Aproksymacja funkcji w bazie jednomianów

Yuliya Zviarko

29.04.2024

Spis treści

1 Wprowadzenie do aproksymacji

Aproksymacja polega na przybliżeniu funkcji **Y(x)** inną funkcją **f(x)**, odnoszącą się do tego samego obszaru. W praktycznych zastosowaniach $Y(x)$ to zazwyczaj dyskretna funkcja postaci:

$$Y(x) = Y(x_i) = y_i, \text{ dla } i = 0, 1, ..., (M-1),$$

która reprezentuje dane pomiarowe dla M różnych wartości zmiennej niezależnej.

Zadaniem aproksymacji jest znalezienie najlepszego przybliżenia danych za pomocą funkcji aproksymującej $f(x)$.

$$f(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \ldots + a_{N-1}\phi_{N-1}(x), \tag{1}$$

gdzie $\phi_i(x)$, dla $i = 0, 1, ..., (N-1)$, są **funkcjami bazowymi**,
a_i, dla $i = 0, 1, ..., (N-1)$, to **poszukiwane parametry funkcji**.

Parametry te są ustalane na podstawie przyjętego kryterium, na przykład minimalizacji różnicy między $Y(x)$ a $f(x)$, co w przypadku funkcji dyskretnych jest równoważne kryterium najmniejszych kwadratów.

1.1 Aproksymacja liniowa

Aproksymacja liniowa polega na znalezieniu współczynników a_i funkcji aproksymującej $F(x)$ w postaci kombinacji liniowej funkcji bazowych **(1)**.

Wymagamy, aby funkcja $F(x)$ spełniała warunek minimalizacji odległości od funkcji $f(x)$:

$$||f(x) - F(x)|| = \min \tag{2}$$

Wybór podprzestrzeni i bazy zależy od charakteru problemu. Najczęściej wykorzystuje się podprzestrzeń wielomianów stopnia m, gdzie baza składa się z:

$$1, x, x^2, \ldots, x^m \tag{3}$$

lub podprzestrzeń funkcji trygonometrycznych z bazą:

$$1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \ldots, \sin(kx), \cos(kx) \tag{4}$$

Można także wybrać podprzestrzeń funkcji, których własności precyzyjnie odpowiadają wymaganiom problemu, na przykład:

$$\exp(a_0, a_1 x, a_2 x^2) \tag{5}$$

Aproksymacja liniowa jest powszechnie stosowana w różnych dziedzinach, gdzie potrzebne jest przybliżenie złożonych funkcji poprzez kombinację prostszych funkcji bazowych.

1.2 Aproksymacja średniokwadratowa

Dla funkcji ciągłej $f(x)$ określonej w przedziale $[a, b]$, poszukujemy minimum całki:

$$||F(x) - f(x)|| = \int_a^b w(x)[F(x) - f(x)]^2 dx, \tag{6}$$

gdzie $w(x)$ jest funkcją wagową.

Innym podejściem jest poszukiwanie sumy, gdy funkcja jest określona na dyskretnym zbiorze n+1 punktów (metoda najmniejszych kwadratów):

$$||F(x) - f(x)|| = \sum_{i=0}^{n} w(x_i)[F(x_i) - f(x_i)]^2 dx \tag{7}$$

$w(x_i) \geq 0$ dla $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

1.2.1 Aproksymacja średniokwadratowa w bazie jednomianów

Jako bazę przyjmujemy ciąg jednomianów:

$$1, x, x^2, \ldots, x^m.$$

Warunek minimum przyjmuje postać:

$$\sum_{j=0}^{n} \left(f(x_j) - \sum_{i=0}^{m} \alpha_i x_j^i \right) x_k^k = 0, \tag{8}$$

dla k = 0, 1, 2, ..., m

Po zmianie kolejności sumowania i wprowadzeniu oznaczeń:

$$\sum_{j=0}^{n} f(x_j) x_j^k = \sum_{j=0}^{m} \alpha_i \left(\sum_{i=0}^{n} x_j^{i+k} \right) \tag{9}$$

$$\begin{aligned} g_{ik} &= \sum_{j=0}^{n} x_j^{i+k} \\ \rho_k &= \sum_{j=0}^{n} x_j^k f(x_j) \end{aligned} \tag{10}$$

otrzymujemy następujący układ normalnych:

$$\sum_{j=0}^{m} a_i g_{ik} = \rho_k \Rightarrow G^T a = \rho \tag{11}$$

a) Jeżeli $m = n$, wtedy funkcja aproksymująca pokrywa się z wielomianem interpolującym.

b) Stopień wielomianu aproksymującego powinien być znacznie mniejszy od liczby węzłów x_k, aby "wygładzić"ewentualne błędy pomiarowe.

c) Dla $m \geq 6$, macierz układu może się stać źle uwarunkowaną. Najprostszym rozwiązaniem jest wtedy zastosowanie silniejszej arytmetyki.

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Celem zadania było aproksymowanie funkcji

$$g(x) = \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) = \exp\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2\right), \tag{12}$$

gdzie:

- a_0 zostało wyznaczone jako $-\frac{x_0^2}{2\sigma^2}$,
- a_1 obliczono jako $\frac{x_0}{\sigma^2}$,
- a_2 zostało ustalone jako $-\frac{1}{2\sigma^2}$.

Po zlogarytmowaniu funkcji $g(x)$ uzyskano zależność wielomianową:

$$f(x) = \ln(g(x)) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2. \tag{13}$$

Można ją było aproksymować w bazie jednomianów. Wybrano kanoniczną bazę jednomianów $\{\varphi_i\} = \{1, x, x^2, x^3\}$ i poszukiwano kombinacji liniowej, takiej, że:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m=4} b_i x^{i-1} = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + b_4 x^3. \tag{14}$$

Dzięki temu można było utworzyć funkcję $G(x)$, która była aproksymacją funkcji $g(x)$:

$$g(x) \approx G(x) = \exp(F(x)) = \exp(b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + b_4 x^3). \tag{15}$$

2.2 Wykonanie zadania

Żeby wyznaczyć współczynniki b_i, rozwiązano poniższe równanie:

$$\sum_{j=0}^{N-1}\left[f_j - \sum_{i=0}^{m-1} b_i x_j^{i-1}\right] x_j^{k-1} = 0, \tag{16}$$

gdzie:

- k - indeks elementu bazy, zmieniał się od 0 do m,
- j - indeks węzła aproksymacji, zmieniał się od 0 do N.

Rozdzielając składniki odejmowania, otrzymano:

$$\sum_{j=1} f_j x_j^{k-1} = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{N} x_j^{i+k-2}\right) \tag{17}$$

Powyższe równanie zostało zapisane jako:

$$r_k = \sum_{i=1}^{m} b_i g_{ik}, \tag{18}$$

gdzie:

$$r_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j x_j^k \tag{19}$$

$$g_{ik} = \sum_{j=0}^{N-1} x_j^{i+k}. \tag{20}$$

Uwzględniając wszystkie elementy bazy k, otrzymano układ równań:

$$\mathbf{b}^T \mathbf{G} = \mathbf{r}^T, \tag{21}$$

po transpozycji:

$$\mathbf{G}^T \mathbf{b} = \mathbf{r}. \tag{22}$$

Ponieważ macierz $\mathbf{G}$ była symetryczna, ostateczne równanie miało postać:

$$\mathbf{G}\mathbf{b} = \mathbf{r}. \tag{23}$$

Do rozwiązania tego równania wykorzystano rozkład LU z biblioteki Numerical Recipes.

Dla funkcji (12) przyjęto parametry: $x_0 = 2$ oraz $\sigma = 4$. Aproksymacja została przeprowadzona w zakresie $x \in [-3\sigma + x_0, 3\sigma + x_0]$.

