# Interpolacja funkcjami sklejanymi w bazie

Yuliya Zviarko

22 kwietnia 2024

## Spis treści



## 1 Wstęp teoretyczny

### 1.1 Interpolacja funkcjami sklejanymi w bazie

Interpolacja funkcjami sklejanymi w bazie jest metodą numeryczną służącą do przybliżania nieznanej funkcji za pomocą funkcji wielomianowych o niskim stopniu, zwanych funkcjami sklejanymi. W przeciwieństwie do tradycyjnej interpolacji wielomianowej, gdzie jeden wielomian jest stosowany na całym przedziale interpolacji, interpolacja sklejana wykorzystuje osobne funkcje wielomianowe dla każdego odcinka między sąsiednimi węzłami. Te funkcje są połączone w punktach węzłowych, tworząc jedną ciągłą funkcję na całym przedziale interpolacji.
Dla przedziału $[a, b]$, zawierającego wszystkie $n + 1$ **węzły interpolacji**, tworzy się $m$ przedziałów:

$$\begin{aligned} &t_0, \ldots, t_1, \\ &t_1, \ldots, t_2, \\ &\ldots, \\ &t_{m-1}, \ldots, t_m, \end{aligned} \tag{1}$$

takich, że

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b, \tag{2}$$

i w każdym z nich interpoluje się funkcję **wielomianem interpolacyjnym** (najczęściej niskiego stopnia). „Połączenie" tych wielomianów ma utworzyć **funkcję sklejaną**.

Funkcja sklejana $S$ jest funkcją interpolującą funkcję $F$, jeżeli:

$$F(x_i) = S(x_i) \text{ dla } x_i, i \in 0, 1, \ldots, n \tag{3}$$

są węzłami interpolacyjnymi funkcji $F$.

Metoda interpolacji funkcjami sklejanymi pozwala uniknąć problemów związanych z oscylacjami, które mogą wystąpić przy interpolacji wielomianowej wysokiego stopnia. Ponadto, funkcje sklejane mają zazwyczaj lepsze własności numeryczne, takie jak stabilność i dokładność, szczególnie w przypadku

skomplikowanych danych.
Interpolacja sklejana wymaga, aby przedziały między węzłami były powiązane ze sobą, aby funkcja interpolacyjna zachowywała pewną regularność i gładkość. Istnieje wiele różnych rodzajów funkcji sklejanych, takich jak funkcje sklejane liniowe, kwadratowe, sześcienna, czy też bardziej zaawansowane funkcje sklejane np. funkcje B-spline.

## 1.2 Przebieg interpolacji funkcjami sklejanymi w bazie

Załóżmy, że węzły są równomiernie rozmieszczone w przedziale $[a, b]$:

$$x_i = x_0 + ih, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{4}$$

W celu interpolacji wykorzystujemy bazę funkcji sklejanych, które są konstruowane na podstawie funkcji kawałkami wielomianowych. Te funkcje bazowe, oznaczone jako $\Phi_i^3(x)$, stanowią podstawę interpolacji. Są one definiowane jako:

$$\Phi_i^3(x), \quad i = -1, 0, 1, \ldots, n, n+1. \tag{5}$$

$$\Phi_i^3(x) = \frac{1}{h^3}\begin{cases} (x - x_{i-2})^3 & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}) \\ h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) + 3h(x - x_{i-1})^2 - 2(x - x_{i-1})^3 & x \in [x_{i-1}, x_i) \\ h^3 + 3h^2(x_{i+1} - x) + 3h(x_{i+1} - x)^2 - 2(x_{i+1} - x)^3 & x \in [x_i, x_{i+1}) \\ (x_{i+2} - x)^3 & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}) \\ 0 & x \notin [x_{i-3}, x_{n+3}] \end{cases} \tag{6}$$

$h$ jest odległością między sąsiednimi węzłami.

