EFC 2
Exercício de Fixação de Conceitos (EFC) 2
Série de Fourier

Júlia Perassolli De Lázari RA: 200298

1 Introdução

A série de Fourier permite caracterizar sinais periódicos através de uma combinação linear de exponenciais complexas, conforme a equação de síntese:

$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkw_0 t}$

onde $w_0 = \frac{2\pi}{T}$ denota a frequência fundamental, T denota o período fundamental do sinal x(t) e os valores $a_k s$ são os coeficientes da série. Tais coeficientes são dados pela equação de análise: $a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jkw_0 t}dt$

2 Parte computacional

Considere a onda "dente de serra", de amplitude unitária, com período T = 4 s, definida em um período por:

$x(t) = \frac{2}{T}t$ para $\frac{-T}{2} < x(t) < \frac{T}{2}$

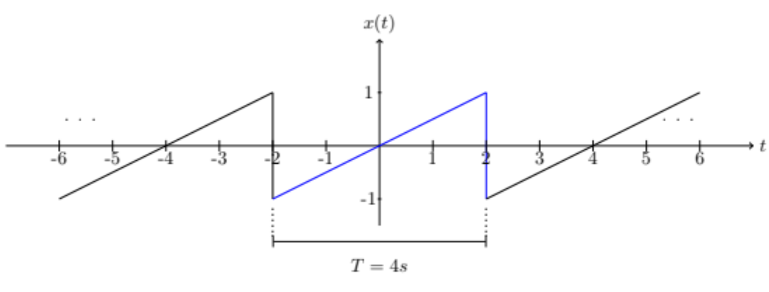


Figura 1: Onda "dente de serra" (ilustração de 3 períodos).

2.1 Item a

Obtenha os coeficientes a_k da série de Fourier da onda "dente de serra" com período T.

Dica: calcule o coeficiente a_0 separadamente, lembrando que ele corresponde ao nível DC do sinal.

A partir da equação de análise $a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jkw_0t}dt$ e sabendo que $x(t) = \frac{2}{T}t$ para $\frac{-T}{2} < x(t) < \frac{T}{2}$ e que $w_0 = \frac{2\pi}{T}$ é possível calcular os coeficientes a_k da série de Fourier da onda dente de serra:

$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{2}{T}te^{-tjk2\pi/T}dt = \frac{2}{T^2}\int_{-T/2}^{T/2} te^{-tjk2\pi/T}dt$

Integrando por partes:

$a_k = \frac{2}{T^2}\left[\frac{te^{-tjk2\pi/T}}{-jk2\pi/T}\Big|_{-T/2}^{T/2} - \int_{-T/2}^{T/2} \frac{e^{-tjk2\pi/T}}{-jk2\pi/T}dt\right] = \frac{e^{-jk\pi}+e^{jk\pi}}{-jk\pi} - \frac{e^{-jk\pi}-e^{jk\pi}}{2k^2\pi^2}$

Fazendo que $cos(z) = \frac{e^{jz}+e^{-jz}}{2}$ e $sen(z) = \frac{e^{jz}-e^{-jz}}{2j}$

$a_k = -\frac{cos(k\pi)}{jk\pi} - \frac{jsen(k\pi)}{2k^2\pi^2}$

Mas para k inteiro, temos $sen(k\pi) = 0$

$a_k = \frac{jcos(k\pi)}{k\pi}$

Para k par, temos $cos(k\pi) = 1$ e para k ímpar, temos $cos(k\pi) = -1$

Portanto: $a_k = \frac{j(-1)^k}{k\pi}$

Calculando o termo a_0

$a_0 = \frac{2}{T^2}\int_{-T/2}^{T/2} te^{-tjk2\pi/T}dt = \frac{2}{T^2}\int_{-T/2}^{T/2} tdt = \frac{2}{T^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{T/2}^{-T/2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$

