

## Resumen

Las redes de Kolmogorov-Arnold (KANs) son una novedosa herramienta para el modelado de procesos físicos a partir de datos empíricos. En este trabajo, presentamos un modelo dinámico para la presión en el sistema respiratorio aviar, obtenido a partir de entrenar una KAN con mediciones de la respiración en canarios (*Serinus canaria*). Además de presentar órbitas periódicas y estables en el espacio de fases, el sistema aprendido por la red replica con precisión la dinámica respiratoria y permite predecir correctamente la actividad electromiográfica durante la espiración. Esto posiciona a KAN como una herramienta prometedora para el modelado de sistemas dinámicos complejos.

## Teorema de representación de Kolmogorov-Arnold

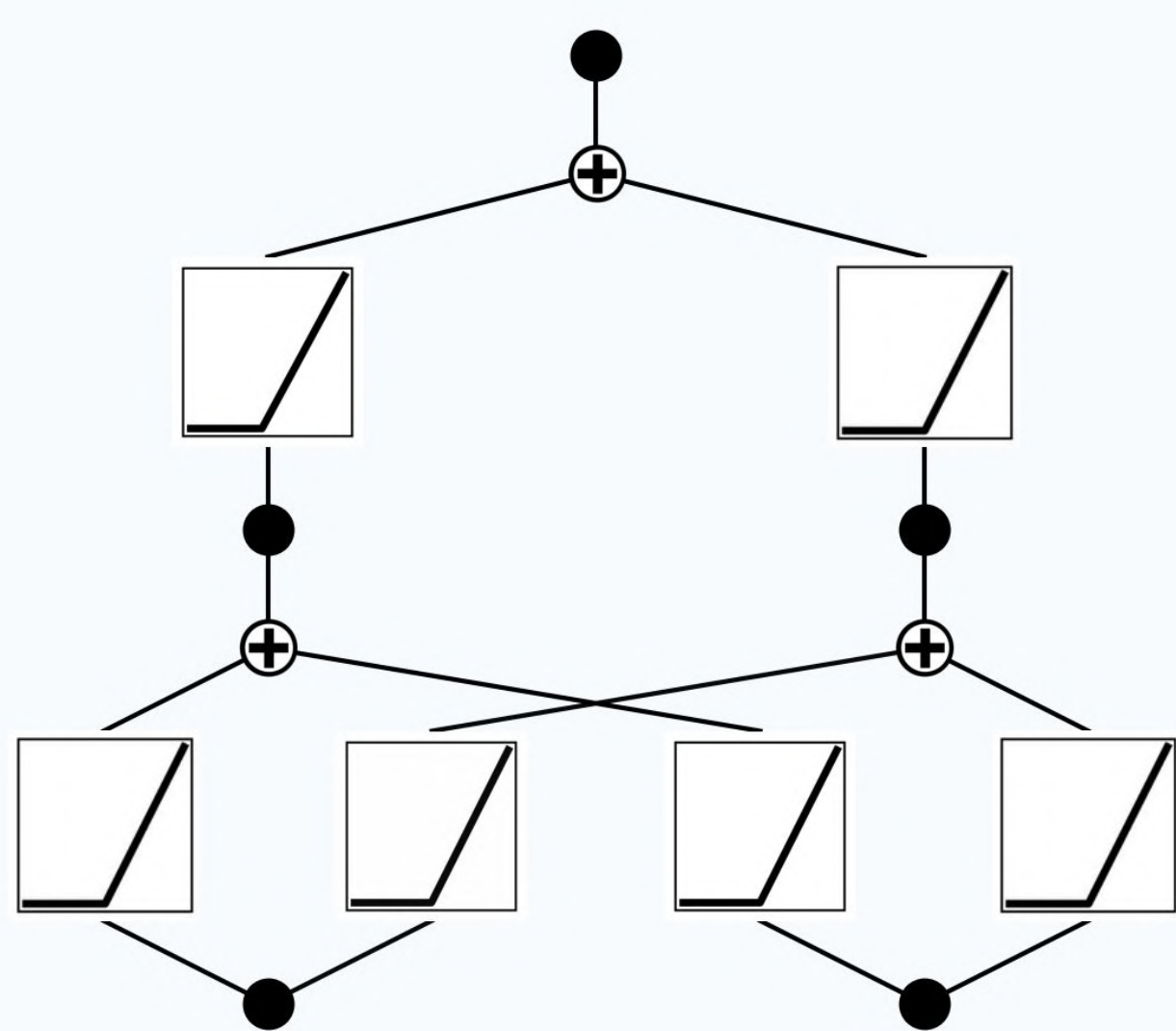
**Teorema:** sea  $f : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Entonces existen funciones continuas  $\Phi_q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\phi_{q,p} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tales que:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{q=0}^{2n} \Phi_q \left( \sum_{p=1}^n \phi_{q,p}(x_p) \right). \quad (1)$$

