

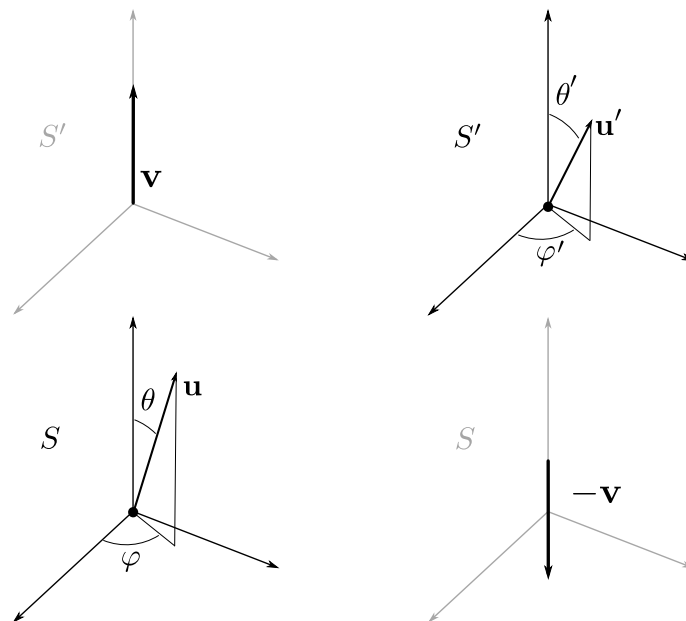
1 Efecto Doppler y aberración de la luz	1
1.1 Problema 1	4
1.2 Problema 2	6
1.3 Problema 3	9
2 Tiempos retardados y posición aparente	12
2.1 Problema 4	17
2.2 Problema 5	19

1 Efecto Doppler y aberración de la luz

Los primeros problemas de la guía tratan de efecto Doppler y aberración, es decir, sobre cómo cambian la frecuencia y la dirección de propagación de la luz al pasar de un sistema a otro. Hay varias formas de deducir esas leyes de transformación. Para encontrar el cambio de dirección, un método simple es usar las propiedades de transformación de la velocidad. Supongamos dos sistemas inerciales, S y S' . Los dos sistemas comparten el mismo eje z . El sistema S' se mueve con velocidad $\mathbf{v} = v \hat{z}$ respecto del sistema S . Si en S hay algo que se mueve con velocidad $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$, la velocidad medida en S' es

$$u'_x = \frac{u_x/\gamma}{1 - u_z v/c^2}, \quad u'_y = \frac{u_y/\gamma}{1 - u_z v/c^2}, \quad u'_z = \frac{u_z - v}{1 - u_z v/c^2}, \quad (1)$$

donde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ y $\beta = \frac{v}{c}$.



A la izquierda, las cosas vistas desde el sistema S , y a la derecha, desde el sistema S' .

Si lo que se propaga es luz, $|\mathbf{u}| = |\mathbf{u}'| = c$. En cada sistema podremos escribir

$$\mathbf{u} = \sin \theta (\cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}) + \cos \theta \hat{z},$$

$$\mathbf{u}' = \sin \theta' (\cos \varphi' \hat{x} + \sin \varphi' \hat{y}) + \cos \theta' \hat{z}. \quad (2)$$

Lo que tenemos que averiguar son las relaciones entre los ángulos medidos en S y los medidos en S' . Usando las ecs. (1) queda

$$\sin \theta' \cos \varphi' = \frac{\sin \theta \cos \varphi}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)}, \quad \sin \theta' \sin \varphi' = \frac{\sin \theta \sin \varphi}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)}, \quad \cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta}. \quad (3)$$

La última relación ya da θ' en función de θ . Dividiendo entre sí las dos primeras se obtiene

$$\tan \varphi' = \tan \varphi. \quad (4)$$

Esta ecuación no parece ser lo suficientemente conclusiva, pues podría ser $\varphi' = \varphi$ o $\varphi' = \varphi + \pi$. Pero a partir de la relación entre $\cos \theta'$ y $\cos \theta$ puede demostrarse que

$$\sin \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)}, \quad (5)$$

lo que implica que $\cos \varphi' = \cos \varphi$ y $\sin \varphi' = \sin \varphi$, es decir, $\varphi = \varphi'$. Así, el único ángulo que cambia es el ángulo respecto la dirección de la velocidad relativa. Dividiendo entre sí las ecuaciones para $\sin \theta'$ y para $\cos \theta'$ queda una ecuación para la tangente de θ' ,

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma(\cos \theta - \beta)}. \quad (6)$$

Las leyes de transformación de S' a S se obtienen cambiando el signo de β .

Un segundo método para obtener la ley de transformación entre las direcciones de propagación, y que también da la relación entre las frecuencias, es el de trabajar con los cuadvectores número de onda. A diferencia del anterior, este método puede aplicarse a ondas que se propagan en un medio material. La cuestión sería la siguiente: en S una onda plana de frecuencia ω se propaga en la dirección \mathbf{n} , es decir, tiene vector de onda

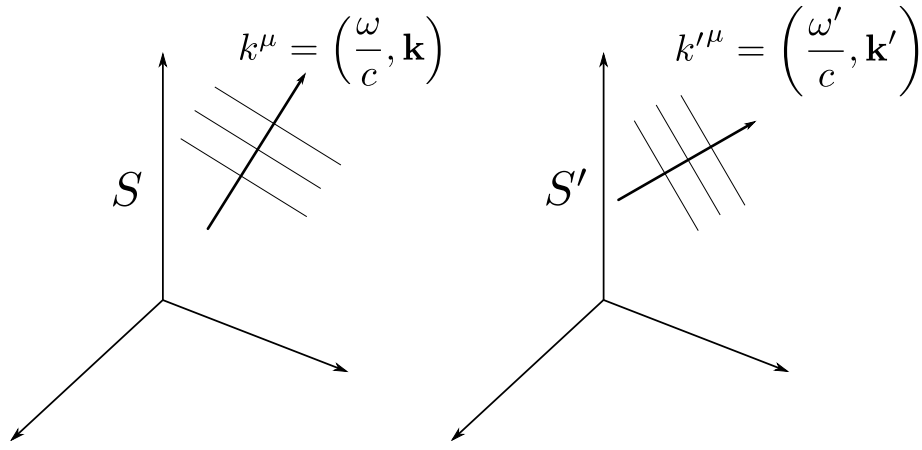
$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}. \quad (7)$$

El cuadvector número de onda en S es

$$k^\mu = \frac{\omega}{c}(1, \mathbf{n}) = \frac{\omega}{c}(1, \sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta). \quad (8)$$

Análogamente, en S' , la misma onda plana estará descrita por un cuadvector

$$k'^\mu = \frac{\omega'}{c}(1, \mathbf{n}') = \frac{\omega'}{c}(1, \sin \theta' \cos \varphi', \sin \theta' \sin \varphi', \cos \theta'). \quad (9)$$



A la izquierda, las cosas vistas desde el sistema S , y a la derecha, desde el sistema S' .

Estos dos cuadvectores están relacionados por la misma transformación de Lorentz que vincula los cuadvectores posición en los dos sistemas (suponiendo que sus orígenes coinciden en $t = t' = 0$). Para las coordenadas tenemos,

$$ct' = \gamma(ct - \beta z), \quad x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \gamma(z - \beta ct). \quad (10)$$

La relación entre los cuadvectores k^μ y k'^μ sigue ese mismo modelo,

$$\frac{\omega'}{c} = \gamma \left(\frac{\omega}{c} - \beta k_z \right), \quad k'_x = k_x, \quad k'_y = k_y, \quad k'_z = \gamma \left(k_z - \beta \frac{\omega}{c} \right), \quad (11)$$

$$\rightarrow k'^\mu = \frac{\omega}{c} \left(\gamma(1 - \beta n_z), n_x, n_y, \gamma(n_z - \beta) \right). \quad (12)$$

Para leer de aquí quiénes son ω' y \mathbf{n}' lo que hay que hacer es reescribir k'^μ en su forma canónica (llamémosle así), sacando factor común $k^{0'}$

$$k'^\mu = \frac{\omega'}{c} (1, \mathbf{n}') = \frac{\omega}{c} \gamma(1 - \beta n_z) \left(1, \frac{n_x/\gamma}{1 - \beta n_z}, \frac{n_y/\gamma}{1 - \beta n_z}, \frac{n_z - \beta}{1 - \beta n_z} \right). \quad (13)$$

De aquí ya leemos la frecuencia en el sistema S' ,

$$\frac{\omega'}{c} = \frac{\omega}{c} \gamma (1 - \beta n_z) = \frac{\omega}{c} \gamma (1 - \beta \cos \theta), \quad (14)$$

y el vector \mathbf{n}' ,

$$\mathbf{n}' = \left(\frac{n_x/\gamma}{1 - \beta n_z}, \frac{n_y/\gamma}{1 - \beta n_z}, \frac{n_z - \beta}{1 - \beta n_z} \right). \quad (15)$$

Escribiendo todo en función de los ángulos vuelven a deducirse las relaciones (3)–(5). En definitiva,

$$\omega' = \omega \gamma (1 - \beta \cos \theta), \quad \varphi' = \varphi, \quad \cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta}. \quad (16)$$

La relación entre los ángulos polares puede escribirse en una forma más simple a partir de la siguiente identidad,

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}. \quad (17)$$

El resultado es

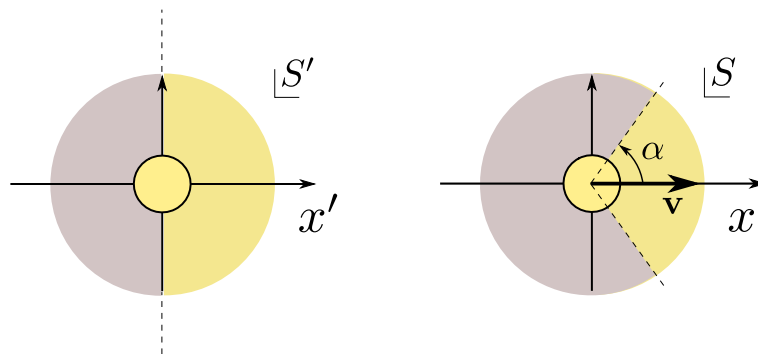
$$\tan \frac{\theta'}{2} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \tan \frac{\theta}{2}. \quad (18)$$

Desde el punto de vista de la tangente del ángulo mitad, la transformación es simplemente multiplicar por un factor de escala. Los únicos ángulos invariantes son $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. Además queda en evidencia que la transformación es una función monótona, tanto respecto de β como de θ . No puede haber entonces imágenes dobles. Los rayos que se propagan entre dos ángulos, digamos $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, son vistos en todos los sistemas respetando la misma relación de orden $\theta'_1 \leq \theta' \leq \theta'_2$.

Antes de pasar a los problemas, como nota práctica, vean que no es necesario recordar todas las fórmulas de Doppler y aberración. Esa no es la cuestión, sino el método que permite llegar hasta ellas. Otra cosa para notar es que si recuerdan como transforman las coordenadas espaciales y el tiempo, ya tienen ahí todas las transformaciones de Lorentz. No tiene el menor sentido, en estos casos simples, escribir las matrices Λ^μ_ν .

1.1 Problema 1

Este problema es una aplicación simple del fenómeno de aberración. Dos sistemas inerciales, S y S' se mueven uno respecto del otro en la dirección común x . La velocidad de S' respecto de S es $\mathbf{v} = v \hat{x}$. En S' una fuente emite luz en todas direcciones. Veremos que las ondas que se propagan en S' hacia la región $x' > 0$, se propagan en S ocupando un cono de ángulo α . Se trata de encontrar α .



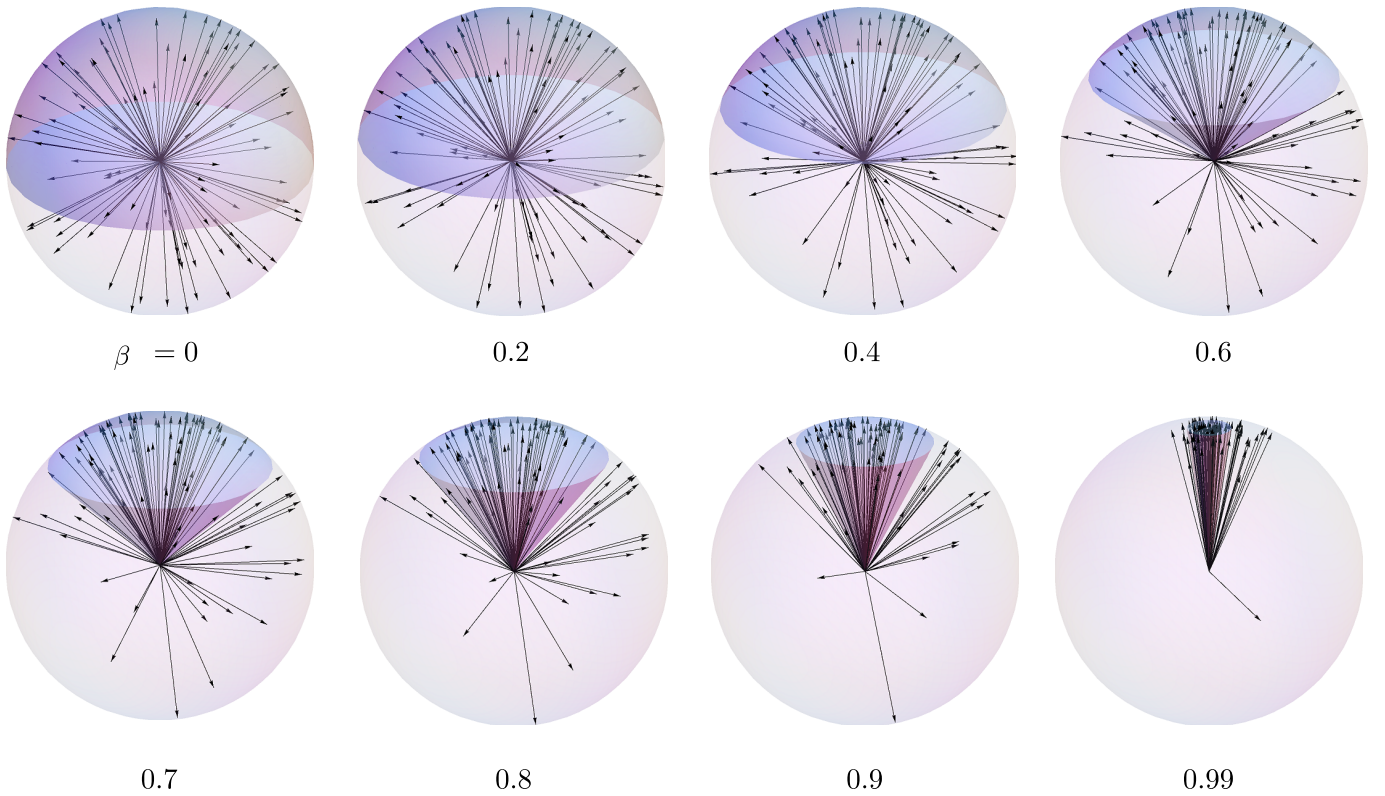
Conviene definir los ángulos como si x fuera la dirección z en coordenadas esféricas. Queremos ver entre qué ángulos límites se observa en S la luz que en S' se emite entre $\theta' = 0$ y $\theta' = \pi/2$. Hay que aplicar la ec. (18) para esos dos ángulos, teniendo cuidado en cambiar β por $-\beta$, pues ahora la transformación es de S' a

