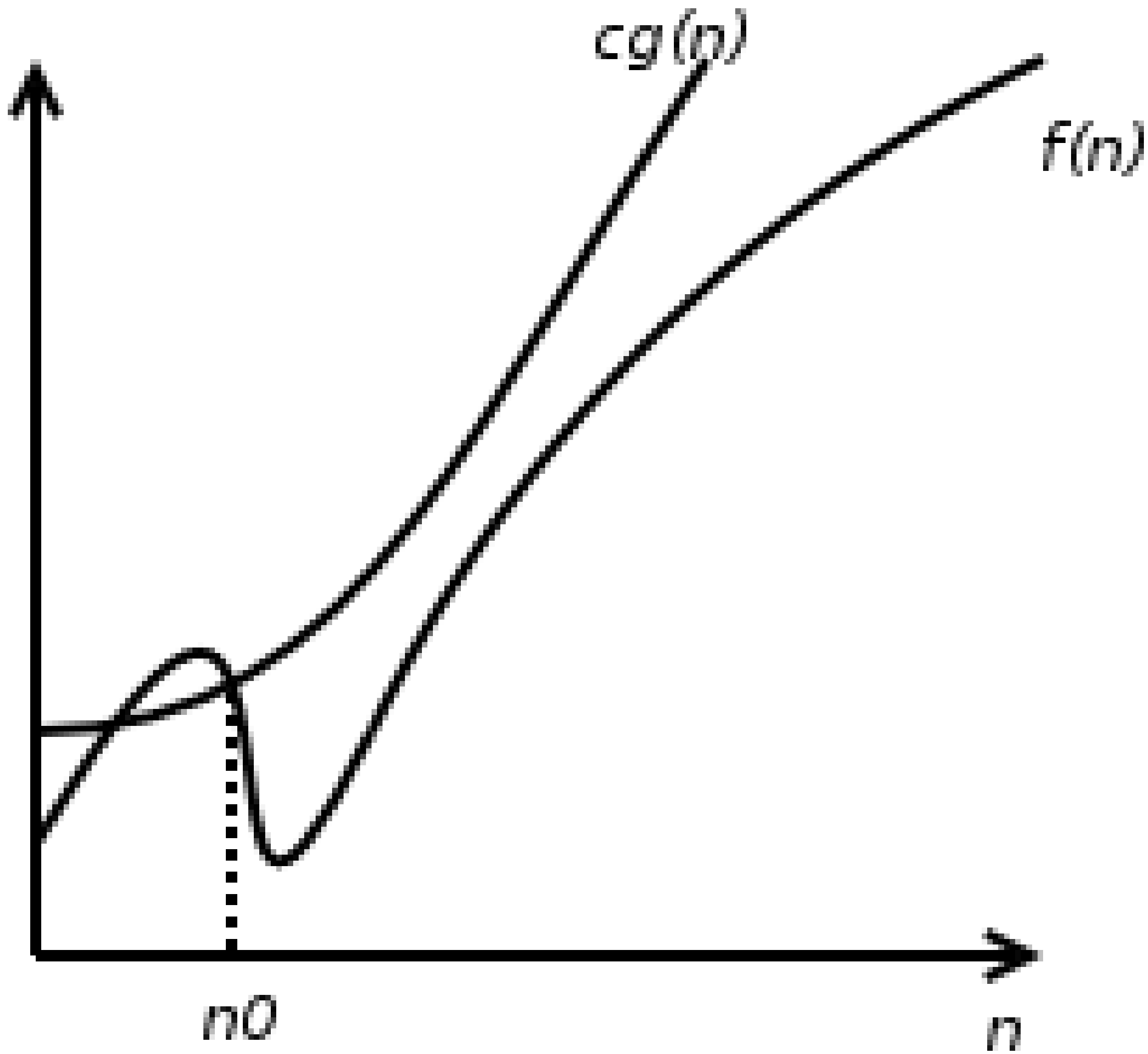
Notação Assintótica

- Conseguimos mostrar que `Soma_TS` tem custo $T(n) = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$.
- O nosso interesse real não é saber exatamente a função de custo, mas sim o **comportamento assintótico** dela.
- O comportamento assintótico refere-se a quanto o custo do algoritmo aumenta conforme n cresce.
- Por exemplo, quando falamos do custo de `Soma_TS`, apenas nos referimos a ele por “custo quadrático”, uma vez que é o termo αn^2 que define o comportamento da função!

