QuickSort

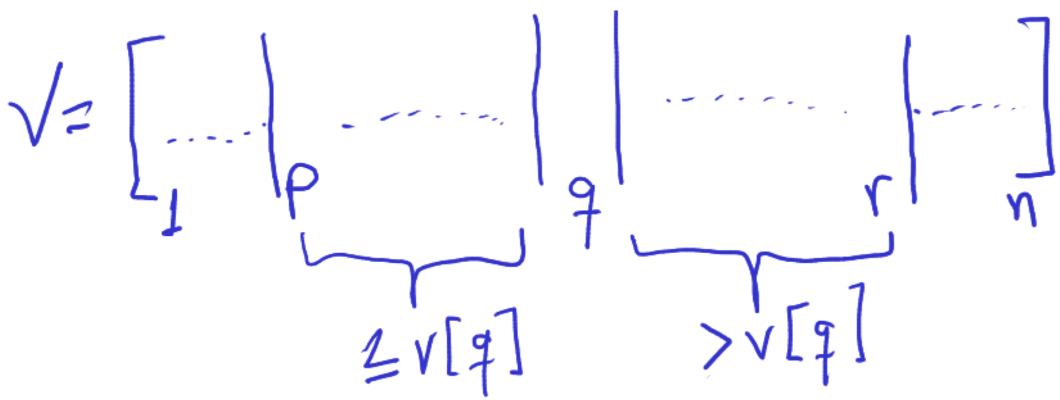
Prof. Juliano Foleis

Partition

O algoritmo `PARTITION` usado no `QuickSort` rearranja os elementos de um vetor V[p,...,r], tal que $p \leq r$ de forma que

$$\forall k(p \leq k < q \rightarrow v[k] \leq v[q])$$
$$\wedge$$
$$\forall k(q+1 \leq k \leq r \rightarrow v[k] > v[q])$$

Graficamente,



PARITITON (Lomuto)

Existem vários algoritmos possíveis que estabelecem as propriedades de `PARTITION`.

Vamos estudar a implementação Lomuto:

```
PARTITION(V, p, r)
  x = V[r]
  i = p - 1
  FOR j = p TO r-1 DO
      IF V[j] <= x THEN
          i = i + 1
          troca V[i] e V[j]
      END IF
  END FOR
  troca V[i+1] e V[r]
  RETURN i+1
```

Exercício: Prove que este algoritmo tem custo $\Theta(n)$ tal que $n = r - p + 1$.

Corretude do PARTITION

```
1  PARTITION(V, p, r)
2    x = V[r]
3    i = p - 1
4    FOR j = p TO r-1 DO
5        IF V[j] <= x THEN
6            i = i + 1
7            troca V[i] e V[j]
8        END IF
9    END FOR
10   troca V[i+1] e V[r]
11   RETURN i+1
```

Este algoritmo está correto somente se ao final da execução os elementos de um vetor V[p,…,r], tal que $p \leq r$, respeitarem as seguintes propriedades:

$$\forall k(p \leq k \leq i \rightarrow v[k] \leq v[i+1]) \land \forall k(i+1 < k \leq r \rightarrow v[k] > v[i+1])$$

Invariante:

No início de cada iteração do laço FOR das linhas 4–9, para qualquer índice k,

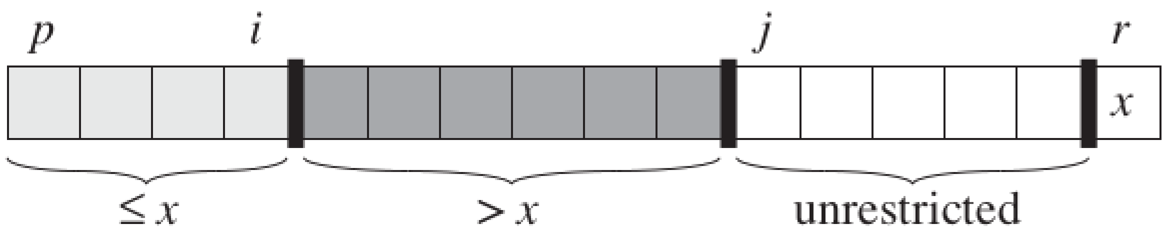
Corretude do PARTITION

```
1  PARTITION(V, p, r)
2    x = V[r]
3    i = p - 1
4    FOR j = p TO r-1 DO
5        IF V[j] <= x THEN
6            i = i + 1
7            troca V[i] e V[j]
8        END IF
9    END FOR
10   troca V[i+1] e V[r]
11   RETURN i+1
```