Interpolowaną funkcję można wyrazić jako kombinację liniową tych funkcji bazowych:

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i \Phi_i^3(x), \quad x \in [a, b], \tag{7}$$

gdzie współczynniki $c_i$ zależą od interpolowanej funkcji oraz warunków brzegowych.
Warunki interpolacyjne można wyrazić w postaci układu równań, gdzie współczynniki $c_i$ są rozwiązywane:

$$c_{i-1} + 4c_i + c_{i+1} = y_i \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Dodatkowo, aby uwzględnić warunek pierwszej pochodnej, musimy rozważyć dodatkowe dwa równania:

$$-c_{-1} + c_1 = \frac{h}{3}\alpha_1 \tag{9}$$

$$-c_{n-1} + c_{n+1} = \frac{h}{3}\beta_1 \tag{10}$$

Po wyeliminowaniu współczynników $c_{-1}$ i $c_{n+1}$ otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & 0 & \\ & 1 & 4 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + \frac{h}{3}\alpha \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n - \frac{h}{3}\beta \end{bmatrix} \tag{11}$$

## 2 Zadanie do wykonania

### 2.1 Opis problemu

Zadaniem, które mieliśmy wykonać, było napisanie programu realizującego interpolację funkcjami sklejanymi w bazie. Wartość funkcji interpolacyjnej została określona za pomocą wzoru:

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i \Phi_i^3(x), \quad x \in [x_{\min}, x_{\max}], \tag{12}$$

gdzie:

$$\text{sklejki kubiczne są zdefiniowane poprzez wzór (6),}$$
$$x_{min} = -5$$
$$x_{max} = 5$$

Dla warunków dotyczących pierwszej pochodnej: $\alpha = \frac{df}{dx}\Big|_{x=x_{\min}}$, $\beta = \frac{df}{dx}\Big|_{x=x_{\max}}$, zachodzi:

$$-c_0 + c_2 = \frac{h}{3}\alpha, \tag{13}$$

$$-c_{n-1} + c_{n+1} = \frac{h}{3}\beta. \tag{14}$$

Układ równań był przeprowadzony do postaci jak pokazano we wzorze (11).

### 2.2 Wykonanie zadania

Przeprowadzono interpolację dwóch funkcji:

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x^2} \tag{15}$$

oraz

$$f_2(x) = \cos(2x) \tag{16}$$

Do rozwiązania układu równań wykorzystano rozkład LU. W tym celu użyto funkcji z biblioteki "Numerical Recipes". Aby wyznaczyć położenie docelowych węzłów oraz wartości funkcji w tych punktach, zaimplementowano poniższy algorytm:

$$\begin{array}{l} \text{float } h, x_{\min}, x_{\max}; \\ \text{int } n = ...; \\ \text{double } xx[n+6]; \\ \text{double* } xw = \&xx[2]; \\ h = \frac{(x_{\max}-x_{\min})}{(n-1)}; \\ \text{for (int } i=-2; i \le (n+3); i++) \quad xw[i] = x_{\min} + h \times (i-1); \\ \text{for (int } i=0; i<n; i++) \quad yw[i] = \text{fun}(xw[i+1]); \end{array} \tag{17}$$

***fun*** jest funkcją, która zwraca wartość funkcji w punkcie.

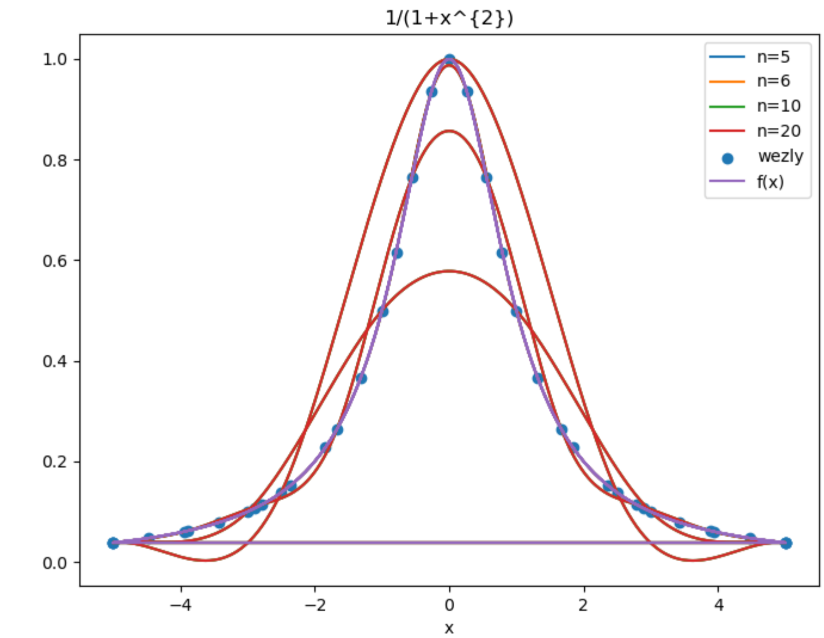
Dzięki temu węzły o indeksach 0 i $n-1$ leżą na krańcach przedziału interpolacji. Na brzegach obliczono pochodne, używając wzoru:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x}, \tag{18}$$

