EFC 3
Exercício de Fixação de Conceitos (EFC) 3
Filtros analógicos

Júlia Perassolli De Lázari RA: 200298

1 Introdução

Neste EFC, estudaremos alguns filtros passa-baixas práticos, i.e., não-ideais, tendo como objetivo analisar como estes filtros se comportam na banda passante e na banda de rejeição, bem como de que maneira ocorre a transição entre estas duas regiõess. Toda a análise será conduzida no domínio da frequência, considerando somente a magnitude dos espectros dos sinais e dos filtros.

2 Atividades

2.1 Filtro de Chebyshev

O primeiro filtro a ser estudado é o filtro de Chebyshev, cuja resposta em magnitude é dada por:

$|H_C(jw)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 T_n^2(\frac{\omega}{\omega_c})}}$

onde $T_n(.)$ indica o polinômio de Chebyshev do primeiro tipo e de ordem n, definido pela seguinte relação de recorrência

$T_0(x) = 1$
$T_1(x) = x$
$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$

ou, equivalentemente, pelas seguintes expressões:

$T_n(\frac{\omega}{\omega_c}) = \cos\left(n.\arccos(\frac{\omega}{\omega_c})\right)$, para $0 \le \omega \le \omega_c$
e
$T_n(\frac{\omega}{\omega_c}) = \cosh\left(n.\operatorname{arcosh}(\frac{\omega}{\omega_c})\right)$, para $\omega > \omega_c$

A construção de um filtro de Chebyshev envolve a definição de três parâmetros:

1. ω_c: frequência de corte, em rad/s
2. n: ordem do filtro
3. $\varepsilon(\varepsilon < 1)$: ganho na frequência de corte $|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$

2.1.1 Item a

Fixe $\omega_c = 5rad/s$ e $\varepsilon = 0.2$ e varie a ordem do filtro $n = 1, 2, 3, 4$ e 5. Plote em um mesmo gráfico, com cores diferentes, o módulo da resposta em frequência obtida para cada um dos valores de n e comente as mudanças observadas.

Neste item, utilize a rotina fornecida calcula coeficientes (ω, ω_c, n), que recebe como argumentos um vetor de frequências ω, a frequência de corte ω_c e a ordem do filtro n, e retorna o vetor T_n (do mesmo tamanho que ω) com os valores do polinômio de Chebyshev necessários para determinar a resposta do filtro.

Dica: para implementar o filtro de Chebyshev, crie uma função que receba como parâmetros o vetor ω, a frequência de corte ω_c, a ordem desejada n e o parâmetro ε e que retorne um vetor Habs com o módulo da resposta em frequência do filtro. Desta maneira, será possível utilizar este mesmo trecho de código em outras partes deste exercício.

Uma função foi implementada para calcular o módulo da resposta em frequência do filtro (designado por Habs). Seus parâmetros de entrada são: ω, ω_c, ε, n Sua saída é o vetor Habs.

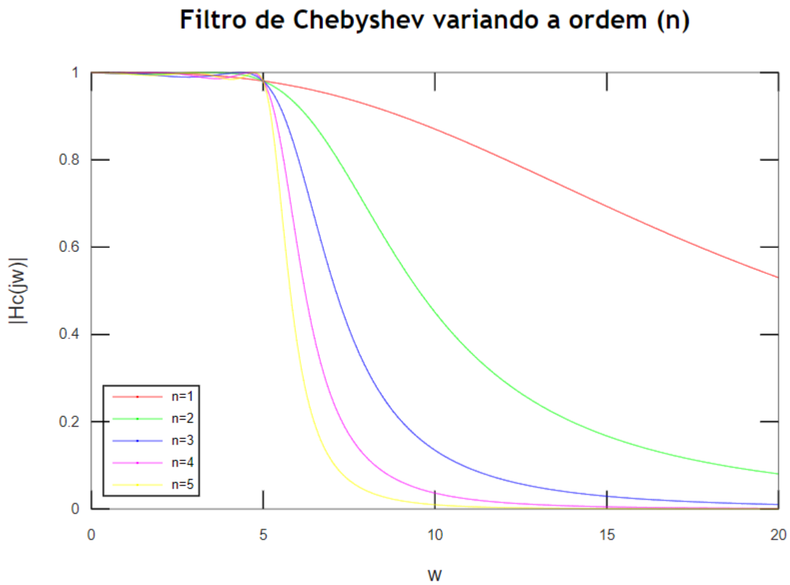
Para sua implementação foi utilizada a função *coefficients* (dada pelo exercício como *calcula_ coeficientes*) e que calcula o polinômio T_n, que é então utilizado para calcular a resposta em frequência.

```
function [Habs] = chebyshev_filter(w,wc,e,n)
index = 1;

for w=w
    Tn = coefficients(w,wc,n); #call coeffientes function
    Habs(index) = 1/(sqrt(1+(e^2)*(Tn^2)*(w/wc))); #calculate Habs
    index += 1;
endfor
endfunction
```