Invariante: No início de cada iteração do laço FOR das linhas 4–9, para qualquer índice k,

1. Se $p \leq k \leq i$, então $V[k] \leq x$
2. Se $i + 1 \leq k \leq j - 1$, então $V[k] > x$
3. Se $k = r$, então $V[k] = x$

Graficamente:



Corretude do PARTITION

```
1  PARTITION(V, p, r)
2    x = V[r]
3    i = p - 1
4    FOR j = p TO r-1 DO
5        IF V[j] <= x THEN
6            i = i + 1
7            troca V[i] e V[j]
8        END IF
9    END FOR
10   troca V[i+1] e V[r]
11   RETURN i+1
```

Invariante: No início de cada iteração do laço FOR das linhas 4–9, para qualquer índice k,

1. Se $p \leq k \leq i$, então $V[k] \leq x$
2. Se $i + 1 \leq k \leq j - 1$, então $V[k] > x$
3. Se $k = r$, então $V[k] = x$

Inicialização: Antes da primeira iteração, i=p-1, j=p e x=V[r]. Vamos verificar as proposições da invariante:

Proposição 1: Pode ser escrita como $\forall k(p \leq k \leq i \rightarrow V[k] \leq x)$.

$$\forall k(p \leq k \leq i \rightarrow V[k] \leq x)$$
$$\forall k(p \leq k \leq (p-1) \rightarrow V[k] \leq x) \text{ (substituindo i=p-1)}$$

Como o domínio de k é vazio uma vez que $((p-1) - p + 1) = 0$, então, pela definição do quantificador universal, a proposição é verdadeira. Em outras palavras, como não há elementos no vetor v[p..p-1] não há como violar a proposição.

Corretude do PARTITION

```
1  PARTITION(V, p, r)
2    x = V[r]
3    i = p - 1
4    FOR j = p TO r-1 DO
5        IF V[j] <= x THEN
6            i = i + 1
7            troca V[i] e V[j]
8        END IF
9    END FOR
10   troca V[i+1] e V[r]
11   RETURN i+1
```

Invariante: No início de cada iteração do laço FOR das linhas 4–9, para qualquer índice k,

1. Se $p \leq k \leq i$, então $V[k] \leq x$
2. Se $i+1 \leq k \leq j-1$, então $V[k] > x$
3. Se $k = r$, então $V[k] = x$

Inicialização (cont.): Antes da primeira iteração, i=p-1, j=p e x=V[r].

Proposição 2: Pode ser escrita como $\forall k(i+1 \leq k \leq j-1 \rightarrow V[k] > x)$.

$$\forall k(i+1 \leq k \leq j-1 \rightarrow V[k] > x)$$
$$\forall k((p-1)+1 \leq k \leq p-1 \rightarrow V[k] > x) \text{ (substituindo } i = p-1 \text{ e } j = p)$$
$$\forall k(p \leq k \leq p-1 \rightarrow V[k] > x)$$

Como o domínio de k é vazio uma vez que $((p-1)-p+1) = 0$, então, pela definição do quantificador universal, a proposição é verdadeira. Em outras palavras, como não há elementos no vetor v[p..p-1] não há como violar a proposição.

Corretude do PARTITION

```
1  PARTITION(V, p, r)
2    x = V[r]
3    i = p - 1
4    FOR j = p TO r-1 DO
5        IF V[j] <= x THEN
6            i = i + 1
7            troca V[i] e V[j]
8        END IF
9    END FOR
10   troca V[i+1] e V[r]
11   RETURN i+1
```

Invariante: No início de cada iteração do laço FOR das linhas 4–9, para qualquer índice k,

1. Se $p \leq k \leq i$, então $V[k] \leq x$
2. Se $i + 1 \leq k \leq j - 1$, então $V[k] > x$
3. Se $k = r$, então $V[k] = x$

Inicialização (cont.): Antes da primeira iteração, i=p-1, j=p e x=V[r].

Proposição 3: A proposição diz que p/ $k = r$, V[k] = x. Substituindo $k = r$, temos que V[r] = x, que é a atribuição realizada na linha 1. Portanto, a proposição 3 é verdadeira antes da primeira iteração.

Como mostramos que as proposições 1, 2 e 3 são verdadeiras antes da primeira iteração do laço, a invariante é verdadeira após a inicialização.

