



VISIÓN POR COMPUTADOR



Manuel Mazo Quintas

Departamento de Electrónica. Universidad de Alcalá.

Email: mazo@depeca.uah.es

1



Contenido

- Descripción de líneas y contornos.
- Descripción de regiones.



Descripción de líneas y contornos

Transformada de Hough.
Ajuste de líneas mediante autovectores.
Ajuste mediante mínimos cuadrados (regresión lineal)
Código cadena.
Signaturas
Histograma.
Descriptores de Fourier
Splines



Extracción de segmentos de línea rectos *General*



- Dado un conjunto local de elementos de borde (obtenidos mediante técnicas de detección de bordes), con o sin información de orientación.
- ¿Cómo se pueden extraer líneas rectas largas?
- Idea general:
 - ✓ Encontrar un espacio alternativo en el cual las líneas se “mapean” como puntos.
 - ✓ Cada elemento de borde “vota” por una línea recta a la cual puede pertenecer.
 - ✓ Aquellos puntos que en el espacio alternativo reciban un alto número de *votos* se corresponden con líneas en la imagen..



Extracción de segmentos de línea rectos

Transformada de Hough

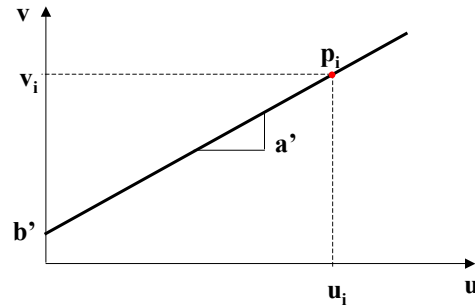


- Considerar puntos (bordes) en el plano imagen.
- Todas las líneas en ese plano se pueden escribir como:

$$v = a \cdot u + b$$

- Si se considera un punto (u_i, v_i) , sobre una determinada recta (a', b') :

$$v_i = a' \cdot u_i + b'$$



Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

5



Extracción de segmentos de línea rectos

Transformada de Hough



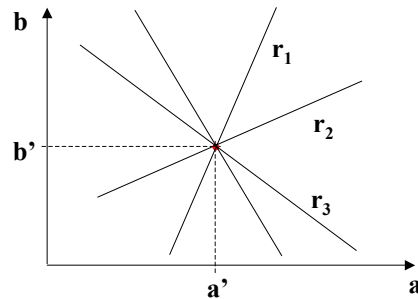
- Si la ecuación de una recta cualquiera se escribe (espacio de parámetros):

$$b = -u_i \cdot a + v_i$$

- Por cada punto (u_i, v_i) situado sobre una recta en el plano imagen (u-v), se obtiene una recta (r_i) en el espacio de parámetros:

$$v = a \cdot u + b \rightarrow \begin{cases} (u_1, v_1) \rightarrow r_1: b = -u_1 \cdot a + v_1 \\ (u_2, v_2) \rightarrow r_2: b = -u_2 \cdot a + v_2 \\ \dots \\ (u_i, v_i) \rightarrow r_i: b = -u_i \cdot a + v_i \end{cases}$$

Si los N puntos (u_i, v_i) elegidos pertenecen a una misma recta $v = a' \cdot u + b'$, las rectas en el espacio de parámetros se cortarán en un punto de coordenadas (a', b') .



Cuantos más puntos se tomen sobre una línea en el plano imagen, más rectas se cruzan en el punto (a', b') del espacio de parámetros

Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

6



Extracción de segmentos de línea rectos

Transformada de Hough



➤ Aplicación al procesamiento de imágenes:

1. Subdividir (cuantificar) “a” y “b” en intervalos apropiados, dentro de los rangos de variación (a_{\min} , a_{\max}), y (b_{\min} , b_{\max}). Es importante decidir que son “intervalos apropiados”.
2. Crear un array de acumulación H(a,b). Inicialmente todas las celdas del array se ponen a cero.
3. Para cada punto (u_i , v_i) de borde del plano imagen (cuya magnitud supere un umbral), se obtienen los valores discretos de (a, b), a partir de la ecuación:

$$b = -u_i \cdot a + v_i \begin{cases} a = a_1 \rightarrow b_1 = -u_i \cdot a_1 + v_i \\ a = a_2 \rightarrow b_2 = -u_i \cdot a_2 + v_i \\ \dots \\ a = a_n \rightarrow b_n = -u_i \cdot a_n + v_i \end{cases}, \quad \forall a \ni a_{\min} \leq a \leq a_{\max}$$

4. Incrementar todas las celdas de H(a,b) que resulten de la ecuación anterior.
 - Obsérvese que H es un histograma bidimensional.
5. Máximos locales de H(a_i , b_i) se corresponden con puntos sobre rectas en el plano imagen. Los parámetros de las rectas en el plano imagen serán: a_i , b_i .

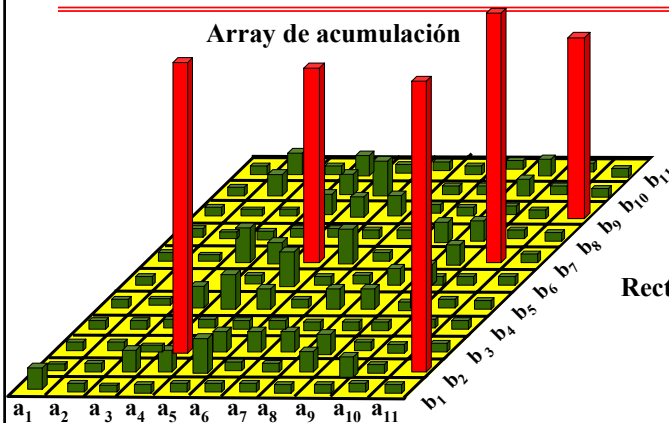
Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

7



Extracción de segmentos de línea rectos

Transformada de Hough



Rectas en el plano imagen:5

$$v = a_4 \cdot u + b_3$$

$$v = a_{11} \cdot u + b_2$$

$$v = a_5 \cdot u + b_7$$

$$v = a_{10} \cdot u + b_7$$

$$v = a_{11} \cdot u + b_9$$

Nº de operaciones: Para “n” puntos de borde, si “a” se cuantifica con M valores, el nº de operaciones suma y producto son: nxM

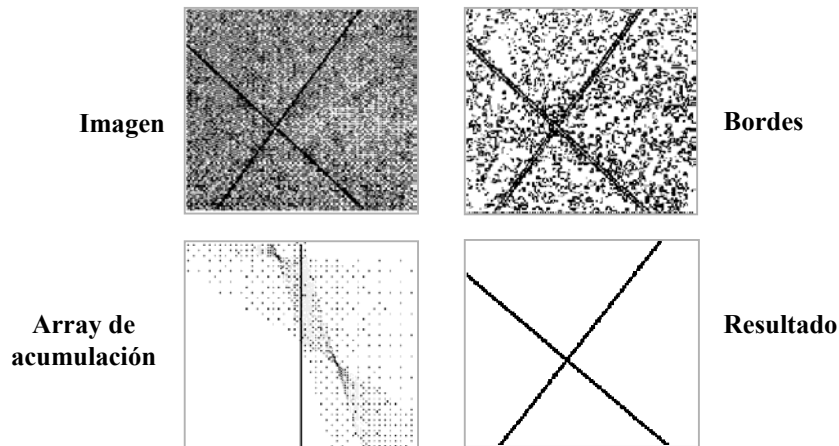
Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

8



Extracción de segmentos de línea rectos

Ejemplo de la transformada de Hough



Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

9



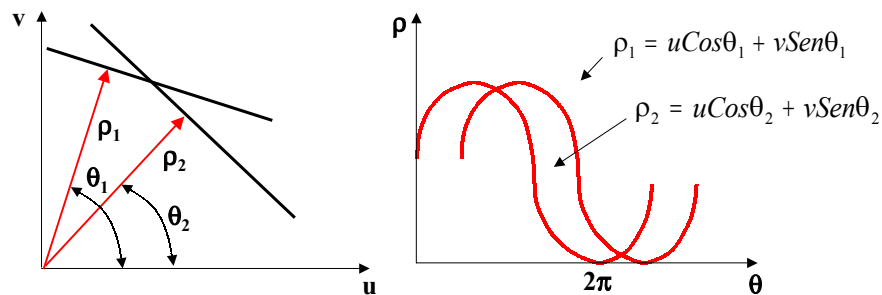
Extracción de segmentos de línea rectos

Transformada de Hough: Problemas



- Un problema de la representación cartesiana de la recta es que tanto la pendiente (a) como la ordenada en el origen (b) tienden a infinito conforme la recta se acerca a posiciones verticales.
- Para evitar este problema se usa la representación polar (normal) de la recta:

$$\rho = u \cos \theta + v \sin \theta \quad 0 \leq \rho \leq (u_{\text{máx}}^2 + v_{\text{máx}}^2)^{1/2}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$



Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

10



Extracción de segmentos de línea rectos

Trans. de Hough: representación alternativa



- La forma de construir el acumulador en el plano ρ - θ es similar al primer algoritmo.
- La única diferencia está en que, en vez de líneas rectas, se obtendrán curvas sinusoidales.
- Así, N puntos colineales (u,v) pertenecientes a una recta en el plano imagen:

$$\rho_k = u \cos \theta_k + v \sin \theta_k; \text{ para los } N \text{ puntos } (u,v)$$

- Darán lugar a N curvas sinusoidales que se cortarán, en el espacio de parámetros, en el punto (ρ_k, θ_k) .

