Sprawozdanie 4
Uogólniony (symetryczny) problem własny – wyznaczenie modów własnych struny w 1D

Yuliya Zviarko

18.03.2024

1 Wstęp teoretyczny

1.1 Uogólniony problem własny:

Uogólniony problem własny zdefiniowany jest w następujący sposób:

$$Ax = \lambda Bx, \tag{1}$$

gdzie:
A i B są macierzami kwadratowymi,
λ – wartość własna,
x – wektor własny.

1.2 Sposób rozwiązania uogólnionego problemu własnego

Rozwiązujemy ten układ przekształcając go do zwykłego problemu własnego poprzez pomnożenie obu stron równania przez macierz odwrotną $\boldsymbol{B^{-1}}$, jeśli istnieje. Wtedy otrzymujemy:

$$B^{-1}Ax = \lambda x, \tag{2}$$

Następnie możemy wprowadzić nową macierz $\boldsymbol{C = B^{-1}A}$ i otrzymujemy standardowy problem własny:

$$Cx = \lambda x. \tag{3}$$

Zatem:

$$B^{-1}Ax = Cx = \lambda x. \tag{4}$$

Dla znalezienia macierzy $\boldsymbol{B^{-1}}$ korzystamy z rozkładu $\boldsymbol{LL^T}$:

$$\begin{gathered} B = LL^T \\ BB^{-1} = I = LL^T(L^T)^{-1}L^{-1} \\ B^{-1} = (L^T)^{-1}L^{-1} \end{gathered} \tag{5}$$

Dalszym krokiem będzie szukanie macierzy **G**, podobną do $\boldsymbol{B^{-1}A}$:

$$L^T(B^{-1}A)(L^T)^{-1} = L^T(L^T)^{-1}L^{-1}A(L^T)^{-1} = L^{-1}A(L^T)^{-1} = G \tag{6}$$

I otrzymamy:

$$Gy = \lambda y, \tag{7}$$

gdzie:
G – macierz symetryczna i posiada identyczne widmo wartości własnych jak ***A***, ale inne wektory własne.

Żeby znaleźć macierz ***G***, musimy najpierw zdefiniować i wyznaczyć macierz ***F***:

$$FL^T = A \Rightarrow LF^T = A^T = A. \tag{8}$$

Stąd ***G*** i otrzymany układ równań wyglądają następująco:

$$\begin{gathered} G = L^{-1}F, \\ LG = F. \end{gathered} \tag{9}$$

Wektory własne macierzy wyznaczamy rozwiązując poniższy układ równań:

$$L^T x = y. \tag{10}$$

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu:

Na laboratorium zajmowaliśmy się określaniem częstotliwości własnych drgań struny, zależnych od czasu i położenia. Proces ten sprowadzał się do rozwiązania równania:

$$\frac{N}{\rho(x)}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}. \tag{11}$$

Kolejnym krokiem było dokonanie separacji zmiennych, podstawiając $\psi(x,t) = u(x)\theta(t)$, a następnie podzieliliśmy równanie przez iloczyn $u\theta$, co spowodowało przekształcenie go w równanie zależne tylko od zmiennej położeniowej:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda\frac{\rho(x)}{N}u, \tag{12}$$

$$(\lambda = \omega^2, \qquad \omega - częstość\ własna\ drgań).$$

Następnie ustaliliśmy siatkę równoległych węzłów:

$$x = x_i, \tag{13}$$

$$u(x) = u_i, \tag{14}$$

$$\rho(x) = \rho_i, \tag{15}$$

oraz odległość między węzłami Δx wynoszącą:

$$\Delta x = \frac{L}{n+1}, \tag{16}$$

gdzie **L** – długość struny, a ich położenie w przestrzeni jest wyznaczono w następujący sposób:

$$x_i = -\frac{L}{2} + \Delta x \cdot (i+1), i = 0,1,2, \dots, n-1, \tag{17}$$

Kolejnym krokiem było zastosowanie dyskretyzacji równania (12), poprzez zastąpienie drugiej pochodnej trójpunktowym ilorazem różnicowym centralnym:

$$-\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta x^2} = \lambda \frac{\rho_i}{N} u_i, \tag{18}$$

Równanie (18) da się zapisać w innej postaci:

$$A\boldsymbol{u} = \lambda B\boldsymbol{u}, \tag{19}$$

gdzie:
$\boldsymbol{A}$ ***i*** $\boldsymbol{B}$ – macierze,
$\boldsymbol{u}$ – wektor.

