Experimento 4 - EA 619

Introdução e objetivos

Esse experimento teve como objetivo a simulação de sistemas dinâmicos, a partir de equações diferenciais e equações de estado. O matlab foi utilizado em todos os itens e todos os códigos se encontram em anexo.

Atividade 1

Para essa atividade consideramos o sistema dinâmico representado pela equação diferencial: $y'''(t) + (2+6p)y''(t) + (9+12p)y'(t) + 18y(t) = 18x(t)$ sendo p um valor desconhecido e pertencente a faixa [0.1, 1.2].

O objetivo dessa atividade foi avaliar o valor do sobressinal Mp, dado por $(y_{max} - y_{final})/y_{final}$, por meio de simulações para vários valores de p.

Implementação no simulink:

Para isso implementamos um diagrama no simulink que representa a equação diferencial para condições iniciais nulas, considerando o bloco *step* como função de entrada (Figura 1).

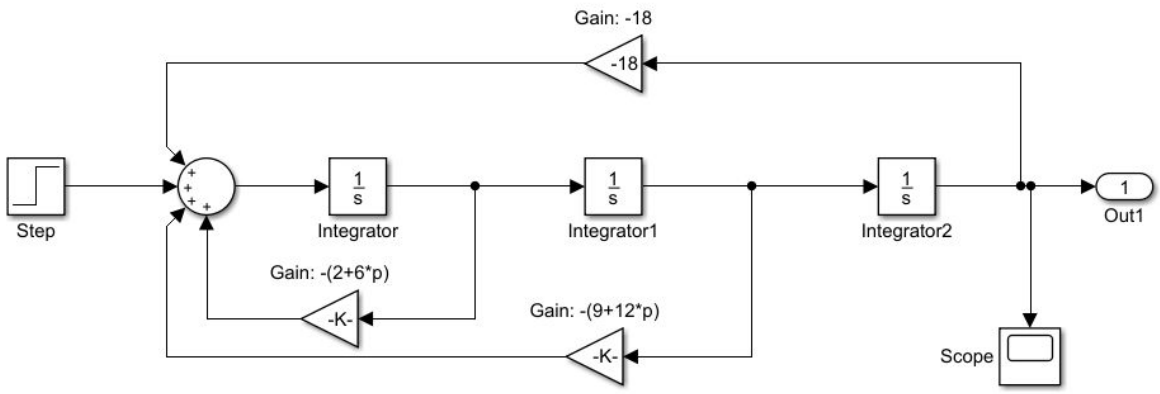


Figura 1: Diagrama no Simulink que implementa a equação diferencial para condições iniciais nulas

Script em matlab para 50 valores de p:

Fizemos a chamada desse diagrama para 50 diferentes valores de p, utilizando o comando *p = linspace(0.1,1.2,50).* Então, a partir do comando *simOut = sim('sistemaLinearOrdem3','SrcWorkspace','current','maxstep','0.1')* obtivemos o resultado para cada um dos valores de p (Figura 2). A partir dessa simulação percebe-se que conforme p aumenta, o sobressinal diminui. Os instantes de tempo e os valores de y são dados pelas variáveis *simOut.yout{1}.Values.Time* e *simOut.yout{1}.Values.Data*, respectivamente.

Maior valor de sobressinal:

Então, pudemos analisar o comportamento do sobressinal Mp. Ele assume seu valor máximo, 0.3333 , quando p=0.1 e no instante de tempo t = 1.4s.

Sobressinal menor que 7%:

O sobressinal é menor que 7%, quando o valor de p está entre 0.392 e 1.200.

Sobressinal mais próximo de 7% e função de transferência:

O valor de p que gera um sobressinal mais próximo de 7% é 0.392, com um sobressinal de 0.0652. Nesse caso, a partir da função de transferência foi possível determinar os pólos da função como -1.1755 + 2.7601i ; -1.1755 - 2.7601i e -2.00.

Faixa em que não ocorre sobressinal (menor que 1%):

Por fim, a faixa de p para a qual não há sobressinal, isto é, o sobressinal é menor que 1% é entre 0.549 e 1.200.