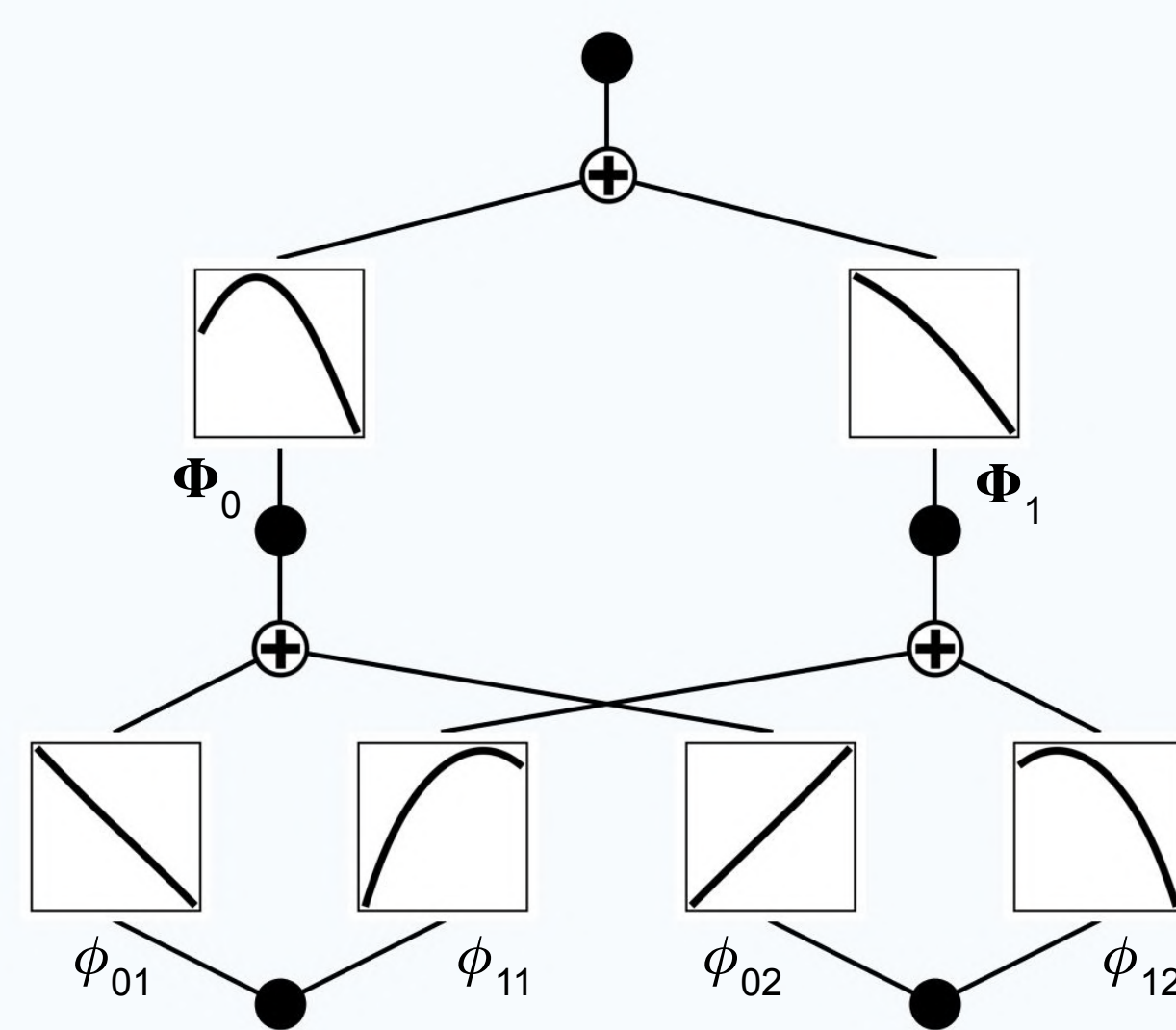
**Ejemplo:**  $f(x, y) = xy = \frac{1}{2}(x+y)^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$

