Kodierung Belegungsverfahren „Konfliktauflösung“

Synoptics

11. Dezember 2017

1 Definitionen

1.1 Belegung

Sei R die Menge der Nachfragen (Fahrlagen) und S die Menge der Systemtrassen. Jede Systemtrasse $j \in S$ hat eine Menge an Nachfolgern $N^j \subseteq S$. Jede Nachfrage $i \in R$ hat eine Menge an Systemtrassen $S^i \subseteq S$, die sie benutzen kann. Analog erhalten wir die Menge aller Nachfragen $R^j \subseteq R$, die von der Systemtrasse $j \in S$ benutzt werden können mittels $R^j = \{i \in R \mid j \in S^i\}$.

Zusätzlich gibt es die Konfliktmenge $E \subseteq S \times S$, die bedeutet, dass nicht beide Systemtrassen $(j, k) \in E$ aktiv (belegt) sein dürfen.

Das Beispiel in Abbildung 1 zeigt ein Netzwerk aus Systemtrassen (systematisiertes Netz) und die deren Nachfragen mit den jeweiligen Start und Ende der Nachfrage. Möchte man die Mengen analog zu den oben eingeführten Definitionen befüllen erhält man

- Menge der Nachfragen $R = \{r_1, r_2\}$
- Menge der Systemtrassen $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$
- Mengen der Nachfolger (beispielartig): $N^a = \{b\}$, $N^b = N^h = \{c, d\}$, $N^i = N^f = \emptyset$
- Benutzbare Systemtrassen (sichtbar anhand der Farben):
  - $S^{r_1} = \{c, d, e, g, h, i\}$
  - $S^{r_2} = \{a, b, c, d, e, g\}$
- Zugeordnete Nachfragemenge pro Systemtrasse (beispielartig): $R^a = R^b = \{r_2\}$, $R^g = R^h = \{r_1\}$, $R^c = \{r_1, r_2\}$
- Die Konfliktmenge E sei in diesem Beispiel leer und auch die sich überlappenden Zeitfenster der Verknüpfungen auf Haltegleisen

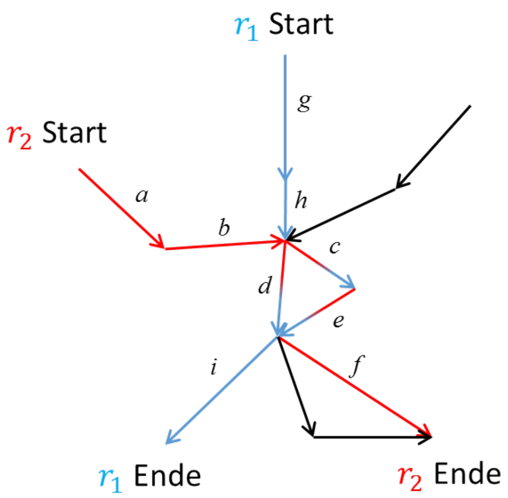

Abbildung 1: Beispiel für systematisiertes Netz und dessen Nachfragen

Eine Lösung (Belegung) der Instanz ist eine Zuweisung von Systemtrassen zu jeder Nachfrage (Fahrlage). Diese Zuweisungen müssen alle Nebenbedingungen (Systemtrassen müssen verknüpfbar sein, Konflikte einhalten, Haltezeitkapazitäten einhalten, ...) einhalten.

Abbildung 2 zeigt eine beispielartige Lösung (bzw. Belegung) für das Beispiel aus Abbildung 1. Beide Nachfragen r_1 und r_2 haben so die Systemtrassen belegt, dass sie vom jeweiligen Start zum jeweiligen Ziel kommen.

1.2 Aussagenlogik (SAT)

TODO: Formel (Variablen, Literale, Klauseln) $\rightarrow$ konjunktive Normalform (CNF)

TODO: Interpretation (Variablenzuweisungen)

2 Basiskodierung SAT

2.1 Aussagenlogische Variablen

Für die Basiskodierung benötigen wir für die in Abschnitt 1 eingeführten Definitionen folgende aussagenlogische Variablen (Binärvariablen):

- Variable r_i für jede Nachfrage $i \in R$, ob sie aktiv ist oder nicht (ob sie belegt wurde oder nicht)
- Variable s_j für jede Systemtrasse $j \in S$, ob sie aktiv ist oder nicht (ob irgend eine Nachfrage sie benutzt)
- Variable s_j^i für jede Systemtrasse $j \in S^i$, ob sie von der Nachfrage $i \in R$ belegt wurde

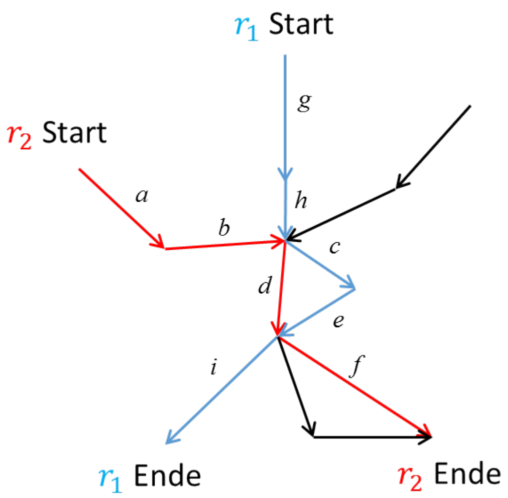

Abbildung 2: Lösung (Belegung) für das Beispiel

- Variable $v_{j,k}$ für jede mögliche Nachfolgersystemtrasse $k \in N^j$ der Systemtrasse $j \in S$, ob beide Systemtrassen miteinander verknüpft wurden

TODO: example

2.2 Kodierung

Die Kodierung besteht aus folgenden Teilformeln. Eine Systemtrasse $j \in S$ ist aktiv ($s_j = 1$), wenn eine Nachfrage $i \in R$ diese Systemtrassen j benutzt ($s_j^i = 1$), so dass

$$\begin{aligned} &\left(\bigvee_{i \in R^j} s_j^i \right) \rightarrow s_j, \quad \forall j \in S \\ \equiv &\bigwedge_{i \in R^j} (\neg s_j^i \vee s_j), \quad \forall j \in S \end{aligned} \tag{1}$$

Da (1) eine Teilformel in CNF ist, können wir sie direkt konjunktiv der gesamten Kodierung hinzufügen.

