Całkowanie numeryczne metodą Simpsona

Yuliya Zviarko

27.05.2024

Spis treści

1 Wstęp teoretyczny

1.1 Całkowanie numeryczne przy użyciu kwadratur

Całkowanie numeryczne polega na stosowaniu metod numerycznych do wyznaczania przybliżonej wartości całki oznaczonej:

$$C = \int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

Interpolując funkcję podcałkową, możemy zastosować wielomian interpolacyjny do całkowania.
Dla wartości $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_N)$ definiujemy wielomian interpolacyjny Lagrange'a:

$$\varphi(x) = L_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \Phi_k(x) f(x_k), \tag{2}$$

$$\Phi_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}. \tag{3}$$

Podstawiając wielomian interpolacyjny zamiast funkcji podcałkowej, otrzymujemy:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{k=0}^{N} A_k f(x_k), \quad \text{gdzie} \quad A_k = \int_a^b \Phi_k(x)dx. \tag{4}$$

Powyższe wzory definiują tzw. kwadraturę, gdzie A_k to współczynniki kwadratur.

Jeżeli spełniony jest warunek:

$$|f(x) - \varphi(x)| < \epsilon, \quad x \in [a, b], \tag{5}$$

to zachodzi:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{N} A_k f(x_k) \right| \leq \epsilon(b - a). \tag{6}$$

Dokładność wyznaczonej całki zależy od dokładności przybliżenia funkcji podcałkowej.

Jeśli funkcja podcałkowa ma osobliwości lub przedział całkowania jest nieskończony, schemat całkowania ulega modyfikacji. Zastępujemy funkcję podcałkową iloczynem funkcji wagowej $p(x)$ i nowej funkcji $F(x) = p(x)f(x)$:

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^b p(x)f(x)dx \approx \int_a^b p(x)\varphi(x)dx = \sum_{k=0}^{N} A'_k f(x_k), \tag{7}$$

$$A'_k = \int_a^b p(x)\Phi_k(x)dx. \tag{8}$$

Postać funkcji wagowej określa typ kwadratury. Wartość całki:

$$I(f) = \int_a^b p(x)f(x)dx \tag{9}$$

przybliżamy wzorem:

$$S(f) = \sum_{k=0}^{N} A_k f(x_k). \tag{10}$$

Węzły kwadratury to punkty $x_1, x_2, \ldots, x_N$, a błąd przybliżenia całki:

$$E(f) = I(f) - S(f). \tag{11}$$

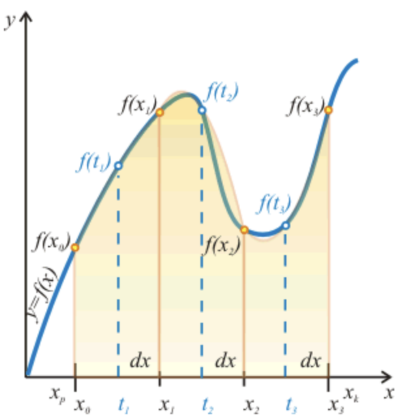
Rząd kwadratury oraz liczba węzłów wpływają na dokładność całkowania numerycznego. Kwadratura jest rzędu r ($r \geq 1$), jeśli:

$$I(W) = S(W) \tag{12}$$

dla wszystkich wielomianów stopnia mniejszego niż r.

1.2 Całkowanie numeryczne metodą Simpsona

Metoda Simpsona to powszechnie stosowana technika całkowania numerycznego, która wykorzystuje parabolę do przybliżenia wartości całki oznaczonej funkcji $f(x)$ na danym przedziale. Jej podstawą jest założenie, że funkcję $f(x)$ można aproksymować przez wielomian drugiego stopnia na małych podprzedziałach.



Rysunek 1: Całkowanie numeryczne metodą Simpsona.