W zadaniu elementy macierzy byli zdefiniowany tak jak pokazano poniżej:

$$A_{i,j} = \frac{-\delta_{i,j+1} + 2\delta_{i,j} - \delta_{i,j-1}}{\Delta x^2}, \tag{20}$$

$$B_{i,j} = \frac{\rho_i}{N} \delta_{i,j}, \tag{21}$$

gdzie:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \tag{22}$$

jest deltą Kroneckera.

2.2 Wykonanie zadania:

Przyjęliśmy następujące parametry:

$$L = 10,$$
$$n = 200,$$
$$\rho(x) = 1 + 4\alpha x^2,$$
$$N = 1.$$

Następnie obliczyliśmy wartości własne oraz odpowiadające im wektory własne dla $\boldsymbol{\alpha}$ zawartego w przedziale $[\mathbf{0}, \mathbf{100}]$ z krokiem $\boldsymbol{\Delta\alpha} = \mathbf{2}$ przy użyciu funkcji z biblioteki GSL:

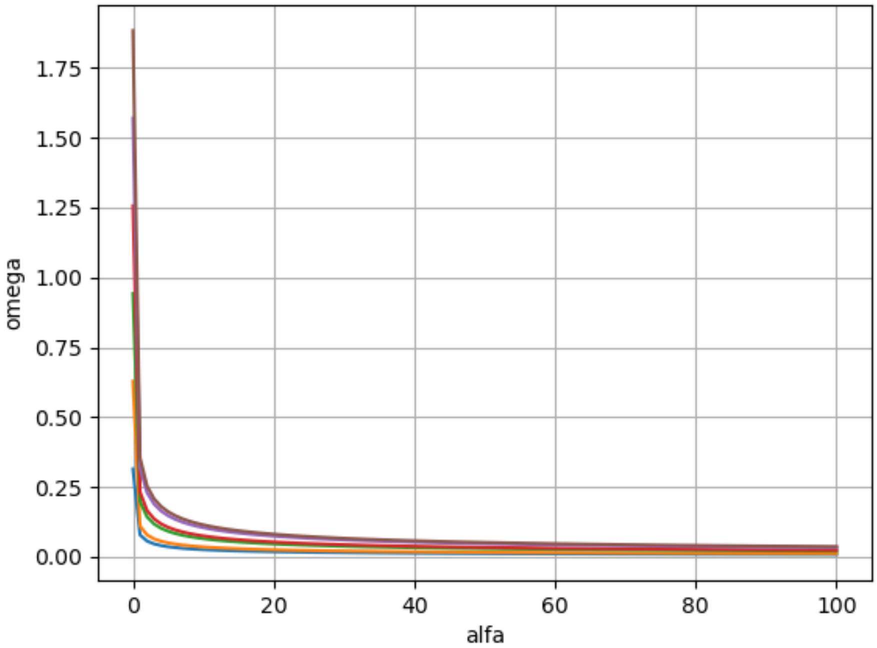
```
int gsl_eigen_gensymmv (gsl_matrix *A, gsl_matrix *B, gsl_vector *eval,
gsl_matrix *evec, gsl_eigen_gensymm_workspace *w)
```

Następnie posortowaliśmy wartości własne oraz wektory własne korzystając z funkcji:

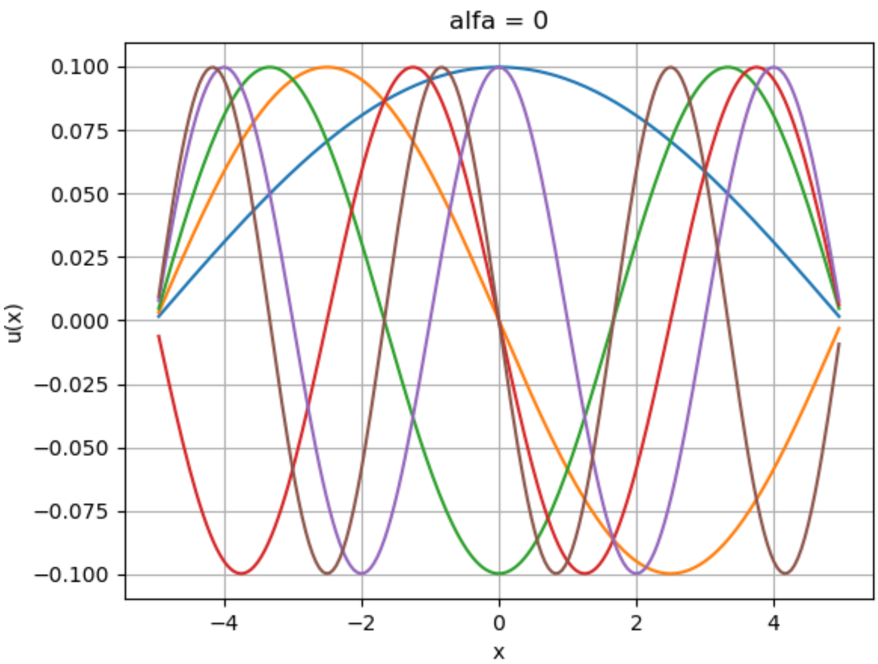
```
int gsl_eigen_gensymmv_sort (gsl_vector *eval, gsl_matrix *evec,
gsl_eigen_sort_t sort_type);
```