Ou seja, temos que os coeficientes da série de Fourier para uma onda "dente de serra" são:

$a_0 = 0$ $\qquad$ $a_k = \frac{j(-1)^k}{k\pi}$

2.2 Item b

Com os coeficientes obtidos anteriormente, implemente um programa que aproxime a onda "dente de serra" pela sua série de Fourier com N harmônicas:

$$\overline{x}(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_k e^{jkw_0 t}$$

Para calcular a aproximação de Fourier uma função foi definida, sendo que ela passa pelos valores de tempo de -2 a 2, num passo de 0.002 (ou seja, por 2000 amostras) e para cada um desses valores calcula a aproximação da série de fourier com N harmônicas. Essa função considera o período como T=4s e os coeficientes ak e a0 como calculados no item a.

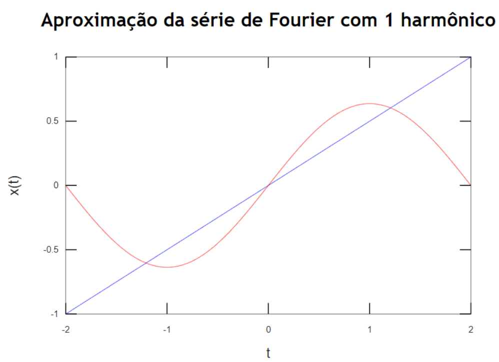
```
#--------------------------------Fourier funcion-----------------------------#
#Define a function to compute the Fourier series for the sawtooth wave
#with a period of 4s
#Parameter N => number of harmonics

function [fourierserie] = FourierSerie(N)
    T = 4;
    w0 = 2*pi/T; #define fundamental frequency
    range = -2:0.002:2; #2000 samples
    index = 1;
    for t=range #for each k compute the value of the sum
        sum = 0;
        for k=-N:N #for each N, get the fourier serie
            if(k!=0)
                sum += (j*(-1)^k/(k*pi))*exp(j*k*w0*t);
            endif
        endfor
        fourierserie(index) = sum;
        index += 1;
    endfor
endfunction
```

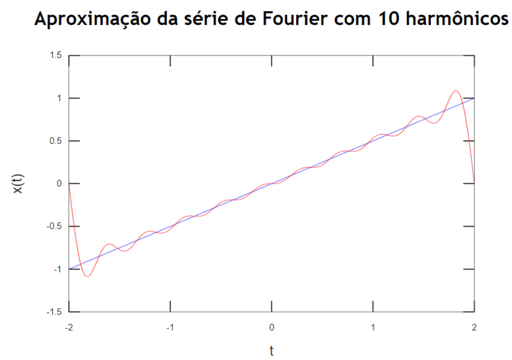
2.3 Item c

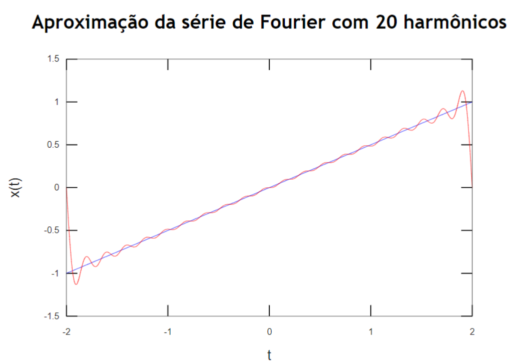
Exiba, em gráficos diferentes, a onda "dente de serra" dada por (3) junto com sua aproximação dada pela série de Fourier com os valores N = 1, 10, 20, 50, para um período do sinal. Procure usar cores distintas para cada uma das séries obtidas, bem como para a onda "dente de serra". Neste item, portanto, devem ser gerados quatro gráficos, sendo que cada gráfico mostrará duas curvas: a onda "dente de serra" e a aproximação em série de Fourier para o valor adotado de N.