## Redes de Kolmogorov-Arnold

### MLP



### KAN

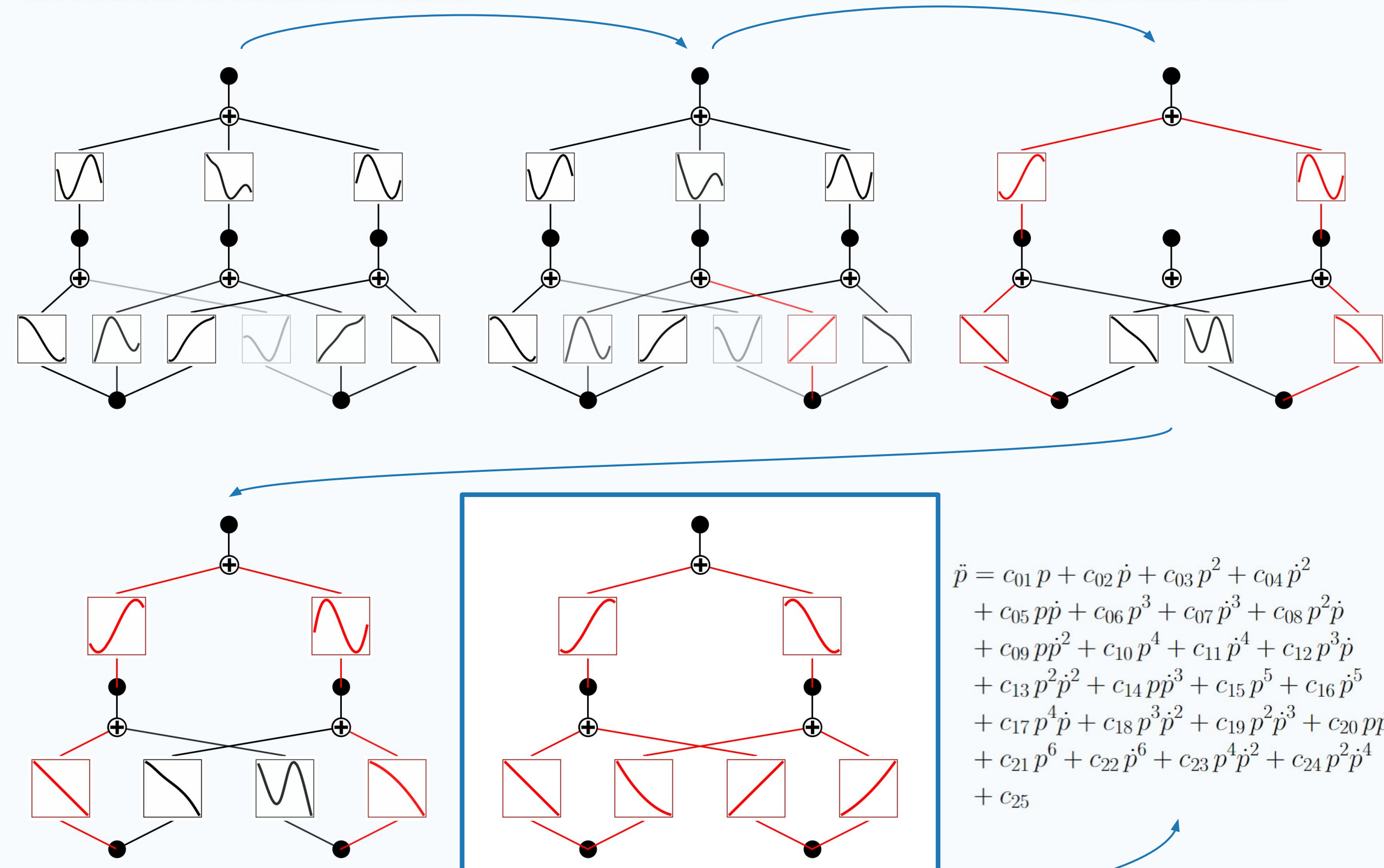


- Funciones de activación fijas
- Pesos entrenables
- Caja negra

- Funciones de activación entrenables
- Pesos fijos
- ¡Interpretable!