S . El ángulo $\theta' = 0$ va a parar a $\theta = 0$. El ángulo $\theta' = \pi/2$ va a parar al ángulo θ tal que

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad \tan \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}. \quad (19)$$

Para $0 \leq \beta < 1$, resulta $\tan \theta/2 \leq 1$, lo que implica que $\theta \leq \pi/2$. La luz se concentra hacia adelante. Para $-1 < \beta \leq 0$, al contrario, $\theta > \pi/2$, la luz se distribuye sobre un ángulo mayor. Comparando este resultado con la ec. (17) vemos que $\cos \theta = \beta$ y $\sin \theta = 1/\gamma$. Si $\beta \ll 1$, resulta $\theta \approx \pi/2 - \beta$. En cambio, si $\gamma \gg 1$, es $\theta \approx 1/\gamma$. Una nota práctica común a los problemas de relatividad es que conviene usar la variable β para analizar el límite no relativista, pero es preferible reservar γ como variable, en lugar de β , si lo que se quiere estudiar es el límite ultrarelativista.

La siguiente secuencia de figuras muestra cómo un conjunto de rayos tomados al azar en el sistema en reposo de la fuente se transforma cuando es visto desde un sistema en el que la fuente tiene velocidad β . En especial, se muestra el cono al que van a parar los rayos que en S' son emitidos hacia adelante.



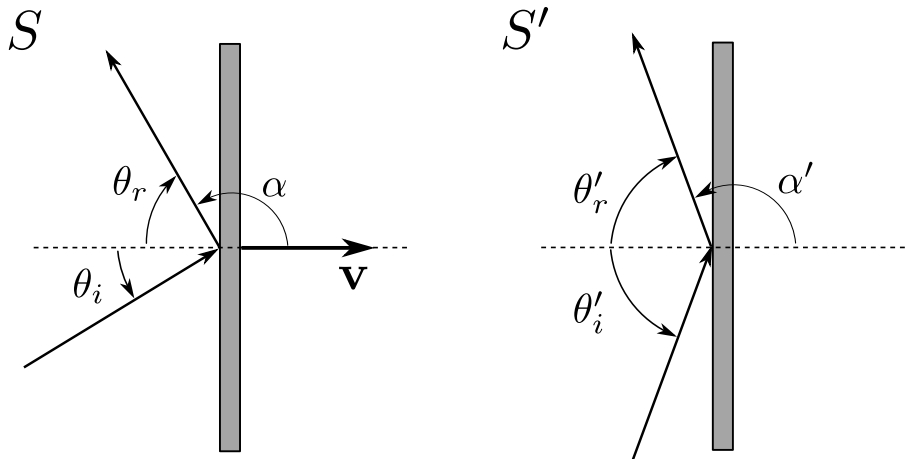
Aunque las leyes de transformación hayan cambiado y los resultados relativistas no estén siempre de acuerdo con el sentido común, no deben dejarse llevar por la sensación de que, frente a un resultado, no hay forma de saber si su apariencia inesperada corresponde a su origen relativista o a un error de cálculo. Por ejemplo, en los problemas de Doppler y aberración, es común usar argumentos intuitivos para saber si el signo con el que aparece β en las fórmulas es el correcto. Aunque las fórmulas relativistas difieren de las no relativistas, el efecto cualitativo suele ser el mismo. Clásicamente, si una fuente se mueve hacia la derecha, y si desde su perspectiva emite una partícula hacia arriba, en el sistema en que la fuente se mueve,

la partícula tendrá una componente de velocidad horizontal igual a la de la fuente. En el sistema en que la fuente se mueve, la partícula sale hacia la derecha, no hacia arriba. La tangente de su ángulo polar, medido respecto de la dirección de la velocidad relativa, disminuye. Por eso en la fórmula relativista debe aparecer el cociente $(1 - \beta)/(1 + \beta)$, que es el que da un ángulo menor. Lo mismo puede decirse de las fórmulas para la frecuencia. Los signos tienen que reproducir cualitativamente lo que uno espera en situaciones no relativistas.

1.2 Problema 2

Este problema trata sobre la reflexión de luz en espejos en movimiento. El método que seguiremos es común muchos otros problemas. Cuando se tienen medios en movimiento, no se pueden aplicar directamente las leyes de reflexión y refracción deducidas para medios en reposo. La idea, entonces, es pasar al sistema en que los medios están en reposo, resolver el problema ahí y volver al sistema original.

En la primera parte del problema, el espejo se mueve con velocidad perpendicular a su superficie. Este es el sistema S .



En S la onda incide con ángulo θ_i . Este ángulo es el ángulo polar, así que podemos aplicar directamente la transformación (18) para encontrar el ángulo de incidencia en el sistema S' en donde el espejo está en reposo,

$$\tan \frac{\theta'_i}{2} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \tan \frac{\theta_i}{2}. \quad (20)$$

En este sistema, la luz se refleja formando un ángulo $\theta'_r = \theta'_i$. El ángulo polar asociado a la dirección θ'_r es $\alpha' = \pi - \theta'_i$. Aplicando ahora la transformación inversa obtenemos para la onda reflejada en el sistema original,

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \tan \frac{\alpha'}{2}. \quad (21)$$

El ángulo θ_r es $\pi - \alpha$. Usando que

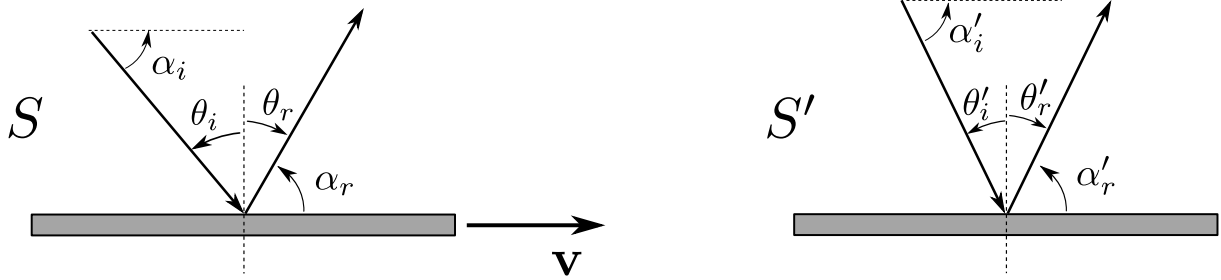
$$\tan \frac{\pi - x}{2} = \cot \frac{x}{2}, \quad (22)$$

resulta

$$\tan \frac{\theta_r}{2} = \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \tan \frac{\theta_i}{2}. \quad (23)$$

Si el espejo se aleja, $\beta > 0$, el ángulo de reflexión es mayor que el ángulo de incidencia. Si el espejo se acerca, $\beta < 0$, el ángulo de reflexión es menor. Si se tratase de una pared móvil y de partículas chocando contra ella, esa es la clase de resultado que uno esperaría. Una pared que se acerca tiende a darles a las partículas mayor impulso, en la dirección de la velocidad de la pared, del que traían al principio. Al revés, una pared que se aleja quita impulso a las partículas en la dirección de su velocidad.

Si el espejo se mueve paralelo a su superficie, el ángulo de incidencia no es el ángulo polar respecto de la velocidad, sino que $\theta_i = \pi/2 - \alpha_i$.



En lugar de usar las fórmulas para la tangente del ángulo mitad, es más práctico aquí usar la transformación para el coseno del ángulo polar,

$$\cos \alpha'_i = \frac{\cos \alpha_i - \beta}{1 - \beta \cos \alpha_i}. \quad (24)$$

En el sistema en que el espejo está en reposo, el ángulo polar de la luz reflejada es igual al de la luz incidente, de manera que $\cos \alpha'_r = \cos \alpha'_i$. Transformando al sistema original

$$\cos \alpha_r = \frac{\cos \alpha'_r + \beta}{1 + \beta \cos \alpha'_r} = \frac{\cos \alpha'_i + \beta}{1 + \beta \cos \alpha'_i}. \quad (25)$$

Pero lo que ha quedado escrito ahí es la relación inversa a la ec. (24), lo que implica que

$$\cos \alpha_r = \cos \alpha_i. \quad (26)$$

Lo mismo pasa clásicamente.

Respecto a la frecuencia de la luz reflejada, en el primer caso primero buscamos la frecuencia de la luz incidente en el sistema en reposo del espejo,

$$\omega'_i = \omega \gamma (1 - \beta \cos \theta_i). \quad (27)$$

En ese sistema, la luz se refleja con la misma frecuencia, $\omega'_r = \omega'_i$. En el sistema original,

$$\omega_r = \omega'_r \gamma (1 + \beta \cos \alpha) = \omega'_i \gamma (1 - \beta \cos \theta'_i). \quad (28)$$

Usando la relación entre los cosenos de los ángulos de incidencia,

$$\cos \theta'_i = \frac{\cos \theta_i - \beta}{1 - \beta \cos \theta_i}, \quad (29)$$

se obtiene

$$\omega_r = \omega_i \gamma^2 (1 - 2\beta \cos \theta_i + \beta^2). \quad (30)$$

Queda para ustedes demostrar que en el caso del espejo que se desplaza paralelo a sí mismo la frecuencia de la onda reflejada es igual a la de la onda incidente.

No se lleven de este problema la impresión de que hay que acordarse de todas las fórmulas de Doppler. Sin acordarse de las fórmulas, ustedes pueden empezar con los cuadvectores e ir transformándolos de un sistema a otro. Cuando tengan al final el cuadvector de la onda reflejada en el sistema original, ahí recién se preocupan por leer de sus componentes cuáles son los ángulos que definen su dirección. Por ejemplo, en el caso del espejo que se mueve paralelo a sí mismo, tomando la velocidad en la dirección x , el cuadvector de la onda incidente es

$$k_i^\mu = \frac{\omega}{c} (1, \cos \theta_i, -\sin \theta_i, 0). \quad (31)$$

Para pasar al sistema en que el espejo está en reposo, k_i^μ se transforma como las coordenadas y el tiempo,

$$k_i'^\mu = \frac{\omega}{c} (\gamma[1 - \beta \cos \theta_i], \gamma[\cos \theta_i - \beta], -\sin \theta_i, 0). \quad (32)$$

En este mismo sistema, el cuadvector de la onda reflejada se obtiene cambiando el signo de k_y' ,

$$k_r'^\mu = \frac{\omega}{c} (\gamma[1 - \beta \cos \theta_i], \gamma[\cos \theta_i - \beta], \sin \theta_i, 0). \quad (33)$$

Transformando de regreso al sistema S se obtiene

$$\begin{aligned} k_r^\mu &= \frac{\omega}{c} \left(\gamma \left\{ \gamma[1 - \beta \cos \theta_i] + \beta \gamma[\cos \theta_i - \beta] \right\}, \gamma \left\{ \gamma[\cos \theta_i - \beta] + \beta \gamma[1 - \beta \cos \theta_i] \right\}, \sin \theta_i, 0 \right) \\ &= \frac{\omega}{c} (1, \cos \theta_i, \sin \theta_i, 0). \end{aligned} \quad (34)$$

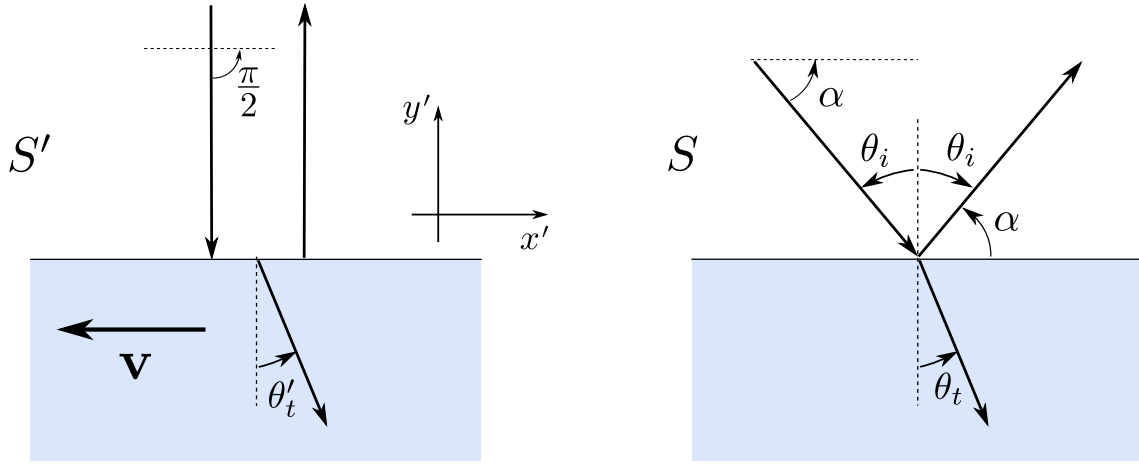
Esto significa que no cambia la frecuencia y que el ángulo de reflexión es igual al de incidencia, que es lo que encontramos antes.