Notação Assintótica

- A notação assintótica é um formalismo matemático que nos permite comparar funções para n grande.
- Podemos usar a notação assintótica para comparar custos de algoritmos diferentes para um mesmo problema, com o objetivo de escolher o algoritmo mais eficiente.
- Se um algoritmo **A** tem custo $\Theta(n)$ e o algoritmo **B** tem custo $\Theta(n^2)$, dizemos que o algoritmo **A** tem custo assintoticamente inferior que o algoritmo **B**. Note que podemos concluir isso mesmo sem conhecer exatamente as funções de custo de **A** ou **B**!

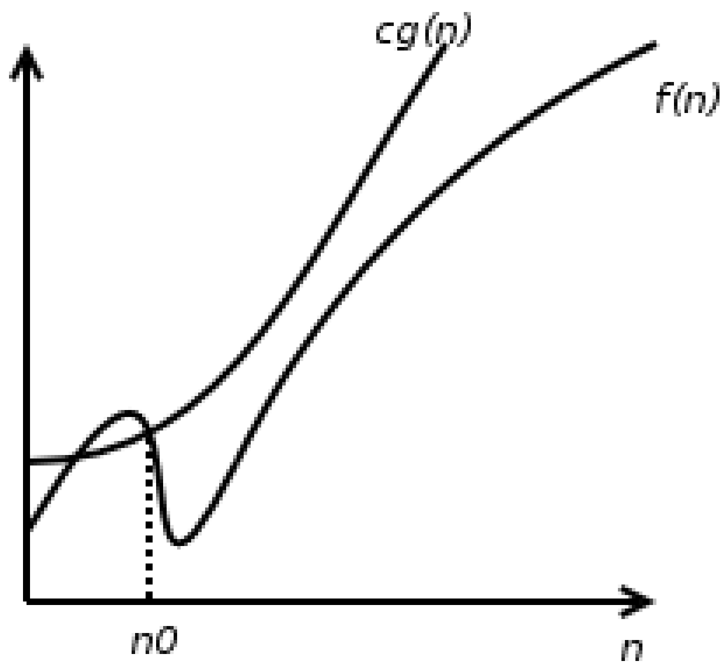
Notação O



Notação O

Definição

$$O(g(n)) = \{f(n) : \text{existem constantes positivas } n_0 \text{ e } c \\ \text{tal que } f(n) \leq cg(n), \forall n \mid n \geq n_0\}$$



- $g(n)$ é um limite superior para $f(n)$
- A partir de um determinado n_0, $f(n)$ será sempre menor ou igual a $cg(n)$.
- Note que $O(g(n))$ é o conjunto de todas as funções limitadas superiormente por $g(n)$, ou seja, $f(n) \in O(g(n))$.