Jede Systemtrasse $j \in S$ darf von maximal einer Nachfrage $i \in R$ belegt werden, wenn sie in der zugehörigen Menge S^i enthalten ist, so dass

$$\cancel{\mathrm{atMostOne}(}\{s_j^i \mid i \in R^j\}), \quad j \in S \tag{2}$$

mit einer geeigneten $\mathrm{atMostOne}$-Kodierung in CNF, so dass maximal eine Variable (bzw. Literal) in der Bedingung war ist.

Es muss sichergestellt werden, dass wenn eine Nachfrage $i \in R$ aktiv ist, sie eine korrekte Belegung (Lösung: Folge von verknüpften Systemtrassen) hat. Da es sich hier um ein klassisches Flussproblem handelt, wird die gleiche Kodierung wie in [Gro16] verwendet, sodass nur die Systemtrassen $j \in S^i$ verwendet werden dürfen. Für eine kurze Erläuterung sei gesagt, dass diese Kodierung aus folgenden Teilformeln besteht:

- Genau eine Quell-Systemtrasse
- Genau eine Senken-Systemtrasse
- Maximal eine eingehende, aktive Systemtrasse pro Knoten
- Maximal eine ausgehende, aktive Systemtrasse pro Knoten
- Wenn eine eingehende Systemtrasse j in einen Knoten aktiv ist, muss auch eine ausgehende Systemtrasse in N^j aktiv sein

Gemeinsam bilden diese Teilformeln die Kodierung der Nachfrage i mittels (falls i aktiv ist) für alle Nachfragen aus R

$$\begin{aligned} & r_i \to \mathrm{encodeRequest}(i), \quad i \in R \\ \equiv & \neg r_i \lor \mathrm{encodeRequest}(i), \quad i \in R \end{aligned} \tag{3}$$

Jede Verknüpfungs-Variable $v_{j,k}$ für jede mögliche Nachfolgersystemtrasse $k \in N^j$ der Systemtrasse $j \in S$, ist dann aktiv, wenn beide j und k aktiv sind für Nachfrage $i \in R$, so dass

$$\begin{aligned} & (s_j^i \land s_k^i) \to v_{j,k}, \quad i \in R, j \in S^i, k \in S^i : k \in N^j \\ \equiv & \neg s_j^i \lor \neg s_k^i \lor v_{j,k}, \quad i \in R, j \in S^i, k \in S^i : k \in N^j \end{aligned} \tag{4}$$

Um zu gewährleisten, dass alle Ausschlüsse (Konflikte) aus E eingehalten werden, wird folgende Teilformel hinzugefügt

$$\neg s_j \lor \neg s_k, \quad (j,k) \in E \tag{5}$$

Für den Ausschluss, dass sich mehrere Züge gleichzeitig in einem Gleis befinden, müssen die Haltegleiskapazitäten (bei KS3 entspricht die eins) eingehalten werden. Das bedeutet, dass je zwei paarweise sich verknüpfte Systemtrassen nicht gleichzeitig aktiv sein können. Beispielsweise zeigt Abbildung 3 vier Systemtrassen (a, b, c, d) sowie deren mögliche Verknüpfung (a→b und c→d). Durch die zeitliche Überschneidung, können nicht beide Verknüpfungen zeitgleich aktiv sein. Es ergibt sich als allgemeine Formel für sich überschneide Verknüpfungen in einem Gleis:

$$\mathrm{atMostOne}(\{v_{l,l'} \mid \text{Verknüpfung } l \to l' \text{ überschneidet sich mit } k \to j\}), \quad j \in S, k \in N^j \tag{6}$$

Es ergibt sich eine Kodierung in CNF wenn alle Teilformeln aus (1)–(6) konjunktiv miteinander verknüpft werden.

TODO: example

References

[Gro16] Peter Großmann. “Satisfiability and Optimization in Periodic Traffic Flow Problems”. PhD thesis. Technische Universität Dresden, 2016.

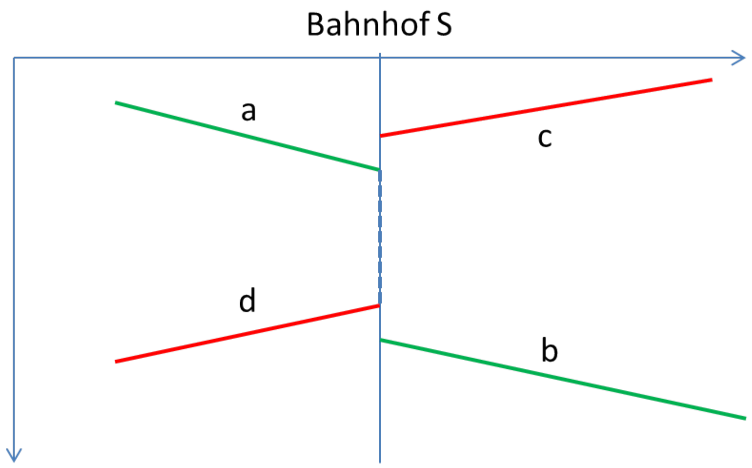

Abbildung 3: zwei Verknüpfungsmöglichkeiten in Bahnhof S