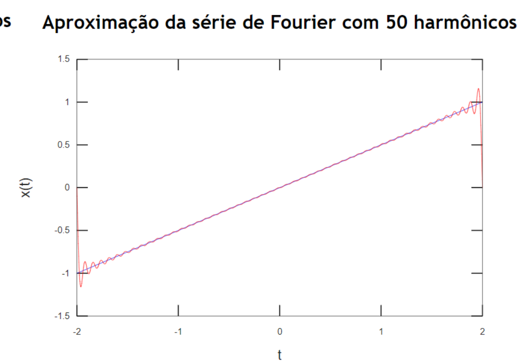
Utilizando a função descrita no item acima, foi possível aproximar a série de Fourier para diferentes valores de N, no caso 1, 10, 20 e 50.

As formas de ondas obtidas foram:









É possível observar que quanto maior o número de harmônicos utilizado, melhor fica a aproximação. Para N>1, é possível observar algo semelhante ao fenômeno de Gibbs ocorrendo próximo às extremidades.

2.4 Item d

Para cada um dos valores de N do item anterior, calcule a energia do erro E_N:

$E_N = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left(x(t) - \overline{x}(t)\right)^2 dt$

No caso desta simulação, a integral da energia do erro pode ser substituída pela média de $\left(x(t) - \overline{x}(t)\right)^2$, uma vez que estamos lidando com sinais discretos.

Uma função foi criada para calcular a energia do erro a partir dos valores da onda "dente de serra"e da sua aproximação pela série de Fourier.

```
#-------------------------------Error energy---------------------------------#
#Calculate the energy error based on the sawooth function and its
#fourier serie approximation
#use the average as its a discrete sign
function energy = EnergyError(sawtooth,fourier)
    T = 4; #period of 4s
    range = -2:0.002:2; #time range
    index = 1;
    dif = 0;
    for t = range #for each of the t values
        dif += (real(sawtooth(index) - fourier(index)))^2;
        index += 1;
    endfor
    energy = dif/(T*2000); #energy of the error
end
```

Os valores da energia encontrados foram 0.032798, 0.0049471, 0.0025975 e 0.0011324 para N igual a 1, 10, 20 e 50, respectivamente. É possível perceber que quanto maior o número de harmônicos, menor a energia do erro.

2.5 Item e

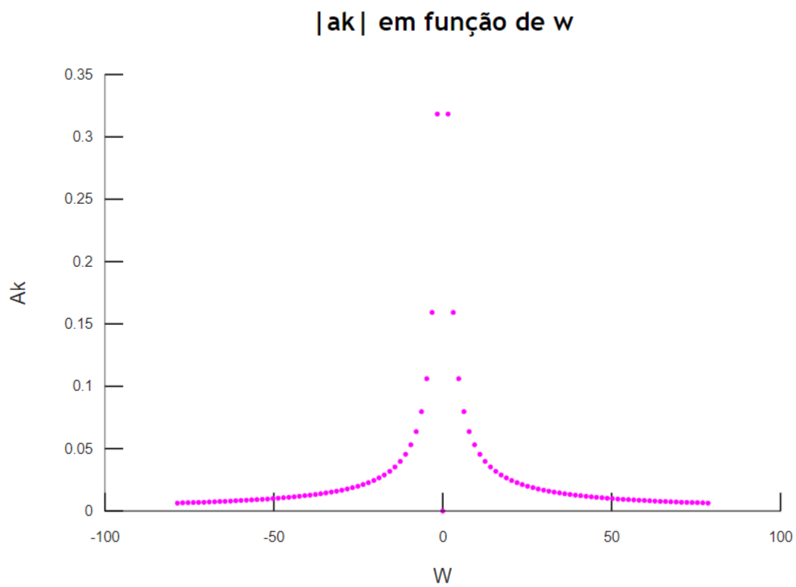
Para N = 50, plote o módulo dos coeficientes da série |ak| em função de w e discuta a simetria observada. Como queremos plotar uma sequência de valores discretos, utilize o comando stem() no Matlab.

