Sprawozdanie 7
Interpolacja Newtona z optymalizacją położeń węzłów

Yuliya Zviarko

15.04.2023

Spis treści

1 Wstęp teoretyczny

1.1 Interpolacja

Interpolacja to proces określania przybliżonych wartości funkcji w punktach, które nie należą do zbioru węzłów interpolacji, oraz ocena błędu takich przybliżeń. Zadanie interpolacji sprowadza się do znalezienia funkcji $F(x)$, która w punktach interpolacji przyjmuje wartości zgodne z funkcją $y = f(x)$, czyli funkcją poddaną interpolacji (której dokładna forma może być nieznana).

1.2 Ilorazy różnicowe

Funkcja $f(x)$ przyjmuje w punktach $x_i, i = 0, 1, ..., n$ $x_i \neq x_j$ wartości:

$$f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n). \tag{1}$$

Załóżmy, że odległości pomiędzy kolejnymi węzłami interpolacji niekoniecznie są stałe:

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, i = 0, 1, 2, ... \tag{2}$$

Następująco można zdefiniować ilorazy różnicowe:

- 1-go rzędu
- 2-go rzędu
- n-tego rzędu

$$f(x_{n-1}; x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \tag{3}$$

$$f(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n) = \frac{f(x_{n-1}; x_n) - f(x_{n-2}; x_{n-1})}{x_n - x_{n-2}} \tag{4}$$

$$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+n}) = \frac{f(x_{i+1}; x_{i+2}; x_{i+n}) - f(x_i; x_{i+1}; x_{i+n-1})}{x_{i+n} - x_i} \tag{5}$$

1.3 Interpolacja Newtona

Interpolacja Newtona wielomianowa to metoda znajdowania wielomianu interpolacyjnego stopnia n dla $n + 1$ punktów węzłowych. Algorytm ten wykorzystuje postać Newtona wielomianu, zdefiniowaną jako:

$$w(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j), \tag{6}$$

przy czym dla $x = x_j$ $n-j$ składników sumy jest równy zeru. Do obliczenia wielomianu interpolacyjnego potrzebne jest rozwiązanie układu równań:

$$\begin{cases} y_0 = a_0 \\ y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0) \\ y_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ \vdots \\ y_n = a_0 + a_1(x_n - x_0) + a_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \dots \end{cases} \tag{7}$$

Takie układ ma jedno rozwiązanie, które można znaleźć rekurencyjnie przy użyciu wzoru:

$$\begin{cases} f_{i,j} = \frac{f_{i,j-1} - f)_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}} \\ f_{i,0} = y_i \end{cases} \tag{8}$$

Podczas interpolacji wielomianowej występuje efekt Rungego, szczególnie widoczny, gdy punkty węzłowe są równomiernie rozłożone. Zwiększenie ich liczby nie zawsze prowadzi do zmniejszenia błędu interpolacji, co jest spowodowane oscylacjami wielomianów wyższych rzędów, szczególnie na krańcach przedziału.

1.4 Wielomiany Czebyszewa

To zestaw wielomianów ortogonalnych, które stanowią bazę przestrzeni wielomianów. Wielomiany Czebyszewa są wyznaczane za pomocą wzoru rekurencyjnego:

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_n(x) = 2x \cdot T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \end{cases} \tag{9}$$

Rozwiązaniem powyższej rekurencji jest:

$$T_k(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2-1})^k + (x - \sqrt{x^2-1})^k}{2} \tag{10}$$

Wielomian Czebyszewa $T_k(x)$ posiada k zer rzeczywistych należących do przedziału [-1, 1] danych wzorem:

$$x_j = cos(\frac{2 \cdot j - 1}{2 \cdot k} \cdot \pi) \tag{11}$$

$$j = 1, 2, ..., k$$

1.5 Optymalne położenie węzłów

Rozmieszczeniem węzłów, które minimalizuje efekt Rungego, jest rozmieszczenie według miejsc zerowych wielomianów Czebyszewa pierwszego rodzaju. Jest to strategia, która zmniejsza oscylacje wielomianów interpolacyjnych na końcach przedziału.

