Sprawozdanie 5
Diagonalizacja macierzy metodą potęgową.

Yuliya Zviarko

25.03.2024

Spis treści

1 Wstęp teoretyczny

1.1 Wartości własne i wektory własne macierzy

Rozważmy kwadratową macierz M o rozmiarze $n \times n$. Macierz ta określa przekształcenie liniowe przestrzeni R^n w siebie. Niech $\mathbf{v}$ będzie niezerowym wektorem należącym do R^n, a L będzie prostą wyznaczoną przez ten wektor. Definiujemy wektor $\mathbf{v}$ jako wektor własny przekształcenia M, jeśli to przekształcenie przekształca prostą L w siebie. Innymi słowy, wektor $\mathbf{v}$ jest wektorem własnym, jeśli działanie macierzy M na ten wektor daje jako wynik wielokrotność samego wektora:

$$M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \tag{1}$$

gdzie λ jest pewną rzeczywistą liczbą, nazywaną wartością własną związaną z wektorem własnym $\mathbf{v}$.

1.2 Metody iteracyjne obliczania wartości własnych i wektorów własnych macierzy

Iteracyjne metody wyznaczania wartości własnych i wektorów własnych macierzy stanowią skuteczne narzędzia do efektywnego rozwiązywania tego zadania, zwłaszcza w przypadku dużych macierzy. Trzy główne techniki to: Algorytm Lanczosa, Algorytm Potęgowy oraz Metoda Rayleigha-Quotienta.

1. **Algorytm Lanczosa**:
   Opiera się na przekształceniu macierzy na postać trójdiagonalną, co pozwala na efektywne wyznaczenie wartości i wektorów własnych. Jest szczególnie przydatny w przypadku macierzy rzadkich lub o specjalnej strukturze, takiej jak macierz Toeplitza, gdzie można jednocześnie obliczać wiele wartości i wektorów własnych.

2. **Algorytm Potęgowy**:
   To prosta, ale skuteczna metoda. Polega na wielokrotnym mnożeniu wektora początkowego przez macierz, a następnie normalizacji wyniku. Po kilku iteracjach wektor ten zbiegnie do dominującego wektora własnego macierzy. Jest to przydatne zwłaszcza do obliczania największej wartości własnej i odpowiadającego jej wektora własnego.

3. **Metoda Rayleigha-Quotienta**:
   Jest to ulepszona wersja algorytmu potęgowego. Wykorzystuje ona wzór Rayleigha do szacowania wartości własnych dla określonego wektora, dostosowując go w trakcie iteracji. Choć bardziej skomplikowana obliczeniowo, jest bardziej zbieżna.

Te metody stanowią skuteczne narzędzia do analizy wartości i wektorów własnych macierzy, zastosowanie których może być dostosowane do specyfiki problemu i struktury macierzy.

1.3 Iteracyjna metoda wyznaczania pojedynczych wartości własnych i wektorów własnych przy użyciu algorytmu potęgowego

Załóżmy, że macierz A posiada n liniowo niezależnych wektorów własnych, które tworzą bazę przestrzeni liniowej:

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, ..., \mathbf{x}_n\} \tag{2}$$

W takim przypadku, dla każdego wektora $\mathbf{v}_0$:

$$\mathbf{v}_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{x}_i \tag{3}$$

Zakładamy, że wartości własne tworzą pewien ciąg, $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$, jeśli λ_i są wartościami własnymi macierzy.

$$A\mathbf{v}_o = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{x}_i \tag{4}$$

$$\mathbf{v}_m = A^m \mathbf{v}_o = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda^m \mathbf{x}_i \tag{5}$$

W przypadku, gdy λ_1 jest docinającą wartością własną, oraz wektor v_o ma składową w kierunku x_1 to wówczas zachodzi:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{A^m \mathbf{v}_0}{\lambda_1^m} = a_1 \mathbf{x}_1 \tag{6}$$

Wtedy wartość własną obliczamy w następujący sposób:

$$\lambda_1 = \lim_{m\to\infty} \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{v}_m}{\mathbf{y}^T \mathbf{v}_m} \tag{7}$$

