Sprawozdanie 3
Metoda największego spadku dla macierzy wstęgowej

Yuliya Zviarko

11.03.2024

1 Wstęp teoretyczny

1.1 Metoda największego spadku

Algorytm najszybszego spadku reprezentuje numeryczną metodę dążącą do znalezienia minimum określonej funkcji celu. W trakcie każdej iteracji, w określonym kierunku, poszukiwana jest wartość minimalna tej funkcji celu. Rozwiązanie dla iteracji $\boldsymbol{i+1}$ przyjmuje z kolei strukturę, która jest następująca:

$$\overrightarrow{x_{i+1}} = \overrightarrow{x_i} + \alpha_i \vec{v}_i. \tag{1}$$

Jako v_i wybieramy kierunek gradientu, oznaczając go jako Q:

$$\nabla Q = A\overrightarrow{x_i} - \vec{b} = -\overrightarrow{r_i} \Longrightarrow \vec{v}_i = -\overrightarrow{r_i}. \tag{2}$$

Następnie obliczamy $Q(\overrightarrow{x_{i+1}})$ w celu znalezienia współczynnika a_i:

$$Q(\overrightarrow{x_i} - a_i\overrightarrow{x_i}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{x_i}^T\vec{b} + \frac{1}{2}a_i{}^2\overrightarrow{r_i}^T A\overrightarrow{r_i} + a_i\overrightarrow{r_i}^T\overrightarrow{r_i}. \tag{3}$$

Następnie różniczkujemy je po parametrze wariacyjnym w celu znalezienia minimum:

$$\frac{\partial Q}{\partial a_i} = \overrightarrow{r_i}^T\overrightarrow{r_i} + a_i\overrightarrow{r_i}^T\overrightarrow{r_i}, \tag{4}$$

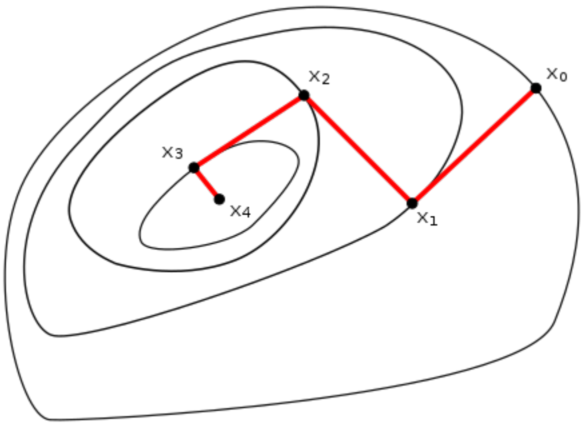
$$\frac{\partial Q}{\partial a_i} = 0 \Longrightarrow a_i = -\frac{\overrightarrow{r_i}^T\overrightarrow{r_i}}{\overrightarrow{r_i}^T A\overrightarrow{r_i}}. \tag{5}$$

Kolejne przybliżenie w podanej metodzie będzie opisane w następujący sposób:

$$\overrightarrow{x_{i+1}} = \overrightarrow{x_i} + \frac{\overrightarrow{r_i}^T \overrightarrow{r_i}}{\overrightarrow{r_i}^T A \overrightarrow{r_i}} \overrightarrow{r_i}. \tag{6}$$

Dla którego zachodzi warunek:

$$Q(\overrightarrow{x_i}) > Q(\overrightarrow{x_{i+1}}). \tag{7}$$



Rysunek 1. Ilustracja działania metody najszybszego spadku dla dwuwymiarowej funkcji celu. W każdym kroku, w zadanym kierunku wyszukiwana jest najmniejsza wartość funkcji celu. [1]

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Naszym zadaniem było początkowo utworzyć macierz o rozmiarze n = 1000 i wypełnić ją elementami zgodnie z podaną formułą:

$$\begin{cases} A_{i,j} = \dfrac{1}{1 + |i-j|}, gdy\ |i-j| \le m, \qquad i,j = 0, \dots, n-1 \\ A_{i,j} = 0, \qquad gdy |i-j| > m \end{cases}, \tag{8}$$

gdzie wartość m = 10.