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

W zadaniu należało przeprowadzić interpolację wielomianową Newtona dla funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}. \tag{12}$$

Wzór interpolacyjny został zapisany w postaci:

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(x_0) \cdot \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i), \tag{13}$$

gdzie:

- $f^{(j)}(x_0)$ to iloraz różnicowy rzędu j liczony dla węzła x_0,
- x_i to położenia węzłów

Zgodnie z tabelą po prawej stronie, obliczamy wartości ilorazów różnicowych.

$$\begin{array}{|llllll|} y_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & f^{(1)}_{x_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_2 & f^{(1)}_{x_1} & f^{(2)}_{x_0} & 0 & 0 & 0 \\ y_3 & f^{(1)}_{x_2} & f^{(2)}_{x_1} & f^{(3)}_{x_0} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ y_n & f^{(1)}_{x_{n-1}} & f^{(2)}_{x_{n-2}} & f^{(3)}_{x_{n-3}} & \dots & f^{(n)}_{x_0} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|llllll|} f_{0,0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{1,0} & f_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{2,0} & f_{2,1} & f_{2,2} & 0 & 0 & 0 \\ f_{3,0} & f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ f_{n,0} & f_{n,1} & f_{n,2} & f_{n,3} & \dots & f_{n,n} \end{array}$$

gdzie:

- zerowa kolumna lewej tabelki to wartości funkcji w węzłach - y_i,
- elementy $f_{j,j}$ to ilorazy różnicowe rzędu j.

Do obliczenia wartości w prawej tabeli wykorzystano poniższy pseudokod:

$$\begin{aligned}
&for(j=1; j<=n; j++)\{\\
&\quad for(i=j; i<=n; i++)\{\\
&\qquad f_{i,j} = \frac{f_{i,j-1}-f_{i-1,j-1}}{x_i-x_{i-j}}\\
&\quad \}\\
&\}
\end{aligned} \tag{14}$$

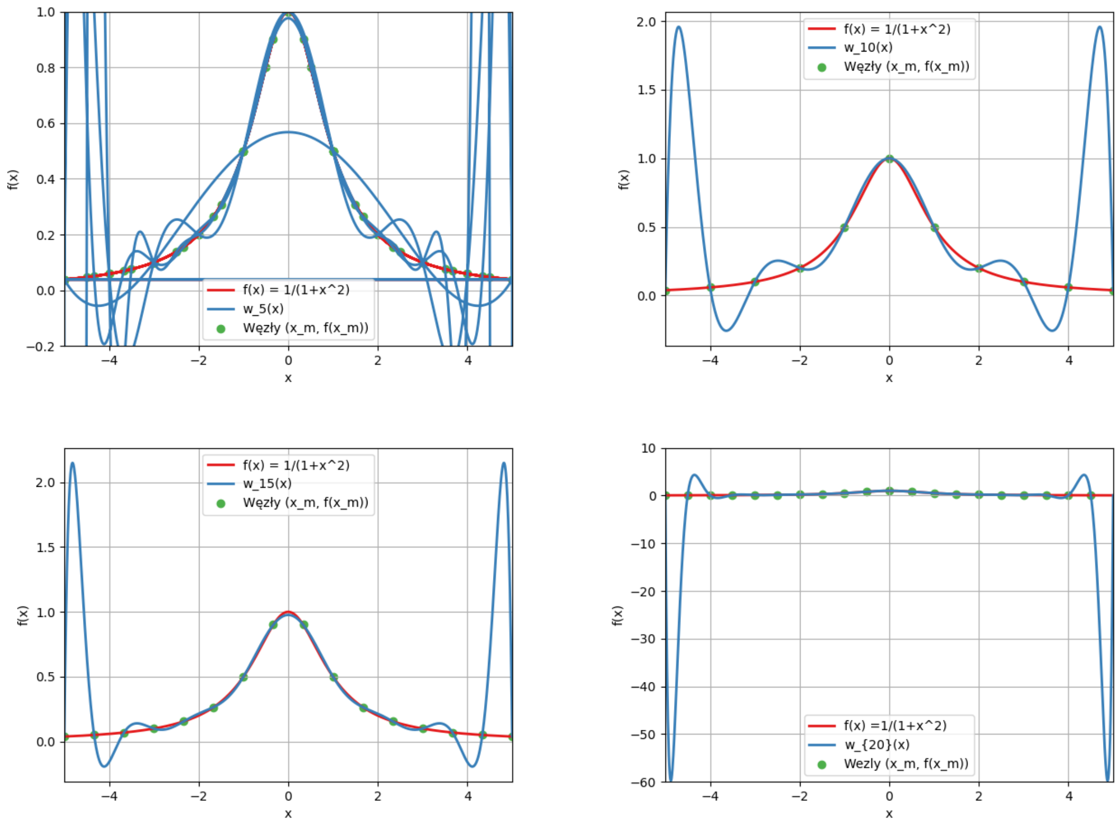
Wyznaczone wartości ilorazów pozwalają na zastosowanie wzoru interpolacyjnego do przybliżonego określenia wartości funkcji w przedziale $[x_{min}, x_{max}]$.