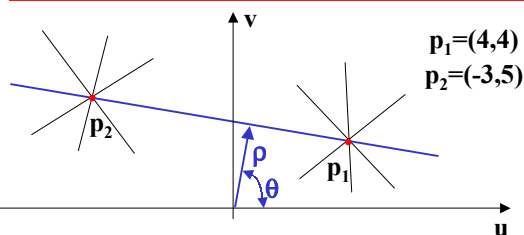
Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

11

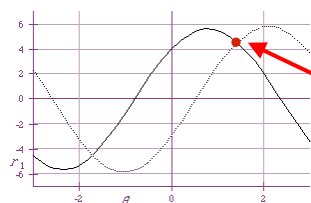


Extracción de segmentos de línea rectos

Trans. de Hough: Ejemplo



Espacio (ρ, θ)



$$\begin{cases} \rho = -3 \cos \theta + 5 \sin \theta \\ \rho = 4 \cos \theta + 4 \sin \theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \theta = 1.4289 \\ \rho = 4.5255 \end{cases}$$

Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

12

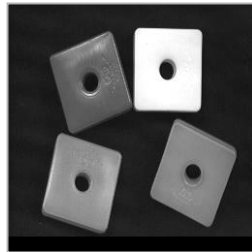


Extracción de segmentos de línea rectos

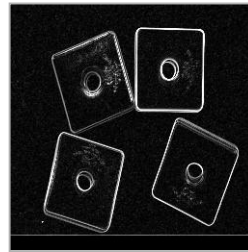
Trans. de Hough: Ejemplo



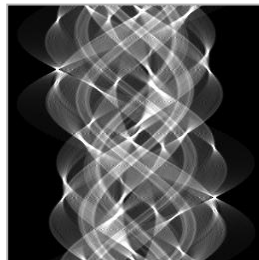
Imagen



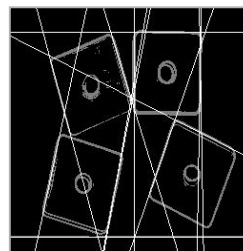
Bordes



Array de
acumulación



Resultado



Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

13



Extracción de segmentos de línea rectos

Trans. de Hough: simplificación



- El número de operaciones de la transformada de Hough se puede simplificar notablemente si se considera la dirección del vector gradiente en cada píxel de borde.
- Dado que la dirección del vector gradiente en un píxel de borde es perpendicular a éste, la recta que se busca debe tener una dirección próxima a la perpendicular del vector gradiente.
- La búsqueda al evaluar cada punto de borde se puede, por tanto, restringir el rango de orientaciones.

Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

14



Extracción de segmentos de línea rectos

Trans. de Hough: Pseudocódigo



- ❑ Discretizar el espacio de parámetros, estableciendo valores máximos y mínimos de ρ y θ , así como el número de valores de ρ y θ .
- ❑ Generar el acumulador $H(\rho, \theta)$; poner todos sus valores a cero.
- ❑ Para todos los puntos de borde (u_i, v_i)
 - Calcular la dirección del vector gradiente θ .
 - Obtener ρ de la ecuación $\rho = u_i \cos \theta + v_i \sin \theta$.
 - Incrementar $H(\rho, \theta)$.
- ❑ Para todas las celdas en el acumulador
 - Buscar los valores máximos del acumulador.
 - Las coordenadas (ρ, θ) dan la ecuación de la recta de la imagen



Extracción de curvas

Trans. de Hough: Círculos



- La detección de círculos es similar al de rectas.
- Los círculos están definidos por tres parámetros: centro (a, b) y radio r
$$(u - a)^2 + (v - b)^2 = r^2$$
- Ahora el espacio de parámetros es tridimensional con células cúbicas y acumuladores de la forma $H(a, b, r)$.
- El procedimiento consiste en incrementar “a” y “b”, y hallar “r” para que satisfaga la ecuación del círculo, y actualizar el valor del acumulador correspondiente a la célula asociada con el vector (a, b, r) .
- Es evidente que esta tercera dimensión incrementa notablemente el número de operaciones.

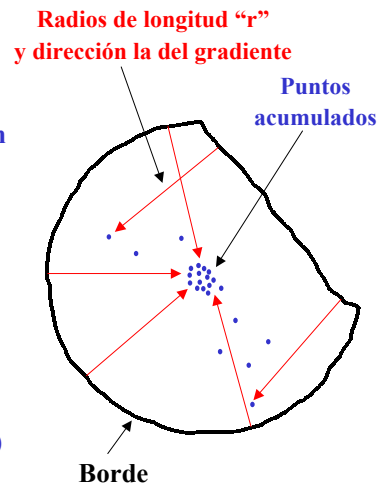


Extracción de curvas

Trans. de Hough: Círculos



- Supongamos que se quiere localizar el centro de un círculo, de radio conocido.
- En este caso se puede reducir el número de operaciones, utilizando información local acerca de la orientación del borde en cada píxel, obteniendo, de esta manera la posición del centro del círculo.
- Para ello, se sitúa el centro del círculo (de cada píxel de borde) a una distancia "r" (radio del círculo buscado). Esto se repite para cada píxel de borde.
- El número de puntos acumulados es igual al número de píxels de borde en la imagen.
- Para que esto funcione bien, el operador utilizado en la detección de bordes debe ser suficientemente preciso (Sobel, por ejemplo)



Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

17



Extracción de curvas

Trans. de Hough: otros tipos de curvas



- La transformada de Hough se puede aplicar a cualquier función de la forma:

$$f(x, c) = 0 \quad \begin{cases} x \text{ es un vector de coordenadas} \\ c \text{ es un vector de coeficientes} \end{cases}$$

- El éxito de la técnica depende de la cuantificación de parámetros:
 - ✓ poca resolución: máximos pronunciados
 - ✓ mucha resolución: picos menos definidos.
- Hay que tener presente el crecimiento exponencial de las dimensiones del array acumulador con el número de parámetros de las curvas. Por ello la aplicación práctica se limita a curvas con pocos parámetros.

Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

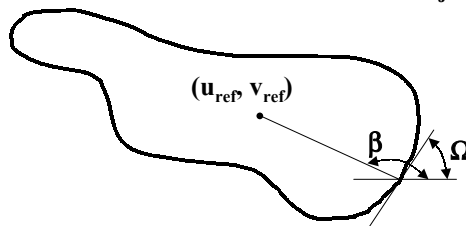
18



Trans. de Hough Generalizada



- La transformada de Hough “clasica” se parte de la ecuación analítica de la figura para poder pasar del espacio coordenado de la imagen al espacio de parámetros.
- En el caso de que no se disponga de la expresión analítica del borde que se desea buscar, se recurre a la transformada de Hough generalizada.
- Suponiendo conocida la forma y orientación del objeto, los pasos a seguir son:
 - ✓ Se selecciona un punto de referencia arbitrario en el objeto (u_{ref}, v_{ref}) .
 - ✓ A partir de ese punto de referencia se define la forma del objeto.



Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

19



Trans. de Hough Generalizada



- ✓ Para cada punto de la frontera (u_i, v_i) se obtiene, con respecto al punto de referencia:
 - Orientación Ω_i
 - Distancia r_i
 - Dirección β_i
- La tabla que almacena los valores de (r_i, β_i) indexados con Ω_i se denomina *tabla-R*.
- Al construir la *tabla-R*, hay que tener presente que una determinada orientación Ω_i se puede repetir más de una vez a lo largo de la frontera (por tanto, hay que prever en la tabla más de un registro de distancias y orientación para cada valor de Ω)
- Una vez construida la *tabla-R*, el espacio de Hough se define en función de las posibles posiciones de la figura en la imagen, función a su vez de las posibles posiciones del punto de referencia.

Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

20



Trans. de Hough Generalizada



➤ Aplicar la transformada de Hough:

- ✓ Para cada píxel (u,v) de la imagen calcular las coordenadas de la celda a incrementar de acuerdo con la expresión:

$$u_{ref} = u + r \cos \beta$$

$$v_{ref} = v + r \sin \beta$$

- ✓ Los valores de “r” y β a utilizar en la expresión anterior se obtienen de la *tabla-R* previamente confeccionada, entrando con el valor de Ω calculado en el píxel (u,v) de la imagen.
- ✓ Si existen en la tabla varios pares (r, β) para ese valor de Ω , se utilizan todos, incrementándose, por tanto, diferentes celdas (u_{ref} , v_{ref})



Trans. de Hough Generalizada



- Si no se conoce la orientación del objeto, hay que aumentar la dimensión del acumulador incorporando un parámetro adicional ϕ que considere las posibles orientaciones del objeto.
- En este caso se empleará un acumulador tridimensional (u_{ref} , v_{ref} , ϕ) que será incrementado utilizando las expresiones:

$$u_{ref} = u + r \cos(\beta + \phi)$$

$$v_{ref} = v + r \sin(\beta + \phi)$$

para todos los valores discretos considerados de ϕ

- Los valores de r y β serán obtenidos de la *tabla-R* entrando con el ángulo Ω - ϕ



Trans. de Hough Generalizada *Pseudocódigo*



1. Construir la tabla-R a partir del objeto prototipo.
2. Para todos los puntos de borde:
 - Calcular la orientación Ω (dirección del gradiente $+90^\circ$)
 - Calcular r y β
 - Añadir un (r, β) en la entrada de la *tabla-R* indexada por Ω
3. Discretizar el espacio de parámetros, estableciendo valores máximos y mínimos, así como el número total de valores de u_{ref} , v_{ref} y ϕ .
4. Generar el acumulador $H(u_{ref}, v_{ref}, \phi)$; poner todos los valores a cero.
5. Para todos los puntos del borde (u_i, v_i)
 - Calcular la orientación Ω (dirección del gradiente $+90^\circ$)
 - Para cada orientación posible ϕ
 - Para cada (r, β) indexado por $\Omega - \phi$ en la tabla-R
 - Evaluar $u_{ref} = u + r \cos(\beta + \phi)$ y $v_{ref} = v + r \sin(\beta + \phi)$
 - Incrementar $H(u_{ref}, v_{ref}, \phi)$.
6. Para todas las celdas en el acumulador:
 - Buscar los valores máximos del acumulador.
 - Las coordenadas u_{ref} , v_{ref} y ϕ dan la posición y orientación del objeto en la imagen

Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

23

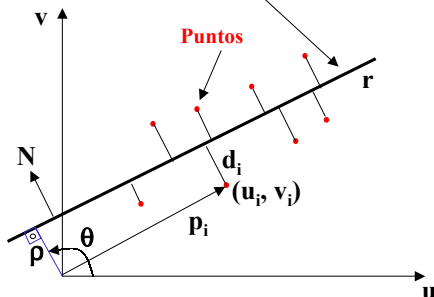


Extracción de segmentos de línea rectos *Ajuste de líneas mediante autovectores*



- **Objetivo:** dados n puntos, se trata de encontrar la mejor recta que minimiza el cuadrado de la suma de las distancias (perpendiculares) entre cada punto y la recta.

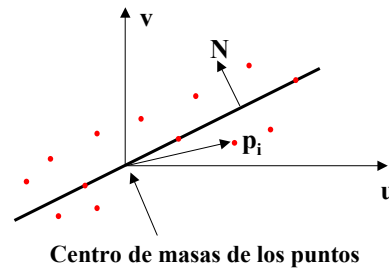
Recta buscada: $\min \{d^2\} = \sum_{i=1}^n d_i^2$



$$d_i = \rho - [u_i \cos\theta + v_i \sin\theta]$$

Recta que pasa por el centro de gravedad de los puntos
 n = número de puntos.

N = vector unitario normal a la recta " r "



Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

24



Extracción de segmentos de línea rectos

Ajuste de líneas mediante autovectores



$$d_i^2(N) = [N \cdot p_i]^2 = [N^T p_i]$$

$$d^2(N) = \sum_{i=1}^n d_i^2(N) = \sum_{i=1}^n [N^T p_i]^2 = \sum_{i=1}^n [N^T p_i][p_i N] = N^T \left(\sum_{i=1}^n [p_i p_i^T] \right) N$$

- A la matriz simétrica $S = \sum_{i=1}^n [p_i p_i^T]$ se le conoce por “scatter matrix”.
- La mejor línea “r” está caracterizada por el vector normal N que minimiza:

$$d^2(N) = N^T S N$$

- Y ese valor mínimo, se demuestra, que se corresponde con el autovector más pequeño de S, con la restricción de que $\|N\| = 1$
- Dado que autovectores (llamémosles w) distintos de matrices simétricas son ortogonales, la línea que mejor se ajusta está en la dirección del principal autovector de S (el autovector asociado al mayor autovalor).

Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

25



Extracción de segmentos de línea rectos

Ajuste de líneas mediante autovectores



➤ Resumen:

1. Estandarizar los puntos restando la media del conjunto de todos los puntos de cada uno de los puntos.

$$\text{Si: } p_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \rightarrow m = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \\ v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n \end{bmatrix} \rightarrow \text{puntos estandarizados: } \phi_i = \begin{bmatrix} u_i - m_1 \\ v_i - m_2 \end{bmatrix}$$

$$S_{\text{estandarizada}} = \Omega = \sum_{i=1}^n \phi_i \phi_i^T$$

2. Encontrar el autovalor mayor y el autovector asociado de Ω , del conjunto de puntos estandarizados.

$$|\lambda I - \Omega|_{2 \times 2} = 0 \rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \rightarrow \text{elegir el mayor} \rightarrow \Omega v_i = \text{mayor}(\lambda_i) v_i \rightarrow v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

3. La mejor recta es la única que pasa por la media del conjunto de puntos y vector director el autovector mayor:

$$\text{Ecuación paramétrica de r: } \begin{cases} u \\ v \end{cases} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

26



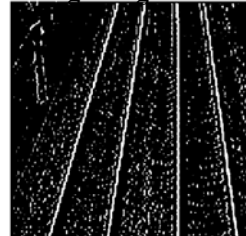
Ejemplos de extracción de segmentos rectos utilizando Hough y autovectores



Imagen original



Imagen segmentada



Hough



Autovectores

Manuel Mazo, Departamento de Electrónica

27



Ejemplos de extracción de segmentos rectos utilizando Hough y autovectores



Hough



Autovectores

Manuel Mazo, Departamento de Electrónica

28

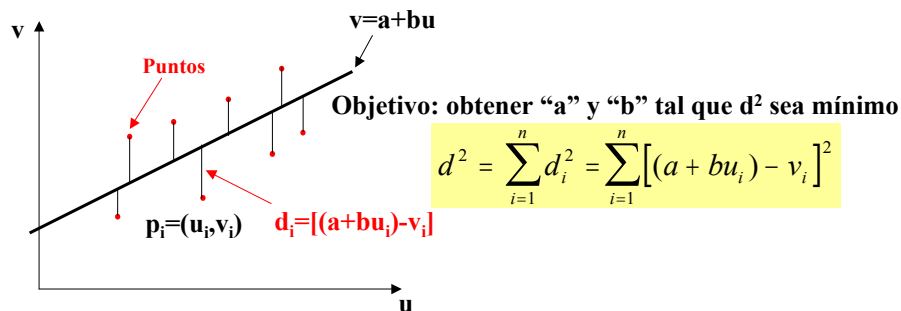


Extracción de segmentos de línea rectos

Ajuste mediante mínimos cuadrados (regresión lineal)



- Es un método clásico muy utilizado en este tipo de aplicaciones.
- Se trata de encontrar una recta, tal que la suma de los cuadrados de las distancias verticales de un conjunto de puntos: $\{(u_i, v_i)\}$, $i=1, 2, \dots, N$, a ella sea mínima.



Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

29



Extracción de segmentos de línea rectos

Ajuste mediante mínimos cuadrados (regresión lineal)



- Los valores de "a" y "b" vienen dados por:

$$\begin{bmatrix} 1 & u_1 \\ 1 & u_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1 & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = U^* B; \quad U^* = \text{pseudoinversa de } U$$

$U \quad A = B$

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n u_i v_i - \left(\sum_{i=1}^n u_i \right) \left(\sum_{i=1}^n v_i \right)}{\sum_{i=1}^n u_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n u_i \right)^2}; \quad b = \frac{\left(\sum_{i=1}^n u_i \right) \left(\sum_{i=1}^n v_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n u_i \right) \left(\sum_{i=1}^n u_i v_i \right)}{\sum_{i=1}^n u_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n u_i \right)^2}$$

Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

30



Extracción de polinomios

Ajuste mediante mínimos cuadrados (regresión lineal)



- El criterio de mínimos cuadrados se puede extender para el ajuste de polinomios de cualquier grado.

$$d^2 = \sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n [(a_1 + a_2 u_i + a_3 u_i^2 + \dots + a_m u_i^m) - v_i]^2$$



$$\begin{bmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 & \dots & u_1^m \\ 1 & u_2 & u_2^2 & \dots & u_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & u_n & u_n^2 & \dots & u_n^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = U^* B; \quad U^* = \text{pseudoinversa de } U$$

$\begin{matrix} U & A = & B \end{matrix}$

Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

31



Extracción de segmentos de línea rectos

Código cadena

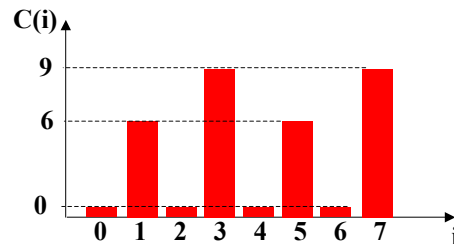


- Dado el código cadena de un contorno, se define el histograma del mismo de la siguiente forma:

$$A = \{i | C(i)\}; \quad N = \text{cardinal}(A)$$

- Donde $C(i)$ es la frecuencia de aparición del número de un determinado código de cadena, i designa el correspondiente código de cadena y N es el cardinal de A (el número de barras del histograma).

- Ejemplo: código cadena: (4,3), 1111177777775555533333333



Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

32



Extracción de segmentos de línea rectos

Código cadena: Algoritmo



1. Si el histograma tiene 4 o más barras ($N \geq 4$), la línea no es recta, ya que tiene al menos 4 orientaciones diferentes.
2. Si el histograma tiene una única barra ($N=1$), la línea es puramente recta con alguna de las 8 posibles direcciones.
3. Si el histograma tiene 2 barras ($N=2$), se pueden dar dos casos:
 - Si las dos barras son adyacentes, de nuevo hay que considerar dos casos:
 - Si la máxima longitud del código de menor frecuencia es menor que un umbral prefijado T, la línea se declara recta.
 - Si la máxima longitud del código de menor frecuencia es mayor que un determinado umbral T, la línea se declara no recta.
 - Si las 2 barras no son adyacentes, esta línea se declara no recta (la línea contiene al menos dos orientaciones diferentes, y los ángulos de esas orientaciones difieren al menos 90°).
4. Si el histograma tiene 3 barras ($N=3$), se pueden dar dos casos:
 - Si las barras son adyacentes entre sí, la barra central es la más larga, y la altura de la barra vecina más próxima es menor que un umbral T fijado por el usuario, entonces es declarada como recta.
 - Si de las 3 barras 2 no son adyacentes, esta línea se declara no recta. La línea tiene al menos dos orientaciones diferentes cuyos ángulos difieren al menos 90° .

Manuel Mazo, Departamento de Electrónica

33

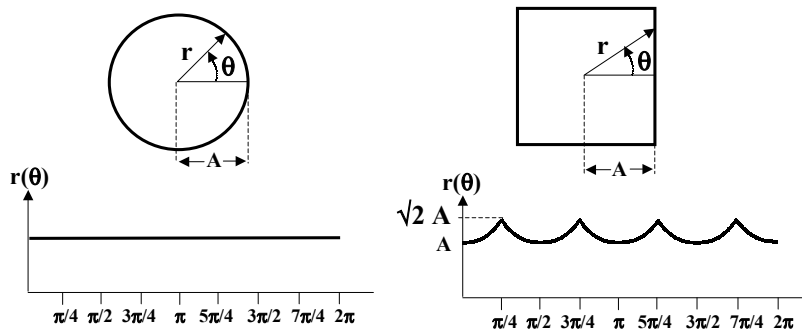


Representación de contornos

Signaturas



- La idea es representar el contorno como una función polar unidimensional.
- El procedimiento más habitual consiste en calcular un punto característico del interior del contorno, por ejemplo el centro de masas (centroide) y a partir de el, representar la distancia de cada punto del contorno a dicho centroide en función del ángulo



Manuel Mazo, Departamento de Electrónica

34



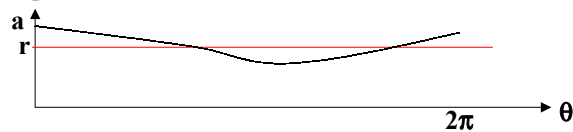
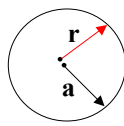
Representación de contornos

Signaturas

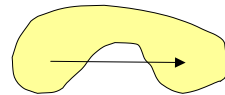


- Este tipo de representación es invariante a la posición del objeto en la imagen, pero depende del tamaño y del punto de comienzo (punto por donde se empieza a describir la frontera).
- **Invarianza al tamaño: se consigue dividiendo la función por la distancia máxima al centroide, de forma que la distancia máxima será uno.**
- **Invarianza al ángulo de comienzo: se consigue comenzando la representación por el ángulo para el cual la distancia es máxima.**
- Presenta dos inconvenientes:

1. Es muy sensible a la posición del centroide



2. Las concavidades pueden dar lugar a una representación multievaluada para algunos ángulos (varias distancias para un mismo ángulo)



Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

35

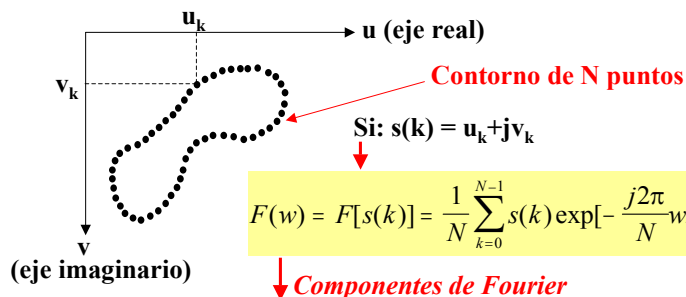


Descripción de contornos

Descriptores de Fourier



- La transformada de Fourier permite extraer las componentes en frecuencia de una curva discreta cerrada (puesto que el contorno de un objeto es una curva cerrada, y por tanto periódica)



$$\text{Si: } s(k) = u_k + jv_k$$

$$F(w) = F[s(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} s(k) \exp\left[-\frac{j2\pi}{N} wk\right], \quad w = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

↓ Componentes de Fourier

$$\{F(w)\} = \{F(0), F(1), F(2), \dots, F(N-1)\} \rightarrow \text{Definen el contorno}$$

Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

36



Descripción de contornos

Descriptores de Fourier



- La transformada de Fourier inversa de $F(w)$:

$$s(k) = \frac{1}{N} \sum_{w=0}^{N-1} F(w) \exp\left[-\frac{j2\pi}{N} wk\right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$



Recuperación del contorno a partir de las componentes de Fourier

- En muchas ocasiones se puede recuperar el contorno con una buena aproximación con un número M de componentes $F(w)$ inferior a N : M componentes mayores



Descripción de contornos

Descriptores de Fourier



- Efecto de la rotación, translación, escalado en las componentes de Fourier

Rotación (θ):

$$\sum_{k=0}^{N-1} [s(k)e^{j\theta}] \exp\left[-\frac{j2\pi}{N} wk\right] = e^{j\theta} \sum_{k=0}^{N-1} s(k) \exp\left[-\frac{j2\pi}{N} wk\right]$$

Escalado (C):

$$\sum_{k=0}^{N-1} [Cs(k)] \exp\left[-\frac{j2\pi}{N} wk\right] = C \sum_{k=0}^{N-1} s(k) \exp\left[-\frac{j2\pi}{N} wk\right]$$

Translación (s_0):

$$\sum_{k=0}^{N-1} [s(k) - s_0] \exp\left[-\frac{j2\pi}{N} wk\right] = \sum_{k=0}^{N-1} s(k) \exp\left[-\frac{j2\pi}{N} wk\right] + s_0 \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left[-\frac{j2\pi}{N} wk\right]$$



$$\sum_{k=0}^{N-1} \exp\left[-\frac{j2\pi}{N} wk\right] = \begin{cases} 0, & w \neq 0 \\ N, & w = 0 \end{cases}$$



- $$\{DF(i)\} = \left\{ \frac{|F(2)|}{|F(1)|}, \frac{|F(3)|}{|F(1)|}, \frac{|F(4)|}{|F(1)|}, \dots, \frac{|F(M)|}{|F(1)|} \right\}$$