1.3 Problema 3

En este problema se estudia la refracción de una onda plana en un medio en movimiento. Ondas planas son emitidas perpendicularmente hacia la superficie de un medio de índice de refracción n que se mueve con velocidad $\mathbf{v} = -v \hat{x}$. Las ondas planas están polarizadas linealmente, con el campo \mathbf{E}' paralelo a la dirección \hat{x} . Llamaremos S' al sistema en que el medio se mueve y la fuente está fija. En lo que sigue escribiremos

$$\beta = \frac{v}{c} \hat{x}. \quad (35)$$

En S' , la onda viaja perpendicular a la superficie, de manera que el ángulo correspondiente formado con la dirección x es $\alpha' = \pi/2$. En el sistema en que el medio está en reposo, S , las ondas se propagan formando un ángulo α con la dirección x .



La fórmula de aberración permite escribir

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \tan \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}. \quad (36)$$

También podemos usar la otra fórmula de aberración, la que relacionaba los cosenos de los ángulos,

$$\cos \alpha = \frac{\cos \alpha' + \beta}{1 + \beta \cos \alpha'} = \beta. \quad (37)$$

La identidad (17) permitía anticipar este resultado. Ahora bien, puesto que $\alpha = \theta_i + \pi/2$, obtenemos

$$\sin \theta_i = \cos \alpha = \beta, \quad \cos \theta_i = \sqrt{1 - \beta^2} = 1/\gamma. \quad (38)$$

Para hallar la polarización de la onda en el sistema S , hay que transformar los campos. En el sistema S ,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}'_{\parallel} + \gamma (\mathbf{E}'_{\perp} - \beta \times \mathbf{B}'), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}'_{\parallel} + \gamma (\mathbf{B}'_{\perp} + \beta \times \mathbf{E}'). \quad (39)$$

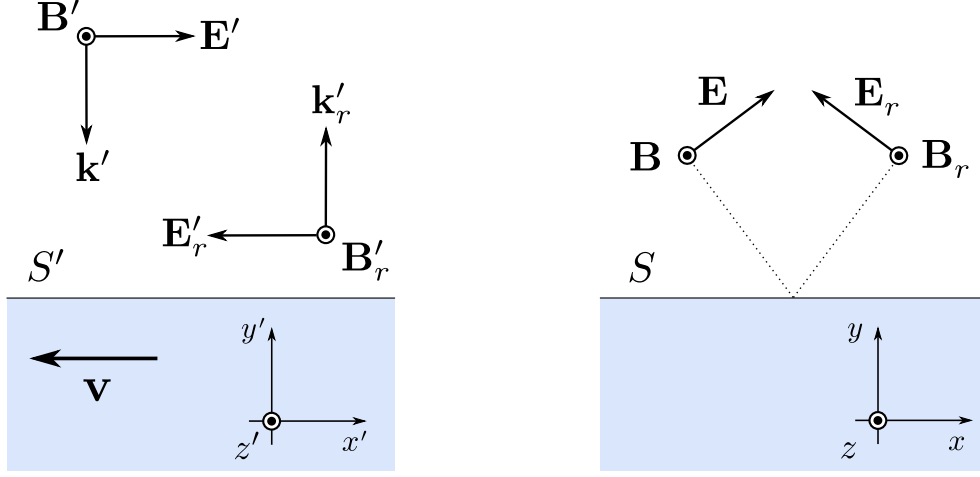
donde \mathbf{E}'_{\parallel} es la componente de \mathbf{E}' en la dirección de la velocidad y \mathbf{E}'_{\perp} la componente perpendicular. En S' el campo es paralelo a \mathbf{v} , de modo que $\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_{\parallel}$ y $\mathbf{E}'_{\perp} = 0$. Por otro lado, $\mathbf{B}' = \mathbf{B}'_{\perp}$ y $\mathbf{B}'_{\parallel} = 0$. Explícitamente

$$\mathbf{E}' = E' \hat{x}, \quad \mathbf{B}' = E' \hat{z}. \quad (40)$$

Entonces, la ley de transformación (39) implica

$$\mathbf{E} = E' \hat{x} + \gamma\beta E' \hat{y}, \quad \mathbf{B} = \gamma E' \hat{z}. \quad (41)$$

El campo \mathbf{E} está en el plano de incidencia, de modo que la polarización de la onda en el sistema S es TM.



Hay que notar que

$$E^2 = E'^2(1 + \gamma^2\beta^2) = E'^2\gamma^2 = B^2. \quad (42)$$

La amplitud del campo eléctrico sigue siendo igual a la del campo magnético, como en la onda original. Volviendo a la cuestión fundamental, lo importante es que en el sistema S la onda es TM. Si la onda incide con el ángulo de Brewster en este sistema no habrá onda reflejada. En realidad ni en ese ni en cualquier sistema, porque \mathbf{E} y \mathbf{B} serán cero en todos los sistemas.

Recordemos aquí como se calcula el ángulo de Brewster. Para polarización TM la amplitud de la onda reflejada es

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{\frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_i - \frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_t}{\frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_i + \frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_t}. \quad (43)$$

Aquí θ_t es el ángulo que forma la dirección de propagación de la onda transmitida con la normal interior (ver la figura de abajo). Cuando $\mu_i = \mu_t = 1$, la condición para que no haya onda reflejada es

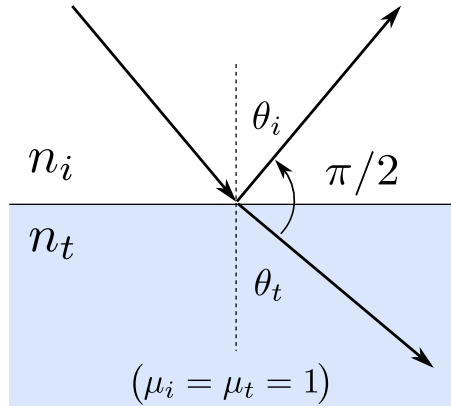
$$n_t \cos \theta_i = n_i \cos \theta_t. \quad (44)$$

Usando la ley de Snell, puede escribirse $n_t = n_i \sin \theta_i / \sin \theta_t$, y la condición anterior queda como

$$\sin 2\theta_i = \sin 2\theta_t. \quad (45)$$

Ahora bien, si dos ángulos que están entre 0 y $\pi/2$ satisfacen la relación anterior, entonces deben sumar $\pi/2$,

$$\theta_i + \theta_t = \pi/2. \quad (46)$$



Esto implica $\cos \theta_t = \sin \theta_i$, lo que permite reescribir la ecuación (44) como

$$\tan \theta_i = \frac{n_t}{n_i}. \quad (47)$$

Para ondas incidiendo desde el vacío en un medio con índice de refracción n , la condición para que no haya onda reflejada es $\tan \theta_i = n$. Para las condiciones del problema, usando (38) se obtiene $\gamma\beta = n$. De aquí puede despejarse

$$\beta = \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}. \quad (48)$$

Para encontrar la intensidad de la onda recibida en S' como función de la velocidad, primero debemos hallar la intensidad en S , donde es válida la fórmula de Fresnel (43), y después transformar a S' . En S

$$E_r = \frac{n \cos \theta_i - \cos \theta_t}{n \cos \theta_i + \cos \theta_t} E_i, \quad (49)$$

donde, según lo que calculamos antes, $E_i = \gamma E'$. El campo eléctrico reflejado en S queda dado por

$$\mathbf{E}_r = E_r (-\cos \theta_i \hat{x} + \sin \theta_i \hat{y}) = E_r (-\gamma^{-1} \hat{x} + \beta \hat{y}), \quad (50)$$

y el campo magnético por $\mathbf{B}_r = E_r \hat{z}$. En el sistema S' ,

$$\mathbf{E}'_r = \mathbf{E}_{r\parallel} + \gamma(\mathbf{E}_{r\perp} + \beta \times \mathbf{B}_r) = -\frac{1}{\gamma} E_r \hat{x}. \quad (51)$$

Es lógico que el campo reflejado esté en la misma dirección x que el campo incidente, porque la onda en el sistema S' se refleja verticalmente (ver el problema anterior). Queda para ustedes demostrar que el campo reflejado en S' termina siendo

$$\mathbf{E}'_r = -\frac{n^2 - \gamma\sqrt{n^2 - \beta^2}}{n^2 + \gamma\sqrt{n^2 - \beta^2}} E' \hat{x}. \quad (52)$$

De aquí también puede obtenerse la condición para que no haya onda reflejada, pidiendo que

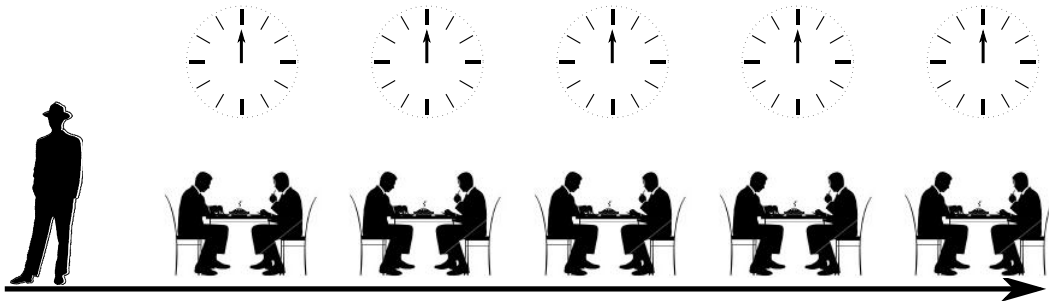
$$n^2 = \gamma\sqrt{n^2 - \beta^2}. \quad (53)$$

El resultado vuelve a ser (48). La intensidad de la onda reflejada en S' es

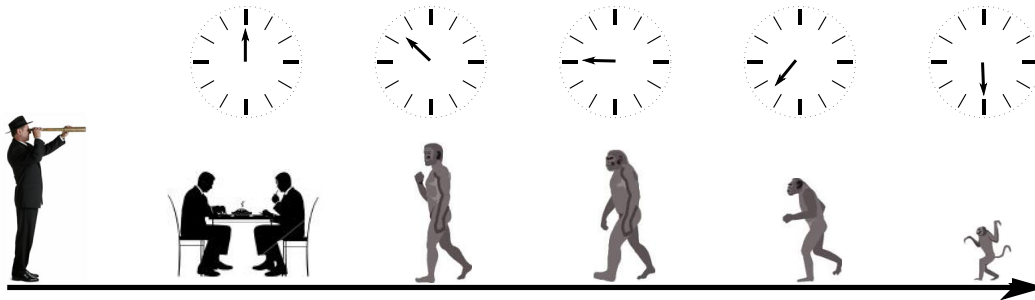
$$\frac{I'_r}{I'_i} = \frac{|\mathbf{E}'_r|^2}{|\mathbf{E}'_i|^2} = \left(\frac{n^2 - \gamma\sqrt{n^2 - \beta^2}}{n^2 + \gamma\sqrt{n^2 - \beta^2}} \right)^2. \quad (54)$$

2 Tiempos retardados y posición aparente

El tema de los dos problemas que siguen es el de las posiciones aparentes vistas por un único observador inercial. A diferencia de otros problemas más usuales de relatividad, no se trata de encontrar cuáles son las posiciones y tiempos medidos en un sistema de referencia, sino de cuáles son las posiciones y los tiempos vistos por un observador. Medición y observación no son equivalentes. Aquí la palabra *observador* tiene un significado literal. Debido a la velocidad finita de propagación de la luz, lo que ve un observador no es una imagen actual del estado de cosas, sino una imagen anterior y distorsionada. Es anterior porque ve las cosas como eran en el pasado, y es distorsionada porque distintas cosas son observadas tal como eran a distintos tiempos, dependiendo de la distancia. Uno ve el Sol adonde estaba hace 8 minutos, pero ve las otras estrellas adonde estaban hace años. Si ordenásemos una fila de relojes sincronizados entre el observador y un punto muy lejano, la imagen de cada reloj sería una fracción de segundo anterior a la del reloj precedente. Aunque todos marcan la misma hora, el observador ve una sucesión de lecturas, entre el momento presente y un pasado remoto.



El estado actual del Mundo, tal como será reconstruido cuando todos los observadores comparen sus mediciones.



El estado aparente del Mundo visto por un único observador en el origen.

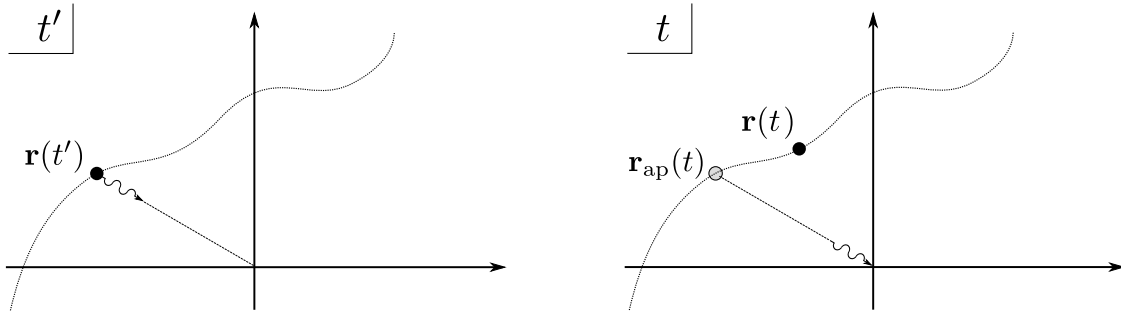
Se ve aquí que hay al menos dos problemas de interés. Dado un estado de cosas, uno puede preguntarse qué es lo que ve cierto observador. Y está también el problema inverso: dada una imagen del mundo, vista por cierto observador, ¿qué es lo que realmente pasó? Analizaremos los dos problemas en el caso de fuentes luz en movimiento.

Supondremos en todos los casos que el observador está en el origen. El primer problema podría plantearse así: conocida la trayectoria $\mathbf{r}(t)$ de una partícula, ¿cuál es la trayectoria aparente $\mathbf{r}_{\text{ap}}(t)$ que registra el observador? Es decir, a cada instante t , en qué posición ve el observador que *está* la partícula. Lo que aquí

llamamos \mathbf{r}_{ap} es lo mismo que la posición retardada \mathbf{r}_{ret} que aparecerá en los problemas de radiación, pero esta equivalencia ya no se mantiene con otras cantidades. No es lo mismo β_{ret} , la velocidad de la partícula en el tiempo retardado, que β_{ap} , la velocidad aparente de la imagen de la partícula.

El segundo problema puede ponerse en estos términos: conocida la posición aparente de una partícula $\mathbf{r}_{\text{ap}}(t)$, ¿cuál fue su trayectoria real $\mathbf{r}(t)$?