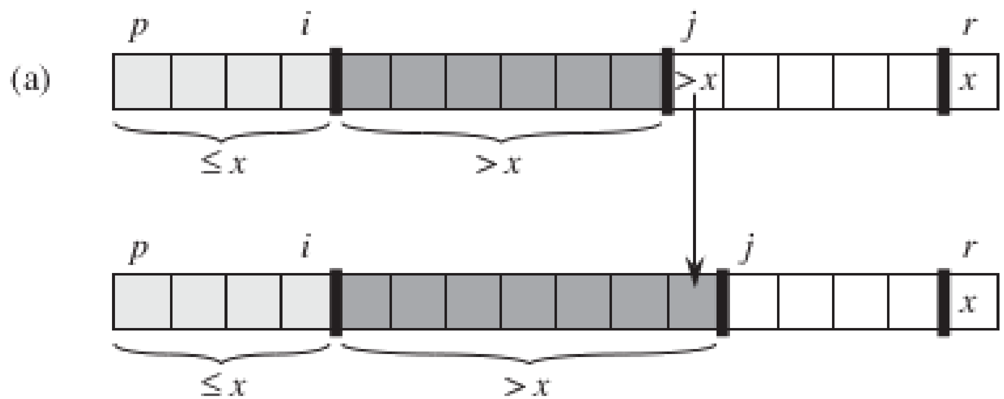
Corretude do PARTITION

```
1   PARTITION(V, p, r)
2     x = V[r]
3     i = p - 1
4     FOR j = p TO r-1 DO
5         IF V[j] <= x THEN
6             i = i + 1
7             troca V[i] e V[j]
8         END IF
9     END FOR
10    troca V[i+1] e V[r]
11    RETURN i+1
```

Invariante: No início de cada iteração do laço FOR das linhas 4–9, para qualquer índice k,

1. Se $p \leq k \leq i$, então $V[k] \leq x$
2. Se $i+1 \leq k \leq j-1$, então $V[k] > x$
3. Se $k = r$, então $V[k] = x$

Manutenção: Consideramos 2 casos: o caso que a condicional da linha 5 é verdadeira e o caso que é falsa. Quando a condicional é falsa ($V[j] > x$), temos a seguinte situação:



Corretude do PARTITION

```
1  PARTITION(V, p, r)
2    x = V[r]
3    i = p - 1
4    FOR j = p TO r-1 DO
5        IF V[j] <= x THEN
6            i = i + 1
7            troca V[i] e V[j]
8        END IF
9    END FOR
10   troca V[i+1] e V[r]
11   RETURN i+1
```

Invariante: No início de cada iteração do laço FOR das linhas 4–9, para qualquer índice k,

1. Se $p \leq k \leq i$, então $V[k] \leq x$
2. Se $i + 1 \leq k \leq j - 1$, então $V[k] > x$
3. Se $k = r$, então $V[k] = x$

Manutenção (cont.): No caso que a condicional da linha 5 é falsa, sabemos que $V[j] > x$ e que não há alteração nas variáveis i, j e em qualquer elemento de V[p..r]. Isto é verdade pois a única instrução que é executada é o incremento de j.

Proposição 1: No início da iteração supomos que a invariante é verdadeira, e portanto esta proposição também é. Como i não é alterado e não há troca dos elementos que estão entre as posições p e i, a proposição 1 é mantida verdadeira.

Corretude do PARTITION

```
1  PARTITION(V, p, r)
2    x = V[r]
3    i = p - 1
4    FOR j = p TO r-1 DO
5        IF V[j] <= x THEN
6            i = i + 1
7            troca V[i] e V[j]
8        END IF
9    END FOR
10   troca V[i+1] e V[r]
11   RETURN i+1
```

Invariante: No início de cada iteração do laço FOR das linhas 4–9, para qualquer índice k,

1. Se $p \leq k \leq i$, então $V[k] \leq x$
2. Se $i+1 \leq k \leq j-1$, então $V[k] > x$
3. Se $k = r$, então $V[k] = x$

Manutenção (cont.): No caso que a condicional da linha 5 é falsa, sabemos que $V[j] > x$ e que não há alteração nas variáveis i, j e em qualquer elemento de V[p..r]. Isto é verdade pois a única instrução que é executada é o incremento de j.

