Júlia Perassolli De Lázari RA: 200298

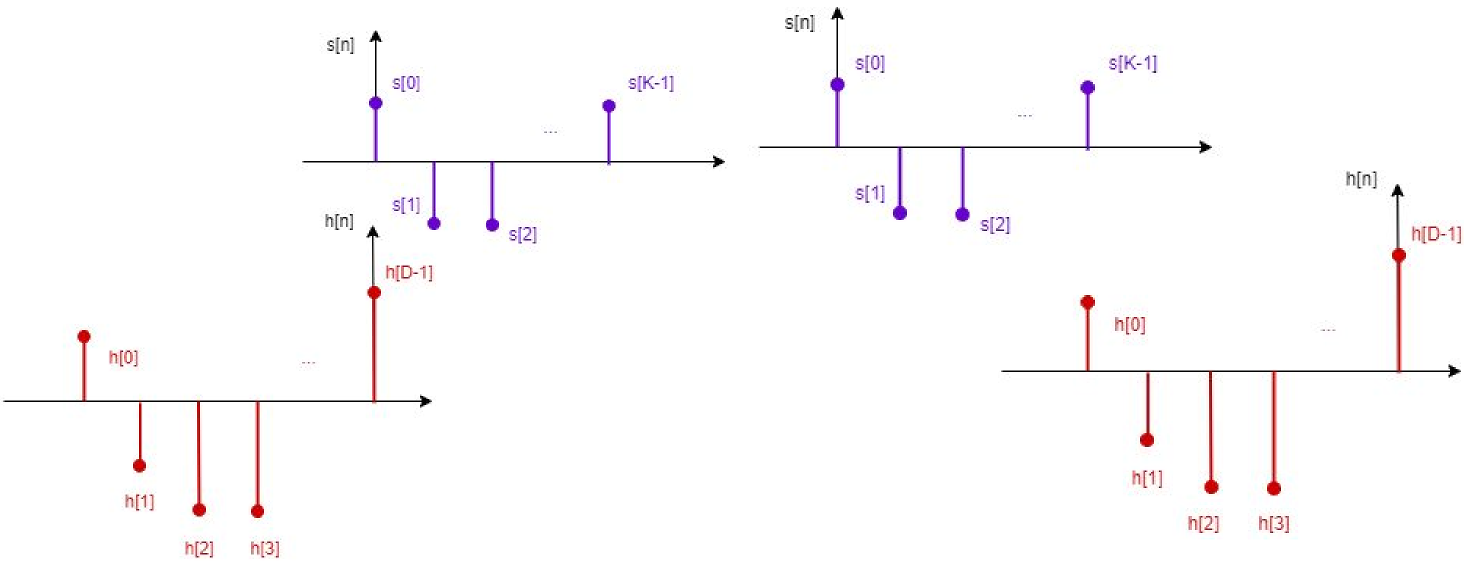
EA614 - Análise de Sinais

Exercício de Fixação de Conceitos (EFC) 1
Sistemas LIT e Convolução

a) Determine o comprimento P da sequência x[n] gerada na saída do canal em função de K e D.

Como s[n] e h[n] são nulas para n<0, temos que a primeira convolução não nula é a da primeira figura, dada por s[0]h[D-1]. E como s[n] tem comprimento K-1, a última convolução não nula será será dada por s[K-1]h[0].

Sendo assim, o comprimento P da sequência x[n] gerada na saída será dado por **P = K + D - 1**.



Esse mesmo resultado também pode ser obtido escrevendo a convolução como:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{\infty} s[k]h[n-k] = s[0]h[n] + s[1]h[n-1] + \ ... + \ s[K-1]h[n-(K-1)]\,,$$

sendo que h tem comprimento D, ou seja a sequência $h[n-(K-1)]$ termina em D+K-2, portanto o comprimento de x[n] é P = K + D - 1.

b) Mostre que este procedimento para o cálculo da convolução está correto, identificando quem é a matriz H e o vetor s.

