Método da Substituição para Resolver Recorrências

Prof. Juliano Foleis

Método da Substituição

O método da substituição é utilizado para determinar limites superiores e inferiores para recorrências. O método é baseado na indução matemática e é realizado em dois passos:

- Chutar um limite superior ou inferior para uma recorrência.
- Usar indução matemática para encontrar as constantes, conforme as definições da notação assintótica, para mostrar que o limite vale.

Exemplo 1

Use o método da substituição para provar que

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n = O(n\, lg(n))$$

Considere $T(1) = 1$.

Exemplo 1

Solução: Devemos provar que $2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \leq cn\, lg(n)$ para $c > 0$ e $n \geq n_0$.

Caso Base: Para $n = 2$,

$$
\begin{aligned}
T(2) = 2T\left(\frac{2}{2}\right) + 2 &\leq c2\lg(2) \\
2(1) + 2 &\leq 2c \\
4 &\leq 2c \\
c &\geq \frac{4}{2}
\end{aligned}
$$

Portanto, como $c \geq \frac{4}{2}$ é positivo e constante, o caso base é válido.

Exemplo 1

Hipótese Indutiva: $T(k) \leq ck\,lg(k), k < n$.

Exemplo 1

Hipótese Indutiva: $T(k) \leq ck\, lg(k),\ k < n.$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \\
&\leq 2c\left(\frac{n}{2}\right) lg\left(\frac{n}{2}\right) + n \text{ (pela H.I.)} \\
&\leq cn\, lg\left(\frac{n}{2}\right) + n \\
&\leq cn\, lg(n) - cn\, \mathrm{lg}2 + n \\
&\leq cn\, lg(n) \mathbf{- cn + n} \leq cn\, lg(n)
\end{aligned}
$$

Desde que

$$
\begin{aligned}
-cn + n &\leq 0 \\
n &\leq cn \\
1 &\leq c \\
c &\geq 1
\end{aligned}
$$

Exemplo 1

Hipótese Indutiva: $T(k) \leq ck\,lg(k),\ k < n$.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \\
&\leq 2c\left(\frac{n}{2}\right) lg\left(\frac{n}{2}\right) + n \text{ (pela H.I.)} \\
&\leq cn\,lg\left(\frac{n}{2}\right) + n \\
&\leq cn\,lg(n) - cn\,\mathrm{lg}2 + n \\
&\leq cn\,lg(n) \mathbf{- cn + n} \leq cn\,lg(n)
\end{aligned}
$$

Desde que

$$
\begin{aligned}
-cn + n &\leq 0 \\
n &\leq cn \\
1 &\leq c \\
c &\geq 1
\end{aligned}
$$

Assim, $c = 2$ $(2 \geq 1)$ e $n_0 = 2$ são constantes e satisfazem as condições necessárias da definição do limite assintótico superior. Assim, pelo método da substituição,

$2T\left(\frac{n}{2}\right) + n = O(n\,lg(n))$.

Exemplo 1

Justificativa

Note que $T(n) \leq cn\lg(n) - cn + n$ e que $cn\lg(n) - cn + n \leq cn\lg(n)$, logo, por transitividade, $T(n) \leq cn\lg(n)$.

Exemplo 2

Use o método da substituição para verificar se

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n = O(n)$$

Considere $T(1) = 1$.

Exemplo 2

Solução: Devemos provar que $2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \leq cn$ para $c > 0$ e $n \geq n_0$.

Caso Base: Para $n = 2$,

$$
\begin{aligned}
T(2) = 2T\left(\frac{2}{2}\right) + 2 &\leq c2 \\
2(1) + 2 &\leq 2c \\
4 &\leq 2c \\
c &\geq \frac{4}{2}
\end{aligned}
$$

Portanto, como $c \geq \frac{4}{2}$ é positivo e constante, o caso base é válido.

Exemplo 2

Hipótese Indutiva: $T(k) \leq ck, k < n$.

Exemplo 2

Hipótese Indutiva: $T(k) \leq ck,\ k < n$.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \\
&\leq 2c\left(\frac{n}{2}\right) + n \text{ (Pela H.I.)} \\
&\leq cn + n \\
&\leq (c+1)n \leq cn \\
&\leq (c+1) \leq c
\end{aligned}
$$

Exemplo 2

Hipótese Indutiva: $T(k) \leq ck,\ k < n$.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \\
&\leq 2c\left(\frac{n}{2}\right) + n \text{ (Pela H.I.)} \\
&\leq cn + n \\
&\leq (c+1)n \leq cn \\
&\leq (c+1) \leq c
\end{aligned}
$$

Não existe c positivo e constante que satisfaça $(c+1) \leq c$. Portanto, $2T\left(\frac{n}{2}\right) \neq O(n)$.

Exemplo 3

Encontre um limite superior para

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

Considere $T(1) = 1$.

Exemplo 3

Solução: Vamos supor que $T(n) = O(n^3)$. Para mostrar isso devemos provar que $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n \leq cn^3$ para alguma constante $c > 0$ e $n \geq n_0$.