- 39



- 40



Descripción de contornos

Descriptores de Fourier: otra alternativa



- La transformada de Fourier de la función periódica, $C(i)$, será:

$$F(w) = F[C(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} C(k) \exp[-\frac{j2\pi}{N}wk], \quad w = 0, 1, 2, \dots, N-1$$



$$\{F(w)\} = \{F(0), F(1), F(2), \dots, F(N-1)\} \longrightarrow \text{Definen el contorno}$$

- La transformada de Fourier inversa de $F(w)$:

$$C(k) = \frac{1}{N} \sum_{w=0}^{N-1} F(w) \exp[-\frac{j2\pi}{N}wk], \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$



Recuperación del contorno a partir de las componentes de Fourier



Descripción de contornos

Descriptores de Fourier



- Por tanto un objeto puede caracterizarse mediante sus componentes de Fourier: *Descriptores de Fourier (DF)*.
- Con el objetivo de hacer que los *descriptores de Fourier* sean invariantes a translaciones y rotaciones se toman los módulos de los descriptores, y para hacerlos invariantes a la escala (homotecias) se normalizan respecto al primero:

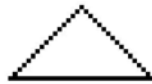
$$\{DF(i)\} = \left\{ \frac{|F(2)|}{|F(1)|}, \frac{|F(3)|}{|F(1)|}, \frac{|F(4)|}{|F(1)|}, \dots, \frac{|F(M)|}{|F(1)|} \right\}$$

- Entre 10 y 15 descriptores son suficientes para definir cualquier forma



Descripción de contornos

Ejemplos



$$\{DF(i)\} = \{1.8083, 0.2366, 0.9284, 0.1602\}$$



$$\{DF(i)\} = \{0.3763, 0.2539, 0.2040, 0.1530\}$$



$$\{DF(i)\} = \{0.3022, 0.3458, 0.3458, 0.1577\}$$



Extracción de contornos

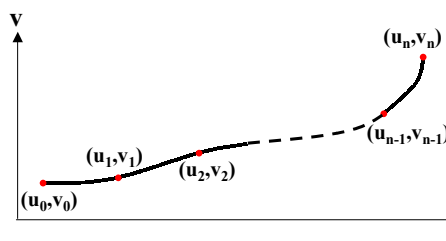
Funciones splines



➤ La interpolación de una función dada mediante un conjunto de polinomios cúbicos, preservando la continuidad en la primera y segunda derivada en los puntos de interpolación, se conoce como funciones *splines* cúbicos.

➤ La función *spline* se usa generalmente para aproximar una curva que pasa a través de una serie de puntos dados

La función $v=f(u)$ es una *spline* con grado m si satisface:



1. $f(u)$ es un polinomio de orden $\leq m$ en cualquier intervalo $[u_{i-1}, u_i]$, $i=0,1,\dots,n$.
2. $f(u)$ y sus derivadas hasta el orden $m-1$ son continuas en el intervalo $[u_0, u_n]$



Extracción de contornos

Funciones splines



- Sea $P_{m,i}(u)$ una función *spline* de grado m en el intervalo (u_{i-1}, v_i) y la $P_{m,i}^{(r)}(u)$ derivada de orden r .
- Los puntos $(u_1, v_1), \dots, (u_{n-1}, v_{n-1})$ son llamados *nodos*.
- La condición de continuidad es:

$$P_{m,i}^{(r)}(u_i) = P_{m,i+1}^{(r)}(u_i); \text{ para } r = 0, 1, \dots, m-1; i = 1, 2, \dots, m-1$$

- A partir de la ecuación anterior, se obtiene la siguiente ecuación:

$$P_{m,i}^{(r)}(u_i) = P_{m,i}(u_i) + c_i(u - u_i)^m$$



Extracción de contornos

Funciones B-splines



- Las *B-splines* son trozos de curvas polinomiales guiadas por una secuencia de puntos.
- Las *B-splines* se clasifican de acuerdo al grado.
- Dada una secuencia de puntos, u_0, u_1, \dots, u_n , un *spline* de grado m se define por $n+1-m$ polinomios.
- Cada polinomio es representado como una combinación lineal de $m+1$ puntos.
- Los *splines* cúbicos son los más ampliamente utilizados.
- El polinomio cúbico i -ésimo está dado por:

$$P_i(t) = B_0(t)u_{i-1} + B_1(t)u_i + B_2(t)u_{i+1} + B_3(t)u_{i+2}$$

donde B_0, B_1, B_2 y B_3 son polinomios cúbicos con respecto al parámetro t ($0 \leq t \leq 1$)

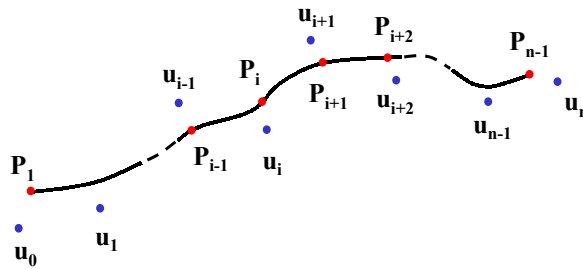


Extracción de contornos

Funciones B-splines



- Hay que determinar 16 coeficientes incluidos en los cuatro polinomios de la ecuación anterior.
- La condición de que los segmentos de curva adyacentes $P_i(t)$ y $P_{i+1}(t)$ deben ser continuos hasta la segunda derivada para cualquier u_k con $k=i-1, i, i+1, i+2$, proporciona 15 ecuaciones.



Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

47



Extracción de contornos

Funciones B-splines



- Por ejemplo $P_i(1)=P_{i+1}(0)$ se escribe como:

$$B_0(1)u_{i-1} + B_1(1)u_i + B_2(1)u_{i+1} + B_3(1)u_{i+2} = B_0(0)u_i + B_1(0)u_{i+1} + B_2(0)u_{i+2} + B_3(0)u_{i+3}$$

que proporciona las siguientes cinco ecuaciones:

$$B_0(1) = 0; \quad B_1(1) = B_0(0); \quad B_2(1) = B_1(0); \quad B_3(1) = B_2(0); \quad B_3(0) = 0$$

- Para la continuidad de la primera y segunda derivada se obtienen otras 5 ecuaciones para cada una, y una ecuación más proporcionada por la condición de que la forma de $P_i(t)$ es invariante a la transformación de coordenadas:

$$B_0(t) + B_1(t) + B_2(t) + B_3(t) = 1$$

- Resolviendo esas 16 ecuaciones se obtienen los 16 coeficientes buscados

$$B_0(t) = \frac{(1-t)^3}{6}; \quad B_1(t) = \frac{t^3}{2} - t^2 + \frac{2}{3}; \quad B_2(t) = -\frac{t^3}{2} + \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + \frac{1}{6}; \quad B_3(t) = \frac{t^3}{6}$$

Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

48



Descripción de regiones

Básicas: perímetro, área, compactividad, rectangularidad.

Momentos invariantes.

Momentos invariantes a partir del código cadena.

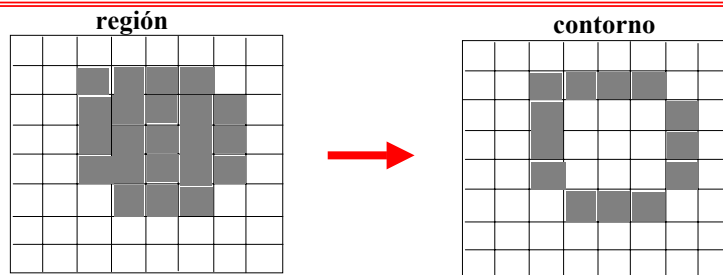
Descriptores topológicos.

Texturas



Descripción de regiones

Perímetro



Para calcular el perímetro (P) solamente hay que recorrer completamente el contorno, partiendo de un punto:

$P = N^{\circ}$ de desplazamientos horizontales + N° de desplazamientos verticales + $\sqrt{2} \times N^{\circ}$ desplazamientos diagonales.