Temos que $x = [x[0]\ x[1]\ ...\ x[P-1]]^T$, isto é:

$$x = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ ... \\ x[P-1] \end{bmatrix}$$

A partir da equação da convolução $x[n] = s[0]h[n] + s[1]h[n-1] + \ ... s[K-1]h[n-(K-1)]$ temos que:

$$x[0] = s[0]h[0] + s[1]h[-1] + s[2]h[-2] + ... + s[K-1]h[-K+1]$$
$$x[1] = s[0]h[1] + s[1]h[0] + s[2]h[-1] + ... + s[K-1]h[-K+2]$$
…
$$x[D] = s[0]h[D] + s[1]h[D-1] + s[2]h[D-2] + ... + s[K-1]h[-K+D+1]$$
$$x[K] = s[0]h[K] + s[1]h[K-1] + s[2]h[K-2] + ... + s[K-1]h[0]$$
...
$$x[P-1] = s[0]h[P-1] + s[1]h[P-2] + ... + s[K-1]h[-K+P]$$

A partir dessas equações é possível afirmar que o procedimento (x = Hs) está correto e que as matrizes H e s são dadas por:

$$H = \begin{bmatrix} h[0] & h[-1] & h[-2] & ... & h[-K+1] \\ h[1] & h[0] & h[-1] & ... & h[-K+2] \\ h[2] & h[1] & h[0] & ... & h[-K+3] \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ h[P-1] & h[P-2] & h[P-3] & ... & h[-K+P] \end{bmatrix} \qquad s = \begin{bmatrix} s[0] \\ s[1] \\ s[2] \\ ... \\ s[K-1] \end{bmatrix}$$

Mas sabemos que;

- $h[n] = 0$ para $n < 0$.
- o comprimento de h[n] é dado por D-1 e que P = K+D-1. Assumindo K>1: $P \geq D$ ou $P-1 \geq D-1$, isto é, a matriz H proposta têm mais linhas do que h[n].
- na linha K o elemento h[0] está na última coluna,como pontuado nas equações acima.
- h[n] é não nulo apenas até h[D-1] (h[n] tem comprimento D), logo h[n] para $n > D-1$ é 0.
- $-K + P = -K + K + D - 1 = D - 1$ pois $P = K + D - 1$

A partir disso temos que:

Se K>D:

$$H = \begin{bmatrix} h[0] & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ h[1] & h[0] & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & h[D-1] & h[D-2] & \ldots & h[-K+D+1] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & h[K-2] & \ldots & h[0] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & h[D-1] \end{bmatrix}$$

Se D>K:

$$H = \begin{bmatrix} h[0] & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ h[1] & h[0] & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h[K] & h[K-1] & h[K-2] & \ldots & h[0] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & h[D-1] & h[D-2] & \ldots & h[-K+D+1] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & h[D-1] \end{bmatrix}$$

Para que seja possível realizar a operação Hs, deve-se acrescentar zeros no vetor s até que esse tenha a mesma dimensão de x, P-1.

$$s = \begin{bmatrix} s[0] \\ s[1] \\ s[2] \\ \ldots \\ s[K-1] \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ou seja x = Hs pode ser representado matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \ldots \\ x[P-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ h[1] & h[0] & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & h[D-1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s[0] \\ s[1] \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) A partir da equação $x[n] = s[n] - 0,5s[n-1]$, determine a resposta ao impulso do canal h[n].

A equação

$$x[n] = \sum_{k=0}^{\infty} s[k]h[n-k] = s[0]h[n] + s[1]h[n-1] + \ ... \ + s[K-1]h[n-(K-1)]$$

também pode ser escrita como

$$x[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]s[n-k] = h[0]s[n] + h[1]s[n-1] + \ ... \ h[K-1]s[n-(K-1)]$$

