Sprawozdanie 6
Poszukiwanie zer wielomianów metodą iterowanego dzielenia (metoda siecznych).

Yuliya Zviarko

08.04.2023

Spis treści

1 Wstęp teoretyczny

Poszukiwanie zer wielomianów polega na znajdowaniu punktów, w których wartość wielomianu wynosi zero.

$$f(x) = 0 \iff x \in \{x_1, x_2, ..., x_k\}, \; x \in R \tag{1}$$

Zera te są istotne w wielu dziedzinach, takich jak analiza matematyczna, fizyka, inżynieria czy nauki społeczne, gdyż są używane do rozwiązywania różnorodnych problemów, jak równania różniczkowe, algebraiczne czy optymalizacja.

Proces znajdowania zer wielomianów polega na stosowaniu różnych metod numerycznych, aby znaleźć przybliżone wartości tych punktów. Istnieje wiele metod, takich jak

- metoda połowienia (bisekcji),
- Regula Falsi,
- metoda siecznych,
- metoda Newtona-Raphsona,

które mogą być stosowane w zależności od charakterystyki wielomianu.

1.1 Metoda połowienia (bisekcji)

Rozwiązania szukamy w przedziale, w którym znajduje się miejsce zerowe funkcji, w tzw. **przedziale izolacji pierwiastka** (wewnątrz tego przedziału pierwsza pochodna funkcji nie zmienia znaku). Przedział ten wyznacza się, badając zmianę znaku funkcji. **Założenia:**

- W przedziale $[a, b]$ znajduje się dokładnie jeden pierwiastek. Gdy są dwa pierwiastki, po zawężeniu przedziału, znak funkcji na obu krańcach może być identyczny, co prowadzi do zawodzenia metody.
- Na końcach przedziału wartości funkcji mają różne znaki: $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Algorytm metody bisekcji:

1. Dzielimy przedział izolacji na pół, obliczając środek przedziału:
$$x_1 = \frac{b+a}{2} \tag{2}$$
2. Sprawdzamy, czy wartość funkcji w punkcie środkowym jest równa zero:
$$f(x_1) = 0 \tag{3}$$
Jeśli tak, mamy znalezione rozwiązanie; jeśli nie, przechodzimy do kolejnego kroku.
3. Z dwóch nowo utworzonych przedziałów $[a, x_1]$ oraz $[x_1, b]$, wybieramy ten, w którym wartości funkcji na krańcach przedziałów mają różne znaki.
$$f(x_k) \cdot f(x_{k+1}) < 0 \tag{4}$$
4. Powtarzamy kroki 1-3, aż do uzyskania satysfakcjonującej dokładności. Długości kolejnych przedziałów maleją według wzoru:
$$|x_k - x_{k+1}| = \frac{1}{2^k}(b-a) \tag{5}$$
5. Lewe krańce przedziałów tworzą ciąg niemalejący, ograniczony z góry, natomiast prawe krańce tworzą ciąg nierosnący, ograniczony z dołu. Istnieje ich wspólna granica w punkcie a, który jest poszukiwanym rozwiązaniem równania nieliniowego.

1.2 Regula Falsi

W metodzie tej wykorzystuje się założenie istnienia lokalnej liniowości funkcji (fałszywe, stąd nazwa). Zakładamy ponadto,

- że w przedziale $[a, b]$ funkcja ma tylko jeden pierwiastek pojedynczy, co oznacza, że $f(a) \cdot f(b) < 0$.
- Dodatkowo, zakładamy, że funkcja jest klasy C^2 (czyli ma dwie pochodne ciągłe), a pierwsza i druga pochodna nie zmieniają znaku w przedziale $[a, b]$.
- Rząd metody, podobnie jak dla bisekcji, wynosi $p = 1$.

Algorytm Reguły Falsi wygląda nastepująco:

- Przez punkty A i B prowadzimy prostą o równaniu.

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), [y = 0] \tag{6}$$

- Punkt x_1, w którym prosta przecina oś Ox, przyjmuje się za pierwsze przybliżenie szukanego pierwiastka równania.