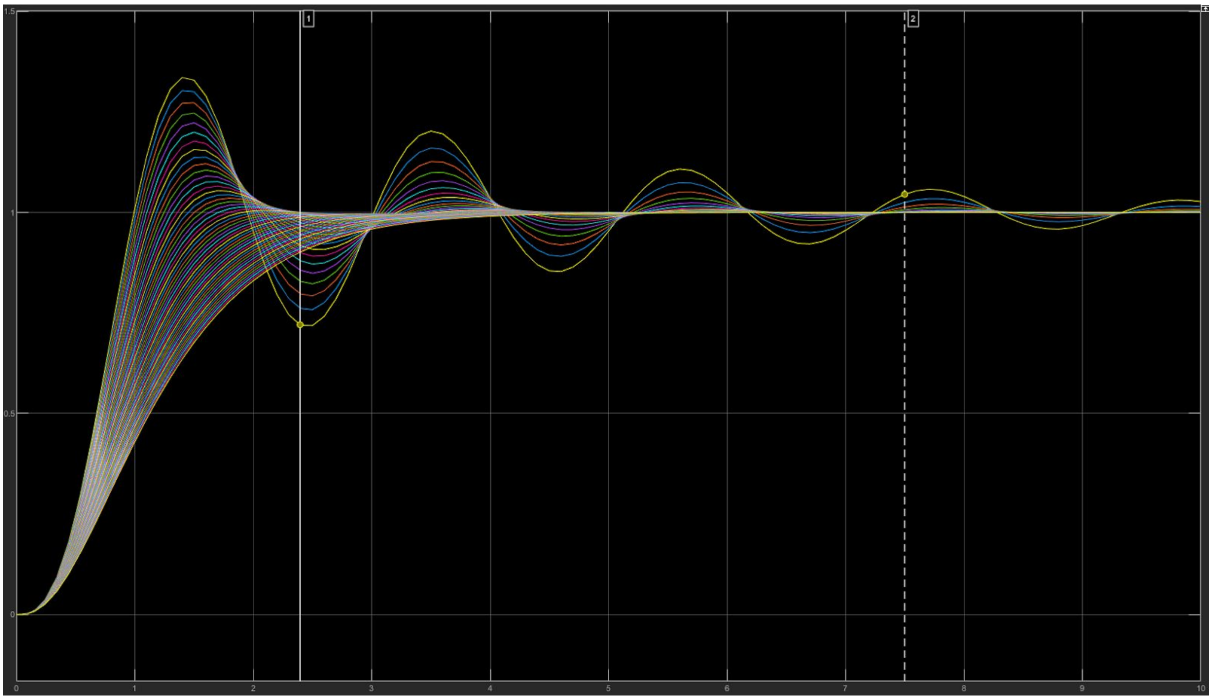
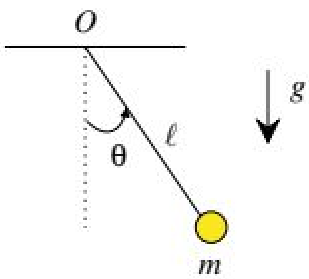


Figura 2: Resultado da simulação para 50 diferentes valores de p num intervalo de 10 segundos.

Atividade 2

O objetivo dessa atividade foi a análise da equação diferencial que representa um pêndulo simples (Figura 4):

$$\theta''(t) + \beta\theta'(t) + g/l\ sen(\theta(t)) = 0$$



em que β é um coeficiente de amortecimento proporcional à velocidade angular do pêndulo.

No caso, consideramos um pêndulo não amortecido, portanto $\beta = 0$ e a equação a ser analisada é:

$$\theta''(t) + g/l\, sen(\theta(t)) = 0$$

Figura 3: Pêndulo simples.

Representação em espaço de estados e pontos de equilíbrio:

Para obter a representação da equação em espaço de estados, definimos as variáveis v_1 e v_2 como:

$$v_1 = \theta(t)$$
$$v_2 = \theta'(t)$$

Então:

$$v_1' = v_2$$
$$v_2' = -g/l\, sen(\theta(t))$$

Com isso é possível obter os pontos de equilíbrio:

$$f_1 = v_1' = 0 \Rightarrow v_2 = 0$$
$$f_2 = v_2' = 0 \Rightarrow -g/l\, sen(v_1) = 0 \Rightarrow sen(v_1) = 0 \Rightarrow v_1 = n\pi$$

Os pontos de equilíbrio são dados por $(n\pi, 0)$, sendo n inteiro, isto é, $n = 0, \pm 1, \pm 2....$

Modelo linearizado em torno dos pontos de equilíbrio:

Adotando l=1, podemos então obter o modelo linearizado em torno dos pontos de equilíbrio $(0, 0)$ e $(\pi, 0)$

$$f_1 = x_2$$
$$f_2 = -g\, sen(x_1)$$
$$g = x_1$$

Sabendo que $A = \begin{bmatrix} df_1/dv_1 & df_1/dv_2 \\ df_2/dv_1 & df_2/dv_2 \end{bmatrix}$, então: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g\, cos(v_1) & 0 \end{bmatrix}$

A matriz B é nula nesse caso, uma vez que o vetor de entrada x é nulo.