Gráficamente, el primer problema queda representado en la siguiente figura.



A tiempo t' la partícula está en la posición $\mathbf{r}(t')$ y emite luz en la dirección del observador. Esa luz llega un tiempo después, digamos, a tiempo t , cuando la partícula está en cualquier otro lado. La posición aparente de la partícula a tiempo t es, por definición, la posición a la que es vista en ese instante, es decir, es $\mathbf{r}_{\text{ap}}(t) = \mathbf{r}(t')$. La condición que fija el valor de t' al que hay que evaluar $\mathbf{r}(t)$ para obtener la posición aparente es que la luz haya recorrido la distancia que había entre la partícula y el observador en el período de tiempo que transcurre entre que la luz es emitida por la partícula y recibida por el observador. Esto, que parece una definición circular, da en realidad una ecuación para t' ,

$$c(t - t') = |\mathbf{r}(t')| \rightarrow t'(t). \quad (55)$$

Conocida la trayectoria real, esta ecuación da el tiempo de emisión t' como función del tiempo al que se está haciendo la observación. Conocido t' , la posición aparente de la partícula es $\mathbf{r}[t'(t)]$,

$$\mathbf{r}_{\text{ap}}(t) = \mathbf{r}[t'(t)]. \quad (56)$$

El segundo problema puede plantearse de manera similar. A tiempo t la partícula es vista en la posición $\mathbf{r}_{\text{ap}}(t)$, lo que quiere decir que la partícula estuvo ahí a un tiempo t' que es anterior a t . Lo que puede afirmarse es que en el intervalo de tiempo $t - t'$ la luz recorrió la distancia que la separaba del observador en el instante t' . Pero el observador tiene acceso inmediato a esa distancia porque es justamente $|\mathbf{r}_{\text{ap}}(t)|$,

$$c(t - t') = |\mathbf{r}_{\text{ap}}(t)|. \quad (57)$$

Esta relación permite encontrar el tiempo de recepción como función del tiempo de emisión,

$$c(t - t') = |\mathbf{r}_{\text{ap}}(t)| \rightarrow t(t'). \quad (58)$$

Ahora bien, dado t' , si uno evalúa $\mathbf{r}_{\text{ap}}[t(t')]$ lo que se obtiene es la posición real de la partícula a tiempo t' ,

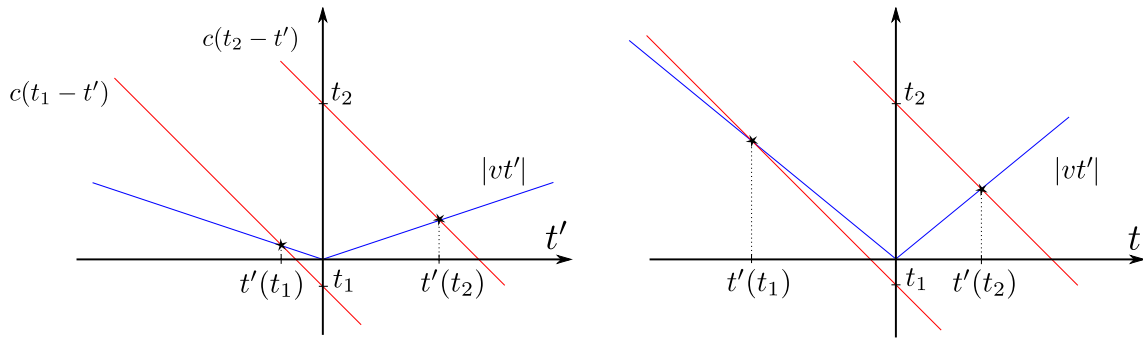
$$\mathbf{r}(t') = \mathbf{r}_{\text{ap}}[t(t')]. \quad (59)$$

Puesto en palabras, esto es decir que a tiempo t' la partícula está en la posición aparente en la que es observada a un tiempo posterior t , determinado por la ec. (58).

Las funciones (56) y (59) son las funciones buscadas en cada tipo de problema. Pueden ver que en realidad expresan lo mismo. Una relación es la inversa de la otra. No siempre es fácil resolver de manera explícita las ecuaciones que dan $t'(t)$, en un caso, o $t(t')$, en el otro. Numéricamente no suele haber dificultades si uno impone la condición de que las partículas emisoras se muevan a una velocidad menor que c , porque entonces la solución, si existe, es única*. Es algo que ustedes pueden demostrar. Si la velocidad de la partícula es muy próxima a c , la resolución numérica también se vuelve complicada. Para ver el origen de la dificultad consideremos un caso muy simple, que puede resolverse exactamente. Una partícula viaja sobre el eje x y pasa por el origen en $t = 0$. La ecuación que determina $t'(t)$ es

$$c(t - t') = |\mathbf{r}(t')| = |vt'|. \quad (60)$$

Gráficamente, esta ecuación queda representada en la figura de abajo.



La figura de la izquierda corresponde a una velocidad v no muy próxima c . Se han tomado dos tiempos de observación, t_1 y t_2 , el primero anterior y el segundo posterior al paso de la partícula por el origen. Los tiempos retardados son $t'(t_1)$ y $t'(t_2)$. Resolver numéricamente cada intersección es simple porque las rectas se cruzan con bastante ángulo entre sí. En la figura de la derecha se ha tomado v próximo a c . Una de las intersecciones sigue siendo fácil de resolver numérica o gráficamente, pero la otra intersección es entre rectas que corren casi paralelas. Este caso es complicado. Un pequeño desplazamiento de una de las rectas, o el propio grosor de las líneas en el dibujo pueden generar mucho error.

Pueden deducirse algunas consecuencias interesantes respecto de la velocidad aparente. La velocidad aparente es la velocidad a la que se mueve la imagen, $d\mathbf{r}_{\text{ap}}(t)/dt$. Puede relacionarse con la velocidad real de la partícula en el tiempo retardado

$$\frac{d\mathbf{r}_{\text{ap}}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{r}[t'(t)]}{dt} = \dot{\mathbf{r}}[t'(t)] \frac{dt'(t)}{dt}. \quad (61)$$

*No siempre hay solución. Hay partículas que se acercan desde el infinito, con $v < c$, y que para un observador en el origen pueden aparecer de pronto. Para tiempos anteriores a cierto instante el observador en el origen no tiene señales de su existencia.

La última derivada puede calcularse diferenciando la relación $c(t - t') = |\mathbf{r}(t')|$,

$$c(dt - dt') = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t') \cdot \mathbf{r}(t')}{|\mathbf{r}(t')|} dt'. \quad (62)$$

Esto implica que

$$\frac{dt'(t)}{dt} = \frac{1}{1 - \boldsymbol{\beta}(t') \cdot \mathbf{n}(t')}, \quad (63)$$

donde

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{c}, \quad \mathbf{n} = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}. \quad (64)$$

Así definido, \mathbf{n} es el versor que apunta desde la partícula al observador. Finalmente,

$$\dot{\mathbf{r}}_{\text{ap}}(t) = \left[\frac{\dot{\mathbf{r}}}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}} \right]_{\text{ret}}. \quad (65)$$

El índice “ret” en el corchete significa que todas las cantidades deben ser evaluadas en $t'(t)$, el tiempo retardado. Si bien $|\dot{\mathbf{r}}| < c$, la velocidad aparente puede ser arbitrariamente mayor que c cuando $\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n} > 0$, es decir, cuando la partícula se acerca al observador. Para una partícula que se acerca directamente al observador, $\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n} = |\boldsymbol{\beta}|$ y entonces

$$\boldsymbol{\beta}_{\text{ap}} = \left[\frac{\boldsymbol{\beta}}{1 - |\boldsymbol{\beta}|} \right]_{\text{ret}}. \quad (66)$$

Para $|\boldsymbol{\beta}| > 1/2$ es $|\boldsymbol{\beta}_{\text{ap}}| > 1$. Si la partícula se aleja en línea directa del observador, $\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n} = -|\boldsymbol{\beta}|$ y

$$\boldsymbol{\beta}_{\text{ap}} = \left[\frac{\boldsymbol{\beta}}{1 + |\boldsymbol{\beta}|} \right]_{\text{ret}}. \quad (67)$$

La máxima velocidad aparente con la que puede alejarse es $c/2$. El colectivo relativista viene rápido pero no se va más.

Un caso muy simple de analizar es cuando $|\mathbf{r}(t)| = r$, es decir, un movimiento circular alrededor del origen. En ese caso la ecuación para el tiempo retardado es

$$c(t - t') = r \longrightarrow t'(t) = t - \frac{r}{c}. \quad (68)$$

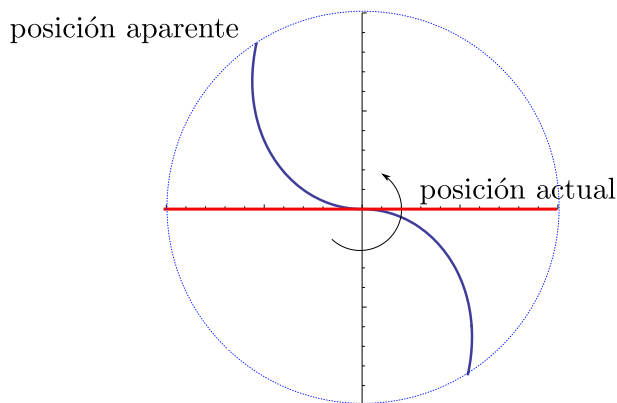
Aquí $dt'/dt = 1$, de manera que la velocidad aparente coincide con la velocidad retardada. Para un movimiento circular uniforme,

$$\mathbf{r}(t) = r \cos \omega t \hat{x} + r \sin \omega t \hat{y}, \quad (69)$$

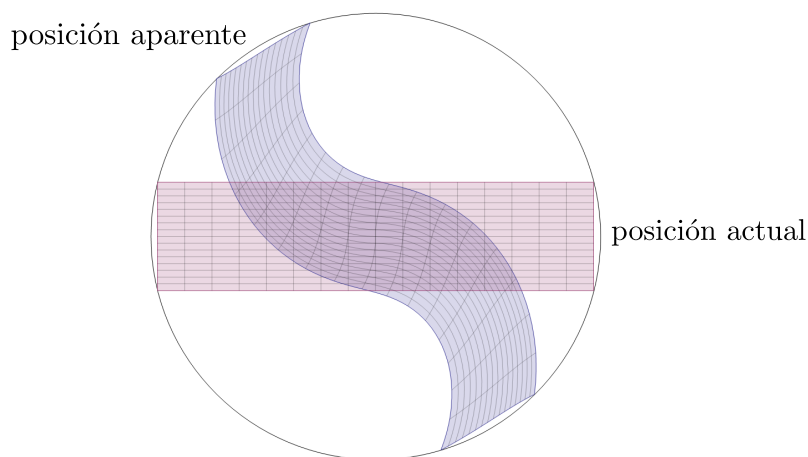
la posición aparente es

$$\mathbf{r}_{\text{ap}}(t) = \mathbf{r}(t - r/c) = r \cos \omega(t - r/c) \hat{x} + r \sin \omega(t - r/c) \hat{y}. \quad (70)$$

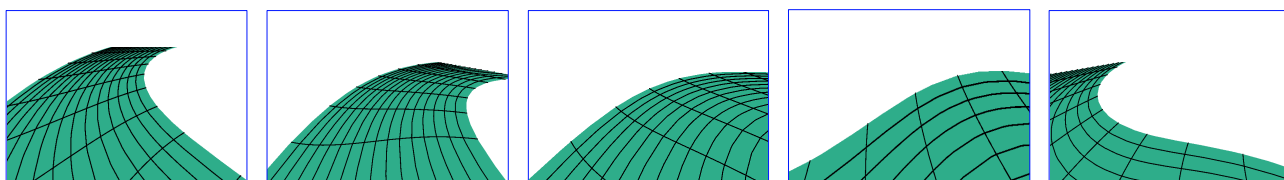
No es difícil obtener la imagen que se forma un observador en el origen de un segmento que gira en el plano xy con su centro en el origen.



La posición actual corresponde a la regla sobre el eje x . Un caso más realista sería el de una regla de ancho finito, como en la figura de abajo. Otra vez se ha graficado la posición aparente y la actual.



La imagen y la regla giran en contra de las agujas del reloj. Noten que la figura no es la imagen desde el punto de vista del observador, sino la imagen del objeto que se representa el observador. Ajustando el punto de vista a la posición del observador, se obtiene la imagen propiamente dicha. Abajo se ve una secuencia de imágenes desde el punto de vista del observador.



Para hacer estas imágenes ha sido necesario tener en cuenta también el efecto de la altura del observador, porque ya no está estrictamente en el origen.

¿Podría un observador en el centro de una galaxia espiral tener motivos para pensar que la forma espiralada es simplemente una distorsión debida a la velocidad finita de propagación de la luz? El diámetro de la

Vía Láctea es de unos 100 mil años luz y su período de rotación es de 50 millones de años, lo que da una velocidad máxima de alrededor $c/100$. Esto quiere decir que un observador en el centro de la galaxia tiene de ella una visión casi instantánea, ya que en 100 mil años es poco lo que cambia.

Resolvamos un problema inverso. Supongamos que un observador en el origen ve una regla recta girando alrededor de su centro en el plano xy . ¿Qué forma tendrá realmente la regla? Aquí el dato es

$$\mathbf{r}_{\text{ap}}(t) = r \cos \omega t \hat{x} + r \sin \omega t \hat{y}. \quad (71)$$

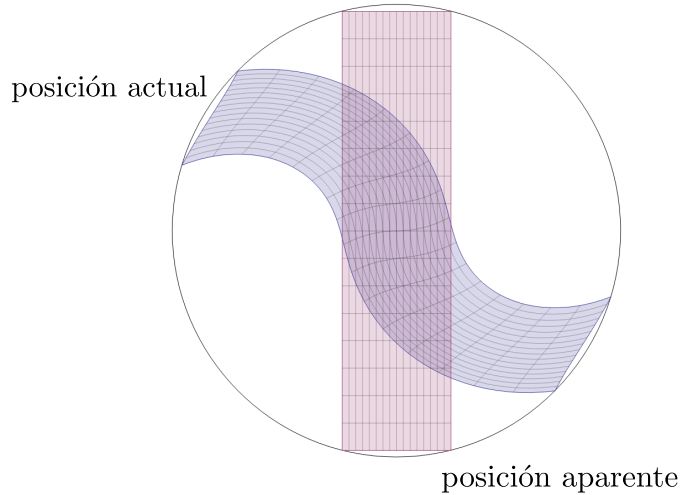
La ecuación que determina el tiempo de recepción es

$$c(t - t') = |\mathbf{r}_{\text{ap}}(t)| = r \rightarrow t = t' + \frac{r}{c}. \quad (72)$$

La posición real de la partícula a tiempo t' es

$$\mathbf{r}(t') = \mathbf{r}_{\text{ap}}(t' + r/c) = r \cos \omega(t' + r/c) \hat{x} + r \sin \omega(t' + r/c) \hat{y}. \quad (73)$$

Para una regla de ancho finito, el objeto real y su imagen aparente serían como en la figura.