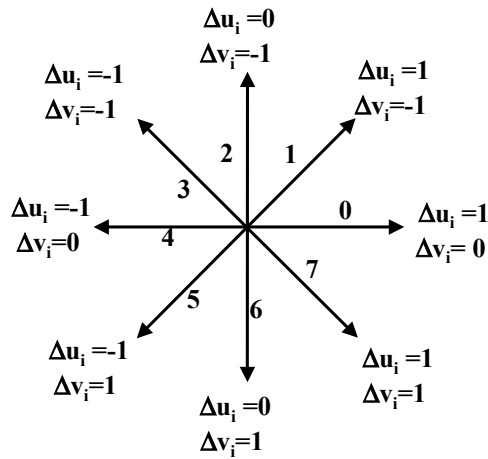
Utilizando el código cadena:

$P = N^{\circ}$ de códigos pares + $\sqrt{2} \times N^{\circ}$ de códigos impares



Descripción de regiones

Área



$$A = \sum \text{pixeles} \in R;$$

A partir del código cadena del contorno: para cada píxel de coordenadas (u,v) del contorno se define: $\Delta u_i = u_i - u_{i-1}$ e $\Delta v_i = v_i - v_{i-1}$, donde "i" es uno de los segmentos que forman el código cadena. En este caso: Δu_i e Δv_i pueden tomar valores 1, 0, -1

$$A = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^n (u_i \Delta v_i - v_i \Delta u_i) \right|$$

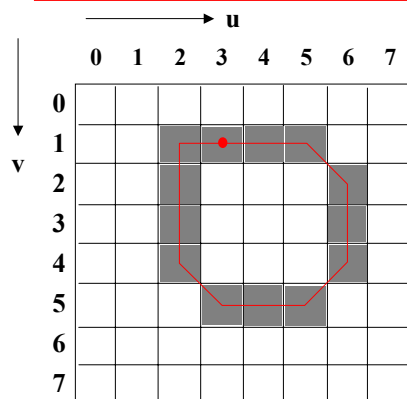
Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

51



Descripción de regiones

Área



$$A = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^n (u_i \Delta v_i - v_i \Delta u_i) \right| =$$

$$\frac{1}{2} \left| \begin{aligned} & [3 \cdot 0 - 1 \cdot 1] + [4 \cdot 0 - 1 \cdot 1] + [5 \cdot 1 - 1 \cdot 1] + \\ & [6 \cdot 1 - 2 \cdot 0] + [6 \cdot 1 - 3 \cdot 0] + [6 \cdot 1 - 4 \cdot (-1)] + \\ & [5 \cdot 0 - 5 \cdot (-1)] + [4 \cdot 0 - 5 \cdot (-1)] + \\ & [3 \cdot (-1) - 5 \cdot (-1)] + [2 \cdot (-1) - 4 \cdot 0] + \\ & [2 \cdot (-1) - 3 \cdot 0] + [2 \cdot (-1) - 2 \cdot 0] + \\ & [2 \cdot 0 - 1 \cdot 1] \end{aligned} \right| = 14.5$$

Obsérvese como el área obtenida utilizando el código cadena coincide con la encerrada por la línea roja (línea que une los centros de cada píxel del contorno)

Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

52




Descripción de regiones

Compactividad, rectangularidad




➤ Compactividad (C):

$$C = \frac{(\text{perímetro})^2}{\text{superficie}}$$



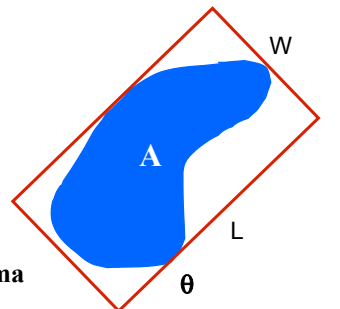
$$C = \frac{(2\pi r)^2}{\pi r^2} = 4\pi$$



$$C = \frac{4L}{L^2} = \frac{4}{L}$$

➤ Rectangularidad (R):

$$R = \frac{W \cdot L}{A}$$



θ se elige para que $W \times L$ sea mínima

Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

53



Descripción de regiones

Momentos invariantes



➤ Dada una función continua $f(u,v)$ se define su momento de orden $p+q$:

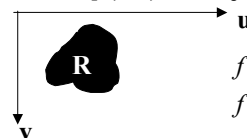
$$m_{p,q} = \iint_R u^p v^q f(u,v) du dv$$

➤ Si $f(u,v)=1$:

$$m_{p,q} = \iint_R u^p v^q du dv$$

➤ En el caso de una imagen digital binaria [$f(u,v)=1$: objeto, $f(u,v)=0$: fondo]:

$$m_{pq} = \sum_u \sum_v u^p v^q$$



$$f(u,v) = 1, \forall (u,v) \in R$$

$$f(u,v) = 0, \forall (u,v) \notin R$$

donde el sumatorio se toma sobre todas las coordenadas (u,v) de puntos de la región (objeto).

$$m_{00} = \sum_u \sum_v 1 = \text{superficie en pixeles de un objeto}$$

Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

54



Descripción de regiones

Momentos invariantes



- Momentos invariantes a la posición (translación): *momentos centrales*

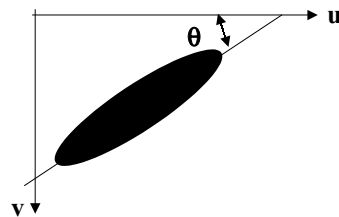
$$\mu_{pq} = \sum_u \sum_v (u - \bar{u})^p (v - \bar{v})^q$$

donde \bar{u} y \bar{v} son las coordenadas del centroide o centro de masas del objeto:

$$\bar{u} = \frac{m_{10}}{m_{00}} = \frac{\sum \sum u}{\sum \sum 1}; \quad \bar{v} = \frac{m_{01}}{m_{00}} = \frac{\sum \sum v}{\sum \sum 1}$$

- Ángulo que forma el eje de mínima inercia con el eje u:

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2(m_{00}m_{11} - m_{10}m_{01})}{(m_{00}m_{20} - m_{10}^2) - (m_{00}m_{02} - m_{01}^2)}$$



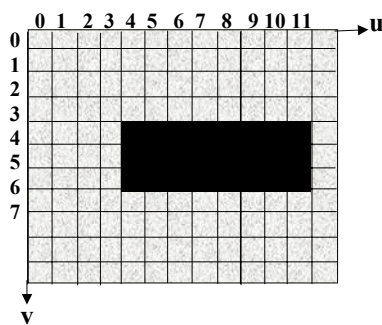
Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

55



Descripción de regiones

Momentos invariantes: Ejemplos



$$m_{00} = \sum_{u=4}^{11} \sum_{v=4}^6 1 = 24$$

$$m_{10} = \sum_{u=4}^{11} \sum_{v=4}^6 u = 4x3 + 5x3 + 6x3 + 7x3 + \dots + 11x3 = 180$$

$$m_{01} = \sum_{u=4}^{11} \sum_{v=4}^6 v = 4x8 + 5x8 + 6x8 = 120$$

$$m_{20} = \sum_{u=4}^{11} \sum_{v=4}^6 u^2 = 4^2x3 + 5^2x3 + \dots + 11^2x3 = 1476$$

$$m_{02} = \sum_{u=4}^{11} \sum_{v=4}^6 v^2 = 4^2x8 + 5^2x8 + 6^2x8 = 1476$$

$$m_{11} = \sum_{u=4}^{11} \sum_{v=4}^6 uv = 4x4 + 4x5 + 4x6 + 5x4 + \dots + 11x5 + 11x6 = 900$$

$$\bar{u} = \frac{180}{24} = 7.5; \quad \bar{v} = \frac{120}{24} = 5;$$

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2(24x900 - 180x120)}{(24x1476 - 180^2) - (24x1476 - 120^2)} = 0^\circ$$

Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

56



Descripción de regiones

Momentos invariantes



- Los momentos centrales se pueden obtener a partir de los generales, según la siguiente expresión:

$$\mu_{pq} = \sum_{r=0}^p \sum_{s=0}^q C_r^p C_s^q (-\bar{u})^r (-\bar{v})^s m_{p-r, q-s}$$

$$\text{con: } C_r^p = \frac{p!}{r!(p-r)!}, C_s^q = \frac{p!}{s!(p-s)!}$$

$$\mu_{10} = \sum \sum (u - \bar{u}) = 0, \mu_{01} = \sum \sum (v - \bar{v}) = 0$$



Descripción de regiones

Momentos invariantes



- Los momentos invariantes ante escalado (momentos centrales invariantes) se obtienen a partir de:

$$\eta_{pq} = \frac{\mu_{pq}}{(\mu_{00})^\gamma}; \text{ donde: } \gamma = \frac{p+q}{2} + 1, \text{ para } p+q = 2, 3, \dots$$

- Demostración de invarianza frente al escalado utilizando los momentos generales (m_{pq}):

Normalizando con respecto al escalado:

$$m_{pq}^* = \iint u^p v^q f\left(\frac{u}{\lambda}, \frac{v}{\lambda}\right) du dv = \lambda^{2+p+q} \iint f(u^*, v^*) du^* dv^* \rightarrow m_{pq}^* = \lambda^{2+p+q} m_{pq}$$