## Reconstrucción del campo vector

- **Paso 0.** Inicializamos el modelo con funciones de activación aleatorias.
- **Paso 1.** Entrenamos la red y fijamos las primeras funciones simbólicas.
- **Paso 2.** Repetimos el entrenamiento atentando a funciones suaves.

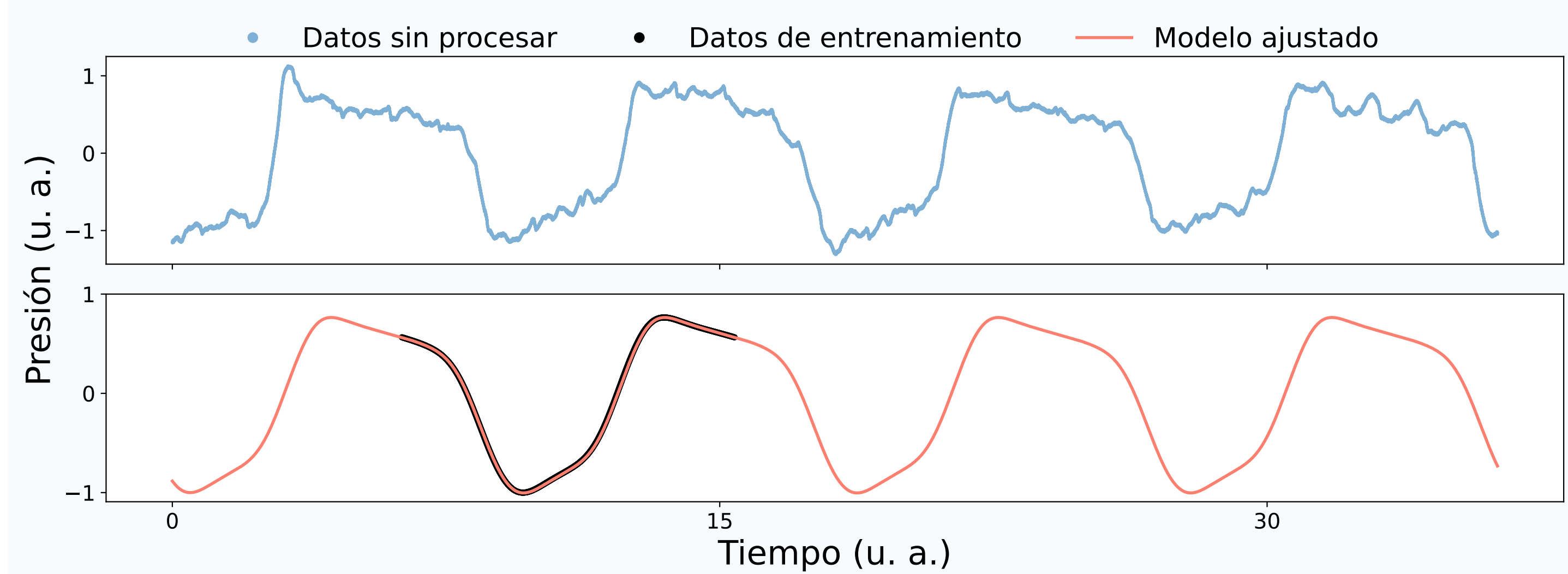
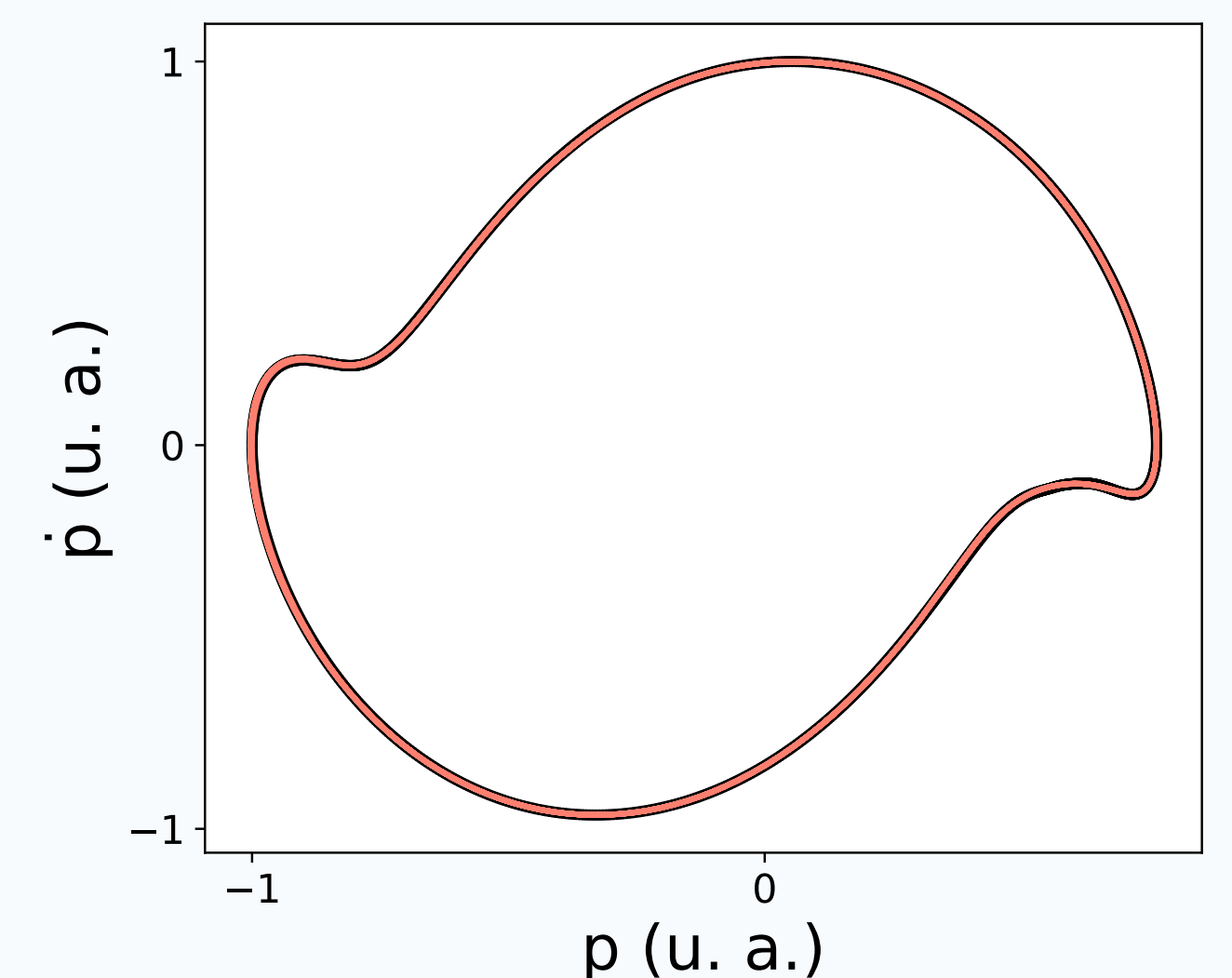