Igualando a expressão acima com a dada pelo enunciado, temos:

$$h[0]s[n] + h[1]s[n-1] + \ ... \ h[K-1]s[n-(K-1)] = s[n] - 0,5s[n-1]$$

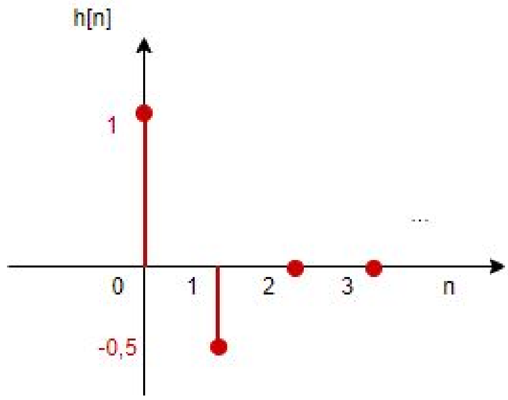
Pode-se então perceber que $h[0]$ e $h[1]$ são os coeficientes que multiplicam $s[n]$ e $s[n-1]$, respectivamente. Logo:

$$h[0] = 1$$

$$h[1] = -0,5$$

E a resposta ao impulso $h[n]$ é descrita por:

$$h[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ -0,5 & n = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$



d) Considerando a situação de equalização ideal (y[n] = s[n]), determine a resposta combinada canal-equalizador.
Dica: note que o canal h[n] e o equalizador w[n] são dois sistemas LIT em série (cascata).

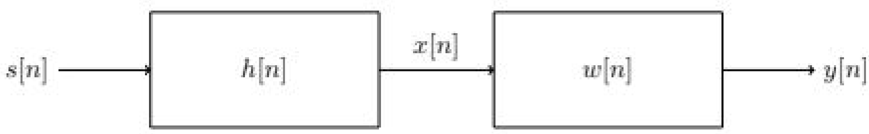


Figura 5: Processo de equalização.

Como $h[n]$ e $w[n]$ são dois sistemas LIT em série, temos que a resposta combinada deles é dada por $z[n]$ pode ser calculada pela convolução entre $h[n]$ e $w[n]$.

Logo $y[n] = h[n] * w[n] * s[n] = s[n]$

A partir disso é possível concluir que a convolução $h[n] * w[n] = \delta[n]$, sabendo que a função impulso $\delta[n]$ é o elemento neutro da convolução.

e)Vamos considerar agora dois filtros candidatos a equalizador, cujos coeficientes são mostrados a seguir:

$w_1 = [1\ 0.5\ 0.5^2 0.5^3 0.5^4]$ $\qquad$ $w_2 = [1\ 1.5\ 0.7\ -0.2\ 0.3]$

Apresente, então, a resposta combinada para cada um dos filtros usados, ou seja:

$g_1 = w_1[n] * h[n]$ $\qquad$ $g_2 = w_2[n] * h[n]$

Com base no item b, foi possível fazer o cálculo da convolução por meio de matrizes, sendo h[n] a matriz (conforme calculado no item c):

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

```
%calculate h as described in item b
H = zeros(6,5); %H will be a 5x6 matrix

for i=1:6
    if (i <= 5)
        H(i,i) = 1; %"principal diagonal" will be iqual to h[0]=1
    end
    if (i-1 > 0)
        j = i-1; %element before h[0] will be h[1] = -0.5
        H(i,j) = -0.5;
    end
end
```

No código, a matriz H foi calculada colocando 1 na "diagonal principal", isto é, nas posições com mesmo índice para linhas e colunas, e -0.5 nas posições anteriores.

O cálculo de g1, pela convolução entre h[n] e w1[n] isto é multiplicação entre as matrizes H e W1, enquanto o cálculo de g2 é feito pela multiplicação entre as matrizes H e W2 (código análogo).

```
W1 = [1;0.5;0.25;0.125;0.0625]; %given by the exercise
G1 = zeros(5,1); %define G1 as a matrix of zeros with dimension 5x1

%matrix product
for i=1:6
    G1(i,1) = H(i,:)*W1(:,1);
end
```

Os resultados obtidos foram:

```
G1 = H*W1
   1.00000
   0.00000
   0.00000
   0.00000
   0.00000
  -0.03125
```

```
G2 = H*W2
   1.000000
   1.000000
  -0.050000
  -0.550000
   0.400000
  -0.150000
```

A partir das respostas combinadas obtidas, discuta a qualidade de cada um dos filtros tendo em vista o objetivo desejado na tarefa de equalização.