Źródło: `https://eduinf.waw.pl/inf/alg/004_int/0004.php`

Przedział całkowania $[a, b]$ jest dzielony na n równych części, przy czym n musi być liczbą parzystą. Punkty podziału to $x_0, x_1, \ldots, x_n$, gdzie:

$$x_i = a + i \cdot h, \tag{13}$$

$$h = \frac{b-a}{n}. \tag{14}$$

Przybliżenie wartości całki oznaczonej za pomocą metody Simpsona jest dane wzorem:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{i=1,\text{odd}}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{i=2,\text{even}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n)\right], \tag{15}$$

gdzie:

$f(x_0)$ i $f(x_n)$ to wartości funkcji w końcach przedziału,

$4\sum_{i=1,\text{odd}}^{n-1} f(x_i)$ to czterokrotność sumy wartości funkcji w punktach o indeksach nieparzystych,

$2\sum_{i=2,\text{even}}^{n-2} f(x_i)$ to dwukrotność sumy wartości funkcji w punktach o indeksach parzystych.

Metoda Simpsona jest dokładna dla wielomianów stopnia trzeciego lub niższego. Zapewnia ona dobrą dokładność dla funkcji gładkich na danym przedziale. Jednak jej dokładność może być ograniczona w przypadku funkcji o dużych zmianach krzywizny lub funkcji z osobliwościami.

Przykładem zastosowania tej metody może być obliczenie całki funkcji, która jest dobrze aproksymowana przez parabolę na małych odcinkach przedziału całkowania. Dzięki swojej prostocie i efektywności, metoda Simpsona jest szeroko stosowana w praktyce inżynierskiej i naukowej.

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Zadaniem było numeryczne obliczenie całki:

$$I = \int_0^\pi x^m \sin(kx)\,dx \tag{16}$$

przy użyciu metody Simpsona.
W tym celu dysponowano dokładnymi wartościami, które można było łatwo obliczyć za pomocą rozwinięcia funkcji $\sin(x)$ w poniższy szereg:

$$\sin(x) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} \tag{17}$$

Po podstawieniu tego wyrażenia pod całkę oraz całkowaniu każdego elementu szeregu otrzymano:

$$I = \int_a^b x^m \sin(kx)\,dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{(kx)^{2i+1}}{(2i+1)!} x^m\,dx = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{(kx)^{2i+m+2}}{k^{m+1}(2i+1)!(2i+m+2)}\Bigg|_a^b \tag{18}$$

(Jeśli wartość x nie była zbyt duża, to sumę szeregu można było obliczyć sumując tylko 20-30 pierwszych wyrazów.)

2.2 Wykonanie zadania

Dokonano obliczeń wartości całek, wykorzystując rozwinięcie funkcji podcałkowej w szereg dla określonych parametrów:

$$m = 0,\ k = 1$$
$$m = 1,\ k = 1$$
$$m = 5,\ k = 5$$

Następnie, zastosowano metodę Simpsona do obliczenia wartości tych samych całek dla różnych liczby węzłów:

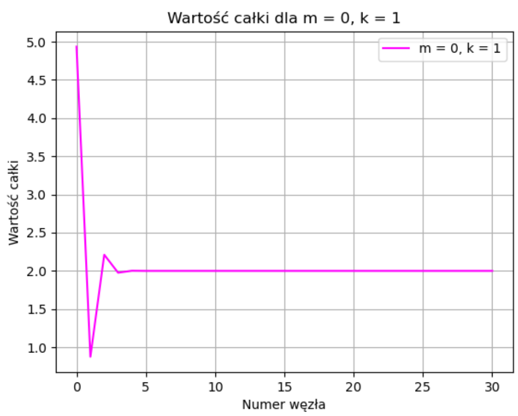
$$n = 2p + 1, \text{ gdzie } p \text{ przyjęło wartości: 11, 21, 51, 101, 201.}$$

Wykorzystane parametry miały postać:

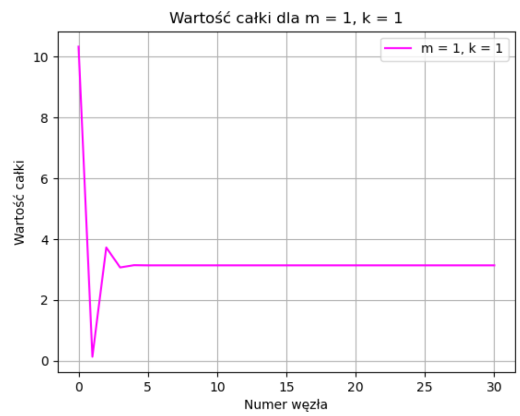
$$m = 0, \ k = 1$$
$$m = 1, \ k = 1$$
$$m = 5, \ k = 5$$

Wszystkie wyniki zostały zapisane do plików.