Unormowany wektor liczymy w następujący sposób:

$$x_1 = \frac{\mathbf{v}_m}{|\mathbf{v}_m|} \tag{8}$$

ponieważ $\mathbf{v}_m \approx \lambda_1^m a_1 \mathbf{x}_1$.
Jeżeli wartość własna jest pierwiastkiem wielokrotnym równania charakterystycznego, metoda jest zbieżna, ponieważ składnik z λ_1 dominuje

$$\mathbf{v}_m = A^m \mathbf{v}_0 = \lambda_1^m \sum_{i=1}^{k} a_i \mathbf{x}_i + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i^m a_i \mathbf{x}_i \tag{9}$$

Proces wyznaczania pozostałych wartości i wektorów własnych w metodzie potęgowej może być przedstawiony następująco:

- Metoda redukcji wektora
- Metoda zerowania składowej
- Redukcja macierzy (najskuteczniejszy sposób)

1.4 Redukcja Hotellinga (macierze symetryczne)

Metoda redukcji Hotellinga, znana także jako metoda potęgowa dla macierzy symetrycznych, jest używana do znajdowania dominującej wartości własnej i odpowiadającego jej wektora własnego dla symetrycznych macierzy.
Proces ten polega na iteracyjnym mnożeniu macierzy przez wektory własne, zaczynając od losowego wektora początkowego. Następnie obliczana jest kolejna iteracja macierzy, aż uzyskamy dominującą wartość własną i odpowiadający jej wektor własny.
Formalnie, dla macierzy symetrycznej A, iteracyjnie obliczamy wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots$ według wzoru:

$$\mathbf{v}_{k+1} = \frac{\mathbf{A}\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{A}\mathbf{v}_k\|} \tag{10}$$

Następnie wartość własna λ jest obliczana jako iloraz iloczynu skalarnego $\mathbf{v}^T\mathbf{A}\mathbf{v}$ i $\mathbf{v}^T\mathbf{v}$ przez $\mathbf{v}^T\mathbf{v}$.
Ten proces jest kontynuowany, aż uzyskamy dominującą wartość własną i odpowiadający jej wektor własny. Metoda redukcji Hotellinga jest efektywna dla macierzy symetrycznych ze względu na ich specyficzną strukturę.
Ponadto, metoda redukcji Hotellinga może być rozszerzona na obliczenia z wykorzystaniem iloczynu tensorowego, który umożliwia operowanie na tensorach wyższych rzędów. Poprzez odpowiednie przekształcenia tensorów, możemy również uzyskać wartości własne i wektory własne tensorów symetrycznych.

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Pierwszym etapem było stworzenie macierzy A rzędu $n = 7$, gdzie elementy są określone wzorem:

$$A_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2 + |i - j|}} \tag{11}$$

dla $i, j = 0, 1, \cdots, n-1$, przy $n = 7$. Warto zauważyć, że A jest macierzą symetryczną, co oznacza, że wszystkie wartości własne oraz składowe wektorów własnych są rzeczywiste.
Następnie została zaimplementowana metoda potęgowa zgodnie z poniższym algorytmem:

$$\begin{aligned}
&W_0 = A\\
&\text{for}(k = 0; k < K_{val}; k++)\{\\
&\mathbf{x}_k^0 = [1, 1, \cdots, 1] \text{ (inicjalizacja wektora startowego)}\\
&\text{for}(i = 1; i <= IT_MAX; i++)\{\\
&\mathbf{x}_k^{i+1} = W_k\mathbf{x}_k^i\\
&\lambda_k^i = \frac{(\mathbf{x}_k^{i+1})^T\mathbf{x}_k^i}{(\mathbf{x}_k^i)^T\mathbf{x}_k^i}\\
&\mathbf{x}_k^i = \frac{\mathbf{x}_k^{i+1}}{\|\mathbf{x}_k^{i+1}\|_2}\\
&\}\\
&W_{k+1} = W_k - \lambda_k\mathbf{x}_k^i(\mathbf{x}_k^i)^T\\
&\}
\end{aligned} \tag{12}$$

gdzie:
k - numer wyznaczanej wartości własnej,
i - numer iteracji dla określonego k,
A - macierz pierwotna,
W_k - macierz iteracji,
$(\lambda_k^i$ - i-te przybliżenie k-tego wektora własnego, $\mathbf{x}_k^i$ - i-te przybliżenie k-tego wektora własnego,
$K_{val} = n$ - liczba wartości własnych do wyznaczenia,
$IT\_MAX = 12$ - maksymalna liczba iteracji dla każdego k.