Como o objetivo da equalização é obter uma saída $y[n] = s[n]$, pelo item d sabe-se que a resposta combinada canal - equalizador deve se aproximar do degrau unitário $\delta[n]$.

Observando as matrizes $g1$ e $g2$ podemos perceber que $g1$ é a que mais se aproxima do degrau, ou seja, $w1$ é o filtro mais adequado.

f) Crie um conjunto de 100 amostras, assumindo os valores +1 e −1 com igual probabilidade, para o sinal s[n]. Simule, então, a transmissão deste sinal pelo canal h[n]. Ou seja, faça a convolução entre o vetor s gerado e o vetor h, composto pelo coeficientes da resposta ao impulso do canal h[n] obtida no item (c). O resultado desta convolução é o vetor x que representa as amostras do sinal recebido (x[n]). Compare os valores assumidos pelos sinais x[n] e s[n].

O conjunto s criado foi:

```
s = sign(randn(1,100));
```

```
s
 Columns 1 through 20:

   1   1  -1   1  -1   1   1  -1  -1  -1   1  -1  -1   1  -1  -1  -1  -1  -1  -1

 Columns 21 through 40:

   1   1   1  -1   1  -1   1   1   1   1  -1   1   1   1   1   1  -1   1  -1  -1

 Columns 41 through 60:

  -1  -1   1  -1   1   1   1   1   1  -1   1  -1   1   1  -1  -1   1   1  -1  -1

 Columns 61 through 80:

   1   1  -1   1  -1   1  -1  -1  -1   1   1  -1  -1  -1   1   1   1  -1  -1  -1

 Columns 81 through 100:

  -1  -1  -1  -1  -1   1  -1  -1  -1  -1  -1   1  -1  -1   1  -1   1  -1   1   1
```

Pelo mesmo raciocínio do item anterior, calculou-se a matriz H:

```
%calculate H as in the preview item
H = zeros(101,100);
for i=1:101
    if(i<=100)
        H(i,i) = 1;
        end
    if (i-1 > 0)
        j = i-1;
        H(i,j) = -0.5;
    end
end
```

Então realizou-se a convolução entre a matriz H e a matriz s transposta, obtendo assim, a matriz x desejada.

```
%matrix x will be a (100,1) vector
x = zeros(100,1);
for i=1:100
    x(i,1) = H(i,:)*s'(:,1); %use s transposed
end
```

A próxima imagem mostra a matriz x obtida, vale observar que a diferença entre os valores de x obtido e s criada é de no máximo 0.5. Por questão de praticidade de visualização, a matriz apresentada é a transposta de x.

```
x = H*s', display x'
 Columns 1 through 8:

   1.00000   0.50000  -1.50000   1.50000  -1.50000   1.50000   0.50000  -1.50000

 Columns 9 through 16:

  -0.50000  -0.50000   1.50000  -1.50000  -0.50000   1.50000  -1.50000  -0.50000

 Columns 17 through 24:

  -0.50000  -0.50000  -0.50000  -0.50000   1.50000   0.50000   0.50000  -1.50000

 Columns 25 through 32:

   1.50000  -1.50000   1.50000   0.50000   0.50000   0.50000  -1.50000   1.50000

 Columns 33 through 40:

   0.50000   0.50000   0.50000   0.50000  -1.50000   1.50000  -1.50000  -0.50000

 Columns 41 through 48:

  -0.50000  -0.50000   1.50000  -1.50000   1.50000   0.50000   0.50000   0.50000

 Columns 49 through 56:

   0.50000  -1.50000   1.50000  -1.50000   1.50000   0.50000  -1.50000  -0.50000

Columns 57 through 64:

  1.50000   0.50000  -1.50000  -0.50000   1.50000   0.50000  -1.50000   1.50000

Columns 65 through 72:

 -1.50000   1.50000  -1.50000  -0.50000  -0.50000   1.50000   0.50000  -1.50000

Columns 73 through 80:

 -0.50000  -0.50000   1.50000   0.50000   0.50000  -1.50000  -0.50000  -0.50000

Columns 81 through 88:

 -0.50000  -0.50000  -0.50000  -0.50000  -0.50000   1.50000  -1.50000  -0.50000

Columns 89 through 96:

 -0.50000  -0.50000  -0.50000   1.50000  -1.50000  -0.50000   1.50000  -1.50000

Columns 97 through 100:

  1.50000  -1.50000   1.50000   0.50000
```