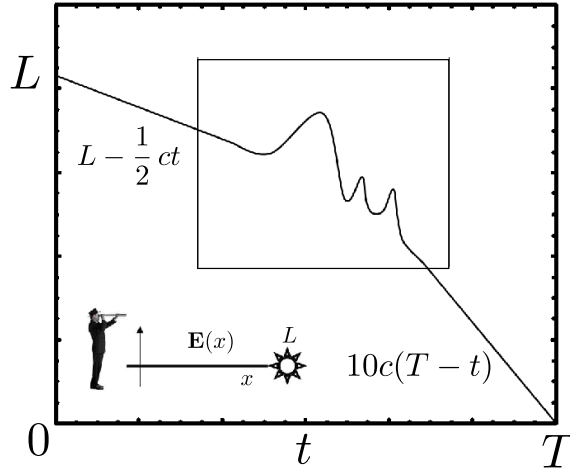
La imagen (la regla recta) gira en contra de las agujas del reloj. Noten que la regla real adelanta a la regla aparente.

La idea del tiempo retardado y de la posición real y aparente de una partícula es en el fondo muy simple. Sería raro que nunca se hubieran puesto a pensar en el hecho de que uno ve todas las cosas un poco en el pasado. Sólo hay un paso entre esa idea y la que lleva a formular con precisión la manera en que puede predecirse el aspecto de las cosas como serán observadas o la que permite reconstruir la evolución de las cosas tal como pasaron. Aparentemente no hay relatividad aquí, pero si se fijan de qué manera se deducen las leyes de transformación de Lorentz, verán que la velocidad finita de propagación juega un papel fundamental.

2.1 Problema 4

(a) En este problema hay una partícula que viaja en línea recta desde una fuente hacia un observador en el origen. La fuente está a una distancia L . La posición aparente de la partícula es conocida. Puede pensarse que

el observador en el origen ha grabado una película de la marcha de la partícula. Fuera de una región donde el movimiento es más complicado, en los tramos iniciales y finales de la trayectoria la posición aparente es una función lineal.



Lo primero que se pide averiguar es la posición real de la partícula como función del tiempo en las zonas en que su trayectoria aparente sigue la forma simple de una lineal. Habrá que resolver para t la ecuación

$$c(t - t') = |\mathbf{r}_{\text{ap}}(t)|. \quad (74)$$

En la zona inicial de la trayectoria

$$\mathbf{r}_{\text{ap}}(t) = x_{\text{ap}}(t) \hat{x} = \left(L - \frac{1}{2} ct \right) \hat{x}. \quad (75)$$

La partícula siempre se mueve en el semieje x positivo, de manera $|\mathbf{r}_{\text{ap}}(t)| = x_{\text{ap}}(t)$. Así resulta

$$t(t') = \frac{2}{3} \left(t' + \frac{L}{c} \right). \quad (76)$$

La posición real en ese tramo de la trayectoria queda definida por

$$x(t') = x_{\text{ap}}[t(t')] = \frac{1}{3} (2L - ct'). \quad (77)$$

Vemos que al salir de la fuente la velocidad inicial aparente es $c/2$, mientras que la velocidad real es $c/3$. De manera similar, para el tramo final de la trayectoria

$$x(t') = \frac{10c}{11} (T - t'). \quad (78)$$

Así, aunque la velocidad final aparente de acercamiento es $10c$, la velocidad real es $10c/11$.

(b) Como ya conocemos la velocidad al comienzo y al final de la trayectoria, podemos calcular la energía de la partícula al salir de la fuente y al llegar al observador,

$$\mathcal{E}_i = mc^2 \gamma(\beta_i) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta_i^2}}, \quad \mathcal{E}_f = mc^2 \gamma(\beta_f) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta_f^2}}, \quad (79)$$

donde $\beta_i = 1/3$ y $\beta_f = 10/11$.

(c) Lo que se pide en el último ítem es encontrar el valor promedio del campo eléctrico entre la fuente y el observador. Esto es por definición

$$\langle E \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L dx E(x). \quad (80)$$

Ya se ve que esto apunta de alguna manera al cálculo del potencial o de la variación de energía de las partículas, porque lo que está escrito es el trabajo hecho por el campo eléctrico. La forma de relacionar esto con las cantidades conocidas es a través de la ecuación que da la variación de la energía de las partículas en el campo eléctrico,

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = q \mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (81)$$

Esto también puede escribirse así

$$d\mathcal{E} = q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}. \quad (82)$$

Integrando,

$$\mathcal{E}_f - \mathcal{E}_i = \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} q \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (83)$$

Como el campo es estático, puede derivarse de un potencial, y la integral es independiente del camino de integración. Para el problema unidimensional que estamos tratando queda

$$\mathcal{E}_f - \mathcal{E}_i = \int_0^L q E(x) \cdot dx. \quad (84)$$

Ahí está lo que queríamos calcular,

$$\langle E \rangle = \frac{\mathcal{E}_f - \mathcal{E}_i}{qL}. \quad (85)$$

2.2 Problema 5

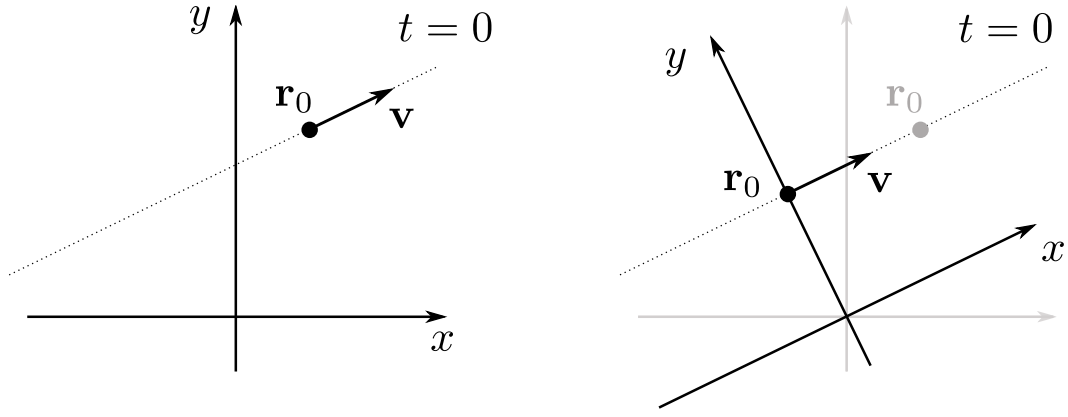
En este problema se trata el caso de partículas que se mueven a velocidad constante

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}t + \mathbf{r}_0. \quad (86)$$

La cuestión central es encontrar la posición aparente de las partículas.

■ El primer método que se propone es el que ya hemos visto. Como muestra la figura de abajo, eligiendo convenientemente el origen del tiempo y la orientación de los ejes, siempre podemos escribir la trayectoria de las partículas en la forma

$$\mathbf{r}(t) = vt \hat{x} + y \hat{y}. \quad (87)$$



A la izquierda están los ejes originales. La figura de la derecha muestra cómo elegir los nuevos ejes, con la simplificación adicional (sólo a los efectos de poder hacer mejor el dibujo) de que todo ocurre en el plano xy . Las nuevas variables siguen siendo representadas con las mismas letras que las originales. El dato importante en las trayectorias no es tanto el \mathbf{r}_0 de la figura de la izquierda, sino la mínima distancia de acercamiento al origen, el \mathbf{r}_0 en la figura de la derecha. Este \mathbf{r}_0 es lo que llamaríamos el parámetro de impacto. Hay que notar que lo que no podemos tocar es la posición del origen. Mejor dicho, si elegimos otro origen para hacer más simple la ecuación de la trayectoria, también tenemos que desplazar la posición del observador. No se gana nada con eso. La partícula y el observador siempre tienen que guardar la misma posición relativa. Al final del problema podemos ver cómo volver al problema original de una trayectoria dada por (86).

Entonces, volviendo al problema de la posición aparente, la ecuación para el tiempo retardado es

$$c(t - t') = |\mathbf{r}(t')| = |vt' \hat{x} + y \hat{y}|. \quad (88)$$

Elevando al cuadrado y operando un poco se llega a la siguiente ecuación cuadrática para t' ,

$$t'^2 - 2\gamma^2 t t' + \gamma^2 \left(t^2 - \frac{y^2}{c^2} \right) = 0. \quad (89)$$

La solución es

$$t' = \gamma \left[\gamma t \pm \frac{1}{c} \sqrt{(\gamma v t)^2 + y^2} \right]. \quad (90)$$

Si $|\mathbf{v}| < c$, entonces $\gamma > 1$ y la solución obtenida con el signo positivo delante de la raíz corresponde a un tiempo mayor que t . Esta solución es el instante futuro al que la luz emitida por el observador a tiempo t llega a la partícula. Esta solución aparece al tomar el cuadrado de la ecuación original, lo que permite que sea t' tanto mayor como menor a t . La solución buscada para $|\mathbf{v}| < c$ es entonces la que corresponde al signo menos frente a la raíz,

$$t'(t) = \gamma \left[\gamma t - \frac{1}{c} \sqrt{(\gamma v t)^2 + y^2} \right]. \quad (91)$$

La trayectoria aparente de la partícula es

$$\mathbf{r}_{\text{ap}}(t) = \mathbf{r}[t'(t)] = x_{\text{ap}}(t) \hat{x} + y \hat{y}, \quad (92)$$

donde

$$\begin{aligned}
 x_{\text{ap}}(t) &= vt'(t) = v\gamma \left[\gamma t - \frac{1}{c} \sqrt{(\gamma vt)^2 + y^2} \right] \\
 &= \gamma \left[\gamma x(t) - \beta \sqrt{\gamma^2 x(t)^2 + y^2} \right].
 \end{aligned} \tag{93}$$

No es difícil generalizar esta ecuación al caso en que la trayectoria es (86). Siempre que uno quiere generalizar la forma particular de un resultado que involucra vectores, lo que hay que hacer es tomar cada elemento en las ecuaciones y expresarlo en una manera que no haga referencia a ningún sistema particular de coordenadas. Por ejemplo, la coordenada y con la que hemos trabajado es la componente del vector $\mathbf{r}(t)$ perpendicular a \mathbf{v} . Dicho así, la orientación de los ejes no interviene para nada. El valor de y es constante y, en especial, es igual a la componente perpendicular a \mathbf{v} del vector \mathbf{r}_0 , que se obtiene restando de \mathbf{r}_0 su proyección en la dirección de \mathbf{v} . En el caso general habrá que hacer los reemplazos

$$\begin{aligned}
 y \hat{y} &\longrightarrow \mathbf{r}_{0\perp} = \mathbf{r}_0 - \frac{(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v})}{v^2} \mathbf{v}, \\
 y^2 &\longrightarrow r_0^2 - \frac{(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v})^2}{v^2}.
 \end{aligned} \tag{94}$$

La otra cosa que es especial en la elección (87) es el origen del tiempo. El instante inicial corresponde al mínimo acercamiento de la partícula al origen. En el caso general (86), el tiempo al que ocurre el mínimo acercamiento es

$$t_0 = -\frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}}{v^2}. \tag{95}$$

Esto se puede ver gráficamente o de manera directa buscando el único extremo de la función $|\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t|$. Entonces, para generalizar nuestros resultados también hay que hacer la sustitución

$$t \longrightarrow t - t_0 = t + \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}}{v^2}. \tag{96}$$

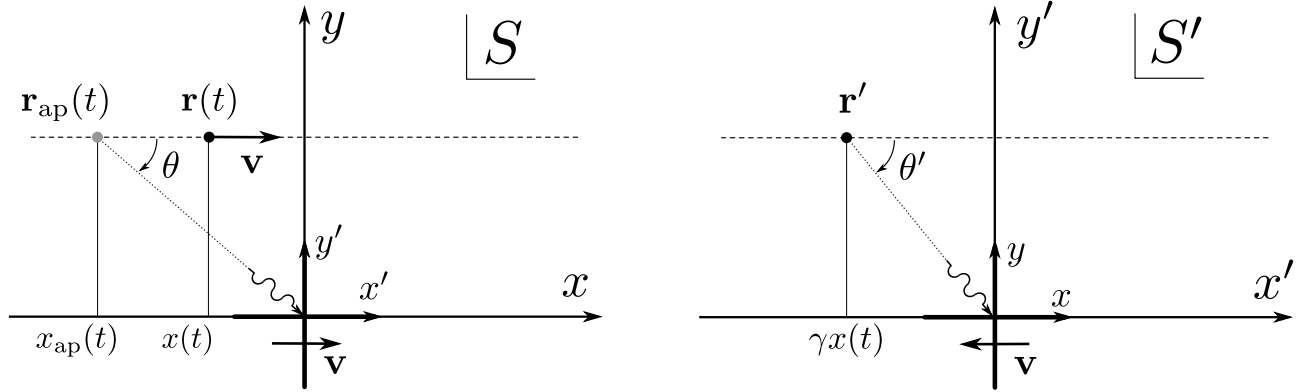
Finalmente, la generalización de (92) a una trayectoria de la forma $\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}t + \mathbf{r}_0$ es

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_{\text{ap}}(t) &= \gamma \left[\gamma (t - t_0) - \frac{1}{c} \sqrt{(\gamma v)^2 (t - t_0)^2 + |\mathbf{r}_{0\perp}|^2} \right] \mathbf{v} + \mathbf{r}_{0\perp} \\
 &= \gamma \left[\gamma \left(t + \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}}{v^2} \right) - \frac{1}{c} \sqrt{(\gamma v)^2 \left(t + \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}}{v^2} \right)^2 + r_0^2 - \frac{(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v})^2}{v^2}} \right] \mathbf{v} + \mathbf{r}_0 - \frac{(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v})}{v^2} \mathbf{v}.
 \end{aligned} \tag{97}$$

Definiendo $\mathbf{r}_{\parallel} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{v}(t - t_0)$, se puede escribir este resultado en una forma más compacta,

$$\mathbf{r}_{\text{ap}}(t) = \gamma \left[\gamma \mathbf{r}_{\parallel}(t) - \frac{\mathbf{v}}{c} \sqrt{|\gamma \mathbf{r}_{\parallel}(t)|^2 + |\mathbf{r}_{0\perp}|^2} \right] + \mathbf{r}_{0\perp}. \tag{98}$$

■ El segundo método para encontrar la posición aparente de partículas que se mueven a velocidad constante es a través de las fórmulas de aberración relativista. La idea es la siguiente: como muestra la figura de la izquierda, a tiempo t , al origen llega luz emitida por la partícula en movimiento. Esa luz llega formando un cierto ángulo θ con el eje x .