Uma função foi utilizada para calcular os módulos dos coeficientes ak: $|(j(-1)^k)/k\pi$ e outra para calcular o valor de w, sendo $w = w0k$ para a série de Fourier com 50 harmônicos.

```
#----------Ak coefficientes for Fourier serie--------#
#ak coefficientes for the sawtooth wave
function [ak] = Ak(N)
    index = 1;
    for k=-N:N #for each k get the ak coefficient
        if k!=0
            ak(index) = abs((j*(-1)^k/(k*pi))); #|ak|
        endif
        index += 1;
    endfor
endfunction
```

```
#------------W for 50 harmonic------------#
#W = w0*k
function [w] = W(N)
    T = 4; #period
    w0 = 2*pi/T; #fundamental frequency
    index = 1;
    for k=-N:N #for each k get W
        w(index) = w0*k;
        index += 1;
    endfor
endfunction
```

Plotando um gráfico, com os módulo dos coeficientes em função de w é possível observar uma simetria $a_k = a_-k$, que ocorre pois a função que descreve ak é par, o que significa que x(t) é uma função par.



2.6 Item f

Considere o circuito analógico mostrado na Figura 2, que corresponde a um sistema LIT cuja resposta em frequência é dada por $H(jw) = \frac{1}{1-jw_c/w}$ onde $w_c = \frac{1}{RC}$ é a frequência de corte do filtro (em rad/s). Plote o módulo e a fase da resposta em frequência e discuta a ação deste sistema como um filtro. (Dica: utilize os comandos abs() e angle() do Matlab).

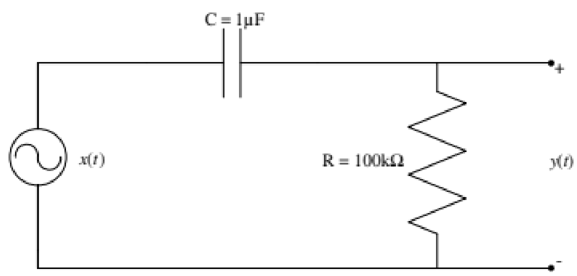
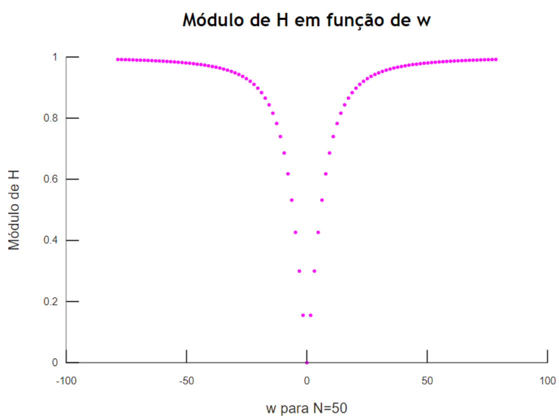


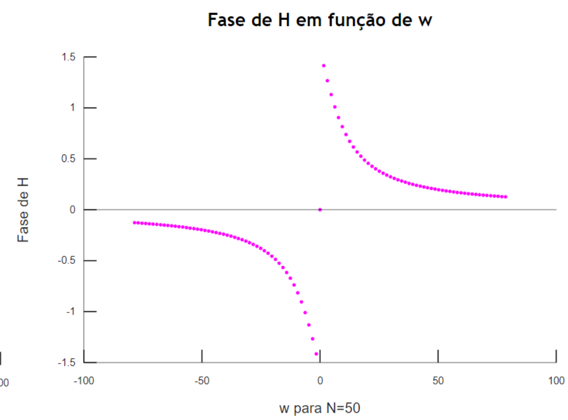
Figura 2: Circuito RC que implementa um filtro analógico.