Natomiast ab^T to iloczyn tensorowy wektorów, zdefiniowany jako:

$$ab^T = \begin{bmatrix} a_0b_0 & a_0b_1 & \cdots & a_0b_{n-1} \\ a_1b_0 & a_1b_1 & \cdots & a_1b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ a_{n-1}b_0 & a_{n-1}b_1 & \cdots & a_{n-1}b_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{13}$$

a^Tb to iloczyn skalarny wektorów, zdefiniowany jako:

$$a^Tb = \sum_{j=0}^{n-1} a_jb_j. \tag{14}$$

Ostatnim etapem było obliczenie macierzy D zgodnie ze wzorem:

$$D = X^TAX. \tag{15}$$

2.2 Wyniki

Po wykonaniu zadań opisanych w podpunkcie 2.1, został uruchomiony program **main.c**, który wygenerował niezbędne pliki do analizy problemu. Uzyskane zostały wszystkie wartości własne λ_k, część z których została przedstawiona na poniższym obrazku:

wynik.txt

```
1  3.589159
2  3.595821
3  3.595860
4  3.595860
5  3.595860
6  3.595860
7  3.595860
8  3.595860
9  3.595860
10  3.595860
11  3.595860
12  3.595860

1  0.000548
2  0.282512
3  0.284531
4  0.284903
5  0.284972
6  0.284985
7  0.284987
8  0.284988
9  0.284988
10  0.284988
11  0.284988
12  0.284988

1  0.000019
2  0.121709
3  0.122242
4  0.122514
```

Rysunek 1: Wartości własne λ_k.

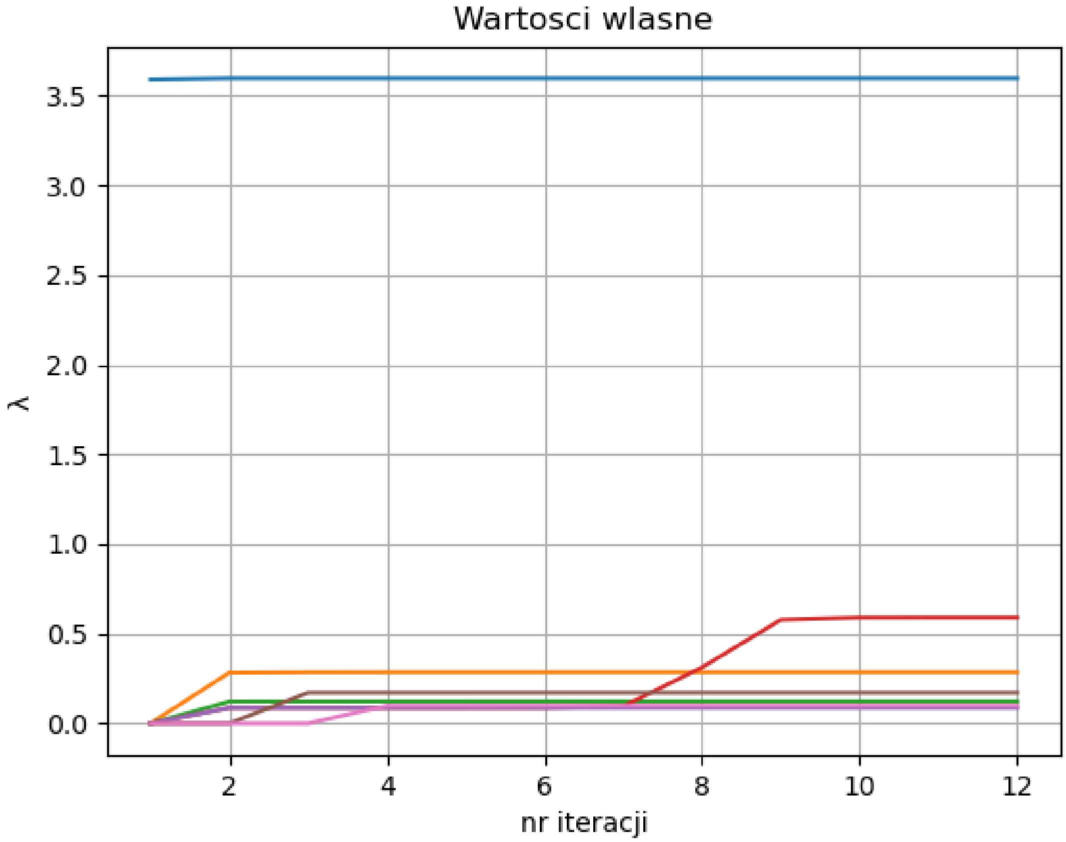
Po otrzymaniu wartości własnych, uzyskano również wynik macierzy D, który ma postać:

macierz_D.txt

```
3.595860e+00 -1.188979e-13 2.258610e-15 -2.775558e-17 -2.124169e-15 1.665335e-16 -2.844947e-16
-1.189049e-13 2.849877e-01 -6.252666e-06 -2.282452e-12 -3.816615e-09 -6.938894e-18 2.081668e-17
2.164935e-15 -6.252666e-06 1.227860e-01 -8.922591e-07 -3.291068e-04 -3.068969e-13 1.734723e-18
2.220446e-16 -2.282466e-12 -8.922591e-07 5.903900e-01 -2.969560e-04 -3.694961e-14 -9.194034e-17
-2.220446e-15 -3.816615e-09 -3.291068e-04 -2.969560e-04 8.659587e-02 -2.451412e-10 -4.484260e-15
2.220446e-16 -1.387779e-17 -3.068726e-13 -3.702594e-14 -2.451412e-10 1.709742e-01 -3.621895e-08
-2.220446e-16 6.938894e-17 -2.255141e-17 1.387779e-17 -4.524159e-15 -3.621895e-08 9.815442e-02
```

Rysunek 2: Wynik macierzy D=X^TAX.

Korzystając z wyniku przedstawionego na (Rysunek 1), napisano program **plot.py**, który pomógł stworzyć niezbędny wykres dla analizy wartości własnych w kolejnych przybliżeniach.



Rysunek 3: Wykresy kolejnych przybliżeń znalezionych wartości własnych λ_k.

3 Wnioski

Na podstawie dostępnych wyników można wyciągnąć kilka istotnych wniosków:

- Metoda potęgowa jest bardzo efektywną metodą numeryczną do obliczania dominującej wartości własnej oraz odpowiadającego jej wektora własnego macierzy.
- Już po niewielkiej liczbie iteracji można zauważyć, że różnice między kolejnymi obliczonymi wartościami własnymi są minimalne. Zatem metoda ta jest nie tylko szybka, ale także precyzyjna.
- Metoda potęgowa jest prostym do implementacji algorytmem w większości języków programowania. Działa ona efektywnie dla macierzy rzadkich, dla których inne metody numeryczne mogą być mniej wydajne. Należy jedynie pamiętać, że wartości własne obliczone za pomocą metody potęgowej są przybliżone i mogą zawierać pewien błąd numeryczny.
- W sytuacji, gdy potrzebujemy obliczyć kilka największych wartości własnych, warto zastosować metodę iteracyjną, tym bardziej w przypadkach, gdy macierz jest duża i niemożliwe jest obliczenie wszystkich wartości własnych jednocześnie.
- Metoda redukcji Hotellinga jest łatwa w implementacji i umożliwia szybkie obliczenie pozostałych wartości własnych i wektorów własnych.

Ostatecznie, uzyskane wartości własne i macierz D są satysfakcjonujące i potwierdzają skuteczność zastosowanej metody.