Proposição 2:

$$\forall k(i+1 \leq k \leq j-1 \rightarrow V[k] > x) \text{ (invariante de laço)}$$
$$\forall k(i+1 \leq k \leq j-1 \rightarrow V[k] > x) \wedge V[j] > x \text{ (como } V[j] > x)$$
$$\forall k(i+1 \leq k \leq \mathbf{j} \rightarrow V[k] > x) \text{ (def. de } \forall)$$
$$\forall k(i+1 \leq k \leq \mathbf{j}-1 \rightarrow V[k] > x) \text{ (após j++ do FOR)}$$

Conforme mostrado acima, a invariante é mantida verdadeira antes da próxima iteração.

Corretude do PARTITION

```
1   PARTITION(V, p, r)
2     x = V[r]
3     i = p - 1
4     FOR j = p TO r-1 DO
5         IF V[j] <= x THEN
6             i = i + 1
7             troca V[i] e V[j]
8         END IF
9     END FOR
10    troca V[i+1] e V[r]
11    RETURN i+1
```

Invariante: No início de cada iteração do laço FOR das linhas 4–9, para qualquer índice k,

1. Se $p \leq k \leq i$, então $V[k] \leq x$
2. Se $i + 1 \leq k \leq j - 1$, então $V[k] > x$
3. Se $k = r$, então $V[k] = x$

Manutenção (cont.): No caso que a condicional da linha 5 é falsa, sabemos que $V[j] > x$ e que não há alteração nas variáveis i, j e em qualquer elemento de V[p..r]. Isto é verdade pois a única instrução que é executada é o incremento de j.

Proposição 3: Pela invariante de laço, sabemos que no início da iteração p/ $k = r$, V[k] = x. Como r não é usado para indexar o vetor e nenhum elemento de V[p..r] é alterado neste caso, não é possível que $V[k] \neq x$.

Como mostramos que as proposições 1, 2 e 3 são mantidas verdadeiras após a execução do laço quando a condicional da linha 5 é falsa, a invariante é mantida verdadeira neste caso. Vamos verificar o que acontece quando a condicional da linha 5 é verdadeira.

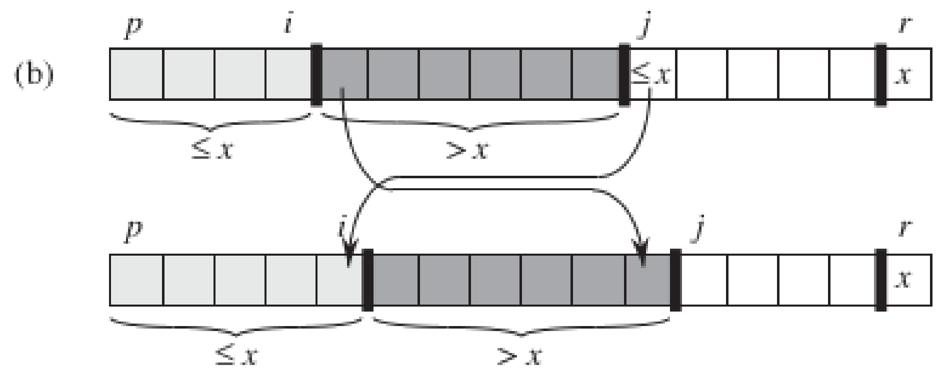
Corretude do PARTITION

```
1  PARTITION(V, p, r)
2    x = V[r]
3    i = p - 1
4    FOR j = p TO r-1 DO
5        IF V[j] <= x THEN
6            i = i + 1
7            troca V[i] e V[j]
8        END IF
9    END FOR
10   troca V[i+1] e V[r]
11   RETURN i+1
```

Invariante: No início de cada iteração do laço FOR das linhas 4–9, para qualquer índice k,

1. Se $p \leq k \leq i$, então $V[k] \leq x$
2. Se $i + 1 \leq k \leq j - 1$, então $V[k] > x$
3. Se $k = r$, então $V[k] = x$

Manutenção (cont.): Quando a condicional da linha 5 é verdadeira ($V[j] \leq x$), temos a seguinte situação:



Corretude do PARTITION

```
1  PARTITION(V, p, r)
2    x = V[r]
3    i = p - 1
4    FOR j = p TO r-1 DO
5        IF V[j] <= x THEN
6            i = i + 1
7            troca V[i] e V[j]
8        END IF
9    END FOR
10   troca V[i+1] e V[r]
11   RETURN i+1
```

Invariante: No início de cada iteração do laço FOR das linhas 4–9, para qualquer índice k,

1. Se $p \leq k \leq i$, então $V[k] \leq x$
2. Se $i+1 \leq k \leq j-1$, então $V[k] > x$
3. Se $k = r$, então $V[k] = x$

Manutenção (cont.): No caso que a condicional da linha 5 é verdadeira, sabemos que $V[j] \leq x$.