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a) \tag{7}$$

- Sprawdzamy warunek, czy $f(x_1) = 0$. Jeśli tak, to przerywamy obliczenia. Jeśli $f(x_1) \neq 0$, to kontynuujemy.
- Sprawdzamy na końcach którego przedziału ($[A, x_1]$, $[x_1, B]$) wartości funkcji mają różne znaki. Przez te punkty prowadzimy kolejną prostą i powtarzamy poprzednie kroki.
- Uwaga: jeśli w przedziale $[A, B]$:
  - $f'(x) > 0$ oraz $f''(x) > 0$, to punkt B jest punktem stacjonarnym (prawy brzeg ustalony),
  - $f'(x) > 0$ oraz $f''(x) < 0$, to punkt A jest punktem stacjonarnym.
- Metoda generuje ciąg przybliżeń, elementy ciągu wyznaczamy iteracyjnie.

$$x_0 = a \tag{8}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(b) = f(x_k)}(b - x_k), k = 1, 2, 3, ... \tag{9}$$

1.3 Metoda siecznych

Jest modyfikacją Reguły Falsi, gdzie prostą przeprowadza się przez dwa ostatnie przybliżenia x_k i x_{k-1} **(metoda dwupunktowa)**.

- Kolejne przybliżenia w metodzie siecznych wyznacza się według relacji rekurencyjnej.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - xk - 1)}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \tag{10}$$

- Zbieżność metody jest większa niż w metodzie Regula Falsi. Rząd metody można określić jako

$$p = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1.618 \tag{11}$$

- Należy dodatkowo przyjąć, że $|f(x_k)|$ mają tworzyć ciąg wartości malejących. Jeśli w kolejnej iteracji $|f(x_k)|$ zaczyna rosnąć, należy przerwać obliczenia i ponownie wyznaczyć punkty startowe, zawężając przedział izolacji.

1.4 Metoda Newtona-Raphsona

Sposób postępowania:

- Z końca przedziału $[a, b]$, w którym funkcja ma ten sam znak co druga pochodna, należy poprowadzić styczną do wykresu funkcji $y = f(x)$. **W ten sposób wykonujemy jedną iterację mniej, zbliżając się od pierwiastka z jednej strony.**
- Styczna przecina oś Ox w punkcie x_1, który stanowi pierwsze przybliżenie rozwiązania.
- Sprawdzamy, czy $f(x_1) = 0$. Jeśli nie, to z tego punktu prowadzimy kolejną styczną.
- Druga styczna przecina oś Ox w punkcie x_2, który stanowi drugie przybliżenie.
- Kroki 3-4 powtarzamy iteracyjnie, aż spełniony będzie warunek:

$$|x_{k+1} - x_k \leq \epsilon| \tag{12}$$

Równanie stycznej dla k-tego przybliżenia:

$$y - f(x_k) = f'(x_k)(x - x_k) \tag{13}$$

Wzór iteracyjny na położenie k-tego przybliżenia pierwiastka równania nieliniowego:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, (k = 1, 2, 3, ...) \tag{14}$$

Zbieżność metody Newtona wynosi $\mathbf{p = 2}$

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Postawienie problemu: Naszym zadaniem było znalezienie zer wielomianu

$$f(x) = x^5 + 14x^4 + 33x^3 - 92x^2 - 196x + 240 \tag{15}$$

przy użyciu metody iterowanego dzielenia, znanej także jako metoda siecznych. W metodzie tej wykorzystujemy założenie lokalnej liniowości funkcji, co pozwala nam iteracyjnie zbliżać się do pierwiastka. Wartości startowe x_0 i x_1 dla każdego poszukiwanego zera wynosiły odpowiednio 0 i 0.1. Wartość maksymalnej liczby iteracji została ustalona na 30. W każdej iteracji zapisywaliśmy numer zera, numer iteracji, wartość przybliżenia x_j oraz wartość reszty z dzielenia R_j. Naszym celem było znalezienie wszystkich zer tego wielomianu.