Następnym krokiem było utworzenie, a potem wypełnienie wektora wyrazów wolnych $\vec{b}$ w następujący sposób:

$$\overrightarrow{b_i} = 0, \quad i = 0, \dots, n-1 \tag{9}$$

Kolejno było implementacja w języku C metody największego spadku do rozwiązania układu równań liniowych, korzystając według poniższego pseudokodu:

```
inicjalizacja:   k=0, x, b, A\\
 do{
          k++
          r = b − Ax
          α = (r^T r) / (r^T A r)
       x = x + αr  //aktualizacja rozwiązania
    }while(||r||_2 > 10^-6  &&  k < 500 )
```

Rysunek 2. Pseudokod metody największego spadku dla macierzy wstęgowej [2]

Gdzie:
k – numer iteracji,
$\overrightarrow{x_i}$ – aktualne przybliżenie wektora rozwiązań,
$\vec{r}$ – wektor reszt.

Przeprowadziłam analizę układu równań dla dwóch różnych wektorów startowych: $\vec{x} = 0$ i $\vec{x} = 1$.
W trakcie każdej iteracji zapisałam do pliku aktualny numer iteracji k, normę euklidesową wektora reszt $\|r\|_2 = \sqrt{r^T r}$, wartość $a_k$oraz normę euklidesową wektora rozwiązań $\|r\|_2 = \sqrt{x^T x}$.
Przeprowadziłam obliczenia zarówno w podwójnej precyzji (double), jak i w pojedynczej precyzji (float). Na zakończenie wygenerowałam przez Gnuplot wykresy prezentujące uzyskane wyniki.

2.2 Wyniki

Korzystając z Gnuplot napisałam dwa skryptu „plot.plt” oraz „plot2.plt”:

```
set term png # ustawienie typu terminala, np. m.in. x11 (ekran), postscript, pdf, png, table (kolumny współrzędnych).

set out "z1.png" # ustawienie nazwy pliku wyjściowego

set xl "t" # tytuł osi x
set yl "x(t)" # tytuł osi y
set logscale y
set title "Wychylenie x(t)" # tytuł wykresu

p "zadanie_a.txt" u 1:2 w l lt 3 pt 6 t "h=0.1" # rysowanie wykresu

set out "z1_1.png" # ustawienie nazwy pliku wyjściowego

set xl "t" # tytuł osi x
set yl "x(t)" # tytuł osi y
unset log y
set title "Wychylenie x(t)" # tytuł wykresu

p "zadanie_a.txt" u 1:3 w l lt 3 pt 6 t "h=0.1" # rysowanie wykresu
```

Rysunek 3. Skrypt do generowania wykresów dla przypadku, kiedy x = 0.