Em $(0, 0)$:

$$v' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g & 0 \end{bmatrix} v$$

Em $(\pi, 0)$:

$$v' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g & 0 \end{bmatrix} v$$

Estabilidade dos sistemas linearizados:

Para $(0,0)$ temos $det(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ g & \lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + g = 0 \Rightarrow \lambda = \pm j\sqrt{g}$

Ou seja, nesse caso o comportamento é oscilatório e estável (autovalores sem parte real).

Para $(\pi,0)$ temos $det(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -g & \lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - g = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{g}$

Ou seja, nesse caso o comportamento é instável (autovalor com parte real positiva).

Simulação Pêndulo Simples (θ(0),θ'(0)) = (π/10,0):

Utilizando como condição inicial (θ(0),θ'(0)) = (π/10,0) temos as seguintes simulações utilizando o comando ode45 do matlab:

Link do vídeo: [pendSimples_pi_10.avi]

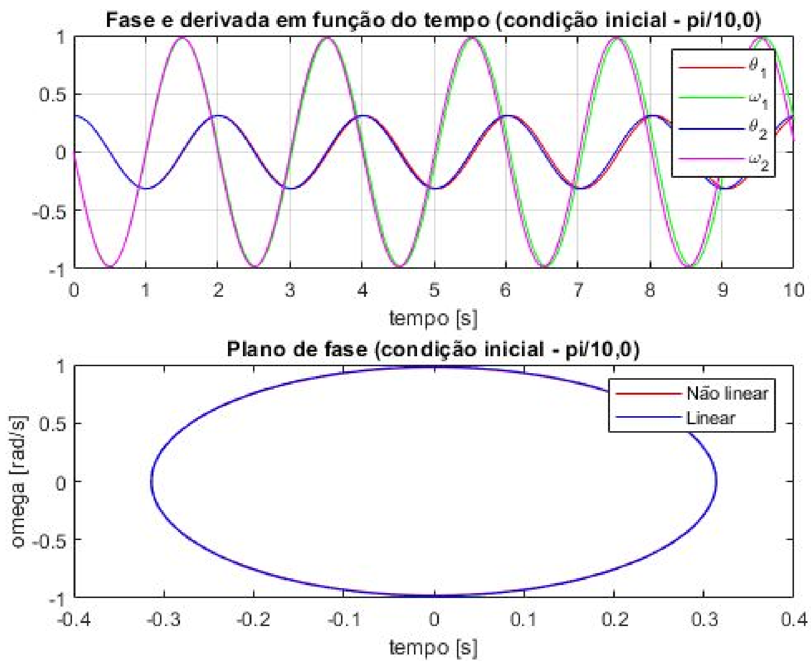


Figura 4: Simulação da fase e derivada em função do tempo utilizando a condição inicial (θ(0),θ'(0)) = (π/10,0).

Defasagem entre as simulações para (θ(0),θ'(0)) = (π/10,0):

A defasagem entre as simulações foi calculada calculando o módulo da diferença entre o valor de **Θ** para a simulação linear e não linear para um mesmo instante de tempo, através da função "defasagem" descrita no anexo da atividade 2.

A partir das simulações (Figura 4) podemos perceber que utilizando um ponto próximo ao ponto de linearização (0,0), as simulações lineares e não lineares não apresentam grandes diferenças (Figura 5) em um intervalo de 10 segundos, de forma que os intervalos que possuem defasagem superior a 2 graus são mostrados na Figura 6.

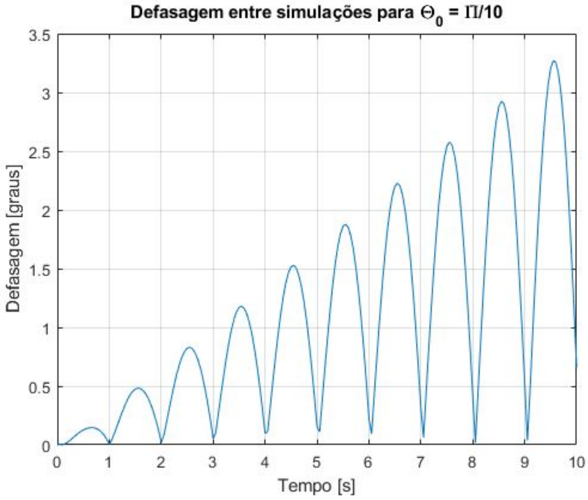


Figura 5: Defasagem angular entre as simulações linear e não linear para a condição inicial: (θ(0),θ'(0)) = (π/10,0).