A resposta em frequência e o w foram calculados por uma função, que tem como entrada o número de harmônicos e o wc (dado por $\frac{1}{RC}$).

```
#Function to calculate the frequency response
function [H,w] = freqresponse(N,wc)
    T = 4; #period
    w0 = 2*pi/T; #fundamental frequency
    index = 1;
    for k=-N:N
        w(index) = w0*k; #frequency
        if k != 0
            H(index) = 1/(1-(j*(wc/w(index)))); #response
        else
            H(index) = 0;
        endif
        index += 1;
    endfor
endfunction
```

Para 50 harmônicos, os gráficos do módulo e da fase de H(jw) são:





Com base no circuito é possível concluir que ele é um filtro passa-alta, uma vez que o resistor e o capacitor estão em série e a saída está em paralelo com o resistor.

A frequência de corte desse filtro é de aproximadamente 10rad/s, como observado no gráfico.

2.7 Item g

Tendo como base os conceitos de autofunção e autovalor, mostre a forma de onda y(t) observada na saída do sistema LIT do item (f) quando a entrada é a onda "dente de serra" aproximada com N = 50. Comente a forma de onda obtida.

Com base nos conceitos de autofunção e autovalor foi possível calcular $y(t) = H(jw)x(t)$, sendo H(jw) como calculado no item anterior.

```
#------------------------Response for sawtooth wave-------------------------#
#Define the response of the circuit for the sawtooth
#based on the number of harmonics and the frequency response
function [Y] = y(N,H)
    T = 4;
    w0 = 2*pi/T; #define fundamental frequency
    range = -2:0.002:2; #2000 samples
    index = 1;
    for t=range #por each t compute the value of y
        sum = 0;
        index2 = 1;
        for k=-N:N #for each N get the value of x(t)*H(jw)
            if(k!=0)
                sum += H(index2)*(j*(-1)^k/(k*pi))*exp(j*k*w0*t);
            endif
        index2 += 1;
        endfor
        Y(index) = sum;
        index += 1;
    endfor
endfunction
```

Com a utilização de um filtro passa alta, a saída quando a entrada é a onda "dente de serra" é:

Isso ocorre pois o filtro permite a passagem apenas de altas frequências, eliminando assim as formas de onda correspondentes aos primeiros coeficientes da série de fourier. Nos dois extremos de um período observa-se uma grande variação devido à descontinuidade da onda ”dente de serra“.

2.8 Item h

A Figura 3 mostra a resposta do sistema LIT do item (f) à onda “dente de serra” da Figura 1. Explique as diferenças entre o gráfico da Figura 3 e a resposta do sistema observada no item (g).

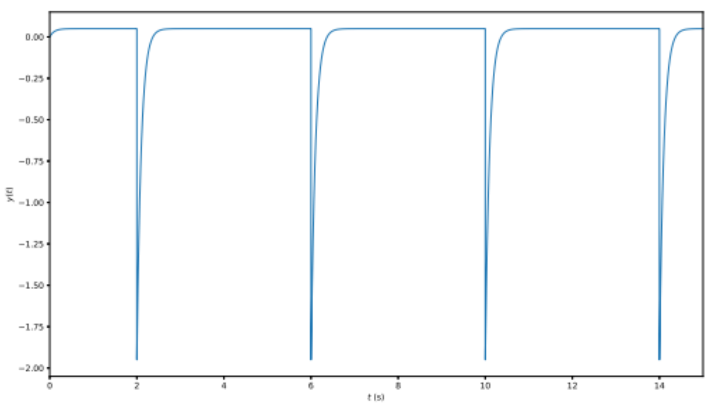


Figura 3: Resposta do circuito da Figura 2 ao sinal dente de serra da Figura 1.

Ao utilizar a representação por série de fourier como entrada é possível observar mais descontinuidades. Além disso observa-se uma menor variação nas extremidades (valor mínimo de cerca de -1.5 ao invés de -2) devido ao fenômeno de Gibbs.