Proces wyznaczania zer wielomianu można zilustrować przy pomocy poniższego pseudokodu:

Algorithm 1 Metoda iterowanego dzielenia

```
ustalamy stopień wielomianu: N
inicjalizacja wektora danych: a[i] = ...., dla i = 0, 1, ..., N

pętla po kolejnych zerach wielomianu
for L = 1 to N do
    ustalamy aktualny stopień wielomianu: n = N − L + 1
    inicjalizacja wzoru iteracyjnego: x0, x1, R0, R1
    for it = 1 to IT_MAX do
        x2 = x1 − R1(x1 − x0)/(R1 − R0)
        wyznaczamy: R2 = ...
        zachowujemy dane do kolejnej iteracji:
        $R0 = R1
        $R1 = R2
        x0 = x1
        x1 = x2
        zapisujemy do pliku: L, it, x2, R2
        warunek wcześniejszego opuszczenia pętli: |x1 − x0| < 1.0E − 7
    end
    usuwamy znalezione zero z wielomianu:
    for i = 0 to (n − 1) do
        a[i] = b[i]
    end
end
```

2.2 Wyniki

Tabela 1: Wyniki poszukiwania zer wielomianu

Numer zera	**Numer iteracji**	**x2**	**R2**
1	1	1.17156	-34.2531
1	2	1.02692	-5.84693
1	3	0.997147	0.628384
1	4	1.00004	-0.00803032
1	5	1	-1.04741e-05
1	6	1	1.75532e-10
2	1	-6.14612	-211.972
2	2	-47.6089	3.62948e+06
2	3	-6.14855	-212.305
2	4	-6.15097	-212.637
2	5	-4.60089	-34.2831
2	6	-4.30293	-14.1731
2	7	-4.09294	-3.65601
2	8	-4.01994	-0.732267
2	9	-4.00166	-0.0598706
2	10	-4.00003	-0.00116616
2	11	-4	-1.93278e-06
2	12	-4	-6.27551e-11
3	1	11.7417	3122.3
3	2	0.317661	-57.5873
3	3	0.524549	-54.7308
3	4	4.48854	270.001
3	5	1.19265	-37.8866
3	6	1.59822	-21.4276
3	7	2.12622	7.84603
3	8	1.9847	-0.913902
3	9	1.99947	-0.0320206
3	10	2	0.000139307
3	11	2	-2.107e-08
3	12	2	-1.42109e-14
4	1	-2.29008	5.47346
4	2	-2.79641	1.46656
4	3	-2.98174	0.128181
4	4	-2.99949	0.00360434
4	5	-3	9.37832e-06
4	6	-3	6.89749e-10
4	7	-3	0
5	1	-10	-3.55271e-14
5	2	-10	0

3 Wnioski

Na podstawie wyników uzyskanych z zastosowania metody iterowanego dzielenia (metody siecznych) do znalezienia zer wielomianu, można wysunąć następujące wnioski:

1. Metoda iterowanego dzielenia jest skuteczną techniką do znajdowania zer funkcji, zwłaszcza gdy funkcja jest nieliniowa i trudna do rozwiązania analitycznie.

2. Wyniki przedstawione w tabeli 1 pokazują, że metoda siecznych jest w stanie znaleźć przybliżone wartości zer wielomianu $f(x)$ z zadowalającą dokładnością. Dla każdego z pięciu pierwiastków metoda zbiega do rozwiązania w kilku iteracjach.

3. Dokładność rozwiązania zależy od wyboru przybliżonych wartości początkowych x_0 i x_1. W praktyce wartości te powinny być możliwie blisko rzeczywistego pierwiastka i być położone po przeciwnych stronach punktu zerowego funkcji.

4. Warto zauważyć, że dla niektórych pierwiastków potrzebna jest większa liczba iteracji w porównaniu do innych. Na przykład, dla pierwszego pierwiastka potrzebne było zaledwie 6 iteracji, podczas gdy dla drugiego pierwiastka potrzebne było aż 12 iteracji.

5. Metoda siecznych jest stosunkowo prostą do implementacji i stosunkowo szybko zbiega do rozwiązania, co czyni ją atrakcyjną opcją w praktycznych zastosowaniach numerycznych.

6. Ustalenie odpowiedniej tolerancji ϵ jest kluczowe dla skuteczności metody. Wartość tolerancji decyduje o dokładności uzyskanego przybliżenia oraz o liczbie iteracji potrzebnych do osiągnięcia tego przybliżenia.

Wyniki uzyskane z zastosowania metody iterowanego dzielenia potwierdzają jej skuteczność w znajdowaniu zer funkcji nieliniowych, takich jak analizowany wielomian $f(x)$. Metoda ta może być użyteczna w wielu dziedzinach, gdzie istnieje potrzeba rozwiązania równań nieliniowych numerycznie.