Sprawozdanie 1
Rozwiązywanie UARL metodami bezpośrednimi

Yuliya Zviarko

26.02.2024

1 Wstęp teoretyczny

Metoda Gaussa-Jordana używana jest do rozwiązywania układów równań liniowych oraz odwracania macierzy. W jej podstawowej formie, układ równań liniowych jest reprezentowany za pomocą trzech macierzy: **A** (zawierającej współczynniki przy niewiadomych), **x** (macierz niewiadomych) i **B** (macierz wyrazów wolnych).

Przykładowy układ równań:

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = d_3 \end{cases}. \tag{1}$$

W postaci macierzowej ten układ ma postać:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

W celu rozwiązania układu, przeprowadza się **przekształcenia elementarne na macierzy rozszerzonej o wyrazy wolne**, dążąc do uzyskania macierzy jednostkowej.
Przekształcenia elementarne obejmują:

- dodawanie jednego wiersza pomnożonego przez liczbę do innego wiersza,
- zamienianie miejscami dwóch wierszy,
- przemnażanie wiersza przez liczbę różną od zera.

Proces sprowadzania macierzy A do postaci jednostkowej wykonuje się w trzech etapach:

1. Sprowadzenie macierzy do postaci trójkątnej dolnej,
2. Wyzerowanie wyrazów powyżej przekątnej, zaczynając od ostatniego wiersza,
3. Przemnożenie każdego wiersza tak, aby na diagonali znajdowali się same jedynki.

Macierz współczynników rozszerzona o wyrazy wolne:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}\right]. \tag{3}$$

Powyższa macierz po odpowiednich przekształceniach, przyjmuje postać:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 1 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 1 & e_3 \end{array}\right]. \tag{4}$$

Z tej postaci otrzymujemy wprost:

$$\begin{cases} x_1 = e_1 \\ x_2 = e_2 \\ x_3 = e_3 \end{cases}. \tag{5}$$

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Jednym z podstawowych elementów UARL (układów algebraicznych równań liniowych) jest analiza równań różniczkowych. Przykładowa zależność dla prostego oscylatora harmonicznego, wynikająca z drugiej zasady dynamiki Newtona, jest opisana wzorem:

$$\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} = -\frac{k}{m}x(t) = -\omega^2 x(t). \tag{6}$$

Po przybliżeniu lewej strony równania **(6)** poprzez drugą pochodną położenia **x** w chwili **t** za pomocą ilorazu różnicowego, otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} \approx \frac{x(t+\Delta t) - 2x(t) + x(t-\Delta t)}{(\Delta t)^2}. \tag{7}$$

Z tego równania jesteśmy w stanie wyznaczyć rekurencyjną zależność, pozwalającą obliczyć wartość x_{x+1} w zależności od x_i i x_{x-1}. Przy wprowadzeniu oznaczeń $\Delta t = h$ i $x_i = x(ih)$, wzór przyjmuje postać:

$$x_{i+1} + (w^2h^2 - 2)x_i + x_{i-1} = 0. \tag{8}$$

Aby to równanie było jednoznaczne potrzebujemy znać warunki początkowe – x_0, $x_1 \cdot x_0 = A$ oznacza początkowe wychylenie wahadła z położenia równowagi oraz $\frac{x_1 - x_0}{h} = v_0$, oznaczającego początkową prędkość ciała. Równanie **(8)** w formie macierzowej dla pierwszych siedmiu kroków czasowych można zapisać jako:

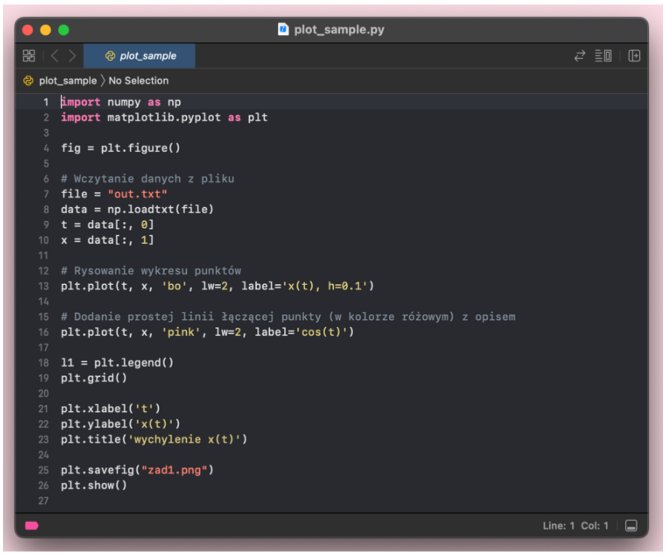
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (w^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (w^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (w^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (w^2h^2-2) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (w^2h^2-2) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ v_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Zadaniem było rozwiązanie układu **(9)** za pomocą metody eliminacji Gaussa-Jordana oraz stworzenie wykresu zależności wychylenia z położenia równowagi od czasu.
Przyjęte warunki początkowe to $v_0 = 0, A = 1$, krok całkowania h = 0.1, natomiast $\frac{k}{m} = \omega^2 = 1.$