Proposição 1:

$$\forall k (p \leq k \leq i \rightarrow V[k] \leq x) \text{ (invariante de laço)}$$
$$\forall k (p \leq k \leq i-1 \rightarrow V[k] \leq x) \wedge (V[i] > x) \wedge (V[j] \leq x) \text{ (após a l.6, pelo if e prop. 2)}$$
$$\forall k (p \leq k \leq i-1 \rightarrow V[k] \leq x) \wedge (V[i] \leq x) \wedge (V[j] > x) \text{ (após a l.7)}$$
$$\forall k (p \leq k \leq i-1 \rightarrow V[k] \leq x) \wedge (V[i] \leq x) \text{ (eq. simplificação)}$$
$$\forall k (p \leq k \leq i \rightarrow V[k] \leq x) \text{ (def. } \forall)$$

Pelo argumento acima, a proposição é mantida verdadeira.

Corretude do PARTITION

```
1  PARTITION(V, p, r)
2    x = V[r]
3    i = p - 1
4    FOR j = p TO r-1 DO
5        IF V[j] <= x THEN
6            i = i + 1
7            troca V[i] e V[j]
8        END IF
9    END FOR
10   troca V[i+1] e V[r]
11   RETURN i+1
```

Invariante: No início de cada iteração do laço FOR das linhas 4–9, para qualquer índice k,

1. Se $p \leq k \leq i$, então $V[k] \leq x$
2. Se $i + 1 \leq k \leq j - 1$, então $V[k] > x$
3. Se $k = r$, então $V[k] = x$

Manutenção (cont.): No caso que a condicional da linha 5 é verdadeira, sabemos que $V[j] \leq x$.

Proposição 2:

$$\begin{aligned}
&\forall k(i + 1 \leq k \leq j - 1 \to V[k] > x) \text{ (invariante de laço)}\\
&\quad \forall k(i \leq k \leq j - 1 \to V[k] > x) \wedge V[j] \leq x \text{ (após a l.6 e pelo if)}\\
&\forall k(i + 1 \leq k \leq j - 1 \to V[k] > x) \wedge (V[j] > x) \wedge (V[i] \leq x) \text{ (após a linha 7)}\\
&\forall k(i + 1 \leq k \leq j - 1 \to V[k] > x) \wedge (V[j] > x) \text{ (eq. simplificação)}\\
&\forall k(i + 1 \leq k \leq j \to V[k] > x) \text{ (def. de } \forall)\\
&\forall k(i + 1 \leq k \leq j - 1 \to V[k] > x) \text{ (após j++ do FOR)}
\end{aligned}$$

Conforme mostrado acima, a invariante é mantida verdadeira antes da próxima iteração.

Corretude do PARTITION

```
1  PARTITION(V, p, r)
2    x = V[r]
3    i = p - 1
4    FOR j = p TO r-1 DO
5        IF V[j] <= x THEN
6            i = i + 1
7            troca V[i] e V[j]
8        END IF
9    END FOR
10   troca V[i+1] e V[r]
11   RETURN i+1
```

Invariante: No início de cada iteração do laço `FOR` das linhas 4–9, para qualquer índice k,

1. Se $p \leq k \leq i$, então $V[k] \leq x$
2. Se $i + 1 \leq k \leq j - 1$, então $V[k] > x$
3. Se $k = r$, então $V[k] = x$

Manutenção (cont.): No caso que a condicional da linha 5 é verdadeira, sabemos que $V[j] \leq x$.

Proposição 3: Pela invariante de laço, sabemos que no início da iteração p/ $k = r$, V[k] = x. r não é usado para indexar o vetor, e portanto a $V[r]$ não é alterado diretamente. Além disto, o vetor é alterado apenas na linha 7, usando i e j como índices, que nunca recebem o valor r, uma vez que j só varia de p a $r - 1$ e i é sempre menor que j. Desta forma, não é possível que $V[k] \neq x$.

Como mostramos que as proposições 1, 2 e 3 são mantidas verdadeiras após a execução do laço quando a condicional da linha 5 é verdadeira, a invariante é mantida verdadeira neste caso. Como mostramos que a invariante é mantida em ambos casos, podemos concluir que a invariante se mantém entre duas iterações quaisquer.