Variando ω de 0 a 20 rad/s num passo de 0.02 (1000 amostras), fixando

$\omega_c = 5$ e $\varepsilon = 0.2$ e variando a ordem do filtro (n) de 1 a 5 foi obtida a resposta em frequência do filtro para cada ordem do filtro e observar as diferenças entre elas num gráfico.



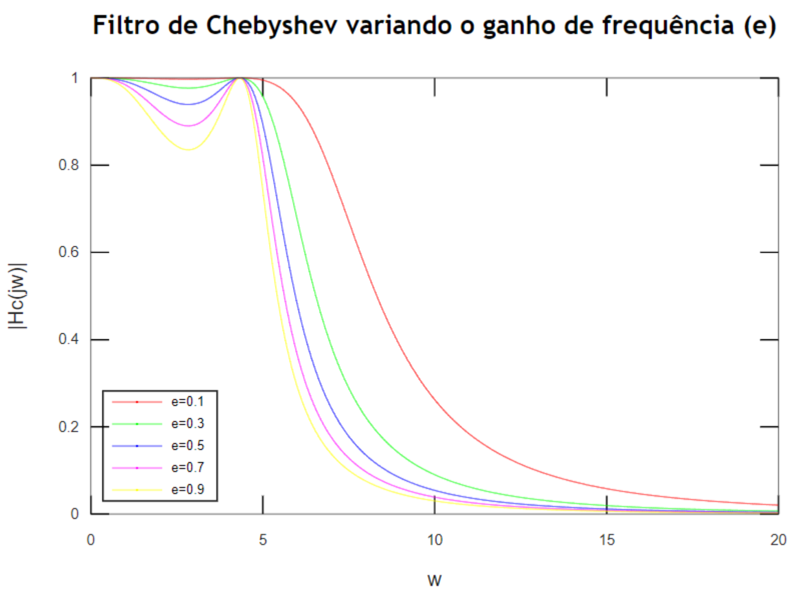
Pode-se perceber que quanto maior a ordem do filtro, mais abrupta a variação em torno de 5 rad/s (no caso a frequência de corte), ou seja, melhor o filtro.

2.1.2 Item b

Ainda com $\omega_c = 5rad/s$, fixe a ordem do filtro em $n = 3$ e varie $\varepsilon = 0.1$, 0.3, 0.5, 0.7 e 0.9.

Plote em um mesmo gráfico, com cores diferentes, a resposta obtida para cada um dos valores de ε e comente o comportamento observado.

Utilizando a mesma função descrita no item anterior (*chebyshev_filter*), com a mesma variação de ω e agora variando o ganho de frequência (ε), obteve-se o gráfico:



Pode-se perceber que quanto maior o ganho de frequência a resposta em frequência tem uma oscilação maior para $\omega < \omega_c$ e decai mais rapidamente para $\omega > \omega_c$, ou seja, um ε menor caracteriza um filtro melhor para frequência menor que a de corte e um ε maior caracteriza um filtro melhor para frequência maior que a de corte.

2.2 Filtro de Butterworth

O segundo filtro estudado é o filtro de Butterworth, que possui a seguinte magnitude de resposta em frequência:

$|H_B(jw)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega}{\omega_c})^{2n}}}$

Para o projeto deste tipo de filtro, devemos especificar dois parâmetros:

1. ω_c: frequência de corte, em rad/s
2. n: ordem do filtro

2.2.1 Item c

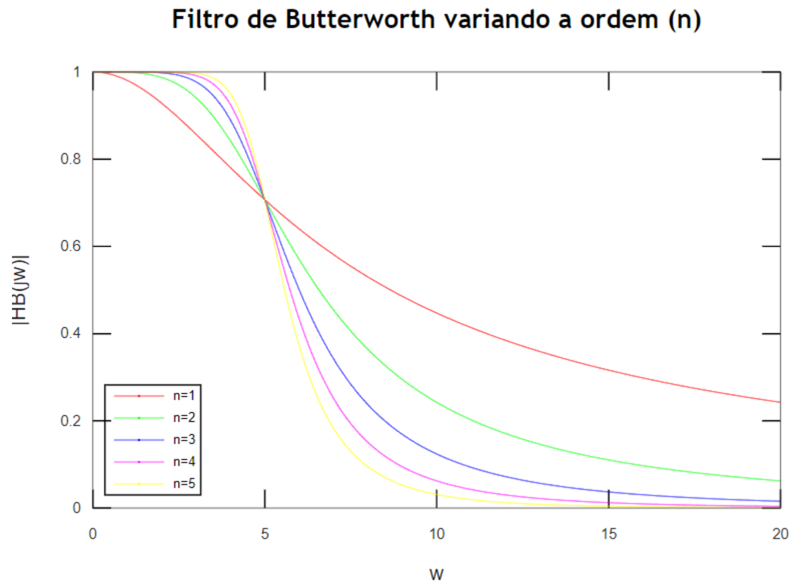
Com $\omega_c = 5rad/s$, varie $n = 1$, 2, 3, 4 e 5. Plote em um mesmo gráfico, com cores diferentes, a resposta em magnitude obtida para cada um dos valores de n e comente as mudanças observadas. Novamente, crie uma função que receba como parâmetros ω_c e n e retorne um vetor com os valores de $|H_B(j\omega)|$.

Com um racicínio semelhante ao do filtro de Chebyshev, uma função foi criada para calcular a resposta em frequência do filtro, tendo como parâmetros de entrada ω, ω_c e n.

```
function [Habs] = butterworth_filter(w,wc,n)
index = 1;

for w=w
    Habs(index) = 1/(sqrt(1+(w/wc)^(2*n))); #calculate Habs
    index += 1;
endfor
endfunction
```

Mantendo ω_c fixo em $5rad/s$, variando ω de 0 a 20 num passo de 0.02 (1000 amostras) e variando a ordem do filtro (n) de 1 a 5, o gráfico obtido foi:



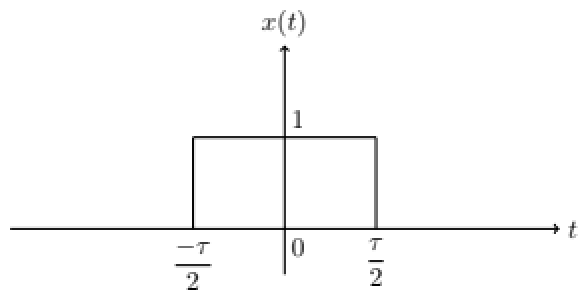
Pode-se perceber que quanto maior a ordem do filtro, a resposta em frequência decai mais lentamente para $\omega < \omega_c$ e mais rapidamente para $\omega > \omega_c$, ou seja, melhor o filtro.

2.3 Filtragem de um pulso retangular

Considere o sinal x(t) correspondente ao pulso retangular, no domínio do tempo, cuja expressão é dada por:

e cuja forma de onda é:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{\tau}{2} \quad (1) \\ 0, & \text{caso contrário} \quad (2) \end{cases}$$



2.3.1 Item d

Calcule a transformada de Fourier $X(j\omega)$ do sinal x(t), considerando $\tau = 2\pi/\omega_c$. Apresente o gráfico de $|X(j\omega)|$, com o eixo das frequências variando de 0 a 20 rad/s, com $\omega_c = 5rad/s$ e comente acerca dos pontos em que $|X(j\omega)| = 0$.

A transformada de Fourier do sinal x(t) é dada por:

$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j}dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} 1e^{j\omega t}dt = \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2}$

$X(j\omega) = \frac{-1}{j\omega}\left[e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2}\right] = \frac{1}{\omega}\left[\frac{e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2}}{j}\right] = \frac{2\sin(\omega\tau/2)}{\omega} = \frac{\tau\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$

$X(j\omega) = \tau Sa(\omega\tau/2)$

Fazendo $\tau = 2\pi/\omega_c$ temos:

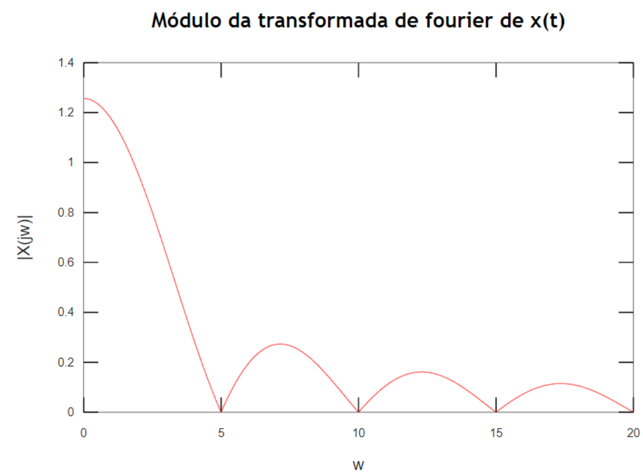
$X(j\omega) = \frac{2\sin(\pi\omega/\omega_c)}{\omega}$

Uma função foi utilizada para calcular a transformada de Fourier, implementando a expressão encontrada acima:

```
function [X] = fourier_ret(w,wc)
index = 1;

for w=w #fourier transform for each value of w
    X(index) = (2/w)*sin(pi*w/wc);
    index += 1;
endfor
endfunction
```

Variando ω de 0 a 20 rad/s, o gráfico da transformada de $x(t)$ em função de ω é:



Pode-se observar que $X(j\omega) = 0$ quando ω é um múltiplo inteiro de ω_c. Isso ocorre pois $\sin(\pi x) = 0$ quando x é um número inteiro. No caso, como $x = \omega/\omega_c$, ele será inteiro quando ω for um múltiplo inteiro de ω_c.

2.3.2 Item e

Considerando um filtro passa-baixas ideal:

$$H_{ideal}(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \omega_c \quad (3) \\ 0, & \text{caso contrário} \quad (4) \end{cases}$$

apresente o módulo da resposta em frequência do filtro, $|H_{ideal}(j\omega)|$, adotando $\omega_c = 5rad/s$. Em seguida, filtre o sinal $X(j\omega)$ e apresente o módulo da saída obtida ($|Y(j\omega)|$=$|H_{ideal}(j\omega)||X(j\omega)|$).

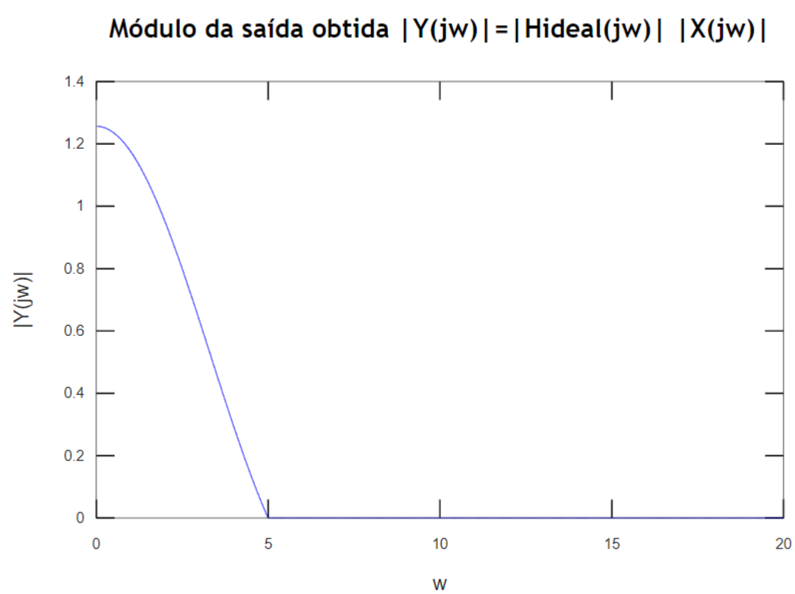
Utilizando uma função, com parâmetros de entrada ω e ω_c para calcular a resposta do filtro ideal:

```
function [Hideal] = ideal_filter(w,wc)
index = 1;
for w=w
    if (w<wc) #if frequency < cutoff frequency
        Hideal(index) = 1; #response is 1
    else #otherwise
        Hideal(index) = 0; #response is 0
    endif
    index += 1;
endfor
endfunction
```

E então multiplicando essa pelo valor da resposta em frequência $X(j\omega)$ calculado no item d, ou seja filtrando o sinal $X(j\omega)$ com o filtro ideal:

```
#filter the X_jw
index = 1;
for i=w
    Y_jw(index) = H_ideal(index)*X_jw(index);
    index += 1;
endfor
```

O gráfico obtido foi:

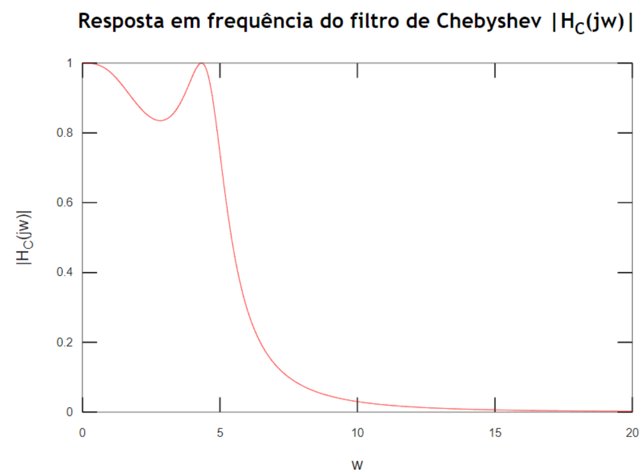


Como esperado de um filtro ideal, para $\omega \leq \omega_c$, o módulo da saída é igual ao sinal $|X(j\omega)|$ (ver gráfico do item d) e para $\omega > \omega_c$, o módulo da saída obtida é zero.

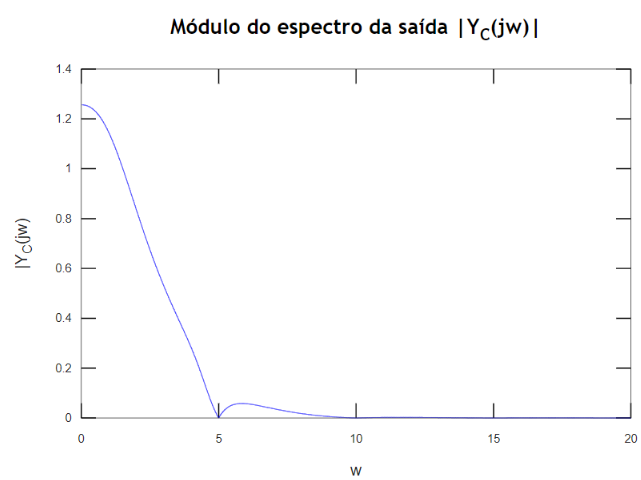
2.3.3 Item f

Utilizando um filtro de Chebyshev com $\varepsilon = 0.9$, $n = 3$ e $\omega_c = 5rad/s$, apresente o módulo da resposta em frequência do filtro, $|H_C(j\omega)|$, bem como módulo do espectro da saída $|Y_C(j\omega)|$

Utilizando a função criada no item a foi possível calcular o módulo da resposta em frequência do filtro de Chebyshev, $|H_C(j\omega)|$:



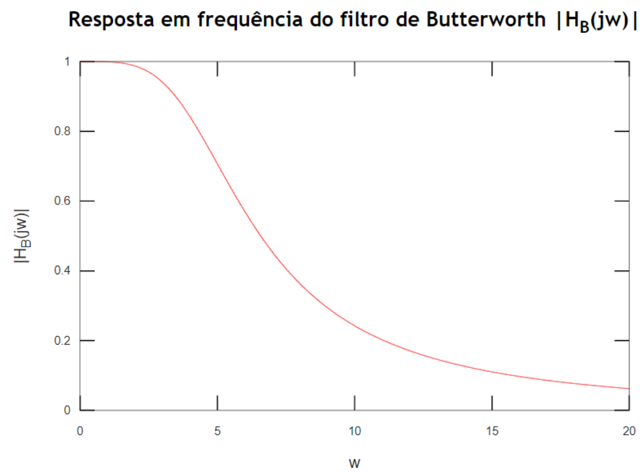
E pelo mesmo racicínio do item anterior, calcular o módulo do espectro da saída $|Y_C(j\omega)|$:



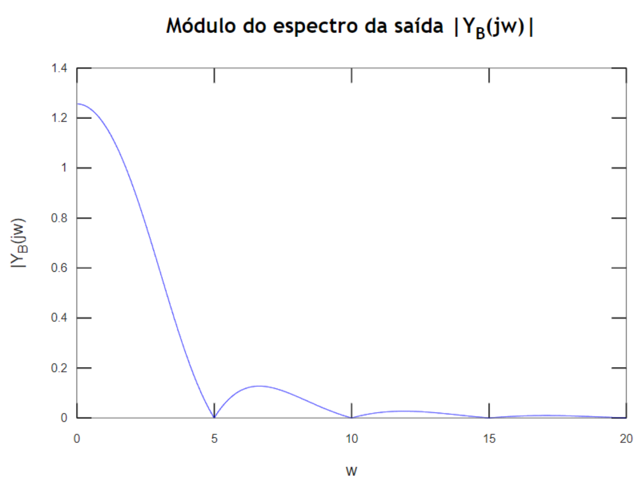
2.3.4 Item g

Utilizando um filtro Butterworth com $n = 2$ e $\omega_c = 5rad/s$, apresente o módulo da resposta em frequência do filtro, $|H_B(j\omega)|$, bem como o módulo do espectro da saída $|Y_B(j\omega)|$.