Defasagem superior a 2 graus

Instante inicial t_0 [s]	Instante final t_f [s]
6.45	6.70
7.35	7.80
8.30	8.85
9.30	9.90

Figura 6: Tabela com intervalos temporais para os quais a defasagem entre a simulação linear e não linear é superior a 2 graus para (θ(0),θ'(0)) = (π/10,0).

Simulação Pêndulo Simples (θ(0),θ'(0)) = (π/4,0):

Utilizando como condição inicial (θ(0),θ'(0)) = (π/4,0) temos as seguintes simulações utilizando o comando ode45 do matlab:

Link do vídeo: pendSimples_pi_4.avi

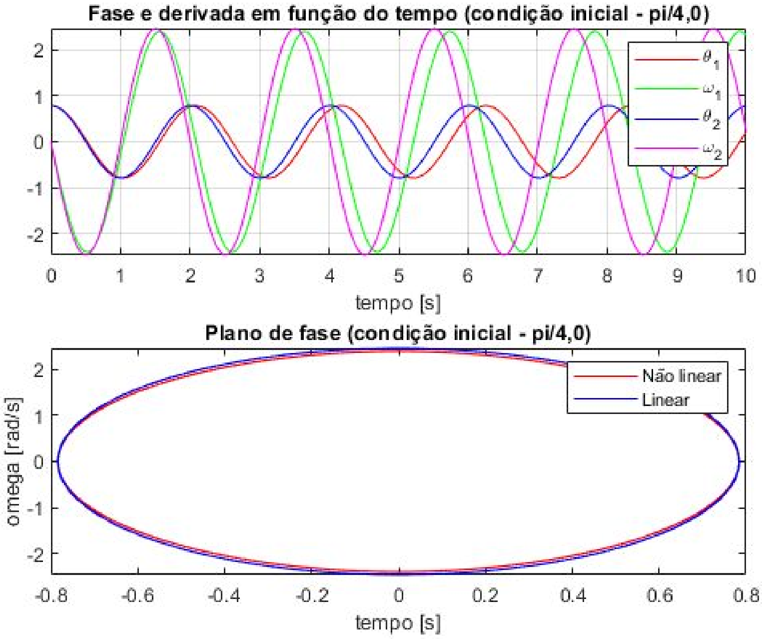


Figura 7: Simulação da fase e derivada em função do tempo utilizando a condição inicial (θ(0),θ'(0)) = (π/4,0).

Defasagem entre as simulações para (θ(0),θ'(0)) = (π/4,0):

A defasagem entre as simulações foi calculada calculando o módulo da diferença entre o valor de **Θ** para a simulação linear e não linear para um mesmo instante de tempo, através da função "defasagem" descrita no anexo da atividade 2.

A partir das simulações (Figura 7) podemos perceber que utilizando um ponto mais distante do ponto de linearização (0,0), as simulações lineares e não lineares apresentam grandes diferenças (Figura 8) em um intervalo de 10 segundos, de forma que os intervalos que possuem defasagem superior a 2 graus são mostrados na Figura 9. Diante disso, podemos concluir que o modelo linear aproxima adequadamente apenas em torno do ponto de linearização escolhido, apresentando grandes distorções para pontos iniciais mais distantes.