- Dla ustalonego N obliczono odległość pomiędzy sąsiednimi węzłami siatki. Węzły zindeksowano od 1 do N. Następnie stablicowano wartości funkcji $g(x)$ oraz $f(x)$ w tych węzłach siatki.

- Następnie przeprowadzono aproksymację funkcji (12) w bazie jednomianów o długości $m = 4$ dla $N = 11$, 21 oraz 101 węzłów. Otrzymane współczynniki b_i porównano z odpowiadającymi wartościami al. Dla $N = 11$ i $N = 101$ wykonano wykresy funkcji $g(x)$ oraz $G(x)$ na jednym rysunku.

- Przeprowadzono aproksymację funkcji $g2(x) = g(x)(1 + \delta(x))$, gdzie funkcja $g(x)$ była zdefiniowana wzorem (12) z identycznymi parametrami. Funkcję $\delta(x)$ określono jako $\alpha \cdot (X - 0.5)$, gdzie $\alpha = 0.1$, a zmienna X była liczbą pseudolosową z przedziału $[0, 1]$.
  Aproksymację wykonano dla $N = 11$, 21, 51 oraz 101 węzłów. Porównano wartości b_i z odpowiadającymi im wartościami. Wyniki zostały zapisane do plików tekstowych w celu stworzenia wykresów.

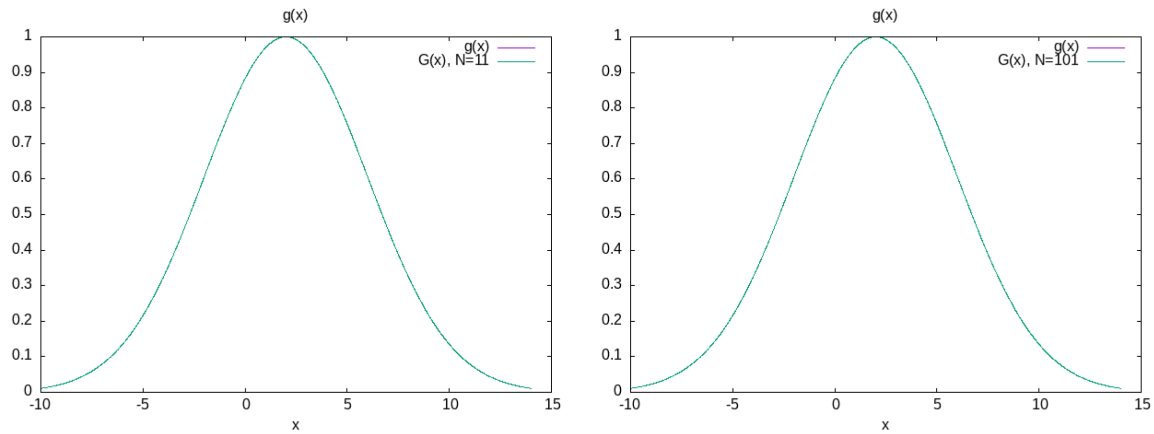
3 Wyniki

Współczynniki a_i funkcji $g(x) = exp(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)$ oraz współczynniki b_i funkcji aproksymującej $G(x)$:
$a_0 = -0.125000$
$a_1 = 0.125000$
$a_2 = -0.031250$

n = 11 $b_1 = -0.12500065565109, b_2 = 0.12499987334013, b_3 = -0.03125000000000, b_4 = 0.00000000128784.$

n = 21 $b_1 = -0.12500071525574, b_2 = 0.12500020861626, b_3 = -0.03124998323619, b_4 = -0.00000000218279.$

n = 101 $b_1 = -0.12500010430813, b_2 = 0.12499989569187, b_3 = -0.03125000000000, b_4 = 0.00000000086584.$



Rysunek 1: Wykres funkcji $g(x) = exp(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)$ oraz funkcji aproksymującej $G(x)$ dla $N = 11$ i $N = 101$ węzłów.