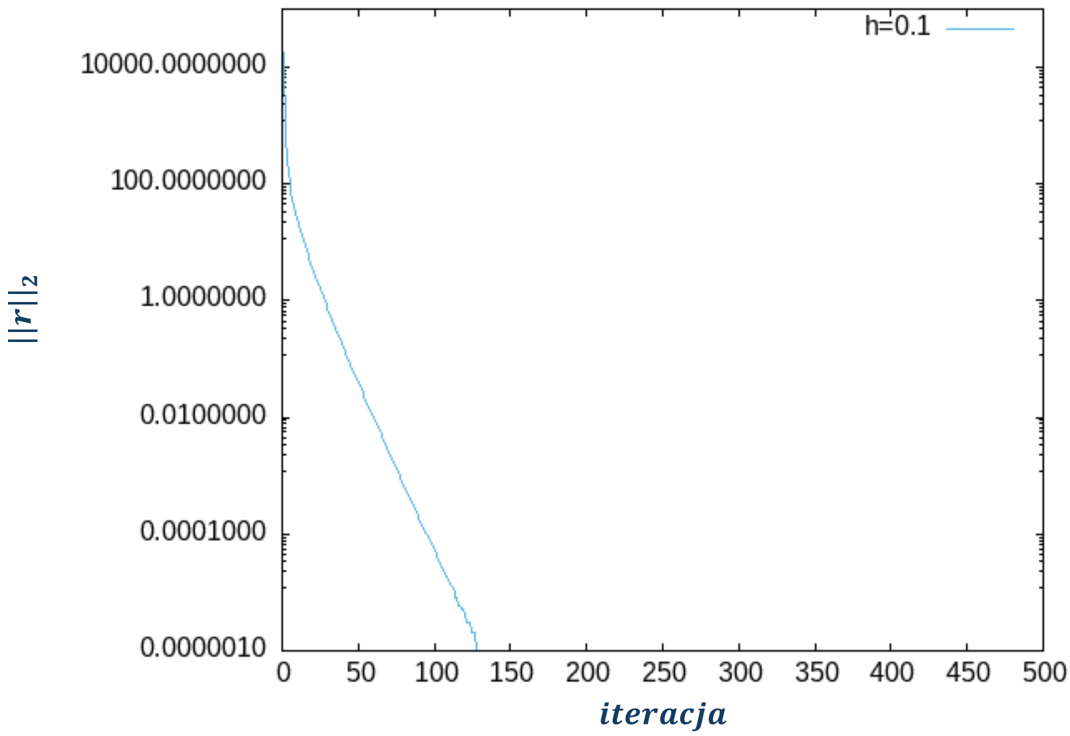
```
set term png # ustawienie typu terminala, np. m.in. x11 (ekran), postscript, pdf, png, table (kolumny współrzędnych).

set out "z2.png" # ustawienie nazwy pliku wyjściowego

set xl "t" # tytuł osi x
set yl "x(t)" # tytuł osi y
set logscale y
set title "Wychylenie x(t)" # tytuł wykresu

p "zadanie_b.txt" u 1:2 w l lt 3 pt 6 t "h=0.1" # rysowanie wykresu

set out "z2_1.png" # ustawienie nazwy pliku wyjściowego

set xl "t" # tytuł osi x
set yl "x(t)" # tytuł osi y
unset log y
set title "Wychylenie x(t)" # tytuł wykresu

p "zadanie_b.txt" u 1:3 w l lt 3 pt 6 t "h=0.1" # rysowanie wykresu
```

Rysunek 4. Skrypt do generowania wykresów dla przypadku, kiedy x = 1.

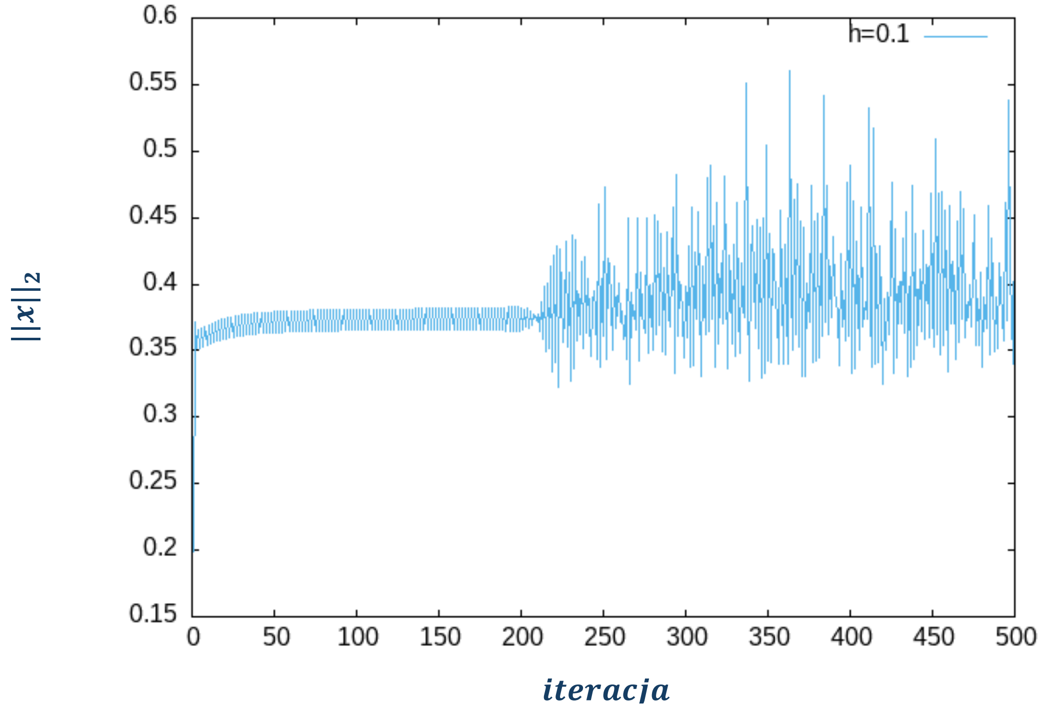
Po ich stworzeniu, używając polecenia:

```
>gnuplot plot.plt
>gnuplot plot2.plt
```