Notação O – Exemplos

$$2n + 1 = O(n^2)$$

Notação O – Exemplos

$$2n + 1 = O(n^2)$$

$$n^2 + 2n = O(n^2)$$

Notação O – Exemplos

$$2n + 1 = O(n^2)$$

$$n^2 + 2n = O(n^2)$$

$$3n + 2 = O(n^3)$$

Notação O – Exemplos

$$2n + 1 = O(n^2)$$

$$n^2 + 2n = O(n^2)$$

$$3n + 2 = O(n^3)$$

$$3\lg(n) = O(n)$$

Notação O – Exemplos

$$2n + 1 = O(n^2)$$

$$n^2 + 2n = O(n^2)$$

$$3n + 2 = O(n^3)$$

$$3\lg(n) = O(n)$$

$$4n\lg(n) = O(n^2)$$

Notação O – Exemplos

$$2n + 1 = O(n^2)$$

$$n^2 + 2n = O(n^2)$$

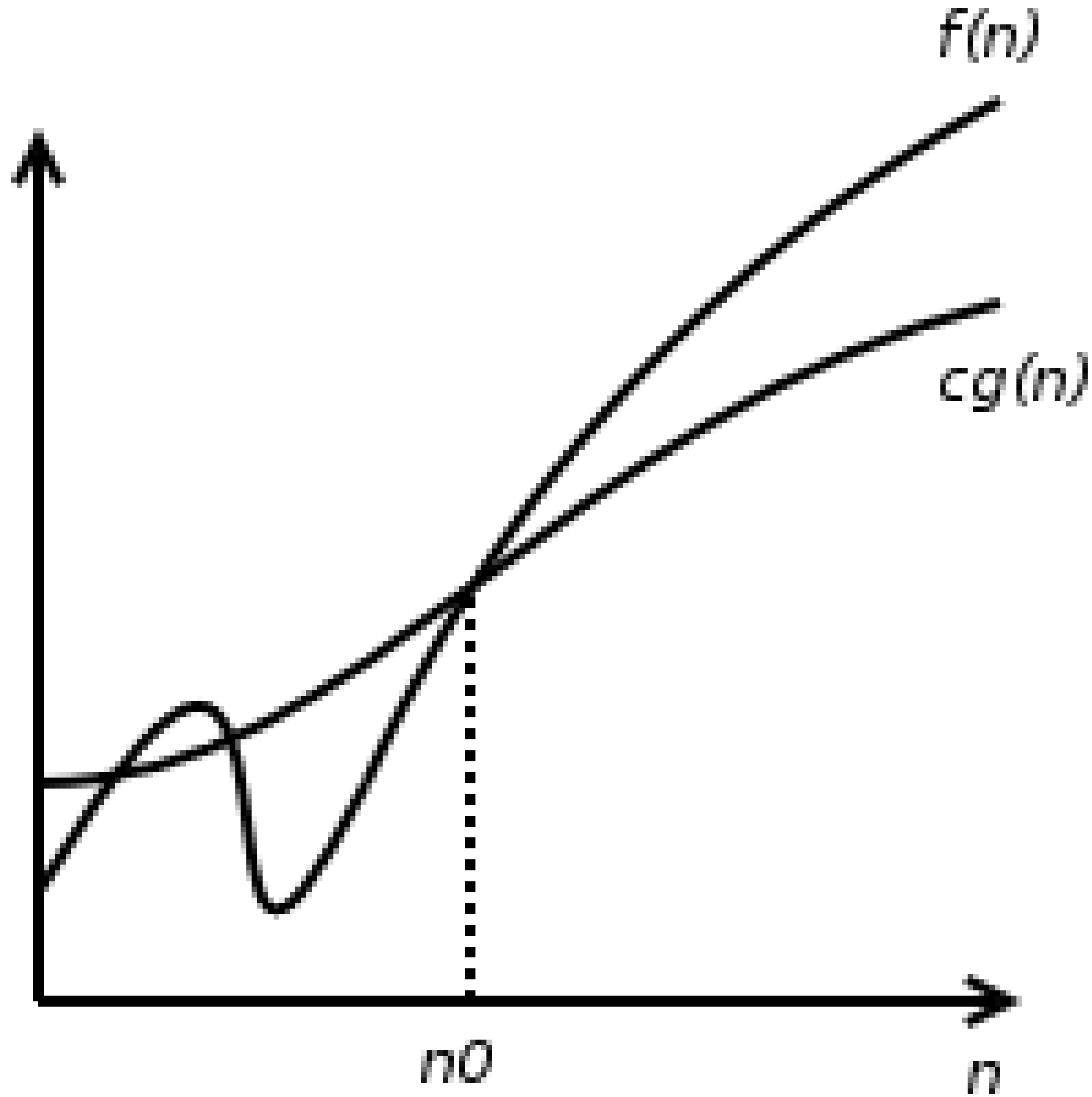
$$3n + 2 = O(n^3)$$

$$3\lg(n) = O(n)$$

$$4n\lg(n) = O(n^2)$$

$$n^3 + 20n + 1 \neq O(n^2)$$

Notação Ω (ômega)



Notação Ω (ômega)

Definição

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) : \text{existem constantes positivas } n_0 \text{ e } c \text{ tal que } cg(n) \leq f(n), \forall n \,|\, n \geq n_0\}$$