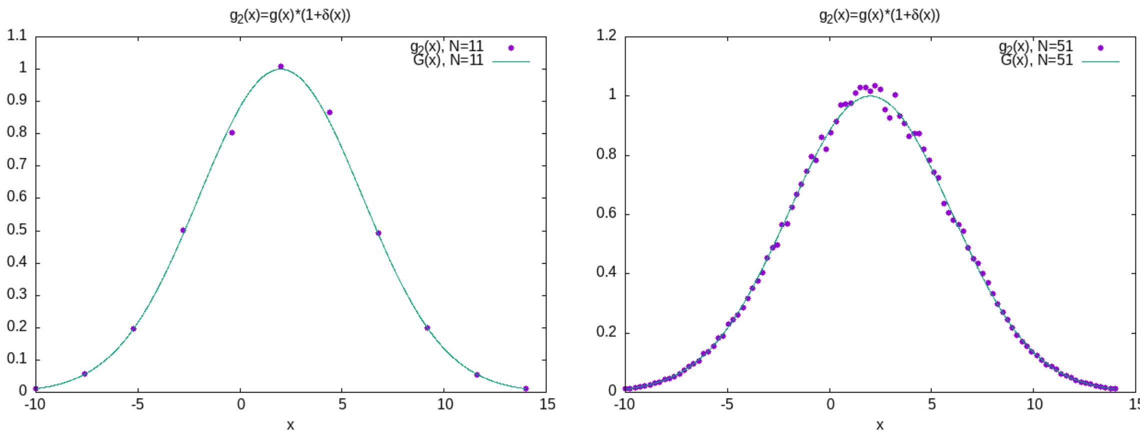
Współczynniki a_i funkcji $g_2(x)$ oraz współczynniki b_i funkcji aproksymującej $G(x)$.
$a_0 = -0.125000$,
$a_1 = 0.125000$,
$a_2 = -0.031250$.

n = 11 $b_1 = -0.15143294632435, b_2 = 0.12313702702522, b_3 = -0.03093185462058, b_4 = 0.00000316685328$.

n = 21 $b_1 = -0.14496034383774, b_2 = 0.12599420547485, b_3 = -0.03084357082844, b_4 = -0.00002326334652$.

n = 51 $b_1 = -0.13677532970905, b_2 = 0.12165880948305, b_3 = -0.03117205761373, b_4 = 0.00002924354339$.

n = 101 $b_1 = -0.13521306216717, b_2 = 0.13173130154610, b_3 = -0.03088952228427, b_4 = -0.00007369123341$.



Rysunek 2: Wykres funkcji $g_2(x_i) = g(x_i)(1 + \delta(x_i))$ oraz funkcji aproksymującej $G(x)$ dla $N = 11$ i $N = 101$ węzłów.

4 Wnioski

- Aproksymacja w bazie jednomianów wykazała dużą skutecznością już przy niewielkiej liczbie węzłów. Nawet przy ograniczonej ilości danych funkcja aproksymująca $G(x)$ doskonale pokryła funkcję $g(x)$.

- Metoda aproksymacji średnio-kwadratowej, gdzie funkcja aproksymująca nie musi przechodzić przez wszystkie zadane punkty, okazała się odporna na szum w danych. Mimo pewnych odchyleń, kształt funkcji został zachowany, a nie pojawiły się niepożądane oscylacje.

- W przypadku aproksymacji funkcji zaburzonej, wyznaczone współczynniki różniły się nieznacznie od oryginalnych. Niemniej jednak, współczynnik b_3 pozostał bliski zeru, co wskazuje na zachowanie pewnej struktury funkcji.

- Aproksymacja w bazie jednomianów wykazała się dobrą elastycznością w radzeniu sobie z danymi obarczonymi błędami pomiarowymi. <etoda ta pozwoliła na uzyskanie satysfakcjonujących wyników.