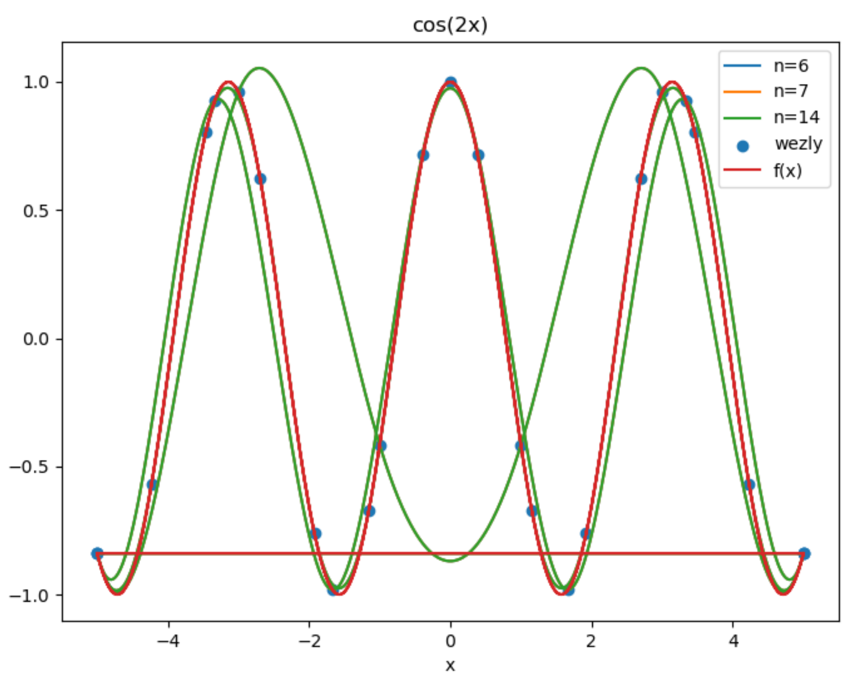
$\Delta x$ przyjęto jako 0.01.

Przeprowadzono interpolację w przedziale $x \in [-5, 5]$. Funkcję $f_1(x)$ interpolowano dla liczby węzłów równej kolejno: 5, 6, 10, 20, a $f_2(x)$ dla 6, 7, 14.

### 2.3 Wyniki




Rysunek 1: Wykresy funkcji interpolowanej $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ oraz funkcji $s(x)$




Rysunek 2: Wykresy funkcji interpolowanej $f_2(x) = cos(2x)$ oraz funkcji $s(x)$

# 3 Wnioski

- **Unikanie oscylacji**: Interpolacja funkcjami sklejanymi pozwala uniknąć problemu oscylacji, który często występuje przy interpolacji wielomianowej. Dzięki temu interpolowana funkcja jest bardziej stabilna i dokładniejsza, zwłaszcza w przypadku danych zawierających szumy lub nieciągłości.
- **Efektywność dla niewielkiej liczby węzłów**: Już dla niewielkiej liczby węzłów interpolacja funkcjami sklejanymi daje zadowalające rezultaty. Nawet przy ograniczonej ilości danych interpolowana funkcja jest praktycznie nierozróżnialna od rzeczywistej funkcji, co czyni tę metodę atrakcyjną dla zastosowań praktycznych.
- **Przydatność dla dużych zbiorów danych**: Funkcje sklejane w bazie są przydatne w przypadku, gdy liczba punktów pomiarowych jest duża. Dzięki nim można efektywnie interpolować dane nawet w przypadku zaawansowanych numerycznie zbiorów danych, co czyni obliczenie interpolowanej funkcji przy użyciu prostych metod trudne lub niemożliwe.
- **Odporność na efekt Rungego**: Interpolacja funkcjami sklejanymi nie jest wrażliwa na efekt Rungego, który występuje przy interpolacji wielomianowej, zwłaszcza przy użyciu wysokich stopni wielomianów.
- **Redukcja błędów interpolacji**: Poprzez optymalizację położeń węzłów interpolacji można zmniejszyć błędy interpolacji w obszarach, gdzie funkcja interpolowana zmienia się szybko lub posiada miejsca, w których pochodne osiągają duże wartości. Odpowiednie rozmieszczenie węzłów może pomóc w zniwelowaniu efektu Rungego oraz ograniczeniu nadmiernego dopasowania (overfittingu).