Método Mestre para Resolver Recorrências

Prof. Juliano Foleis

Método Mestre

O método mestre serve para resolver recorrências da forma

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

tal que $a \geq 1, b > 1, a$ e b constantes, e $f(n)$ é assintoticamente positiva.

Teorema Mestre

Sejam $a \geq 1$ e $b > 1$ constantes, $f(n)$ uma função assintoticamente possitiva e $T(n)$ definida para inteiros não-negativos a recorrência

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

é limitada assintoticamente por:

1. Se $f(n) = O(n^{\log_b(a)-\epsilon})$ para $\epsilon > 0$ constante, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$;
2. Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)} \cdot \lg(n))$; ou
3. Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b(a)+\epsilon})$ para $\epsilon > 0$ constante **E** se $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$ para $c < 1$ constante e n suficientemente grande, então $T(n) = \Theta(f(n))$.

Exemplo 1

Resolva a recorrência $T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$ usando o método mestre.

Solução:

Passo 1: Identificar a, b e $f(n)$.

$a = 9$

$b = 3$

$f(n) = n$

Passo 2: Calcular $n^{\log_b(a)}$.

$n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = n^2$

Exemplo 1

Passo 3: Comparar $f(n)$ e $n^{\log_b(a)}$.

$f(n) =?(n^{\log_b(a)})$, substituindo

$n =?(n^2)$ (O, Ω ou Θ?)

$$n = O(n^2)$$

Parece que temos o Caso 1 do TM:

> 1. Se $f(n) = O(n^{\log_b(a)-\epsilon})$ para $\epsilon > 0$ constante, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$

Como $n = O(n^{2-\epsilon})$, p/ $\epsilon = 1$, podemos aplicar o caso 1 do método mestre e concluir que $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)}) = \Theta(n^2)$.

Exemplo 2

Resolva a recorrência $T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + 1$ usando o método mestre.

Solução:

Passo 1: Identificar a, b e $f(n)$.

$a = 1$

$b = \frac{3}{2}$

$f(n) = 1$

Passo 2: Calcular $n^{\log_b(a)}$.

$n^{\log_b a} = n^{\log_{\frac{3}{2}} 1} = n^0 = 1$

Exemplo 2

Passo 3: Comparar $f(n)$ e $n^{\log_b(a)}$.

$f(n) =? (n^{\log_b(a)})$, substituindo

$1 =? (1)$ (O, Ω ou Θ?)

$1 = \Theta(1)$

Parece que temos o Caso 2 do TM:

> 2. Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)} \cdot \lg(n))$

Como $1 = \Theta(1)$, podemos aplicar o caso 2 do método mestre e concluir que $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)} \cdot \lg(n)) = \Theta(1 \cdot \lg(n)) = \Theta(\lg(n))$.

Exemplo 3

Resolva a recorrência $T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n \lg n$ usando o método mestre.

Solução:

Passo 1: Identificar a, b e $f(n)$.

$a = 3$

$b = 4$

$f(n) = n \lg n$

Passo 2: Calcular $n^{\log_b(a)}$.

$n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} \approx n^{0{,}793}$

Exemplo 3

Passo 3: Comparar $f(n)$ e $n^{\log_b(a)}$.

$f(n) =?(n^{\log_b(a)})$, substituindo

$n \lg n =?(n^{0,793})$ (O, Ω ou Θ?)

$$n \lg n = \Omega(n^{0,793})$$

Parece que temos o Caso 3 do TM:

> 3. Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b(a)+\epsilon})$ para $\epsilon > 0$ constante **E** se $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$ para $c < 1$ constante e n suficientemente grande, então $T(n) = \Theta(f(n))$.

Como $f(n) = \Omega(n^{\log_4 3+\epsilon})$, $\epsilon \approx 0.2$, podemos aplicar o caso 3 do método mestre se a condição a seguir for verdadeira: $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$.

Exemplo 3

$$
\begin{aligned}
af\left(\frac{n}{b}\right) &\le cf(n) \\
3\left(\frac{n}{4}\lg\frac{n}{4}\right) &\le cn\lg n \\
\frac{3}{4}n\lg n - \frac{3}{4}n\lg 4 &\le cn\lg n \\
\frac{3}{4}n\lg n - \frac{3}{4}2n &\le cn\lg n \\
\frac{3}{4}n\lg n - \frac{3}{2}n &\le cn\lg n \\
n\lg n\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{2\lg n}\right) &\le cn\lg n \\
\frac{3}{4} - \frac{3}{2\lg n} &\le c
\end{aligned}
$$

Exemplo 3

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{2\lg n} \leq c$$

Portanto, $c \geq \frac{3}{4}$ para n suficientemente grande. Assim, tomando $c = \frac{3}{4}$, $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq\ cf(n)$ p/ $c < 1$. Assim, é possível aplicar o caso 3 do método mestre, e podemos concluir que $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n\lg n)$.