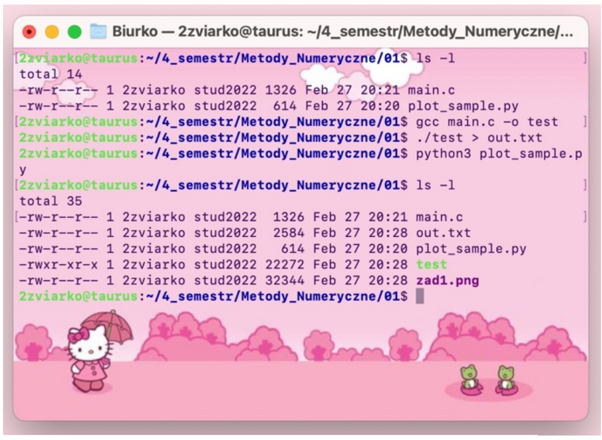
W zadaniu rozpatrywałam macierz kwadratową o boku 200, co jest równoznacznie z rozpatrzeniem 200 kroków czasowych, korzystając z implementacji procedury **gaussj.c** dostępnej w bibliotece **Numeral Recipies** do rozwiązania układu równań.

2.2 Wyniki

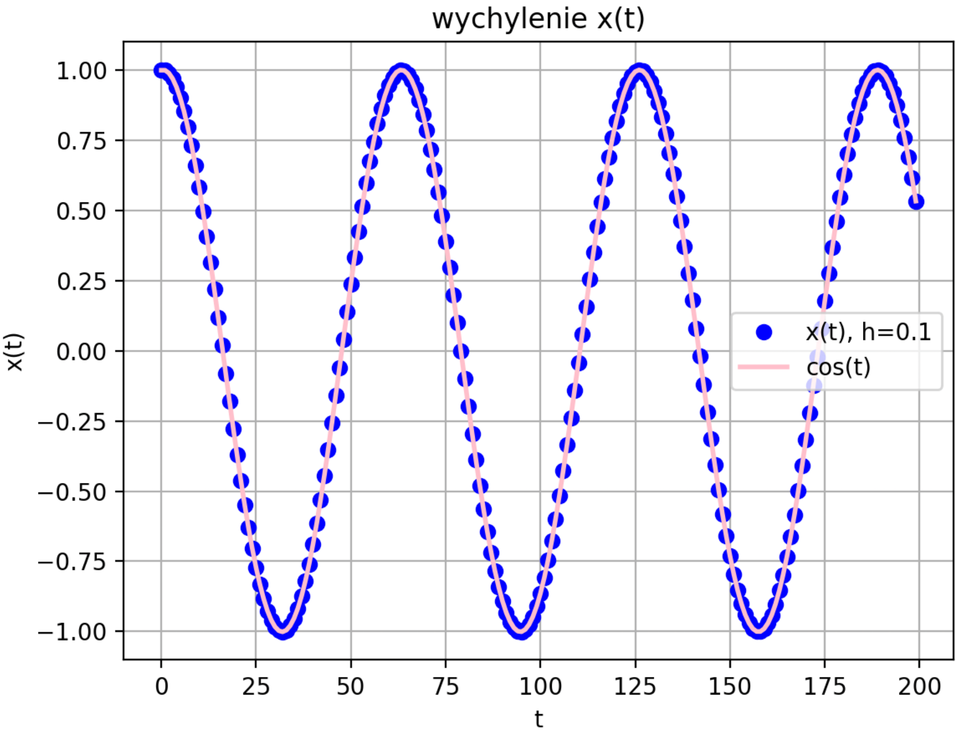
Wynik programu z pliku **main.c** został zapisany do pliku o nazwie **test**. Następnie, zawartość pliku **test** została skopiowana do pliku o nazwie **out.txt**, który był niezbędny do generowania wykresu za pomocą polecenia „>**python3 plot_sample.py**". Skrypt **plot_sample.py** odegrał kluczową rolę w procesie tworzenia potrzebnego wykresu.



Rysunek 1. Zawartość skryptu plot_sample.py.



Rysunek 2. Zrzut ekranu terminalu, na którym widać proces tworzenia niezbędnego wykresu.



Rysunek 3. ***Zależność wychylenia z położenia równowagi od czasu*** *uzyskane metodą eliminacji Gaussa-Jordana.*

Nasza funkcja doskonale odwzorowuje **krzywą cosinusoidalną**, opisującą wychylenie od czasu w nietłumionym oscylatorze harmonicznym, z którym mieliśmy do czynienia w tym zadaniu. W praktyce jednak spotykamy się głównie z drganiami tłumionymi, ponieważ eliminacja wpływu zewnętrznych czynników, takich jak opór powietrza, jest trudna w codziennym życiu.

3 Wnioski

1. Metody bezpośrednie stanowią precyzyjne narzędzia, pod warunkiem zapewnienia odpowiednich warunków dla skutecznych obliczeń. Warto zauważyć, że kluczowym elementem w tej sytuacji okazała się ilość kroków, gdzie wyższa częstotliwość pomiarów przyczyniła się do osiągnięcia satysfakcjonującej dokładności. Metoda Gaussa-Jordana wykazała się także wysoką efektywnością, umożliwiając rozwiązanie układów liniowych z dużą liczbą niewiadomych. Potwierdzeniem jej precyzji jest zbieżność wykresu funkcji analitycznej z wynikami uzyskanymi za pomocą metody numerycznej.
2. Komputery są w stanie szybko rozwiązywać duże układy równań.
3. W niektórych sytuacjach wystarczająca jest aproksymacja wyników, eliminując konieczność dokładnych obliczeń.