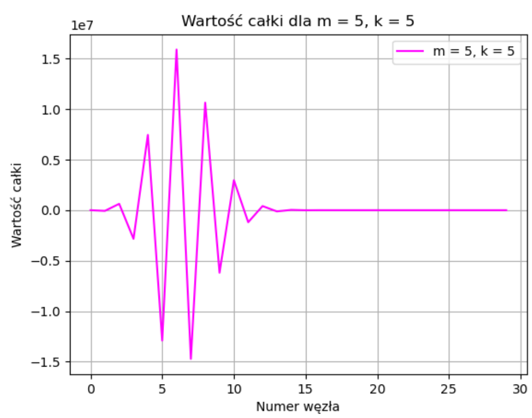
2.3 Wyniki



(a)

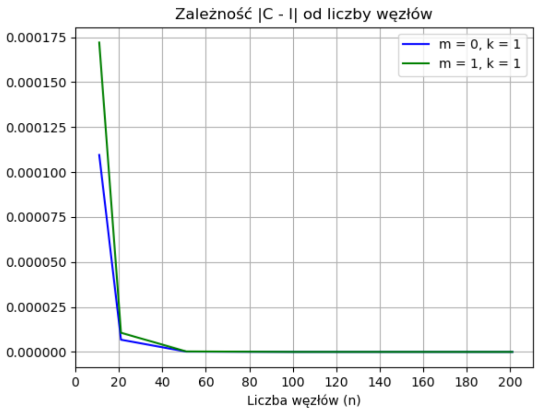


(b)

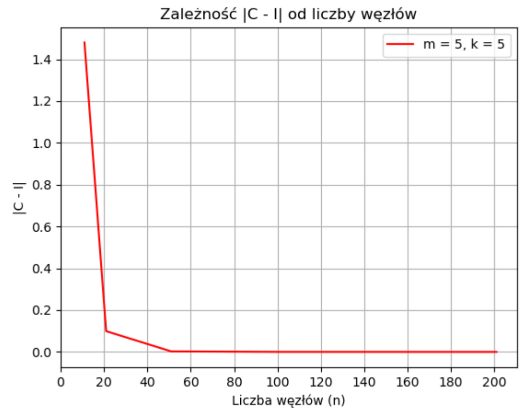


(c)

Rysunek 2: Wartość całki $I = \int_0^\pi x^m \sin(kx)$ obliczonej przy pomocy rozwinięcia w szereg w zależności od liczby sumowanych wyrazów l dla (a) $m = 0, k = 1$, (b) $m = 1, k = 1$, (c) $m = 5, k = 5$.



(a)



(b)

Rysunek 3: Moduł różnicy między wartością całki C obliczoną metodą Simpsona a wartością dokładną I dla (a) $m = 0, k = 1$ i $m = 1, k = 1$, (b) $m = 5, k = 5$.

3 Wnioski

W celu obliczenia całki oznaczonej zastosowano zarówno rozwinięcie funkcji podcałkowej w szereg, jak i metodę Simpsona. Obie metody dostarczyły precyzyjne wyniki, przy czym dokładność rozwinięcia zależała od liczby sumowanych wyrazów, natomiast dokładność metody Simpsona od liczby węzłów.

- Zaobserwowano, że moduł różnicy między wartością całki obliczoną poprzez rozwinięcie w szereg a wartością uzyskaną metodą numeryczną jest bliski zeru już dla 51 węzłów. Oznacza to, że metoda Simpsona jest bardzo skuteczna przy odpowiedniej liczbie węzłów.
- Niewystarczająca liczba węzłów prowadzi do znacznych błędów przybliżenia, szczególnie w przypadku bardziej złożonych funkcji. Konieczne jest dobranie odpowiedniej liczby węzłów, aby uzyskać dokładne wyniki.
- W porównaniu do innych metod, takich jak metoda prostokątów i trapezów, metoda Simpsona oferuje lepszą dokładność i efektywność oraz wykazuje szybszą zbieżność.

4 Źródła

Podczas opracowywania tego sprawozdania korzystano z następujących źródeł:

- T. Chwiej, AGH, Wykład z Metod Numerycznych: `http://galaxy.agh.edu.pl/~chwiej/mn/wyk/calkowanie_22_23.pdf`.