Corretude do `PARTITION`

```
1  PARTITION(V, p, r)
2    x = V[r]
3    i = p - 1
4    FOR j = p TO r-1 DO
5        IF V[j] <= x THEN
6            i = i + 1
7            troca V[i] e V[j]
8        END IF
9    END FOR
10   troca V[i+1] e V[r]
11   RETURN i+1
```

Invariante: No início de cada iteração do laço `FOR` das linhas 4–9, para qualquer índice k,

1. Se $p \leq k \leq i$, então $V[k] \leq x$
2. Se $i + 1 \leq k \leq j - 1$, então $V[k] > x$
3. Se $k = r$, então $V[k] = x$

Término: No término, temos $j = r$. Substituindo na invariante, temos:

1. Se $p \leq k \leq i$, então $V[k] \leq x$
2. Se $i + 1 \leq k \leq r - 1$, então $V[k] > x$
3. Se $k = r$, então $V[k] = x$

Após a troca da linha 10 temos:

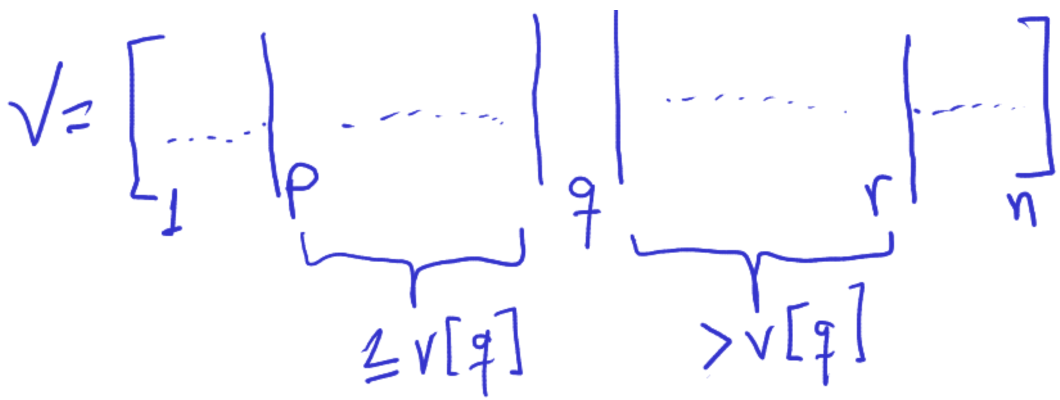
1. Se $p \leq k \leq i$, então $V[k] \leq V[i+1]$ (pois V[r]=x (pela 3ª prop.) foi trocado com V[i+1])
2. Se $i + 1 < k \leq r$, então $V[k] > V[i+1]$ (pois V[r]=x (pela 3ª prop.) foi trocado com V[i+1])

Corretude do PARTITION

Término (cont.):

1. Se $p \leq k \leq i$, então $V[k] \leq V[i+1]$
2. Se $i+1 < k \leq r$, então $V[k] > V[i+1]$

Considerando $q = i + 1$, estas duas proposições descrevem exatamente as propriedades que queríamos assegurar ao vetor pelo algoritmo PARTITION. Relembrando a figura apresentada no início:



Portanto, o algoritmo está correto.

QuickSort

```
QUICKSORT(V, p, r)
  IF p < r THEN
    q = PARTITION(V, p, r)
    QUICKSORT(V, p, q-1)
    QUICKSORT(V, q+1, r)
  END IF
```

Baseado em divisão e conquista, o algoritmo para ordenar $V[p, \ldots, r]$ pode ser descrito por:

- ***DIVISÃO*** – Particionar o vetor $V[p, \ldots, r]$ em dois subvetores potencialmente vazios $V[p, \ldots, q-1]$ e $V[q+1, \ldots, r]$ de forma que os elementos $V[p, \ldots, q-1]$ sejam menores ou iguais a $V[q]$, que, por sua vez, é menor ou igual a todos os elementos em $V[q+1, \ldots, r]$.
- ***CONQUISTA*** – Ordenar $A[p, \ldots, q-1]$ e $A[q+1, \ldots, r]$ recursivamente, usando `QUICKSORT`.
- ***COMBINAÇÃO*** – Como os subvetores $A[p, \ldots, q-1]$ e $A[q+1, \ldots, r]$ já estão ordenados, trabalho adicional não é necessário para combiná-los: o subvetor $A[p, \ldots, r]$ está ordenado.