Com o mesmo racicínio do item anterior calculou-se o módulo da resposta em frequência do filtro de Butterworth $|H_B(j\omega)|$:



E o o módulo do espectro da saída $|Y_B(j\omega)|$:



2.4 Item h

Compare as saídas obtidas nos itens (f) e (g) com a obtida no item (e), bem como as respostas em frequência de cada um dos filtros. Comente as semelhanças e diferenças entre as respostas dos filtros e como isto se reflete no espectro das saídas obtidas, para frequências inferiores e superiores à frequência de corte.

Dica: para facilitar a análise, plote em um mesmo gráfico, com cores distintas, $|H_ideal(j\omega)|$, $|H_C(j\omega)|$ e $|H_B(j\omega)|$; em um segundo gráfico, plote as saídas (novamente com cores distintas) $|Y_{ideal}(j\omega)|$, $|Y_C(j\omega)|$ e $|Y_B(j\omega)|$.

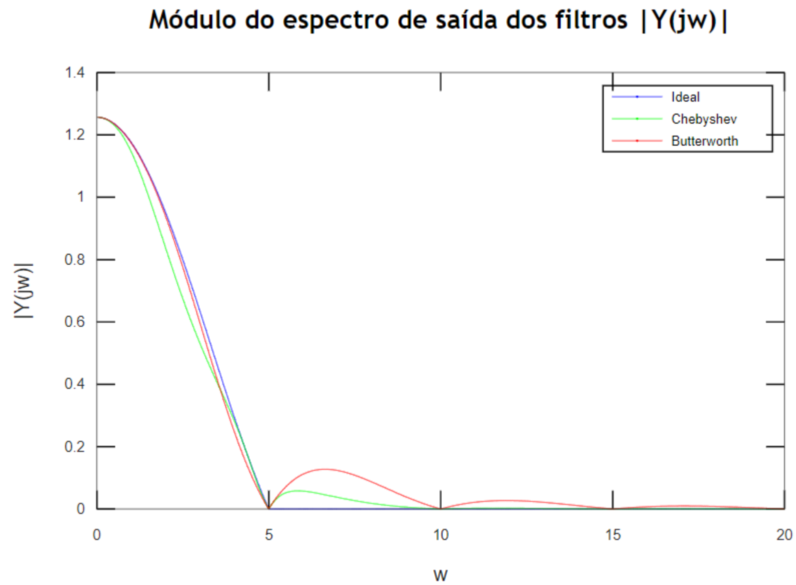
Comparando as respostas em frequência dos filtros:

Antes da frequência de corte, a resposta em frequência do filtro de Chebyshev apresenta duas oscilações e após a frequência de corte decai rapidamente, sendo igual a 0 numa frequência aproximadamente 3 vezes maior que a de corte.

A resposta em frequência do filtro de Butterworth decai lentamente desde antes da frequência de corte, e numa frequência 4 vezes maior que a de corte ainda tem um valor de cerca de 10 %.

A resposta do filtro ideal, por definição, é igual a 1 para frequências menores que a de corte e 0 para frequências maiores que a de corte.

Comparando o módulo do espectro de saída dos filtros:



O comportamento do módulo do espectro de saída de cada filtro tem uma relação direta com a resposta em frequência descrita acima.

O módulo da saída do filtro ideal é igual ao de $X(j\omega)$ para frequências menores que a de corte e 0 para as maiores, como constadado no item d.

O módulo da saída do filtro de Chebyshev é ligeiramente menor que o do filtro ideal e se torna zero numa frequência cerca de 2 vezes maior que a de corte.

O módulo da saída do filtro de Butterworth é praticamente igual ao do filtro ideal para frequências menores que a de corte. Para frequências maiores que a de corte, ele apresenta mais oscilações e se torna zero numa frequência cerca de 4 vezes maior que a de corte.