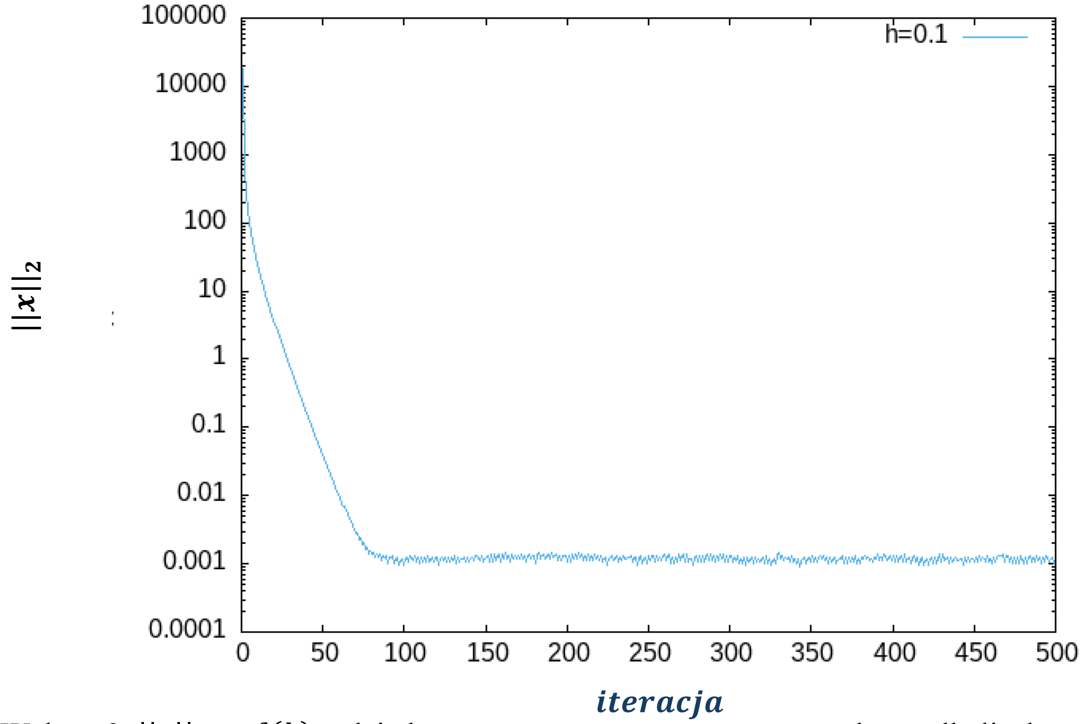
W pliku roboczym zostały wygenerowany wykresy norm wektorów $||r||_2$ oraz $||x||_2$ dla pojedynczej i podwójnej precyzji:



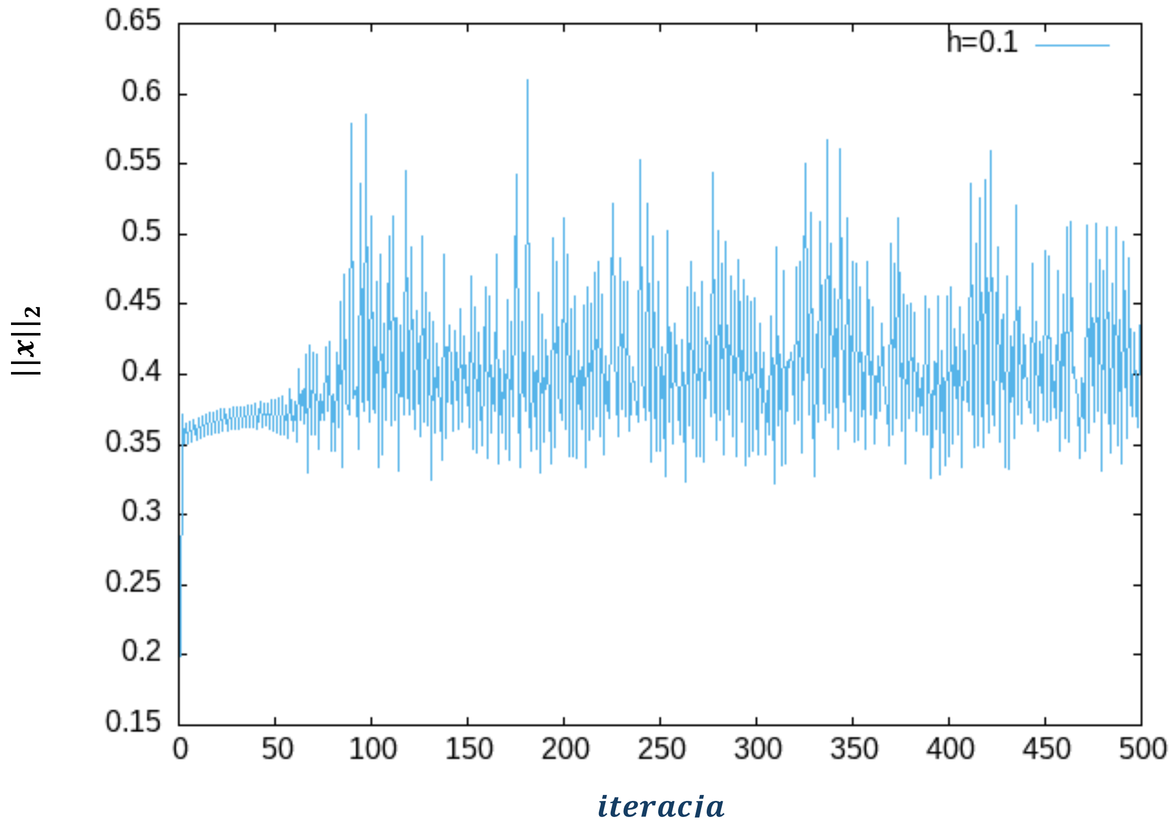
Wykres 1. $||r||_2 = f(k)$, gdzie k to numer iteracji. Wykres sporządzony dla liczb podwójnej precyzji, przyjęto $x = 0$. Oś Y jest przedstawiona w skali logarytmicznej.



Wykres 2. $||x||_2 = f(k)$, gdzie k to numer iteracji. Wykres sporządzony dla liczb podwójnej precyzji, przyjęto $x = 0$.



Wykres 3. $||r||_2 = f(k)$, gdzie k to numer iteracji. Wykres sporządzony dla liczb pojedynczej precyzji, przyjęto $x = 1$. Oś Y jest przedstawiona w skali logarytmicznej.



Wykres 4. $||x||_2 = f(k)$, gdzie k to numer iteracji. Wykres sporządzony dla liczb pojedynczej precyzji, przyjęto $x = 1$.

3 Wnioski

Z analizy powyższych wykresów wynika, że początkowa wartość wektora **x** nie wywiera istotnego wpływu na ostateczny wynik. Jest to spowodowane faktem, że sekwencja wektorów $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_i}, \dots$ jest zbliżająca się do punktu granicznego, który stanowi rozwiązanie równania.

Porównując wykresy 1 i 3 dla pojedynczej i podwójnej precyzji, zauważalne są wyraźne różnice w ilości iteracji. W przypadku pojedynczej precyzji pętla zatrzymuje się dopiero po osiągnięciu maksymalnej liczby iteracji (500), co oznacza, że wynik nigdy nie osiągnął wartości rzędu 10^{-6}.
Z tego wywnioskowałam, że wybór podwójnej precyzji zapewnia dokładniejsze rozwiązanie.

Bibliografia

[1] Wikipedia, „Metoda najszybszego spadku," [Online]. Available: https://pl.wikipedia.org/wiki/Metoda_najszybszego_spadku.

[2] T. Chwiej, „Metoda największego spadku dla macierzy wstęgowej - wersja 2," [Online]. Available: http://galaxy.agh.edu.pl/~chwiej/mn/najwiekszy_spadek_wstega_wersja_2.pdf.