Sprawozdanie 1
Rozwiązywanie UARL metodami bezpośrednimi

Yuliya Zviarko

26.02.2024

1 Wstęp teoretyczny

Metoda Gaussa-Jordana używana jest do rozwiązywania układów równań liniowych oraz odwracania macierzy. W jej podstawowej formie, układ równań liniowych jest reprezentowany za pomocą trzech macierzy: **A** (zawierającej współczynniki przy niewiadomych), **x** (macierz niewiadomych) i **B** (macierz wyrazów wolnych).

Przykładowy układ równań:

$$\begin{cases} a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 = d_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2 \\ a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3 = d_3 \end{cases} \quad (1)$$

Jego zapis w postaci macierzy:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

W celu rozwiązania układu, przeprowadza się **przekształcenia elementarne na macierzy rozszerzonej o wyrazy wolne**, dążąc do uzyskania macierzy jednostkowej.
Przekształcenia elementarne obejmują:

- dodawanie jednego wiersza pomnożonego przez liczbę do innego wiersza,
- zamienianie miejscami dwóch wierszy,
- przemnażanie wiersza przez liczbę różną od zera.

Proces sprowadzania macierzy A do postaci jednostkowej wykonuje się w trzech etapach:
1. Sprowadzenie macierzy do postaci trójkątnej dolnej,
2. Wyzerowanie wyrazów powyżej przekątnej, zaczynając od ostatniego wiersza,
3. Przemnożenie każdego wiersza tak, aby na diagonali znajdowali się same jedynki

Macierz współczynników rozszerzona o wyrazy wolne:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}\right] \quad (3)$$

Powyższa macierz po odpowiednich przekształceniach, przyjmuje postać:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 1 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 1 & e_3 \end{array}\right] \tag{4}$$

Rozwiązanie układu równań można zapisać jako:

$$\begin{cases} x_1 = e_1 \\ x_2 = e_2 \\ x_3 = e_3 \end{cases} \tag{5}$$

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Jednym z podstawowych elementów UARL (układów algebraicznych równań liniowych) jest analiza równań różniczkowych. Przykładowa zależność dla prostego oscylatora harmonicznego, wynikająca z drugiej zasady dynamiki Newtona, jest opisana wzorem:

$$\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} = -\frac{k}{m}x(t) = -\omega^2 x(t) \tag{6}$$

Po przybliżeniu lewej strony równania (6) poprzez drugą pochodną położenia **x** w chwili **t** za pomocą ilorazu różnicowego,
otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} \approx \frac{x(t+\Delta t) - 2x(t) + x(t-\Delta t)}{(\Delta t)^2} \tag{7}$$

Z tego równania jesteśmy w stanie wyznaczyć rekurencyjną zależność, pozwalającą obliczyć wartość x_{x+1} w zależności od x_i i x_{x-1}. Przy wprowadzeniu oznaczeń $\Delta t = h$ i $x_i = x(ih)$, wzór przyjmuje
postać:

$$x_{i+1} + (\omega^2 h^2 - 2)x_i + x_{i-1} = 0 \tag{8}$$

Aby to równanie było jednoznaczne potrzebujemy znać warunki początkowe - x_0, $x_1 \cdot x_0 = A$, oznacza początkowe wychylenie wahadła z położenia równowagi, oraz

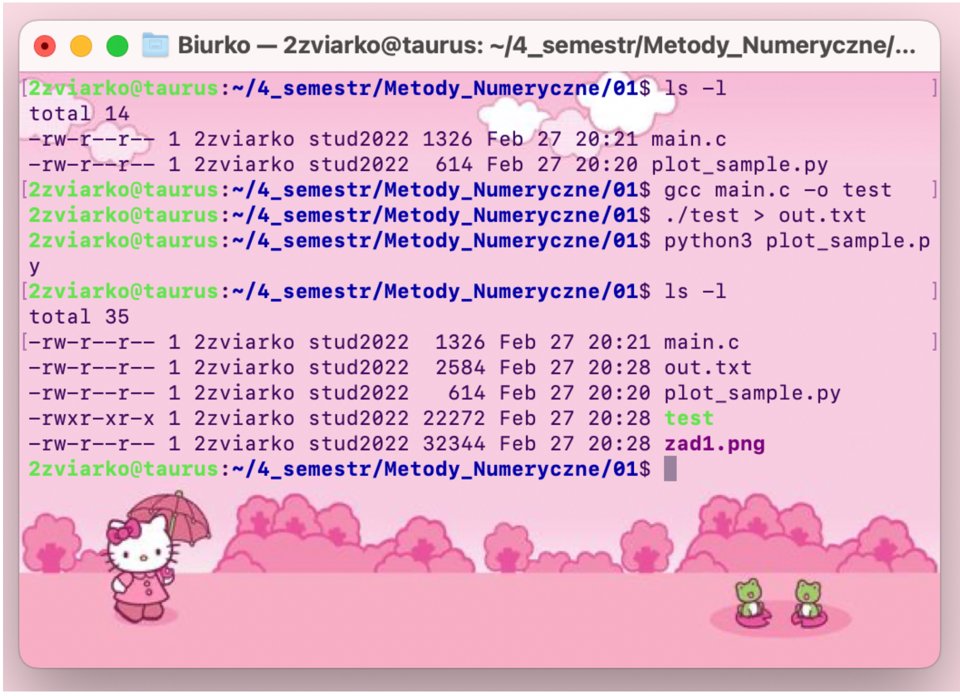
$\frac{x_1 - x_0}{h} = v_0$, oznaczającego początkową prędkość ciała, równanie (8) w formie macierzowej dla pierwszych siedmiu kroków czasowych można zapisać jako:

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} A \\ v_0h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\quad (9)
$$

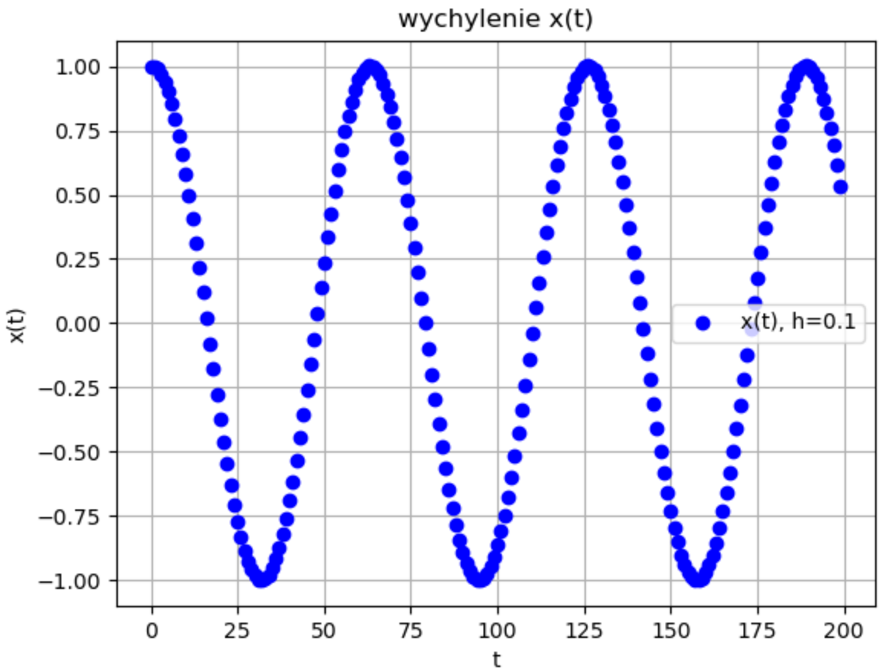
Zadaniem było rozwiązanie układu (9) za pomocą metody eliminacji Gaussa-Jordana oraz stworzenie wykresu zależności wychylenia z położenia równowagi od czasu. Przyjęte warunki początkowe to $v_0 = 0,\ A = 1$, krok całkowania h = 0.1, natomiast $\frac{k}{m} = \omega^2 = 1$. W zadaniu rozpatrywałam macierz kwadratową o boku 200, co jest równoznacznie z rozpatrzeniem 200 kroków czasowych. Skorzystałam z implementacji procedury gaussj.c dostępnej w bibliotece Numeral Recipies do rozwiązania układu równań.

2.2 Wyniki

Po wykonaniu instrukcji, wyniki programu zostały zapisane do pliku, który następnie został użyty do generowania wykresu przy użyciu biblioteki matplotlib w Pythonie.



*Na zrzucie ekranu przedstawiającym kolejne kroki uruchomienia programu **main.c** oraz wygenerowania niezbędnego rysunku za pomocą skryptu w języku **Python***



*Rysunek 1: **Zależność wychylenia z położenia równowagi od czasu** uzyskane metodą eliminacji Gaussa-Jordana*

Możemy zauważyć, że wykres naszej funkcji doskonale pasuje **do krzywej cosinusoidalnej**, opisującej wychylenie od czasu w nietłumionym oscylatorze harmonicznym, z jakim mieliśmy do czynienia w tym zadaniu. W praktyce częściej spotykamy się jednak z drganiami tłumionymi, ze względu na trudności w eliminacji wpływu zewnętrznych czynników, takich jak opór powietrza.

3 Wnioski

Metody bezpośrednie są niezwykle precyzyjnymi narzędziami, pod warunkiem, że zapewnimy odpowiednie warunki dla poprawnego przeprowadzenia obliczeń. W tej sytuacji kluczowym elementem okazała się **ilość kroków**. Wyższa częstotliwość pomiarów skutkowała satysfakcjonującą dokładnością. Dodatkowo, metoda Gaussa-Jordana wykazała się wysoką efektywnością, umożliwiając rozwiązanie układów liniowych o dużej liczbie niewiadomych. Jej precyzję potwierdza zbieżność wykresu funkcji analitycznej z wynikami uzyskanymi za pomocą metody numerycznej.