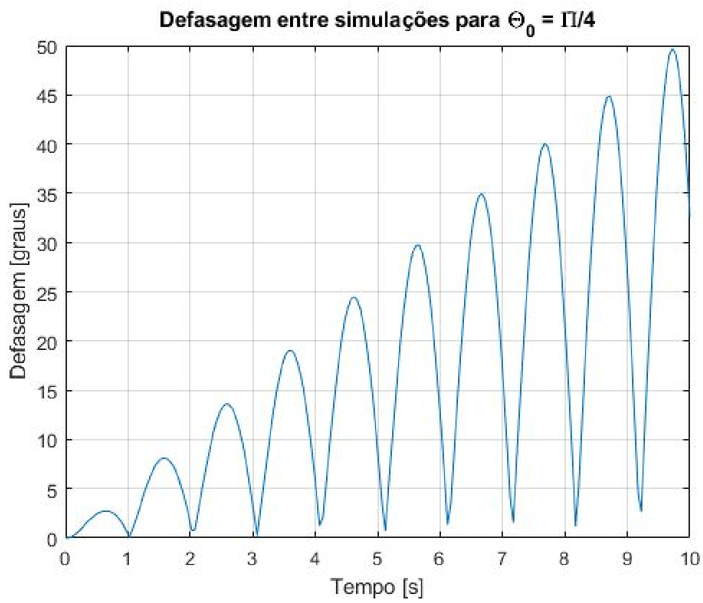


Figura 8: Defasagem angular entre as simulações linear e não linear para a condição inicial: (θ(0),θ'(0)) = (π/4,0).

Defasagem superior a 2 graus

Instante inicial t_0 [s]	Instante final t_f [s]
0.42	0.87
1.17	2.02
2.12	3.07
3.12	4.07
4.12	5.12
5.17	6.12
6.17	7.17
7.22	8.17
8.22	10.00

Figura 9: Tabela com intervalos temporais para os quais a defasagem entre a simulação linear e não linear é superior a 2 graus para (θ(0),θ'(0)) = (π/4,0).

Atividade 3

O objetivo dessa atividade foi analisar o comportamento de um pêndulo duplo, formado por duas massas (m1 e m2) ligadas entre si por l2 e com m1 ligado à origem por l1.

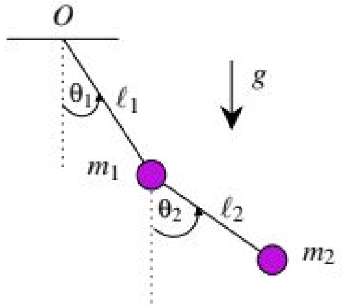


Figura 11: Pêndulo duplo.

As equações que modelam a dinâmica dos pêndulos foram dadas e são:

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1$$

$$\dot{\omega}_1 = \frac{-g(2m_1+m_2)\mathrm{sen}(\theta_1) - m_2 g\mathrm{sen}(\theta_1 - 2\theta_2) - 2\mathrm{sen}(\theta_1-\theta_2)m_2(\omega_2^2\ell_2 + \omega_1^2\ell_1\cos(\theta_1-\theta_2))}{\ell_1(2m_1+m_2-m_2\cos(2\theta_1-2\theta_2))}$$

$$\dot{\theta}_2 = \omega_2$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{2\mathrm{sen}(\theta_1-\theta_2)(\omega_1^2\ell_1(m_1+m_2) + g(m_1+m_2)\cos(\theta_1) + \omega_2^2\ell_2 m_2\cos(\theta_1-\theta_2))}{\ell_2(2m_1+m_2-m_2\cos(2\theta_1-2\theta_2))}$$

sendo ω_i e ω_i' a velocidade e aceleração do corpo i, respectivamente.

A partir do comando ode45 desenvolvemos um script para simular a dinâmica do pêndulo, considerando $m_1 = m_2 = 2$ e $L_1 = L_2 = 1$, e a condição inicial como $x_0 = [\pi/10\ 0\ \pi/10\ 0]$. Com isso obtivemos os gráficos que ilustram a dinâmica do pêndulo duplo (Figuras 12,13 e 14).