Si se fuerza a que $m_{00}^* = 1$ entonces:

$$\lambda^{2+p+q} = \frac{1}{(m_{00})^{\frac{p+q}{2}+1}} \rightarrow m_{pq}^* = \frac{m_{pq}}{(m_{00})^{\frac{p+q}{2}+1}}, p+q \geq 2$$



Descripción de regiones *Momentos invariantes*



- Finalmente, los momentos invariantes a traslaciones, rotaciones y cambios de escala, propuestos por Hu (1962):

$$\phi_{pq} = \sum_{r=0}^p \sum_{s=0}^q (-1)^{q-s} C_r^p C_s^q (\cos\theta)^{p-r+s} (\sin\theta)^{q-s+r} \eta_{p-r+q-s, r+s}, \quad \theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2\eta_{11}}{\eta_{20} - \eta_{02}}$$

$$\phi_1 = \eta_{20} + \eta_{02}$$

$$\phi_2 = (\eta_{20} - \eta_{02})^2 + 4\eta_{11}^2$$

$$\phi_3 = (\eta_{30} - 3\eta_{12})^2 + (3\eta_{21} - \eta_{03})^2$$

$$\phi_4 = (\eta_{30} + \eta_{12})^2 + (\eta_{21} + \eta_{03})^2$$

$$\phi_5 = (\eta_{30} - 3\eta_{12})(\eta_{30} + \eta_{12})[(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - 3(\eta_{21} - \eta_{03})^2] + (3\eta_{21} - \eta_{03})(\eta_{21} + \eta_{03})[3(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2]$$

$$\phi_6 = (\eta_{20} - \eta_{02})[(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2] + 4\eta_{11}(\eta_{30} + \eta_{12})(\eta_{21} + \eta_{03})$$

$$\phi_7 = (3\eta_{21} - \eta_{03})(\eta_{30} + \eta_{12})[(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - 3(\eta_{21} + \eta_{03})^2] + (3\eta_{21} - \eta_{03})(\eta_{21} + \eta_{03})[3(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2]$$

Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

59



Descripción de regiones *Momentos invariantes a partir del código cadena*



Diagram illustrating the derivation of invariant moments from the chain code:

Region R is defined by the boundary C and the function $f(u,v)=1$. The region is shown in the $u-v$ plane.

The initial moment is defined as:

$$m_{pq} = \iint_R u^p v^q dudv$$

The first-order partial derivatives of the region's area S with respect to u and v are given by:

$$\iint_R \left(\frac{\partial S}{\partial u} - \frac{\partial T}{\partial v} \right) dudv = \int_C S dv + T du, \text{ si: } \begin{cases} S = u^{p+1} v^q \rightarrow \frac{\partial S}{\partial u} = (p+1) u^p v^q \\ T = -u^p v^{q+1} \rightarrow \frac{\partial T}{\partial v} = -(q+1) u^p v^q \end{cases}$$

Applying these derivatives to the moment calculation:

$$\iint_R (p+q+2) u^p v^q dudv = \int_C u^{p+1} v^q dv - u^p v^{q+1} du$$

The final expression for the invariant moment is:

$$m_{pq} = \frac{1}{p+q+1} \iint_R (p+q+2) u^p v^q dudv = \frac{1}{p+q+1} \int_C u^{p+1} v^q dv - u^p v^{q+1} du$$

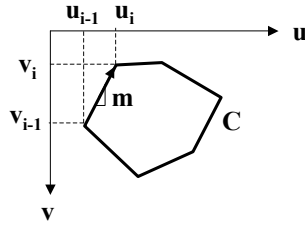
Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

60



Descripción de regiones

Momentos invariantes a partir del código cadena



$$v - v_i = m_i (u - u_i)$$

$$m_i = \frac{v_i - v_{i-1}}{u_i - u_{i-1}} = \frac{\Delta v_i}{\Delta u_i} \approx \frac{dv}{du}$$

$$m_{pq} = \frac{1}{p+q+1} \int_C u^{p+1} [v_i + m_i(u - u_i)]^q m_i du - u^p [v_i + m_i(u - u_i)]^{q+1} du;$$

$i = 1, 2, \dots, N$ donde N es el número de segmentos que constituyen el objeto

$$m_{pq} = \frac{1}{p+q+1} \sum_{i=1}^N \left[\int_{u_{i-1}}^{u_i} u^{p+1} [v_i + m_i(u - u_i)]^q m_i - u^p [v_i + m_i(u - u_i)]^{q+1} \right] du$$

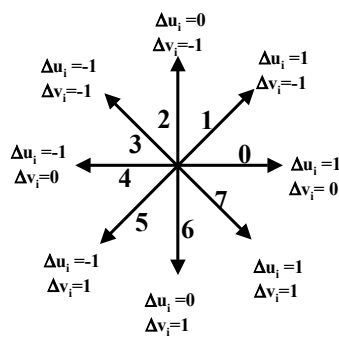
Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

61



Descripción de regiones

Momentos invariantes a partir del código cadena



m_{00} = perímetro

Llamando: $A_i = (u_i \Delta v_i - v_i \Delta u_i)$

$$m_{00} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N A_i$$

$$m_{01} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N A_i (v_i - \frac{1}{2} \Delta v_i)$$

$$m_{10} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N A_i (u_i - \frac{1}{2} \Delta u_i)$$

$$m_{11} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N A_i (u_i v_i - \frac{1}{2} u_i \Delta v_i - \frac{1}{2} v_i \Delta u_i + \frac{1}{3} \Delta u_i \Delta v_i)$$

$$m_{20} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N A_i (u_i^2 - u_i \Delta u_i + \frac{1}{3} \Delta u_i^2)$$

$$m_{02} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N A_i (v_i^2 - v_i \Delta v_i + \frac{1}{3} \Delta v_i^2)$$

$$m_{30} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^N A_i (u_i^3 + u_i \Delta u_i^2 - \frac{3}{2} u_i^2 \Delta u_i - \frac{1}{4} \Delta u_i^3)$$

$$m_{03} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^N A_i (v_i^3 + v_i \Delta v_i^2 - \frac{3}{2} v_i^2 \Delta v_i - \frac{1}{4} \Delta v_i^3)$$

Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

62



Descripción de regiones

Descriptores topológicos



- Las propiedades topológicas son usadas para la descripción global de regiones en la misma imagen. Esto es, propiedades de la figura que no se ven afectadas por las deformaciones.
- Los descriptores topológicos no tratan de dar un número exacto, sólo dar una idea sobre la forma del objeto.
- Algunos descriptores topológicos:
 - N° de huecos en una región (C).
 - N° de componentes conectados (H): elementos separados que forman un objeto.
 - N° de Euler: Diferencia entre los dos anteriores ($E=C-H$).

A
 $C=1, H=1, E=0$

B
 $C=1, H=2, E=-1$

i
 $C=2, H=0, E=2$

Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

63

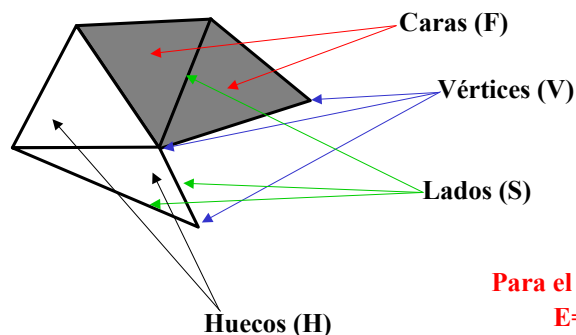


Descripción de regiones

Descriptores topológicos



- En las figuras formadas únicamente por líneas rectas, llamadas *redes poligonales*, suele ser de interés distinguir entre dos tipos de regiones interiores de dicha red: *caras* y *huecos*.



$$E=V-S+F=C-H$$

Para el ejemplo de la figura:
 $E=6-9+2=1-2=-1$

Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

64



Texturas

Generalidades



- No existe una definición formal de textura, aunque la idea intuitiva es fácil de asimilar.
- Existen parámetros mediante los cuales se pueden evaluar texturas.
- Conceptualmente, la característica principal de una textura es la repetición de un patrón básico.
- La estructura del patrón básico puede no ser determinista, sino estadística.
- La repetición del patrón básico puede no ser ni regular ni determinista, sino estadísticamente regular.



Texturas

Ejemplos





Texturas

¿Dónde está la textura de un objeto?



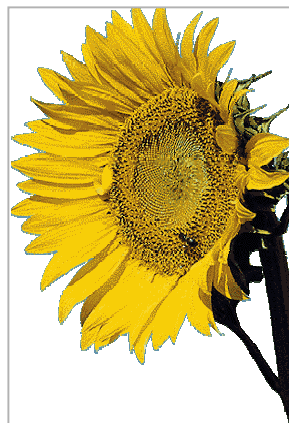
¿Transición de objetos a texturas?