2.2 Realizacja zadania

- Łącznie rozpatrzono osiem przypadków dla różnych liczb węzłów: $n = 5, 10, 15, 20$, uwzględniając zarówno równomierne, jak i zoptymalizowane rozmieszczenie węzłów. Indeksacja węzłów obejmuje przedział od 0 do n.
- W analizie uwzględniono przedział $x \in [-5, 5]$. Dla każdego scenariusza określono liczbę węzłów jako $n+1$, ustalając ich położenie oraz wartości funkcji w tych punktach. Następnie dokonano obliczeń niezerowych elementów prawej tabeli przy użyciu przedstawionego pseudokodu.
- Aby uzyskać zoptymalizowane położenia węzłów, skorzystano z wzoru na zera wielomianów Czebyszewa:

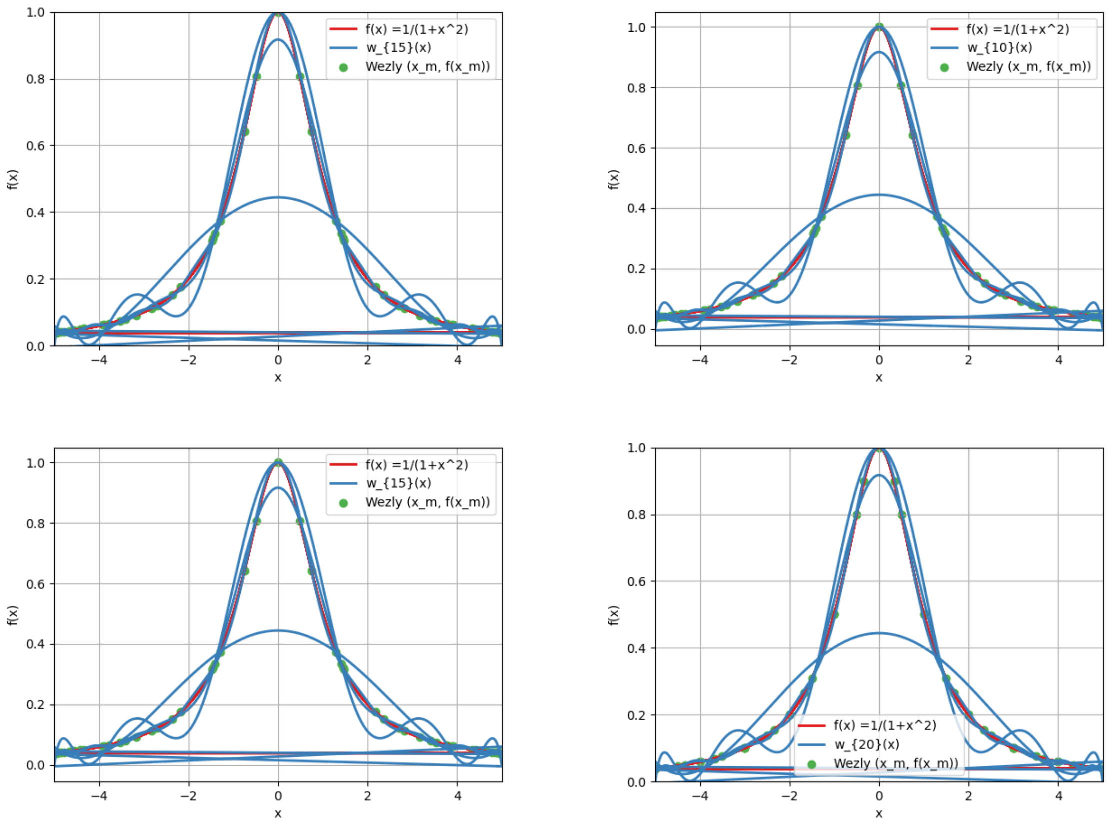
$$x_i = \frac{1}{2}\left[(x_{min} - x_{max})\cos\left(\pi\frac{2i+1}{2n+2}\right) + (x_{min} + x_{max})\right], \quad i = 0, 1, \ldots, n \tag{15}$$