- **Paso 3.** Pruneamos funciones de activación con pesos despreciables.
- **Paso 4.** Iteramos hasta haber fijado todas las funciones de activación.
- **Paso 5.** Expandimos el polinomio y hacemos un ajuste final para ganar más grados de libertad.

$$\begin{aligned} \ddot{p} = & c_{01} p + c_{02} \dot{p} + c_{03} p^2 + c_{04} \dot{p}^2 \\ & + c_{05} p\dot{p} + c_{06} p^3 + c_{07} \dot{p}^3 + c_{08} p^2\dot{p} \\ & + c_{09} p\dot{p}^2 + c_{10} p^4 + c_{11} \dot{p}^4 + c_{12} p^3\dot{p} \\ & + c_{13} p^2\dot{p}^2 + c_{14} p\dot{p}^3 + c_{15} p^5 + c_{16} \dot{p}^5 \\ & + c_{17} p^4\dot{p} + c_{18} p^3\dot{p}^2 + c_{19} p^2\dot{p}^3 + c_{20} p\dot{p}^4 \\ & + c_{21} p^6 + c_{22} \dot{p}^6 + c_{23} p^4\dot{p}^2 + c_{24} p^2\dot{p}^4 \\ & + c_{25} \end{aligned}$$

## Predicción de la presión en el sistema respiratorio

- Reproduce con precisión la dinámica respiratoria.
- Integrar su solución resulta en órbitas estables y periódicas en el espacio de fases.
- ¡Podemos inferir ecuaciones de sistemas dinámicos a partir de datos experimentales!