Exemplo 4

Resolva a recorrência $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \lg n$ usando o método mestre.

Solução:

Passo 1: Identificar a, b e $f(n)$.

$a = 2$

$b = 2$

$f(n) = n \lg n$

Passo 2: Calcular $n^{\log_b(a)}$.

$n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n^1 = n$

Exemplo 4

Passo 3: Comparar $f(n)$ e $n^{\log_b(a)}$.

$f(n) =?(n^{\log_b(a)})$, substituindo

$n \lg n =?(n)$ (O, Ω ou Θ?)

$n \lg n = \Omega(n)$

Parece que temos o Caso 3 do TM:

> 3. Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b(a)+\epsilon})$ para $\epsilon > 0$ constante **E** se $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$ para $c < 1$ constante e n suficientemente grande, então $T(n) = \Theta(f(n))$.

$n \lg n$ é limitada inferiormente por n, mas não é polinomialmente maior. Isto é, a razão $f(n)/n^{\log_b a} = n \lg n/n = \lg n$, que é assintoticamente menor que n^ϵ para qualquer constante positiva ϵ. Em outras palavras, não é possível mostrar que $n \lg n = \Omega(n^{1+\epsilon})$ p/ $\epsilon > 0$. Consequentemente a recorrência cai na lacuna dos casos 2 e 3 e não é resolvida pelo teorema mestre.

Exemplo 5

Resolva a recorrência $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$ usando o método mestre.

Solução:

Passo 1: Identificar a, b e $f(n)$.

$a = 2$

$b = 2$

$f(n) = n$

Passo 2: Calcular $n^{\log_b(a)}$.

$n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n^1 = n$

Exemplo 5

Passo 3: Comparar $f(n)$ e $n^{\log_b(a)}$.

$f(n) = ?(n^{\log_b(a)})$, substituindo

$n = ?(n)$ (O, Ω ou Θ?)

$n = \Theta(n)$

Parece que temos o Caso 2 do TM:

> 2. Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)} \cdot \lg(n))$

Como $n = \Theta(n)$, podemos aplicar o caso 2 do método mestre e concluir que $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)} \cdot \lg(n)) = \Theta(n \cdot \lg(n)) = \Theta(n \lg(n))$.

Exemplo 6

Resolva a recorrência $T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^2)$ usando o método mestre.

Solução:

Passo 1: Identificar a, b e $f(n)$.

$a = 8$

$b = 2$

$f(n) = n^2$

Passo 2: Calcular $n^{\log_b(a)}$.

$n^{\log_b a} = n^{\log_2 8} = n^3$

Exemplo 6

Passo 3: Comparar $f(n)$ e $n^{\log_b(a)}$.

$f(n) =?(n^{\log_b(a)})$, substituindo

$n^2 =?(n^3)$ (O, Ω ou Θ?)

$$n^2 = O(n^3)$$

Parece que temos o Caso 1 do TM:

> 1. Se $f(n) = O(n^{\log_b(a)-\epsilon})$ para $\epsilon > 0$ constante, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$

Como $n^2 = O(n^{3-\epsilon})$, p/ $\epsilon = 1$, podemos aplicar o caso 1 do método mestre e concluir que $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)}) = \Theta(n^3)$.

Exemplo 7

Resolva a recorrência $T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^2)$ usando o método mestre.

Solução:

Passo 1: Identificar a, b e $f(n)$.

$a = 7$

$b = 2$

$f(n) = n^2$

Passo 2: Calcular $n^{\log_b(a)}$.

$n^{\log_b a} = n^{\log_2 7} = n^{\lg 7} \approx n^{2,8}$

Exemplo 7

Passo 3: Comparar $f(n)$ e $n^{\log_b(a)}$.

$f(n) =?(n^{\log_b(a)})$, substituindo

$n^2 =?(n^{2,81})$ (O, Ω ou Θ?)

$$n^2 = O(n^{2,81})$$

Parece que temos o Caso 1 do TM:

> 1. Se $f(n) = O(n^{\log_b(a)-\epsilon})$ para $\epsilon > 0$ constante, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$

Como $n^2 = O(n^{\lg(7)-\epsilon})$, para $\epsilon = 0.8$, podemos aplicar o caso 1 do método mestre e concluir que $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)}) = \Theta(n^{\lg 7}) = \Theta(n^{2,8})$.

Bibliografia

[CRLS] CORMEN, T. H. et al. Algoritmos: Teoria e Prática. Elsevier, 2012. 3a Ed. Capítulo 4 (Divisão e Conquista), Seção 4.5 (Método mestre para resolver recorrências)