Notação Ω – Exemplos

$$n^3 + 20n = \Omega(n^2)$$

Notação Ω – Exemplos

$$n^3 + 20n = \Omega(n^2)$$

$$3n + 4 = \Omega(n)$$

Notação Ω – Exemplos

$$n^3 + 20n = \Omega(n^2)$$

$$3n + 4 = \Omega(n)$$

$$n^3 + 2n = \Omega(n)$$

Notação Ω – Exemplos

$$n^3 + 20n = \Omega(n^2)$$

$$3n + 4 = \Omega(n)$$

$$n^3 + 2n = \Omega(n)$$

$$10n = \Omega(\lg(n))$$

Notação Ω – Exemplos

$$n^3 + 20n = \Omega(n^2)$$

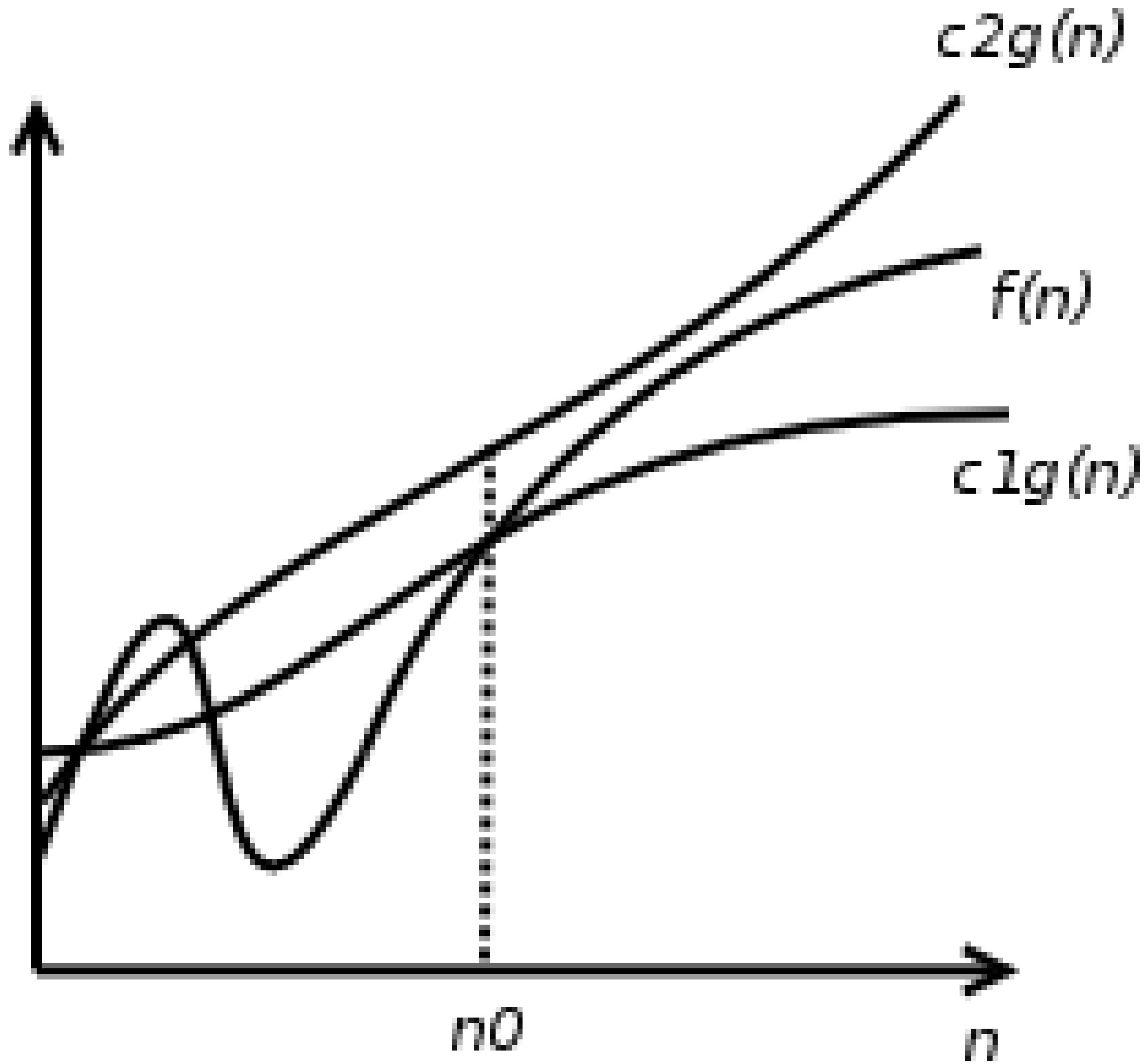
$$3n + 4 = \Omega(n)$$

$$n^3 + 2n = \Omega(n)$$

$$10n = \Omega(\lg(n))$$

$$3n^2 \neq \Omega(n)$$

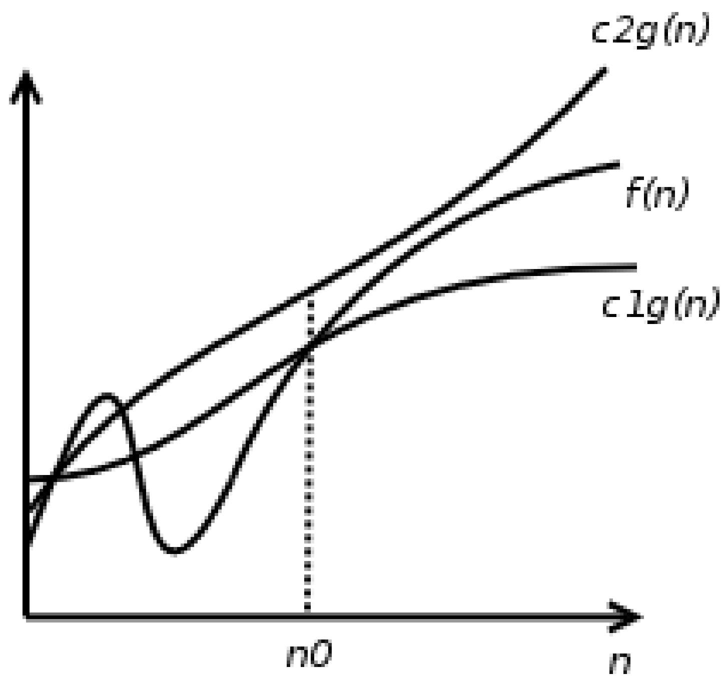
Notação Θ (teta)



Notação Θ (teta)

Definição

$\Theta(g(n)) = \{f(n)$: existem constantes positivas n_0, c_1 e c_2
tal que $c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 f(n), \forall n \,|\, n \geq n_0\}$



- $g(n)$ é um limite assintoticamente restrito para $f(n)$
- $f(n)$ tem o mesmo comportamento assintótico que $g(n)$