La intersección de la línea de visión con la recta $\mathbf{r} = y \hat{y}$ da la posición aparente de la partícula a tiempo t ,

$$x_{\text{ap}}(t) = -y \cot \theta. \quad (99)$$

El signo está de acuerdo con la definición hecha de los ángulos. Podemos imaginar un sistema S' que se mueve con la partícula y cuyo origen coincide con el observador en el instante t de S (figura de la derecha). Es importante notar que esta coincidencia de los orígenes es simultánea con la llegada de la luz en los dos sistemas, porque todo ocurre en un mismo punto del espacio. La llegada de la luz al observador puede analizarse en el sistema que se mueve con la fuente. Como la partícula tiene una posición constante \mathbf{r}' respecto del origen de S' , en ese sistema no tiene ninguna importancia hablar de tiempo retardado refiriéndose a la partícula, porque no hay nada relacionado con ella que dependa del tiempo. En S' , el ángulo θ' es fácil de calcular: la altura y' coincide con y , pero la distancia horizontal entre el origen y la partícula es γ veces la que se mide en S , debido a la contracción de Lorentz. Así,

$$\cos \theta' = -\frac{\gamma x(t)}{r'(t)}, \quad \sin \theta' = \frac{y}{r'(t)}. \quad (100)$$

donde

$$r'(t) = |\mathbf{r}'| = \sqrt{\gamma^2 x(t)^2 + y^2}. \quad (101)$$

De acuerdo a la forma de definir el ángulo θ' , de nuevo es necesario el signo menos en la expresión del $\cos \theta'$. La ley de transformación (6) reescrita para transformar ángulos de S' a S es

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta'}{\gamma (\cos \theta' + \beta)}. \quad (102)$$

Luego,

$$\cot \theta = \frac{\gamma}{y} \left[-\gamma x(t) + \beta r'(t) \right]. \quad (103)$$

En definitiva, aplicando (99) y la definición de $r'(t)$,

$$x_{\text{ap}}(t) = \gamma \left[\gamma x(t) - \beta \sqrt{\gamma^2 x(t)^2 + y^2} \right]. \quad (104)$$

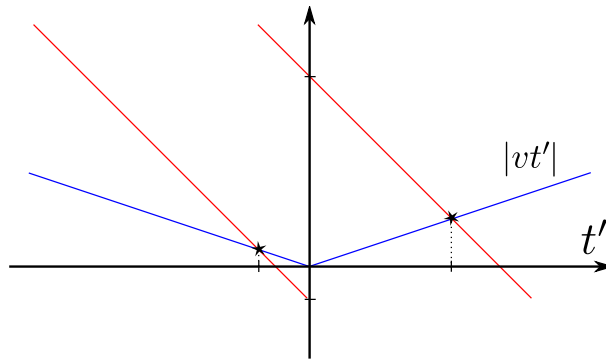
Es el mismo resultado de antes, ec. (93). Lo interesante de este método es que en ningún momento se calculó el tiempo retardado. Todo sale a partir de las transformaciones de Lorentz. Además de ser un método muy elegante, pone en evidencia la estrecha conexión que ha de haber entre las transformaciones de Lorentz y la velocidad finita de propagación de la luz.

Ahora siguen varias aplicaciones.

(a) El primer ítem del problema propone el caso de una partícula que se mueve sobre el eje x y pasa por el origen en $t = 0$. Podemos usar el resultado (92) con $y = 0$. Para fijar ideas tomemos $v > 0$; resulta

$$x_{\text{ap}}(t) = v\gamma^2 (t - \beta|t|) = \begin{cases} \frac{vt}{1 - \beta}, & \text{si } t \leq 0, \\ \frac{vt}{1 + \beta}, & \text{si } t \geq 0. \end{cases} \quad (105)$$

El cambio de comportamiento cuando la partícula pasa por el origen es claro también al resolver el problema gráficamente. Para encontrar el valor de t' uno tiene que buscar el cruce entre las gráficas de $|x(t')| = v|t'|$ y $c(t - t')$, como en la figura de abajo. Para $t < 0$, la intersección ocurre en rama de la izquierda de la función $v|t'|$, mientras que para $t > 0$, ocurre en la rama de la derecha. Y, además, como $v < c$ las gráficas se intersectan en un solo valor de t' , y ese valor es siempre menor que t .



Así, cuando $t < 0$ habrá que resolver

$$c(t - t') = -vt' \rightarrow t' = \frac{t}{1 - \beta}, \quad (106)$$

que da a su vez

$$x_{\text{ap}}(t) = \frac{vt}{1 - \beta}, \quad t \leq 0. \quad (107)$$

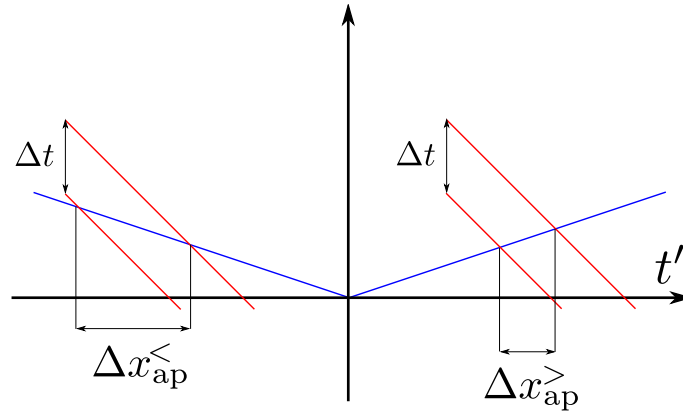
En el otro caso, hay que resolver

$$c(t - t') = vt' \rightarrow t' = \frac{t}{1 + \beta}, \quad (108)$$

lo que implica

$$x_{\text{ap}}(t) = \frac{vt}{1 + \beta}, \quad t \geq 0. \quad (109)$$

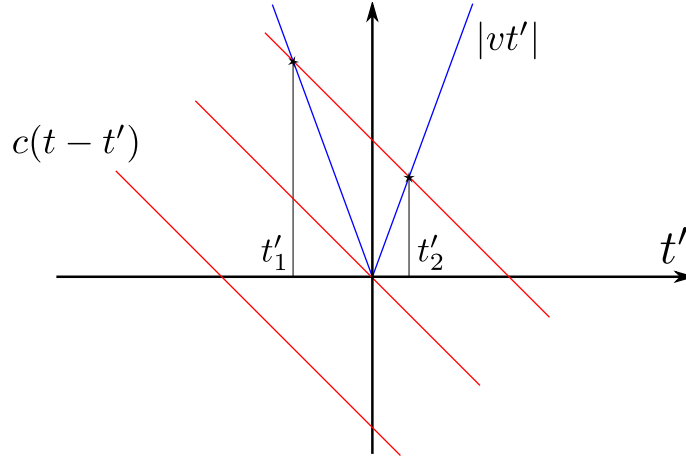
En definitiva se obtiene el resultado (105). El cambio de velocidad aparente puede analizarse sobre los propios gráficos. En la figura siguiente aparece la solución gráfica para dos pares de valores de t .



Mientras la partícula está a la izquierda del origen se realizan dos observaciones, separadas por un intervalo de tiempo Δt . La posición aparente de la partícula cambia en una cantidad $\Delta x_{\text{ap}}^<$. Otras dos observaciones son hechas una vez que la partícula ha pasado por el origen. El intervalo de tiempo entre las observaciones es de nuevo Δt , pero la distancia que se ha movido la imagen de la partícula es $\Delta x_{\text{ap}}^>$, y es menor que $\Delta x_{\text{ap}}^<$. Este resultado gráfico expresa cualitativamente la diferencia entre las velocidades aparentes de acercamiento y alejamiento. Ustedes pueden ver que cuando la velocidad de la partícula tiende a c , la velocidad la separación $\Delta x_{\text{ap}}^<$ a la izquierda del origen crece sin límite, y que la separación $\Delta x_{\text{ap}}^>$ a la derecha del origen tiende a $c\Delta t/2$. Ya habíamos encontrado estos resultados sobre la doble moral de las partículas relativistas; ver los párrafos que siguen a la ec. (61).

Ocurre un fenómeno singular si uno toma $\beta > 1$. Es fácil de analizar el caso de la partícula que se mueve sobre el eje x . No podemos usar directamente la fórmula (92) porque en la elección del signo de la raíz

entraba el haber supuesto $v < c$. Pero como el problema es unidimensional el método gráfico es inmediato. La figura de abajo es la solución gráfica de la ecuación $c(t - t') = |x(t')|$ para varios valores de t .



Como $v > c$, cuando $t < 0$ no hay intersección entre las gráficas de $v|t'|$ y de $c(t - t')$. La partícula es invisible para $t < 0$. Antes llega al origen la partícula que su imagen. Cuando $t > 0$, hay dos intersecciones, y las dos ocurren para $t' < t$. Una tiene lugar sobre la rama izquierda de la función $v|t'|$, es decir, a un tiempo t'_1 cuando la partícula aún no había pasado por el origen y se encontraba a la izquierda del observador. La otra intersección ocurre para un tiempo t'_2 mayor que cero, cuando la partícula se encuentra a la derecha del observador. Para $t > 0$ el observador ve dos imágenes de la partícula. Ustedes pueden demostrar que

$$t'_1(t) = -\frac{t}{\beta - 1}, \quad t'_2(t) = \frac{t}{1 + \beta}, \quad (110)$$

y que las posiciones de las imágenes son

$$x_{1\text{ap}}(t) = x[t'_1(t)] = -\frac{vt}{\beta - 1},$$

$$x_{2\text{ap}}(t) = x[t'_2(t)] = \frac{vt}{\beta + 1}, \quad (111)$$

siempre para $t > 0$. Para $t < 0$ no hay ninguna imagen de la partícula. La imagen $x_{1\text{ap}}$ está a la izquierda del observador y tiene velocidad aparente

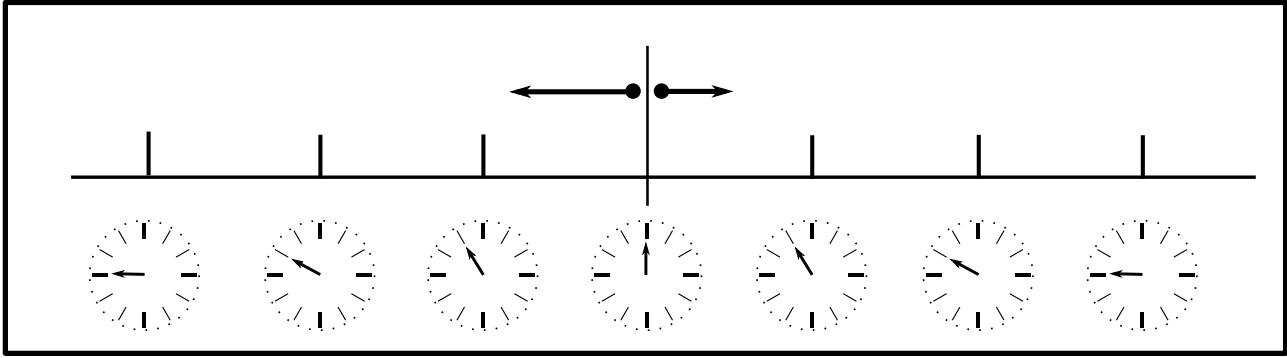
$$v_{1\text{ap}} = -\frac{v}{\beta - 1} < 0, \quad (112)$$

de forma que se aleja del observador, y no sólo eso, sino que lo hace con velocidad mayor que c . La imagen $x_{2\text{ap}}$ está a la derecha y tiene velocidad aparente

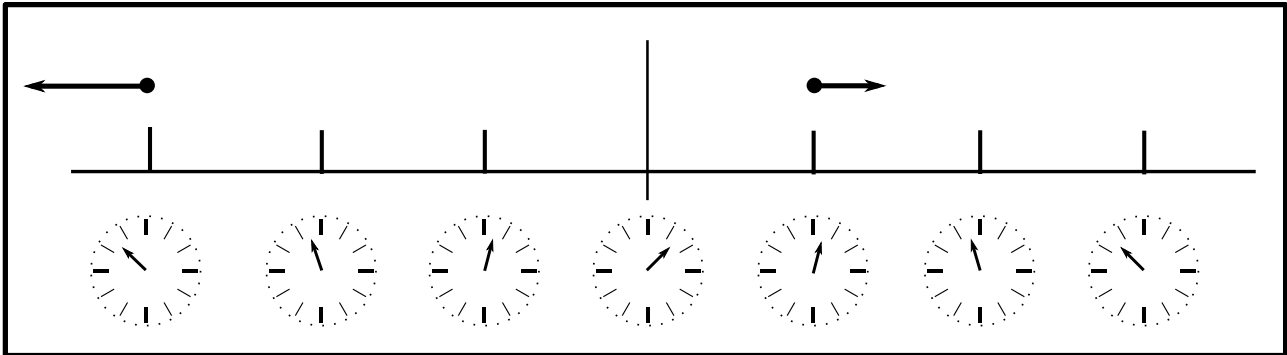
$$v_{2\text{ap}} = \frac{v}{\beta + 1} > 0, \quad (113)$$

de manera que también se aleja del observador. Más aún, puede mostrarse que la partícula se aleja con una velocidad que está entre $c/2$ y c . El observador se sentirá desconcertado al ver salir dos partículas de la

nada. Sin embargo, el carácter anómalo de la velocidad aparente de las partículas le dará una pista de lo que realmente ha sucedido. El observador sabe que si las partículas tuvieran una velocidad real menor que c , su velocidad máxima de alejamiento aparente sería $c/2$ [ver ec. (109)], que es algo que ninguna de las imágenes cumple. Otra anomalía difícil de ignorar es que la primera imagen parece viajar atrás en el tiempo, ya que $dt'_1/dt < 0$. El observador tendrá la impresión de que algo que se emitió desde el origen en $t = 0$ alcanza posiciones sobre el eje x negativo a un tiempo $t' < 0$, esto es, anterior al tiempo de emisión. Las dos figuras que siguen ilustran esta cuestión.