g)Filtre o sinal x[n] pelos equalizadores w1[n] e w2[n] (cujos coeficientes foram apresentados no item e), gerando as saídas y1[n] e y2[n], respectivamente. Faça, então, dois gráficos.

Para filtrar o sinal pelos equalizadores foi criado criar duas matrizes, W1 e W2, da maneira definida no item b.

```
%matriz W1
W1 = zeros(105,101);
for i=1:105
    if(i<=101)
        W1(i,i) = 1;
    end
    if(i-1>0 && i-1<=101)
        W1(i,i-1) = 0.5;
    end
    if(i-2>0 && i-2<=101)
        W1(i,i-2) = 0.25;
    end
    if(i-3>0 && i-3<=101)
        W1(i,i-3) = 0.125;
    end
    if(i-4>0 && i-4<=101)
        W1(i,i-4) = 0.625;
    end
end
```

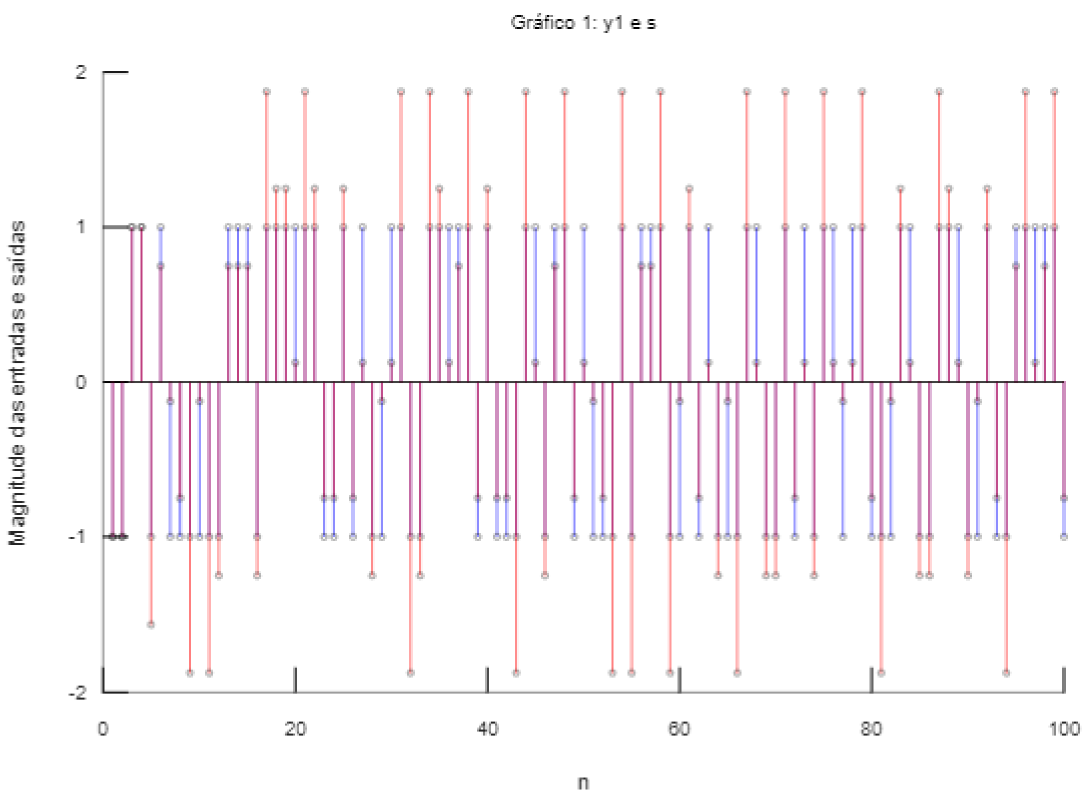
$$W1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0.125 & 0.25 & 0.5 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0.625 \end{bmatrix}$$