- Note que $\Theta(g(n))$ é o conjunto de todas as funções que são assitoticamente restritas a $g(n)$, ou seja, $f(n) \in \Theta(g(n))$.

Notação Θ – Exemplos

$$n^3 + 20n = \Theta(n^3)$$

Notação Θ – Exemplos

$$n^3 + 20n = \Theta(n^3)$$

$$3n + 4 = \Theta(n)$$

Notação Θ – Exemplos

$$n^3 + 20n = \Theta(n^3)$$

$$3n + 4 = \Theta(n)$$

$$n^2 + 3 = \Theta(n^2)$$

Notação Θ – Exemplos

$$n^3 + 20n = \Theta(n^3)$$

$$3n + 4 = \Theta(n)$$

$$n^2 + 3 = \Theta(n^2)$$

$$3\lg(n) = \Theta(\lg(n))$$

Notação Θ – Exemplos

$$n^3 + 20n = \Theta(n^3)$$

$$3n + 4 = \Theta(n)$$

$$n^2 + 3 = \Theta(n^2)$$

$$3\lg(n) = \Theta(\lg(n))$$

$$3n^2 \neq \Theta(n^3)$$

Notação Θ – Exemplos

$$n^3 + 20n = \Theta(n^3)$$

$$3n + 4 = \Theta(n)$$

$$n^2 + 3 = \Theta(n^2)$$

$$3\lg(n) = \Theta(\lg(n))$$

$$3n^2 \neq \Theta(n^3)$$

$$3n^2 \neq \Theta(n)$$

Teoremas Importantes

Teorema 1

Para duas funções quaisquer $f(n)$ e $g(n)$,
$f(n) = \Theta(g(n))$ se e somente se $f(n) = O(g(n))$ E $f(n) = \Omega(g(n))$.