A la medianoche, un taquión pasa por el origen. La figura representa la imagen del mundo que tiene el observador en ese momento. Los relojes lejanos son vistos a una hora progresivamente más temprana. Las dos imágenes del taquión se alejan en sentidos contrarios.



Un tiempo después, el observador tiene esta otra visión del mundo. La imagen más veloz del taquión llega a uno de los relojes lejanos, pero lo hace a una hora que es aún anterior a la medianoche, es decir, antes de ser emitido desde el origen. Contrariamente, la imagen lenta del taquión siempre llega a los relojes lejanos después de que han dado las doce. A partir de las figuras: ¿cuánto vale v ?

(b) Este ítem trata sobre la longitud aparente de una regla que se mueve sobre el eje x . Dos partículas como las de la primera parte del ítem anterior pueden definir los extremos de la regla. Si

$$x_1(t) = vt - \frac{L}{2}, \quad x_2(t) = vt + \frac{L}{2}, \quad (114)$$

la regla tiene longitud L y su centro pasa por el origen en $t = 0$. La longitud aparente de la regla es la diferencia

$$L_{\text{ap}}(t) = x_{2\text{ap}}(t) - x_{1\text{ap}}(t). \quad (115)$$

Las fórmulas del ítem anterior pueden adaptarse inmediatamente al caso de estas dos partículas, basta reemplazar t por $t - t_0$, donde t_0 es el tiempo al que cada partícula pasa por el origen,

$$x_{1\text{ap}}(t) = \begin{cases} \frac{v(t - L/2v)}{1 - \beta}, & \text{si } t \leq L/2v, \\ \frac{v(t - L/2v)}{1 + \beta}, & \text{si } t \geq L/2v, \end{cases} \quad (116)$$

$$x_{2\text{ap}}(t) = \begin{cases} \frac{v(t + L/2v)}{1 - \beta}, & \text{si } t \leq -L/2v, \\ \frac{v(t + L/2v)}{1 + \beta}, & \text{si } t \geq -L/2v. \end{cases} \quad (117)$$

Cuando las posiciones aparentes de los dos extremos están a la izquierda del observador, la longitud aparente es constante y mayor que L ,

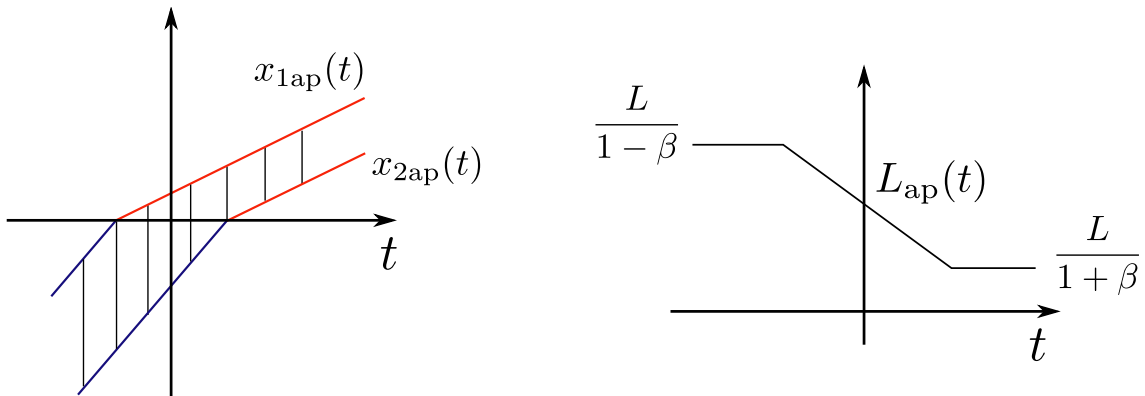
$$L_{\text{ap}}(t) = L_i = \frac{v(t + L/2v)}{1 - \beta} - \frac{v(t - L/2v)}{1 - \beta} = \frac{L}{1 - \beta}, \quad t < -L/2v. \quad (118)$$

Cuando las dos partículas se alejan del observador la longitud también es constante, pero menor que L ,

$$L_{\text{ap}}(t) = L_f = \frac{v(t + L/2v)}{1 + \beta} - \frac{v(t - L/2v)}{1 + \beta} = \frac{L}{1 + \beta}, \quad t > L/2c. \quad (119)$$

Para t entre $-L/2v$ y $L/2v$ la longitud aparente varía con el tiempo, porque los extremos tienen velocidades aparentes distintas. El extremo que ya pasó por el origen se aleja a una velocidad aparente $v/(1 + \beta)$, mientras que el otro se acerca con velocidad $v/(1 - \beta)$. Durante ese intervalo,

$$L_{\text{ap}}(t) = \frac{v(t + L/2v)}{1 + \beta} - \frac{v(t - L/2v)}{1 - \beta} = \frac{(L - 2\beta vt)}{1 - \beta^2}. \quad (120)$$



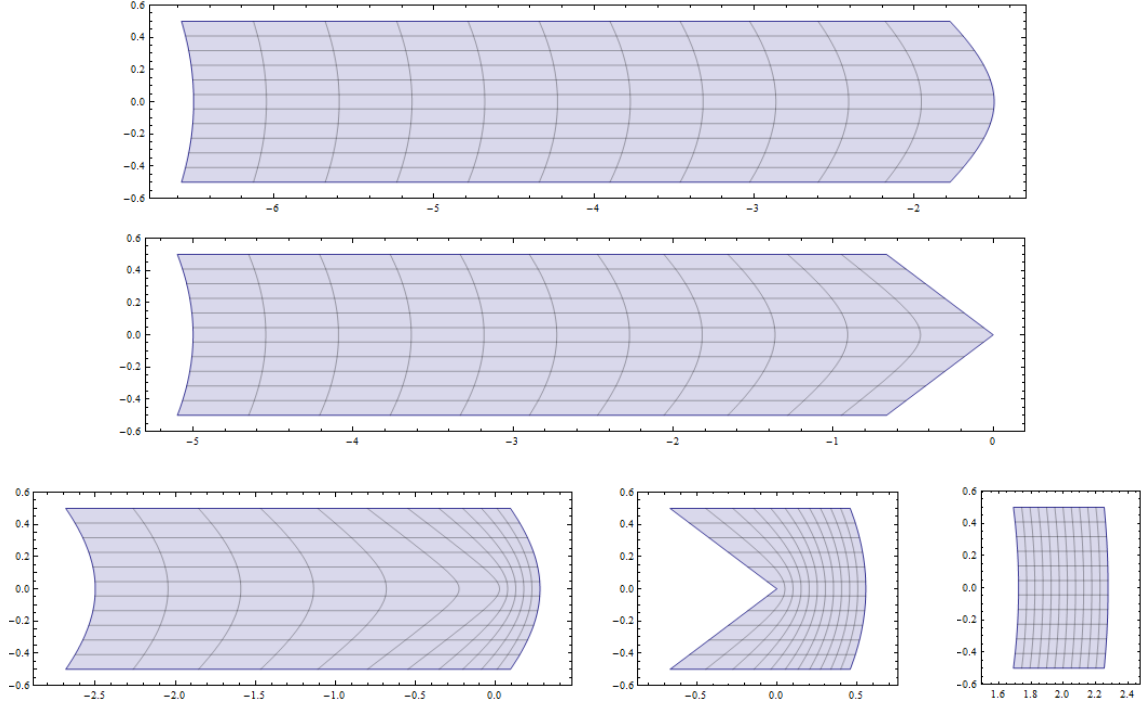
La longitud propia de la regla es $L_{\text{propia}} = \gamma L$. Comparando entre sí L_i , L_f y L_{propia} se ve que

$$L_f < L_{\text{propia}} < L_i, \quad (121)$$

ya que

$$\frac{1}{1+\beta} < \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} < \frac{1}{1-\beta}. \quad (122)$$

Esto significa que para el observador en el origen, en algún instante entre $-L/2v$ y $L/2v$ la longitud aparente de la regla es igual a la longitud propia. De todas maneras, aunque $L_{\text{ap}} = L_{\text{propia}}$ en ese instante, lo que verá es una regla deformada. Si en verdad hubiera una regla graduada entre las dos partículas, la parte de la escala a la izquierda del observador va a verse estirada, mientras que el tramo a la derecha estará comprimido. La figura de abajo muestra una regla cuadrada, antes, durante y después de su paso por el origen.



Esta secuencia muestra la forma aparente de una regla cuadrada que se mueve con velocidad $0.8c$ y cuyo centro pasa por el origen en $t = 0$. La forma de las marcas verticales de la escala se estudia en el ítem (c).

Hay que recordar una vez más que esta deformación no tiene que ver directamente con la contracción de Lorentz. Cualquier físico en los años anteriores a 1900, enterado de la velocidad finita de propagación de la luz, hubiera estado de acuerdo con los resultados que hemos obtenido para la longitud y forma aparente de la regla. Sin embargo, no habría entendido la referencia a la longitud propia que acabamos de hacer y hubiera llegado a un resultado erróneo si lo que se moviera fuera el observador y las partículas emisoras estuvieran en reposo.

(c) Ahora la regla se mueve perpendicular a su longitud, con su centro sobre el eje x y sus extremos en $y = \pm L/2$. Por regla aquí queremos decir un segmento sin ningún espesor. La forma aparente a distintos tiempos se obtiene graficando la función (93) para y entre $-L/2$ y $L/2$,

$$x_{\text{ap}}(y, t) = v\gamma \left[\gamma t - \frac{1}{c} \sqrt{(\gamma vt)^2 + y^2} \right]. \quad (123)$$

Como modelo de estas curvas sirven las marcas verticales de la regla en la figura de la página anterior. Notar que justo en $t = 0$

$$x_{\text{ap}}(y, t) = -\gamma\beta|y|. \quad (124)$$

En la figura de arriba esto se ve para cada marca vertical cuyo centro pasa por el origen. En cualquier otro instante, la ecuación que define la curva del segmento en cuestión puede ponerse en la siguiente forma

$$\left[\frac{x_{\text{ap}} - \gamma^2 vt}{(\gamma\beta)^2 ct} \right]^2 - \left[\frac{y}{\gamma\beta ct} \right]^2 = 1. \quad (125)$$

Así, estos segmentos adquieren la forma de la rama de una hipérbola. Pero su evolución no es del todo simple. El centro de la hipérbola no se mueve a velocidad constante, y el ángulo que forman las asíntotas también es una función del tiempo.

(d) Ahora lo que se mueve es una esfera. Pero esfera en su sistema propio, no en el sistema al que pertenece el observador. Si una esfera está en reposo en un sistema, en otros sistemas ya no tendrá forma esférica. Entonces, antes de poder averiguar la forma aparente que ve el observador en el origen de S , lo que tenemos que hacer es determinar cuál es en ese sistema la forma de la esfera. Ese no es el dato. El dato es que en su sistema propio la esfera es una esfera. Vamos a analizar el caso más sencillo, en el que el centro de la esfera pasa por el origen en $t = 0$. En su sistema propio S' la esfera está definida por

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = a^2. \quad (126)$$

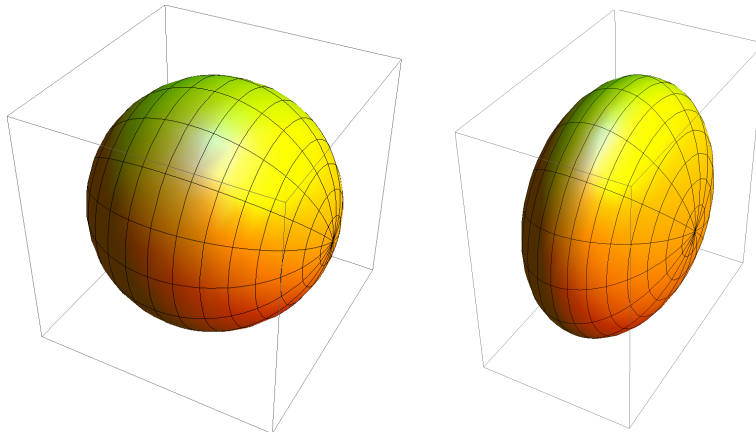
Para obtener la ecuación que define ese mismo conjunto de puntos en el sistema S al que pertenece el observador hay que escribir x' , y' y z' en términos de x , y , z y t ,

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (127)$$

Con esto resulta

$$\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2 = a^2. \quad (128)$$

Esta es la ecuación de un elipsoide de revolución que se mueve a velocidad $\mathbf{v} = v \hat{x}$ y que tiene su eje de simetría sobre el eje x . Es un elipsoide oblato, es decir, achatado en los polos. En las direcciones y y z sus semiesjes son iguales a a , pero en la dirección x el semieje es a/γ . La figura de abajo muestra la esfera en su sistema propio y en un sistema en que se mueve con velocidad $v = 0.8c$.



Este resultado era esperable debido a la contracción de Lorentz. Lo que hemos determinado con la ec. (128) no es la forma aparente vista por alguno de los observadores en S , sino el conjunto de puntos que ocupa la esfera del sistema S' en un instante particular t en el sistema S . Esta imagen nunca es obtenida por un sólo observador en un instante dado, sino que es una reconstrucción del estado de cosas que podrá hacerse recién cuando los observadores en S comparen sus mediciones individuales un tiempo después.