Caso Base: Para $n = 2$,

$$
\begin{aligned}
T(2) = 4T\left(\frac{2}{2}\right) + 2 &\leq c2^3 \\
4(1) + 2 &\leq 8c \\
6 &\leq 8c \\
c &\geq \frac{6}{8}
\end{aligned}
$$

Portanto, como $c \geq \frac{6}{8}$ é positivo e constante, o caso base é válido.

Exemplo 3

Hipótese Indutiva: $T(k) \leq ck^3, k < n$.

Exemplo 3

Hipótese Indutiva: $T(k) \le ck^3, k < n.$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n \\
&\le 4c\left(\frac{n}{2}\right)^3 + n \text{ (Pela H.I.)} \\
&\le 4c\left(\frac{n^3}{8}\right) + n \\
&\le \frac{cn^3}{2} + n \\
&\le cn^3 - \mathbf{\frac{cn^3}{2} + n} \le cn^3
\end{aligned}
$$

Desde que

$$
\begin{aligned}
\frac{-cn^3}{2} + n &\le 0 \\
\frac{-cn^3}{2} &\le -n \\
\frac{cn^3}{2} &\ge n \\
\frac{cn^2}{2} &\ge 1 \\
cn^2 &\ge 2 \\
c &\ge \frac{2}{n^2}
\end{aligned}
$$

Exemplo 3

Hipótese Indutiva: $T(k) \leq ck^3, k < n.$

Desde que

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n \\
&\leq 4c\left(\frac{n}{2}\right)^3 + n \text{ (Pela H.I.)} \\
&\leq 4c\left(\frac{n^3}{8}\right) + n \\
&\leq \frac{cn^3}{2} + n \\
&\leq cn^3 - \mathbf{\frac{cn^3}{2} + n} \leq cn^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{-cn^3}{2} + n &\leq 0 \\
\frac{-cn^3}{2} &\leq -n \\
\frac{cn^3}{2} &\geq n \\
\frac{cn^2}{2} &\geq 1 \\
cn^2 &\geq 2 \\
c &\geq \frac{2}{n^2}
\end{aligned}
$$

Assim, considerando $c = \frac{6}{[illegible]}$ e $n_0 = 2$, é possível afirmar que $T(n) = 4T\left(\frac{n}{[illegible]}\right) + n = O(n^3)$.

Exemplo 4

Use o método da substituição para verificar se

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 = O(n)$$

Considere $T(1) = 1$.

Exemplo 4

Solução: Devemos provar que $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \leq cn$, para $c > 0$ e $n \geq n_0$.

Caso Base: Para $n = 2$,

$$\begin{aligned} T(2) = 2T\left(\frac{2}{2}\right) + 1 &\leq 2c \\ 2(1) + 1 &\leq 1c \\ 3 &\leq c \\ c &\geq 3 \end{aligned}$$

Portanto, como $c \geq 3$ é positivo e constante, o caso base é válido.

Exemplo 4

Hipótese Indutiva: $T(k) \leq ck, k < n$.

Exemplo 4

Hipótese Indutiva: $T(k) \leq ck,\ k < n$.

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$

$$\leq 2c\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \text{ (Pela H.I.)}$$

$$\leq cn + 1 \leq cn$$

Não dá pra concluir que $cn + 1 \leq cn$. Entretanto, note que o termo "excedente" ($\mathbf{1}$), que impede mostrar que $cn + 1 \leq cn$, é de ordem mais baixa que o limite que queremos mostrar (n). Neste caso podemos usar uma hipótese indutiva mais forte, ou seja, subtrair um termo de ordem inferior da hipótese indutiva anteriormente adotada. Desta forma devemos provar que $T(n) \leq cn - b$, sendo b uma constante estritamente positiva.

Exemplo 4

Hipótese Indutiva: $T(k) \leq ck - b, k < n \land b > 0$.

Exemplo 4

Hipótese Indutiva: $T(k) \leq ck - b,\ k < n \wedge b > 0.$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \\
&\leq 2\left(c\frac{n}{2} - b\right) + 1 \text{ (Pela H.I.)} \\
&\leq cn - 2b + 1 \\
&\leq cn - b \mathbf{- b + 1} \leq cn - b
\end{aligned}
$$

Desde que

$$
\begin{aligned}
-b + 1 &\leq 0 \\
1 &\leq b \\
b &\geq 1
\end{aligned}
$$

Exemplo 4

Hipótese Indutiva: $T(k) \leq ck - b,\ k < n \wedge b > 0.$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \\
&\leq 2\left(c\frac{n}{2} - b\right) + 1 \text{ (Pela H.I.)} \\
&\leq cn - 2b + 1 \\
&\leq cn - b \mathbf{- b + 1} \leq cn - b
\end{aligned}
$$

Desde que

$$
\begin{aligned}
-b + 1 &\leq 0 \\
1 &\leq b \\
b &\geq 1
\end{aligned}
$$

Assim, como b é positivo e constante, $T(n) \leq cn - b$. Como $cn - b \leq cn$, então, por transitividade, $T(n) \leq cn$. Logo, $T(n) = O(n)$.

Bibliografia

[CRLS] CORMEN, T. H. et al. Algoritmos: Teoria e Prática. Elsevier, 2012. 3a Ed. Capítulo 4 (Divisão e Conquista), Seção 4.3 (Método de substituição para resolver recorrências)