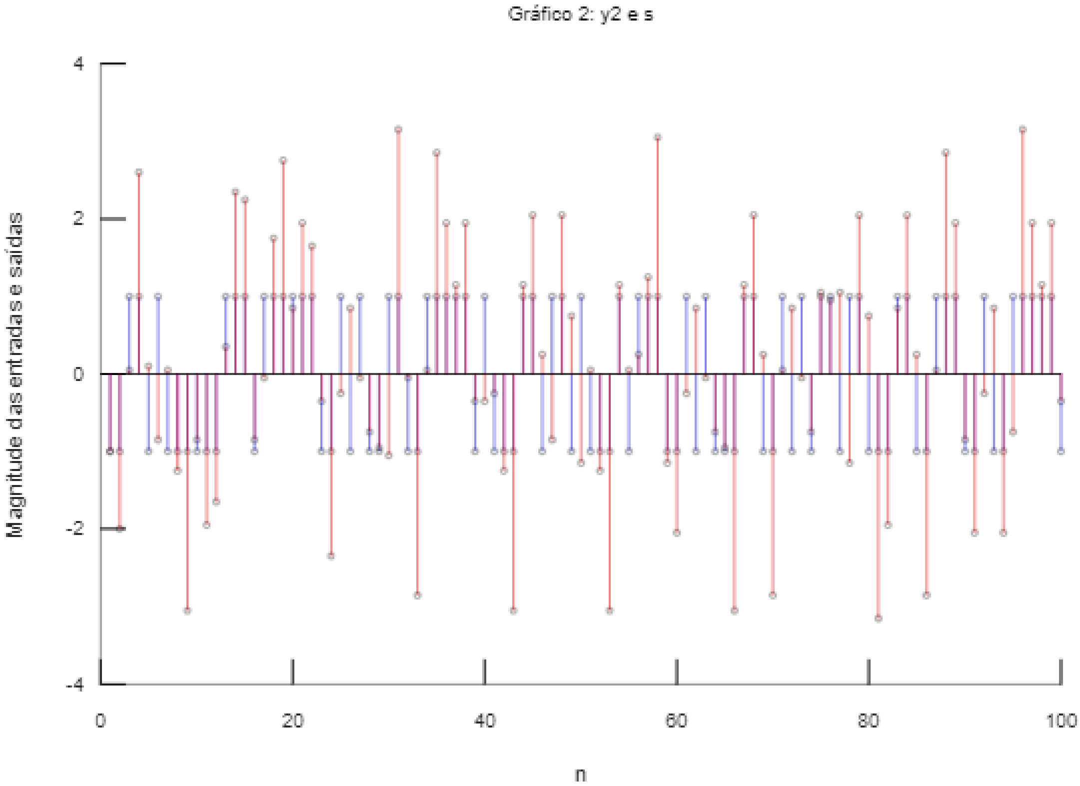
O código para W2 foi feita de maneira análoga.
Os vetores w1 e w2 foram dados no item e.

Fazendo a multiplicação de matrizes (que representa a operação de convolução) W1*x e W2*x obteve-se y1 e y2 respectivamente.

```
%output y1 = W1*x
y1 = zeros(105,1);
for i=1:105
    y1(i,1) = W1(i,:)*x(:,1);
end
```

Então, foi possível fazer 2 gráficos, com a entrada s (azul) e as saídas y1 e y2 (vermelho).





Comparando os resultados obtidos, conclui-se que o filtro W1 é o mais adequado pois as saída y1 está mais próxima da entrada s, conforme esperado pelo resultado do item e.

A diferença entre y1 e s não ultrapassa 1, enquanto a de y2 e s ultrapassa 2 para alguns valores.