Teoremas Importantes

Teorema 2

$$\text{Para qualquer polinômio } p(n) = \sum_{i}^{d} a_i n^i \text{ onde } a_i \text{ são constantes E } a_d > 0,$$

$$p(n) = \Theta(n^d).$$

Teoremas Importantes

Teorema 2

Para qualquer polinômio $p(n) = \sum_{i}^{d} a_i n^i$ onde a_i são constantes E $a_d > 0$, $p(n) = \Theta(n^d)$.

Em outras palavras, um polinômio $p(n)$ de grau d é $\Theta(n^d)$.

Exemplos (Teorema 2)

$$2n^2 + 3n + 1 = \Theta(n^2)$$

Exemplos (Teorema 2)

$$2n^2 + 3n + 1 = \Theta(n^2)$$

$$5n^3 + 3n^2 + n = \Theta(n^3)$$

Exemplos (Teorema 2)

$$2n^2 + 3n + 1 = \Theta(n^2)$$

$$5n^3 + 3n^2 + n = \Theta(n^3)$$

$$10 = \Theta(1)$$

Teoremas Importantes

Teorema 3

Para duas funções quaisquer $f(n)$ e $g(n)$, $\Theta(f(n) + g(n)) = \Theta(\max(f(n), g(n)))$

Teoremas Importantes

Teorema 3

Para duas funções quaisquer $f(n)$ e $g(n)$, $\Theta(f(n) + g(n)) = \Theta(\max$

Intuição: a função de maior custo assintótico domina o custo da função-soma.

Exemplos (Teorema 3)

$$f(n) = n \wedge g(n) = n^2 \Rightarrow \Theta(f(n) + g(n)) = \Theta(n^2).$$

Exemplos (Teorema 3)

$f(n) = n \land g(n) = n^2 \Rightarrow \Theta(f(n) + g(n)) = \Theta(n^2)$.

$f(n) = \lg(n) \land g(n) = n \Rightarrow \Theta(f(n) + g(n)) = \Theta(n)$.

Exemplos (Teorema 3)

$f(n) = n \land g(n) = n^2 \Rightarrow \Theta(f(n) + g(n)) = \Theta(n^2)$.

$f(n) = \lg(n) \land g(n) = n \Rightarrow \Theta(f(n) + g(n)) = \Theta(n)$.

$f(n) = n\lg(n) \land g(n) = n \Rightarrow \Theta(f(n) + g(n)) = \Theta(n \lg(n))$.

Teste do Limite

Sejam duas funções $f(n)$ e $g(n)$ positivas e monótonas crescentes. Para conhecer a relação assintótica entre $f(n)$ e $g(n)$, podemos usar o teste do limite.

$$\text{Seja } L = \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$$

1. Se $L = 0$, então $f(n) = O(g(n))$.
2. Se $L = \infty$, então $f(n) = \Omega(g(n))$.
3. Se $L = C$, tal que C é uma constante diferente de zero, então $f(n) = \Theta(g(n))$.

Outras Propriedades

Transitividade

Se $f(n) = \Theta(g(n))$ e $g(n) = \Theta(h(n))$ então $f(n) = \Theta(h(n))$

Se $f(n) = O(g(n))$ e $g(n) = O(h(n))$ então $f(n) = O(h(n))$

Se $f(n) = \Omega(g(n))$ e $g(n) = \Omega(h(n))$ então $f(n) = \Omega(h(n))$

Outras Propriedades

Propriedade Reflexiva

$$f(n) = \Theta(f(n))$$

$$f(n) = O(f(n))$$

$$f(n) = \Omega(f(n))$$

Outras Propriedades

Simetria

$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Theta(f(n))$

Simetria Transposta

$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Omega(f(n))$

Intuição para Comparação

$f(n) = O(g(n))$ é análogo a $a \leq b$

$f(n) = \Omega(g(n))$ é análogo a $a \geq b$

$f(n) = \Theta(g(n))$ é análogo a $a = b$

Bibliografia

[CRLS] CORMEN, T. H. et al. Algoritmos: Teoria e Prática. Elsevier, 2012. 3a Ed. Capítulo 3 (Crescimento de Funções), Seção 3.1