Desempenho do QuickSort

O desempenho do `QUICKSORT` depende do balanceamento obtido por `PARTITION`, que depende da escolha do pivô e da relação dos valores dos elementos. Se o particionamento é balanceado, ou seja, o pivô “divide” o subvetor em 2 partições com quantidades praticamente iguais de elementos, o algoritmo possui complexidade assintótica idêntica ao `HEAPSORT` e `MERGESORT`.

Caso contrário, a complexidade assintótica é a mesma que do ineficiente `BUBBLESORT`. Primeiramente, analisamos informalmente o desempenho do `QUICKSORT` em relação ao balanceamento do particionamento.

Custo do QuickSort no Pior Caso

O pior caso do `QUICKSORT` acontece quando `PARTITION` produz dois subproblemas: um com 0 elementos e outro com $n-1$ elementos em todas as chamadas recursivas em `QUICKSORT`. Como o particionamento tem custo $\Theta(n)$ e $T(0)$ tem custo constante, a recorrência neste caso é:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + T(0) + \Theta(n) \\ &= T(n-1) + \Theta(n) \end{aligned}$$

Intuitivamente, ao somarmos o custo de todos os níveis da recursão teríamos n níveis, cada um com um elemento a menos que o nível anterior de custo $\Theta(n)$ teríamos uma série aritmética ($cn + c(n-1) + c(n-2) + \cdots + c1$), que é $\Theta(n^2)$. Desta forma, se o particionamento for totalmente desbalanceado em todo nível da recursão, o tempo de execução é $\Theta(n^2)$, que não é melhor que o `INSERTIONSORT`, por exemplo. Além disto, o pior caso ocorre quando o vetor de entrada já está ordenado, um caso que o `INSERTIONSORT` executa em tempo $\Theta(n)$.

Custo do QuickSort no Melhor Caso

No corte (particionamento) mais bem distribuído possível, dois subproblemas devem ser resolvidos recursivamente, um com $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ elementos e outro com $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$ elementos. Neste caso, o tempo necessário para `QUICKSORT` executar é dado pela recorrência

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$$

Ignorando o chão e teto e a subtração de 1, sem perda de generalidade. Pelo caso 2 do teorema mestre, a recorrência tem solução $T(n) = \Theta(n \lg n)$. Portanto, se o particionamento for balanceado em todos os níveis, temos um algoritmo mais eficiente, comparável ao `HEAPSORT`, com constantes escondidas potencialmente menores.

Particionamento Desbalanceado

Uma das vantagens práticas do `QUICKSORT` é que a complexidade do caso médio se assemelha mais ao melhor caso do que ao pior caso. Para entender melhor esta relação é necessário entender como o balanço do particionamento reflete na recorrência que descreve o tempo de execução.

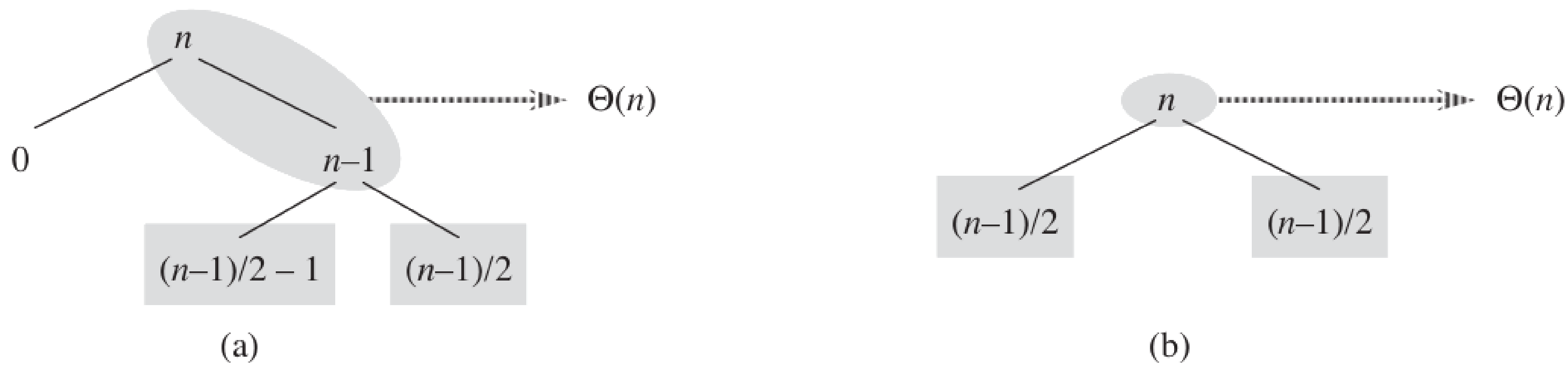
Suponha que `PARTITION` sempre produza subproblemas em proporção 9 pra 1 em todos os níveis da recursão. Note que esta aproximação é grosseira, uma vez que em uma execução média todo tipo de corte seria realizado por `PARTITION`, nas mais variadas proporções. No entanto, como veremos adiante, esta aproximação nos permite ter uma boa noção do tempo de execução no caso médio. Portanto, supondo a proporção 9 pra 1, a recorrência de `QUICKSORT` seria