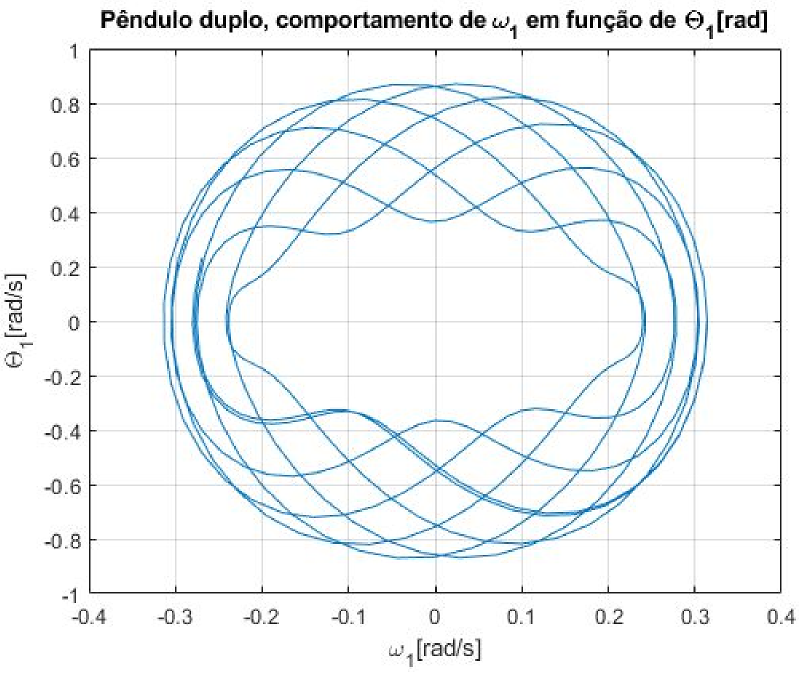


Figura 12: ω_1 em função de θ_1

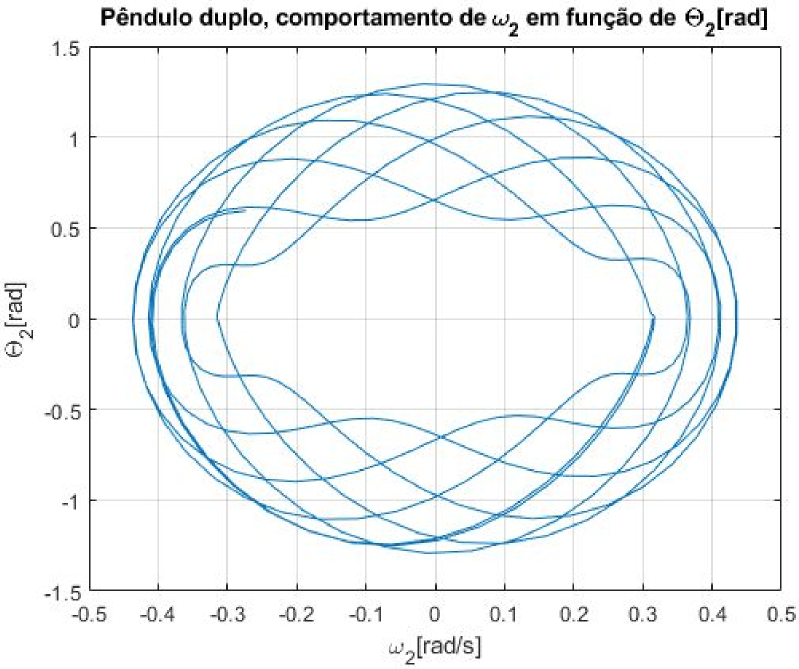


Figura 13: ω_2 em função de θ_2

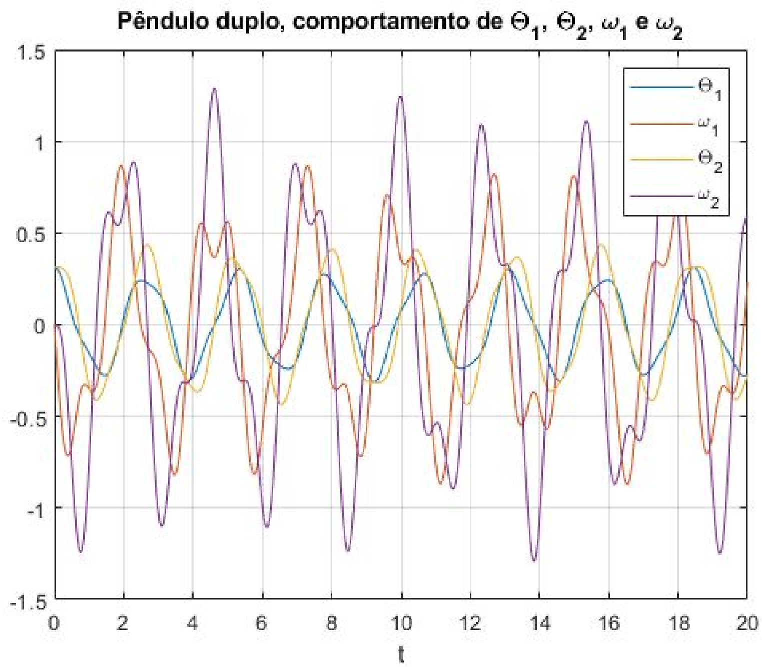


Figura 14: Comportamento do pêndulo duplo.

Adaptando o código da função GeraVideo da atividade 2 geramos um vídeo que simula a dinâmica do pêndulo duplo (pendDuplo.avi).