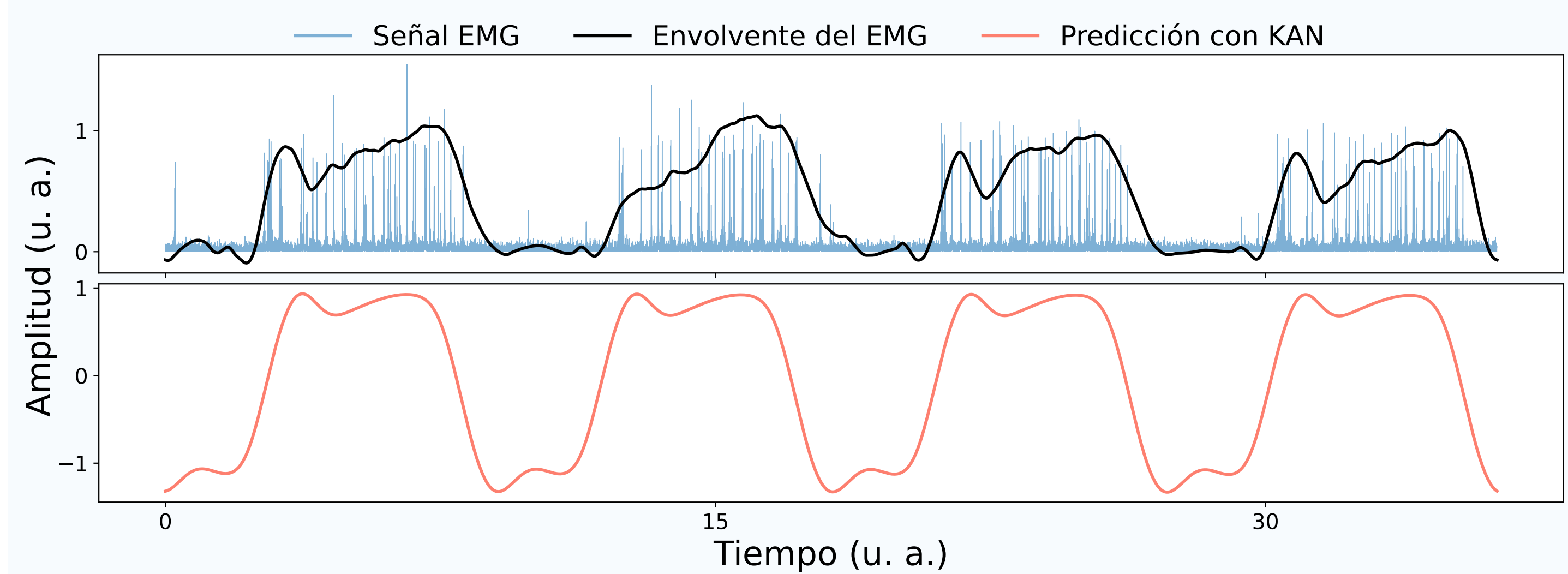


## Predicción de la actividad electromiográfica (EMG)

En [2] se derivó el siguiente modelo para el sistema respiratorio aviar en términos de la fuerza ejercida por los músculos:

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = -c_1 p - c_2 \frac{dp}{dt} + A \frac{df}{dt}. \quad (2)$$

Como tenemos la expresión del campo vector, podemos integrar el último término y predecir  $f$ .



## Conclusiones

- KAN reconstruye con precisión el campo vector a partir de datos.
- Integrar la solución resulta en órbitas periódicas y estables en el espacio de fases.
- El modelo predice correctamente la actividad electromiográfica durante la espiración.

## Bibliografía

- Liu, Z., Wang, Y., Vaidya, S., Ruehle, F., Halverson, J., Soljačić, M., Hou, T. Y., & Tegmark, M. (2024). KAN: Kolmogorov-Arnold Networks. arXiv preprint arXiv:2404.19756.
- Fainstein, F., Geli, S. M., Amador, A., Goller, F., & Mindlin, G. B. (2021). Birds breathe at an aerodynamic resonance. *Chaos*, 31(12), 123132. <https://doi.org/10.1063/5.0069696>
- Fainstein, F., Goller, F., & Mindlin, G. B. (2025). Song-like activation of syringeal and respiratory muscles during sleep in canaries. *Journal of Comparative Physiology A: Neuroethology, Sensory, Neural, and Behavioral Physiology*, 211(2), 135–148. <https://doi.org/10.1007/s00359-024-01720-7>