$$T(n) = T\left(\frac{9n}{10}\right) + T\left(\frac{n}{10}\right) + \Theta(n)$$

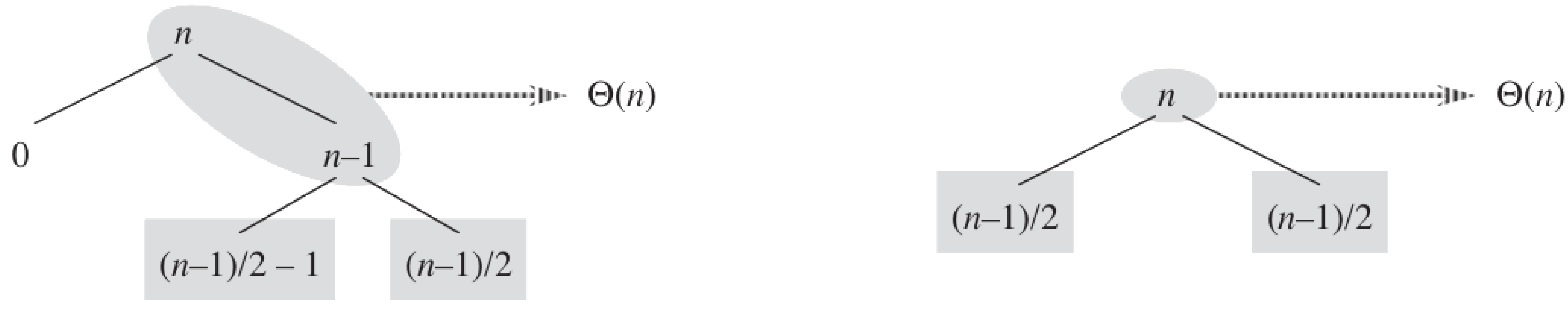
Como exercício, construa a árvore de recursão para esta recorrência. Note que todo nível da árvore tem custo cn até o nível de altura $\log_1 0 = \Theta(\lg n)$. A partir deste nível, todos os demais possuem custo $O(cn)$, ou seja, no máximo cn. A recursão termina na altura $\log_{\frac{10}{9}} n = \Theta(\lg n)$. É possível confirmar, pelo método da substituição que $T(n) = \Theta(n \lg n)$.

Intuição para o Caso Médio

Quando `QUICKSORT` é executado em um vetor qualquer, o particionamento dificilmente ocorre da mesma forma em todos os níveis, como a análise anterior assumiu. Esperamos que alguns cortes sejam bem balanceados e outros não. No caso médio, `PARTITION` produz uma quantidade mista de cortes "bons" e "ruins". Em uma árvore de recursão para o caso médio de `QUICKSORT`, há cortes bons e ruins distribuídos pela árvore. Suponha, por questão de simplicidade de cálculos, que cortes bons e ruins estão em níveis alternados na árvore, como apresentado na Figura a seguir:



Intuição para o Caso Médio



(a) (b)

Intuitivamente, o custo do corte "ruim" é absorvido no custo $\Theta(n)$ do corte "bom", resultando em um corte bom. Assim, o custo do `QUICKSORT`, quando os níveis alternam entre cortes "bons" e "ruins" é parecido com o custo envolvido quando há apenas cortes "bons": $O(n \lg n)$, mas com uma constante maior, escondida na notação O.

Bibliografia

[CRLS] CORMEN, T. H. et al. Algoritmos: Teoria e Prática. Elsevier, 2012. 3a Ed. Capítulo 7 (*QuickSort*), Seções 7.1 e 7.2.