Manuel Mazo. Departamento de Electrónica



Texturas

¿Dónde está la textura de un objeto?



Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

68



Texturas *Clasificación*



- Regla de repetición:
 1. Repetitivas: repetición periódica de un patrón sobre una superficie mucho mayor que el patrón.
 2. Aleatorias: El patrón que se repite no lo hace de forma periódica, aunque exista cierta regla de formación.
- Patrón
 3. Determinístico (regular o estructurado): ordenamientos regulares que normalmente son artificiales.
 4. Estocásticos (irregular o aleatorio): suelen ser naturales: tierra, arena, etc

1.
3.



2.



4.



Manuel Mazo, Departamento de Electrónica

69



Texturas *Modelos en el tratamiento*



- **Métodos estructurales:** La descripción de la textura se realiza a través de gramáticas. Una de las más interesantes es la denominada gramática de formas.
- **Análisis frecuencial:** Se puede utilizar el análisis en el dominio de la frecuencia, porque una textura es una señal más o menos periódica. El contenido frecuencial de una textura da idea sobre su distribución en el espacio.
- **Métodos estadísticos:**
 - ✓ Estadísticos de primer orden: Miden valores dependientes de los niveles de gris de la imagen. Dependen sólo de los niveles de gris de un píxel y no de su relación con los vecinos. Los atributos de un histograma son estadísticos de primer orden.
 - ✓ Estadísticos de segundo orden: se basan en la observación de un par de valores de gris que ocurren en los extremos de un “dipolo” de longitud preestablecida, situado en cualquier posición y orientación de la imagen. Son propiedades de pares de píxeles.
- Aquí solamente nos vamos a referir a *análisis frecuencial y métodos estadísticos*

Manuel Mazo, Departamento de Electrónica

70



Texturas

Ánisis frecuencial



- Dado que un atributo de las texturas es la frecuencia de repetición del patrón, una textura fina (con muchos cambios) tendrá componentes de alta frecuencia, mientras que una textura más rugosa (patrón de repetición más grande) tendrá su energía concentrada en las bajas frecuencias.
- **Autocorrelación (C):** Es uno de los parámetros más utilizados (dentro del análisis en frecuencia):

$$C(i, j) = \frac{\sum_{u \in W} \sum_{v \in W} I(u, v) I(i + u, j + v)}{\sum_{u \in W} \sum_{v \in W} I^2(u, v)}$$

donde W una región (ventana) de la imagen



Texturas

Estadísticos de primer orden



- Si P(f) es el histograma, suponiendo L niveles de gris diferentes, el momento de orden “n” respecto a la media se define como:

$$m^n = \sum_{f=0}^{L-1} (f - \bar{f})^n P(f)$$

$$m^0 = \sum_{f=0}^{L-1} (f - \bar{f})^0 P(f) = 1; \quad m^1 = \sum_{f=0}^{L-1} (f - \bar{f})^1 P(f) = 0; \quad m^2 = \sigma^2 = \sum_{f=0}^{L-1} (f - \bar{f})^2 P(f) \rightarrow \text{varianza};$$

- Siendo el nivel medio de gris:

$$\bar{f} = \sum_{f=0}^{L-1} f \cdot P(f)$$

- El momento de segundo orden es de particular interés para la descripción de texturas. En concreto la suavidad relativa (R):

$$R = 1 - \frac{1}{1 + m^2}$$



Texturas

Estadísticos de segundo orden



- **Matriz de co-ocurrencia:** Es una de las fuentes de propiedades de la textura más importantes.
- **Dada una imagen, se define:**
 - ✓ Un operador de posición de píxel dentro de la imagen: $P \equiv (d \cos \theta, d \sin \theta)$
 - ✓ Ejemplos: $P \equiv (1 \cos 45, 1 \sin 45) =$ “un píxel por encima y uno a la derecha”
 - ✓ $P \equiv (1 \cos 180, 1 \sin 180) =$ “un píxel a la izquierda”.
 - ✓ Una matriz A de dimensiones $k \times k$ cuyo elemento a_{ij} es el número de veces que los píxeles cuya intensidad es z_i aparecen en la posición especificada por P en relación a puntos de intensidad z_j , con $1 \leq i, j \leq k$.



Texturas

Estadísticos de segundo orden



- Ejemplo: considerando $P =$ “un píxel por encima y uno a la derecha”, y una imagen con tres niveles de gris: $z_0=0$, $z_1=1$, $z_2=2$, los elementos de la matriz A son:
 - a_{11} : Número de veces que un píxel de intensidad $z_0=0$ aparece un píxel a la derecha y un píxel por encima de píxeles de intensidad $z_0=0$.
 - a_{12} : Número de veces que un píxel de intensidad $z_0=0$ aparece un píxel a la derecha y un píxel por encima de píxeles de intensidad $z_1=1$.
 - a_{13} : Número de veces que un píxel de intensidad $z_0=0$ aparece un píxel a la derecha y un píxel por encima de píxeles de intensidad $z_2=2$.
 - a_{21} : Número de veces que un píxel de intensidad $z_1=1$ aparece un píxel a la derecha y un píxel por encima de píxeles de intensidad $z_0=0$.
 - a_{22} : Número de veces que un píxel de intensidad $z_1=1$ aparece un píxel a la derecha y un píxel por encima de píxeles de intensidad $z_1=1$.
 - a_{23} : Número de veces que un píxel de intensidad $z_1=1$ aparece un píxel a la derecha y un píxel por encima de píxeles de intensidad $z_2=2$.
 - a_{31} : Número de veces que un píxel de intensidad $z_2=2$ aparece un píxel a la derecha y un píxel por encima de píxeles de intensidad $z_0=0$.
 - a_{32} : Número de veces que un píxel de intensidad $z_2=2$ aparece un píxel a la derecha y un píxel por encima de píxeles de intensidad $z_1=1$.
 - a_{33} : Número de veces que un píxel de intensidad $z_2=2$ aparece un píxel a la derecha y un píxel por encima de píxeles de intensidad $z_2=2$.



Texturas

Estadísticos de segundo orden



- Para $P = \text{"un píxel por encima y uno a la derecha"}$ y una imagen I como la indicada, la matriz A es:

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- El tamaño de la matriz A está determinado únicamente por el número de niveles de intensidad distintas de la imagen de entrada. En ocasiones se cuantifica la imagen de entrada con un menor nivel de grises para que A sea "manejable".

Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

75



Texturas

Estadísticos de segundo orden



- Tomando n como el número total de pares de puntos de la imagen que satisfacen P (en el ejemplo anterior $n=2+1+2+3+3+0+2+2+1=16$).
- Se define una matriz C como la formada dividiendo cada elemento de A por n .
- Cada elemento de la matriz C , c_{ij} es una estimación de la probabilidad compuesta de que un par de puntos que satisfagan P tengan valores (z_i, z_j) .
- La matriz C se llama matriz de coocurrencia del nivel de gris.
- Debido a que C depende de P , es posible detectar la presencia de unos patrones de textura dados, eligiendo adecuadamente el operador de posición P .
- Un conjunto de descriptores propuestos por Haralick (1979) o Ballard y Brown (1982) utilizando los coeficientes de la matriz C se indican a continuación

Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

76



Texturas

Estadísticos de segundo orden



1. Probabilidad máxima: $\max_{i,j}(c_{ij})$
2. Energía: $\sum_i \sum_j |c_{ij}|^2$
3. Momento de distancia de elementos de orden k: $\sum_i \sum_j (i-j)^k c_{ij}$
4. Momento inverso de distinción de elementos de orden k: $\frac{\sum_i \sum_j c_{ij}}{(i-j)^k} \quad i \neq j$

Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

77



Texturas

Estadísticos de segundo orden



5. Entropía: $-\sum_i \sum_j c_{ij} \log c_{ij}$
6. Uniformidad: $\sum_i \sum_j c_{ij}^2$
7. Correlación: $\frac{\sum_i \sum_j (i-\mu_x)(j-\mu_y)c_{ij}}{\sigma_x \sigma_y}$

donde:

$$\mu_x = \sum_i i \sum_j c_{ij}; \mu_y = \sum_j j \sum_i c_{ij}; \sigma_x^2 = \sum_i (i-\mu_x)^2 \sum_j c_{ij}; \sigma_y^2 = \sum_j (j-\mu_y)^2 \sum_i c_{ij}$$

Manuel Mazo. Departamento de Electrónica

78



Texturas

Estadísticos de segundo orden



8. Inercia:

$$\sum_i \sum_j (i - j)^2 c_{ij}$$

9. Homogeneidad local:

$$\sum_i \sum_j \frac{1}{1 + (i - j)^2} c_{ij}$$