2.3 Wyniki



Rysunek 1: Wykresy funkcji $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ oraz wielomianu interpolacyjnego $W_n(x)$ z równoodległymi węzłami.

Widoczne jest, że zwiększanie liczby węzłów n poprawia dokładność interpolacji w środkowej części wykresu. Jednakże na końcach przedziału obserwujemy coraz większe oscylacje, znane jako efekt Rungego. Zatem wartości interpolowane mogą znacząco odbiegać od rzeczywistych wartości funkcji.



Rysunek 2: Wykresy funkcji $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ oraz wielomianu interpolacyjnego $W_n(x)$, ale ze zoptymalizowanym położeniem węzłów.

Na przedstawionych wykresach można zobaczyć, ze wielomian interpolowany na podstawie węzłów Czebyszewa wykazuje wyraźną przewagę. W przypadku n = 5 różnica ta nie jest aż tak wyraźna, jednakże dla większej liczby węzłów osiągnięto znaczącą poprawę interpolacji, eliminując jednocześnie zjawisko przerzutu charakterystyczne dla efektu Rungego. Dla n = 20 kształt funkcji interpolacyjnej jest znacznie bliższy oryginalnej funkcji.

3 Wnioski

- Zwiększanie liczby węzłów interpolacji nie zawsze prowadziło do mniejszego oszacowania błędu, co zostało zaobserwowane dla interpolacji Newtona z równoodległymi węzłami. Pomimo tego, że otrzymana funkcja bliżej centrum układu coraz bardziej pokrywała się z analityczną, to na krańcach przedziału dochodziło do oscylacji z przeregulowaniem, które osiągały drastycznie wysokie wartości dla dużych n.
- Dobór węzłów z wykorzystaniem miejsc zerowych wielomianu Czebyszewa okazał się zdecydowanie lepszym pomysłem, dzięki zwiększającej się gęstości węzłów na krańcu przedziału, co pozwoliło na zminimalizowanie efektu Rungego. Również i w tym przypadku można było dostrzec lekkie oscylacje, jednak były one nieuniknione w przypadku stosowania metod wielomianowych.
- Interpolacja Newtona z węzłami wyznaczonymi na podstawie miejsc zerowych wielomianu Czebyszewa pozwoliła dla n = 20 otrzymać zadowalające odwzorowanie, którego przebieg jedynie delikatnie oscylował względem oryginalnej funkcji.
- Reasumując, interpolacja wielomianowa z wykorzystaniem metody Newtona okazała się skuteczna, o ile zostało wybrane odpowiednie położenie węzłów interpolacji.