Proyecto 1: Métodos numéricos del Z-spline cúbico

November 25, 2025

Abstract

1 Los Z-splines

1.1 Introducción

Los Z-splines constituyen una familia de splines cardinales de soporte compacto que preservan momentos discretos y poseen alto orden de regularidad. La idea central es construir una base spline cuya definición incorpora explícitamente operadores de diferencias finitas derivados de desarrollos de Taylor. Su creador, Julián T. Becerra-Sagredo, desarrolló esta teoría en dos trabajos clave (2003 y 2020), en los cuales se presentan tanto la construcción como sus propiedades analíticas y aplicaciones.

1.2 Definición cardinal y construcción básica

Sea $\{x_j\} = \{j\}$ una malla equiespaciada. Los Z-splines se definen mediante un núcleo cardinal $Z_m(x)$ tal que la interpolación de un conjunto de datos $\{y_j\}$ está dada por

$$f_m(x) = \sum_{j \in Z} y_j \, Z_m(x - j).$$

Cada función base Z_m es un polinomio por tramos de grado $2m - 1$ y con regularidad C^{m-1}. El parámetro m determina el orden del spline.

La construcción impone condiciones de interpolación entre nodos y conservación de momentos discretos. Para cada intervalo $[j, j + 1]$, el polinomio está determinado por un conjunto de condiciones de tipo Hermite–Birkhoff derivadas de operadores de diferencias finitas.

1.3 Conservación de momentos

Una de las propiedades fundamentales es que las Z-splines preservan los primeros $2m-1$ momentos discretos. Sea

$$M_k = \sum_j y_j j^k, \qquad k = 0, \ldots, 2m-2,$$

entonces la interpolante satisface

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k f_m(x)\, dx = M_k,$$

lo que asegura que la interpolación no altera estos invariantes (discretos o físicos).

1.4 Reproducción polinómica

El artículo demuestra que las Z-splines reproducen exactamente polinomios hasta grado $2m-2$:

$$p(x) = x^n, \qquad n \le 2m-2 \quad \Rightarrow \quad f_m(x) = p(x).$$

Esto implica un orden de aproximación

$$\|f - f_m\| = \mathcal{O}(h^{\,2m-1}),$$

cuando f es suficientemente regular.

1.5 Soporte compacto y regularidad

Cada Z_m tiene soporte compacto mínimo:

$$Z_m(x) = 0 \qquad si|x| > m,$$

y regularidad

$$Z_m \in C^{m-1}.$$

Esto permite su uso eficiente en contextos numéricos, especialmente en métodos de remapeo o mallas adaptativas.

1.6 Relación con diferencias finitas

Una contribución teórica clave es que los coeficientes de los polinomios que forman Z_m coinciden con los coeficientes de operadores de diferencias finitas de orden elevado. En particular, se demuestra que para derivadas,

$$f_m^{(k)}(x_j) = \sum_{\ell=-m}^{m} c_\ell^{(k)}\, y_{j+\ell},$$

donde los $c_\ell^{(k)}$ son coeficientes de diferencias finitas centradas obtenidos por expansión de Taylor.

1.7 Límite hacia la función sinc

A medida que $m \to \infty$, las Z-splines convergen hacia la función ideal de reconstrucción cardinal:

$$Z_m(x) \longrightarrow sinc(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}.$$

Esto establece un vínculo entre splines compactos y teoría de muestreo.

1.8 Z-splines en mallas no uniformes

Los artículos extienden la teoría a mallas arbitrarias $\{x_j\}$ no equidistantes. En ese caso, el núcleo cardinal ya no es trasladable, y se construyen polinomios locales mediante matrices de diferencias finitas adaptadas a la geometría de los nodos.

En regiones de frontera se emplean splines "one-sided", lo cual permite resolver la falta de simetría.

1.9 Aplicaciones numéricas

Las Z-splines son especialmente útiles en contextos donde es esencial la conservación de cantidades físicas discretas:

- métodos de remapeo ALE y semi-Lagrangianos,
- interpolaciones conservativas en dinámica de fluidos,
- regularización de funciones delta,
- remallado adaptativo,
- filtrado numérico (denoising) preservando momentos.

En estas aplicaciones, la preservación de momentos juega un papel fundamental para mantener estabilidad física del sistema.

1.10 Conclusión

Los Z-splines constituyen una herramienta moderna de interpolación de gran interés tanto teórico como práctico, especialmente en contextos de simulación numérica donde la preservación de invariantes es esencial.

2 El Z-spline cúbico

La función base Z-spline cúbica para datos a intervalos arbitrarios a_1, a_2, a_3 and a_4 está dada por

$$\widetilde{Z}_1(x) = \begin{cases} 0 & x < -a_1 - a_2 \\ \left(\frac{a_2+a_1}{a_1}\right) + \left(\frac{3a_2+a_1}{a_2 a_1}\right) x & \\ \quad + \frac{3a_2+2a_1}{a_2 a_1 (a_2+a_1)} x^2 + \frac{1}{a_2 a_1 (a_2+a_1)} x^3 & -a_1 - a_2 \le x \le -a_2, \\ 1 - \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2}\right) x & \\ \quad - \frac{a_3+2(a_2+a_1)}{a_3 a_2 (a_2+a_1)} x^2 - \frac{a_3+a_2+a_1}{a_3 a_2^2 (a_2+a_1)} x^3 & -a_2 \le x \le 0, \\ 1 + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) x & \\ \quad - \frac{a_2+2(a_3+a_4)}{a_2 a_3 (a_3+a_4)} x^2 + \frac{a_2+a_3+a_4}{a_2 a_3^2 (a_3+a_4)} x^3 & 0 \le x \le a_3, \\ \left(\frac{a_3+a_4}{a_4}\right) - \left(\frac{3a_3+a_4}{a_3 a_4}\right) x & \\ \quad + \frac{3a_3+2a_4}{a_3 a_4 (a_3+a_4)} x^2 - \frac{1}{a_3 a_4 (a_3+a_4)} x^3 & a_3 \le x \le a_3 + a_4, \\ 0 & x > a_3 + a_4. \end{cases}$$

2.1 Z-spline cúbico en los extremos de un intervalo

3 Fórmula de integración numérica

4 Fórmula de derivación numérica

5 Convergencia

5.1 Integración

5.2 Derivación

5.3 Interpolaicón equidistante en 2D

5.4 Interpolación en 1D con puntos arbitrarios