Lo importante es que ahora podemos olvidarnos de S' y decir que en S hay un conjunto de puntos que satisfacen la ecuación (128). El problema es averiguar cuál es la imagen aparente de ese conjunto según un observador en una posición fija en S . Podemos considerar que el observador está en el origen y generalizar la ecuación (128) para el caso en que el elipsoide no pasa directamente por el origen. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que en $t = 0$ el centro del elipsoide está en $x = z = 0$ y en $y = d$. Esta será la mínima distancia entre el centro del elipsoide y origen del sistema S . La ecuación del elipsoide queda dada por

$$\gamma^2(x - vt)^2 + (y - d)^2 + z^2 = a^2. \quad (129)$$

Los gráficos que siguen fueron hechos en el *Mathematica*. Lo que se hizo fue escribir en forma paramétrica las ecuaciones que definen la imagen. Si uno sabe determinar la imagen de un punto genérico, entonces puede determinar la imagen de cualquier objeto. El elipsoide real de la ec. (129) puede parametrizarse con los ángulos φ y θ de esféricas,

$$\begin{cases} x(t, \varphi, \theta) = vt + \frac{a}{\gamma} \cos \varphi \sin \theta, \\ y(\varphi, \theta) = d + a \sin \varphi \sin \theta, \\ z(\varphi, \theta) = a \cos \theta. \end{cases} \quad (130)$$

El conjunto de puntos de la imagen aparente sale de generalizar levemente la ec. (93), aplicándola a cada punto del elipsoide. Las coordenadas y y z se mantienen, pero la coordenada x está dada por la ec. (93),

$$\begin{cases} x_{\text{ap}}(t, \varphi, \theta) = \gamma \left[\gamma x(t, \varphi, \theta) - \beta \sqrt{\gamma^2 x(t, \varphi, \theta)^2 + y(\varphi, \theta)^2 + z(\varphi, \theta)^2} \right], \\ y_{\text{ap}}(\varphi, \theta) = y(\varphi, \theta), \\ z_{\text{ap}}(\varphi, \theta) = z(\varphi, \theta). \end{cases} \quad (131)$$

Estas funciones definen el objeto aparente que es observado desde el origen. En la notación usada por el *Mathematica* es

$$\gamma[v_]:=1/\sqrt{1-v^2};$$

$$x[t_,\varphi_,\theta_,\gamma[v_]]:=v\,t+\frac{1}{\gamma[v_]} \cos[\varphi] \sin[\theta];$$

$$y[\varphi_,\theta_,\gamma[v_]]:=d+\sin[\varphi] \sin[\theta];$$

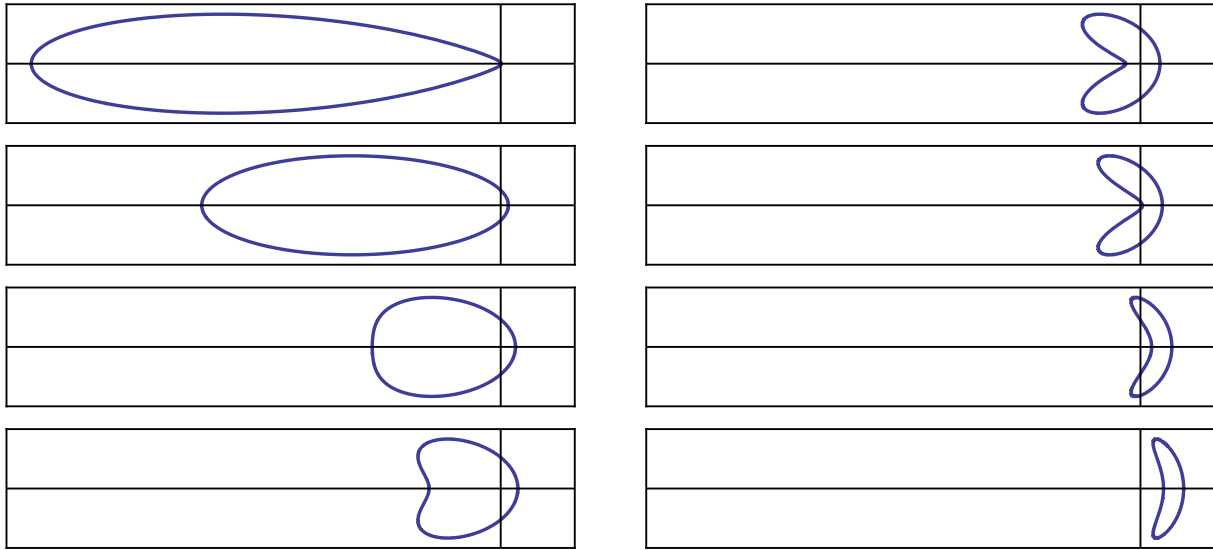
$$z[\theta_]:= \cos[\theta];$$

$xap[t_, \varphi_, \theta_, d_, v_] :=$

$$\gamma[v] \left(\gamma[v] x[t, \varphi, \theta, v] - v \sqrt{(\gamma[v] x[t, \varphi, \theta, v])^2 + y[\varphi, \theta, d]^2 + z[\theta]^2} \right)$$

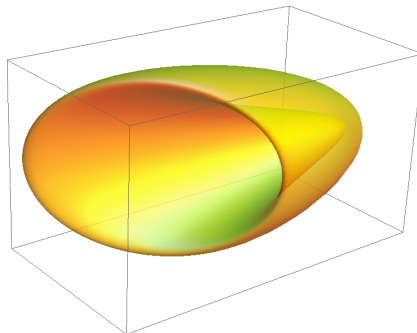
Así como están escritas pueden graficarse con el comando `ParametricPlot3D`. Existe en el *Mathematica* el comando `ViewVector` que permite fijar el punto y la dirección observación.

Si el centro del elipsoide pasa por el origen ($d = 0$), por simetría de revolución las secciones de la imagen son una descripción suficiente y no hace falta hacer un gráfico tridimensional. La deformación es análoga a la que sufre la regla de los ítems anteriores. La figura es para $v = 0.8c$.



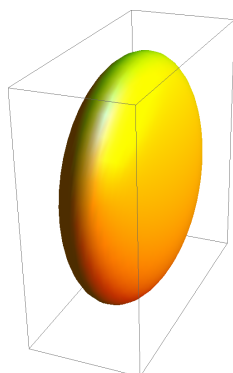
Noten que el elipsoide real está achatado en la dirección de movimiento, pero la distorsión provocada por el retardo, cuando el elipsoide se encuentra a la izquierda del origen, tiene el efecto contrario. El efecto de la contracción de Lorentz que ha hecho de la esfera un elipsoide queda ampliamente compensado por la elongación inducida por el retardo.

La figura de abajo muestra un ejemplo de la forma extremadamente distorsionada que puede asumir el elipsoide. La mínima distancia de acercamiento del centro del elipsoide al origen es $d = a/5$, y $v = 0.99c$.

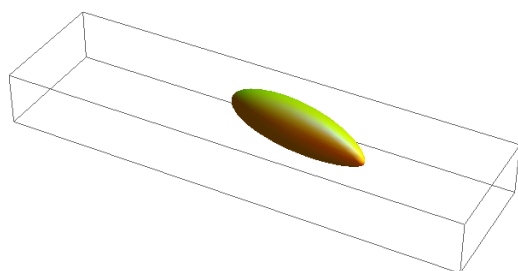
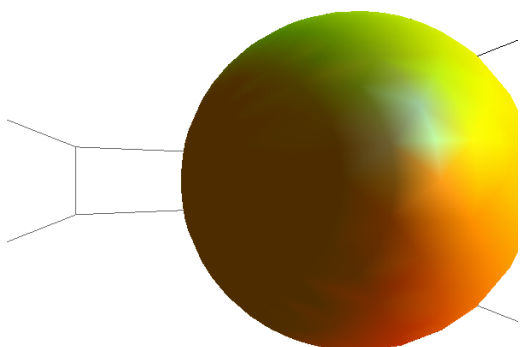
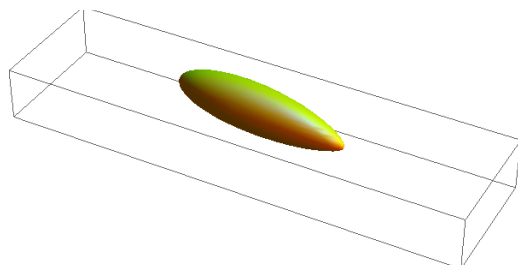
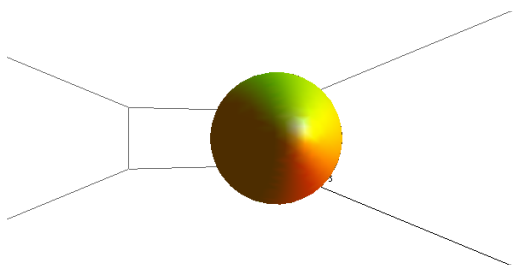
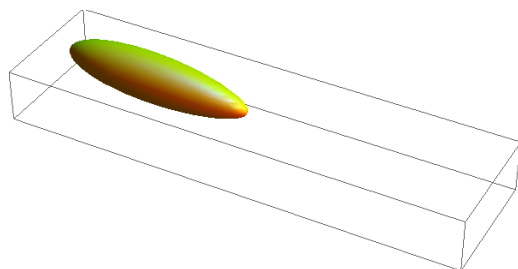
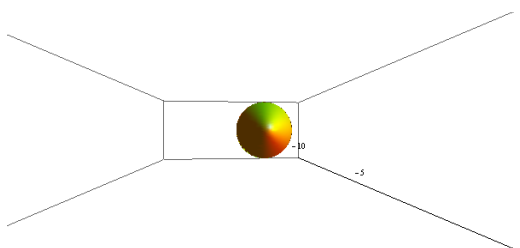


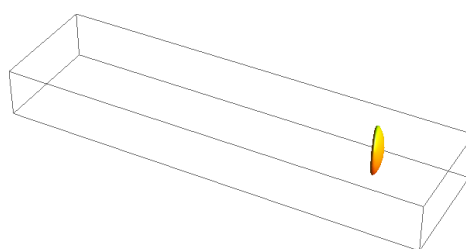
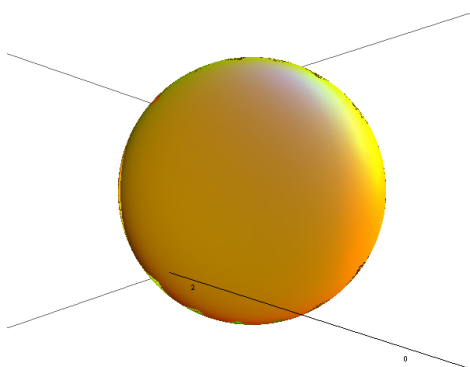
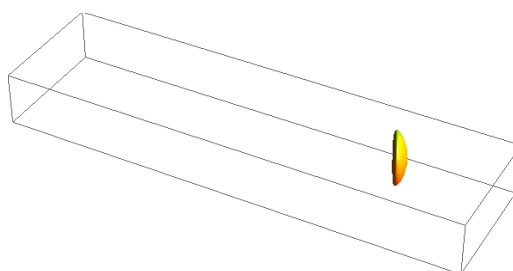
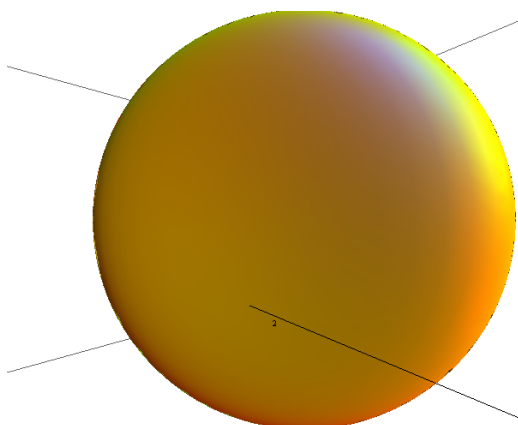
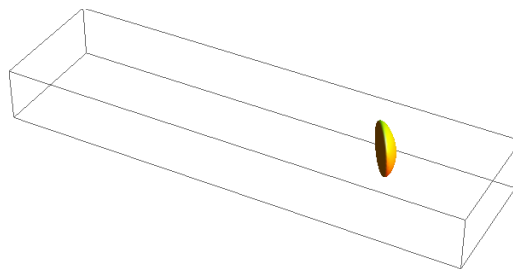
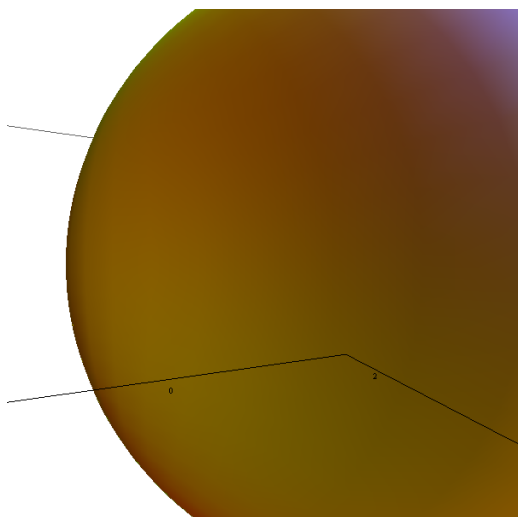
Esta no es la visión propiamente dicha del observador, sino el objeto (considerado estático) que genera la imagen que él ve.

La última secuencia de figuras corresponde a una esfera (en su sistema propio) que se mueve respecto del observador a una velocidad $v = 0.9c$. En el sistema del observador la esfera es un elipsoide.



La relación de aspecto entre sus ejes es $\gamma(0.9c) \approx 2.3$. En las figuras que siguen se muestra, a la izquierda, la imagen desde el punto de vista personal del observador, y a la derecha, la representación del objeto (considerado estático) que genera esa imagen. El centro del elipsoide pasa a una distancia mínima del observador igual a $1.1a$.





¿Cuál es la característica notable de estas imágenes?

Para terminar, digamos que sólo hemos determinado la transformación geométrica entre el objeto real y el aparente. Los efectos del movimiento no terminan ahí. La intensidad y el color de la luz pueden cambiar de manera drástica. La esfera acercándose tendrá un color corrido hacia el azul, y hacia el rojo cuando se

aleja. También vimos en el primer ejercicio cómo a velocidades muy altas la luz se concentra delante de la fuente. Si la esfera se acerca en línea más o menos directa, la intensidad recibida por el observador será muy alta, pero si pasa sin acercarse mucho al origen, será casi invisible. Al respecto pueden consultar el paper <http://www.spacetime travel.org/sphere/sphere.pdf>.

En el sitio <http://www.spacetime travel.org/tuebingen/tuebingen.html> pueden bajarse varias películas que simulan un paseo relativista, aunque sin incluir el cambio de color y de intensidad.