Dla każdej wartości $\boldsymbol{\alpha}$ wybraliśmy 6 najmniejszych wartości własnych i zapisaliśmy ich pierwiastki do pliku. Podobnie postąpiliśmy z wektorami, wypisując 6 wektorów odpowiadających 6 najmniejszym wartościom własnym, jednak tylko dla wartości $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ oraz $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{100}$.

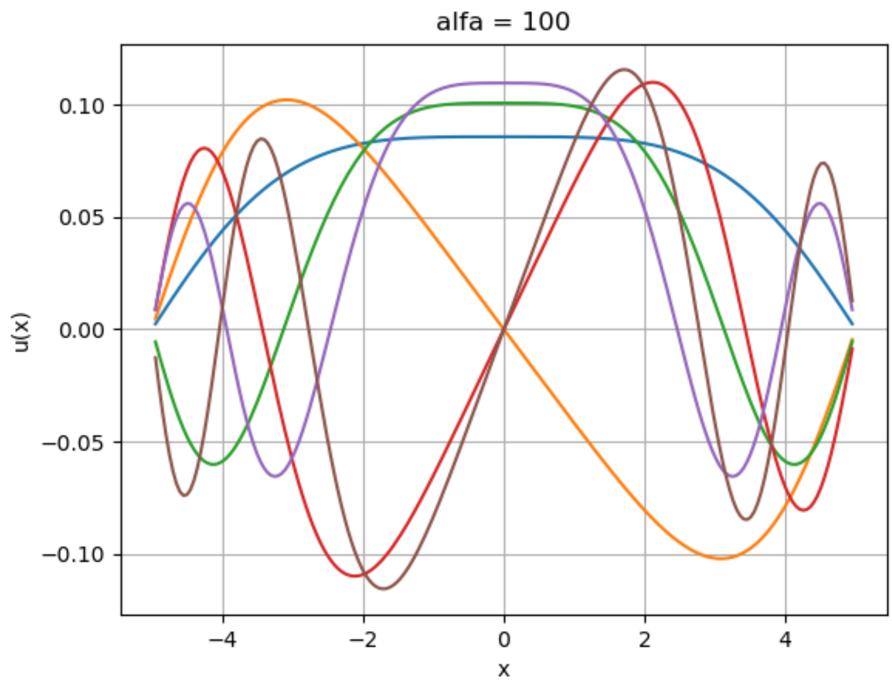
3 Wyniki



Rysunek 1. Wykres wartości pierwiastków z 6 najmniejszych wartości własnych, które zostały wyznaczone w zależności od parametru α, czyli $\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$.



Wykres 2. Wykres wektorów własnych odpowiadających 6 najmniejszym wartościom własnym, gdzie $\alpha = 0$.



Wykres 3. Wykres wektorów własnych odpowiadających
6 najmniejszym wartościom własnym, gdzie $\alpha = 100$.

4 Wnioski na podstawie otrzymanych wyników

Analizując wyniki naszego badania nad uogólnionym problemem własnym dla macierzy niesymetrycznych, możemy wyciągnąć kilka wniosków:

1. Przyjęta metoda sprawdziła się dla małych wymiarów macierzy. W przypadku większych macierzy, potencjalnie bardziej wydajna może być metoda iteracyjna.

2. Proces wyznaczania wartości i wektorów własnych macierzy niesymetrycznych bezpośrednio wymaga rozwiązania układu równań liniowych dla każdej wartości własnej, co może być czasochłonne i wymagać znacznych zasobów obliczeniowych.

3. Precyzja wyznaczonych wartości i wektorów własnych może być ograniczona przez błędy numeryczne wynikające z obliczeń komputerowych.

W kontekście naszej analizy, zastosowana metoda dostarczyła zadowalające wyniki w stosunkowo krótkim czasie. Warto jednak zaznaczyć, że złożoność obliczeniowa metody bezpośredniej do wyznaczania wektorów i wartości własnych macierzy niesymetrycznych rośnie znacząco wraz z rozmiarem macierzy, co sugeruje rozważenie metod iteracyjnych dla większych zbiorów danych.