

# LE PROBLÈME D'ULAM-HAMMERSLEY

Kevin Zagalo  
Sorbonne Université

Mémoire de master dirigé par Quentin Berger, LPSM UMR 8001<sup>0</sup>

Septembre 2018

## Résumé

Ce papier a pour but de présenter l'étude du comportement asymptotique de la taille de la plus longue sous-suite croissante d'une permutation aléatoire de loi uniforme. Pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_N$  une permutation des entiers  $1, 2, \dots, N$ , une **sous-suite croissante**  $(i_1 < i_2 < \dots < i_k)$  de  $\sigma$  est une sous-suite satisfaisant  $\sigma(i_1) < \sigma(i_2) < \dots < \sigma(i_k)$ . On définit alors la quantité  $\ell(\sigma)$  comme la taille de la plus longue sous-suite croissante de la permutation  $\sigma$ . Soit maintenant  $\pi_N$  une permutation aléatoire de loi uniforme et  $\ell_N := \ell(\pi_N)$ . Le premier résultat consistera à donner une expression exacte de la loi  $dF_N$  de  $\ell(\pi_N)$ , selon les travaux de Rains [Rai98]. Nous en viendrons à la solution du problème, à savoir

$$\frac{\ell_N}{\sqrt{N}} \xrightarrow{\text{proba}} 2 \quad (*)$$

et en présenterons trois démonstrations totalement différentes, à savoir la méthode des nuages poissonniens de Hammersley [AD95], celle des matrices de Toeplitz de Johansson [Joh98] et enfin une méthode élaborée en partie par Logan et Shepp [LS77] utilisant les mesures de Plancherel.

## TABLE DES MATIÈRES

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introduction</b>   | <b>1</b>  |
| <b>1 La loi de la plus longue sous-suite croissante d'une permutation aléatoire</b> | <b>2</b>  |
| 1.1 Patience sorting . . . . .  | 2         |
| 1.2 Diagrammes de Young et permutations . . . . .                                   | 3         |
| 1.3 La correspondance de Schensted . . . . .  | 4         |
| 1.4 Mesures de Plancherel . . . . .   | 5         |
| 1.5 $\ell_N$ et les matrices aléatoires . . . . .                                   | 6         |
| <b>2 Comportement asymptotique de <math>\ell_N</math></b>                           | <b>7</b>  |
| 2.1 Processus de Hammersley . . . . .   | 8         |
| 2.2 Matrices aléatoires et déterminants de Toeplitz . . . . .                       | 10        |
| 2.3 Comportement asymptotique des mesures de Plancherel . . . . .                   | 14        |
| <b>Références</b>   | <b>18</b> |
| <b>Annexes</b>  | <b>19</b> |

---

0. Laboratoire de Probabilités, Statistique et Modélisation : : <https://www.lpsm.paris>

# INTRODUCTION

Commençons par l'application physique qui a motivé la résolution de ce problème, raison pour laquelle il porte le nom d'Ulam-Hammersley. Soient  $N \in \mathbb{N}$  particules d'un gaz de Coulomb<sup>1</sup> réparties uniformément sur le pavé  $[0, 1]^2$ . Nous souhaitons mesurer combien de particules au maximum rencontrent un chemin croissant - selon un certain ordre - de  $(0, 0)$  à  $(1, 1)$  ?

Soient  $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots, X_N, Y_N$  des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur  $[0, 1]$  sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . On obtient le nuage de points  $(X_1, Y_1), \dots, (X_N, Y_N)$  modélisant ces particules. Il existe presque sûrement des permutations  $\sigma, \theta \in \mathfrak{S}_N$  telles que  $X_{\sigma^{-1}(1)} \leq \dots \leq X_{\sigma^{-1}(N)}$  et  $Y_{\theta^{-1}(1)} \leq \dots \leq Y_{\theta^{-1}(N)}$ .

On munie maintenant le pavé  $[0, 1]^2$  d'un ordre partiel  $\prec$  tel que pour  $x, y \in [0, 1]^2$ ,

$$x \prec y \iff x_1 = y_1, x_2 < y_2 \text{ ou } x_1 < y_1, x_2 \leq y_2$$

On peut alors associer ce nuage de point au graphe  $\{(\sigma(j), \theta(j)) : j = 1, \dots, N\}$ , et on peut montrer que ce dernier est exactement  $\{(j, \pi_N(j)) : j = 1, \dots, N\}$ , où  $\pi_N = \theta \circ \sigma^{-1}$  (voir Figure 1 et Annexe A). On peut se convaincre rapidement que l'ordre partiel  $\prec$  est préservé par cette représentation du nuage de points par le graphe de  $\pi_N$ . On peut montrer qu'elle est aléatoire de loi uniforme,  $\sigma(X_1, Y_1, \dots, X_N, Y_N) - \text{mesurable}$ , et telle que chacune de ses sous-suites croissantes  $(i_1, \dots, i_k)$  vérifie

$$(X_{\sigma^{-1}(i_1)}, Y_{\theta^{-1}(i_1)}) \prec \dots \prec (X_{\sigma^{-1}(i_k)}, Y_{\theta^{-1}(i_k)})$$

par construction. Notre problème consiste donc à exhiber  $dF_N$ , la loi de la taille de la plus longue sous-suite croissante  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$  de  $\pi_N$ , c'est à dire  $\ell(\pi_N)$ . Ce processus a été étudié par Hammersley, qui a donc montré que l'étude d'un tel processus revient donc à résoudre le problème de la plus longue sous-suite croissante d'une permutation aléatoire énoncé par Ulam.

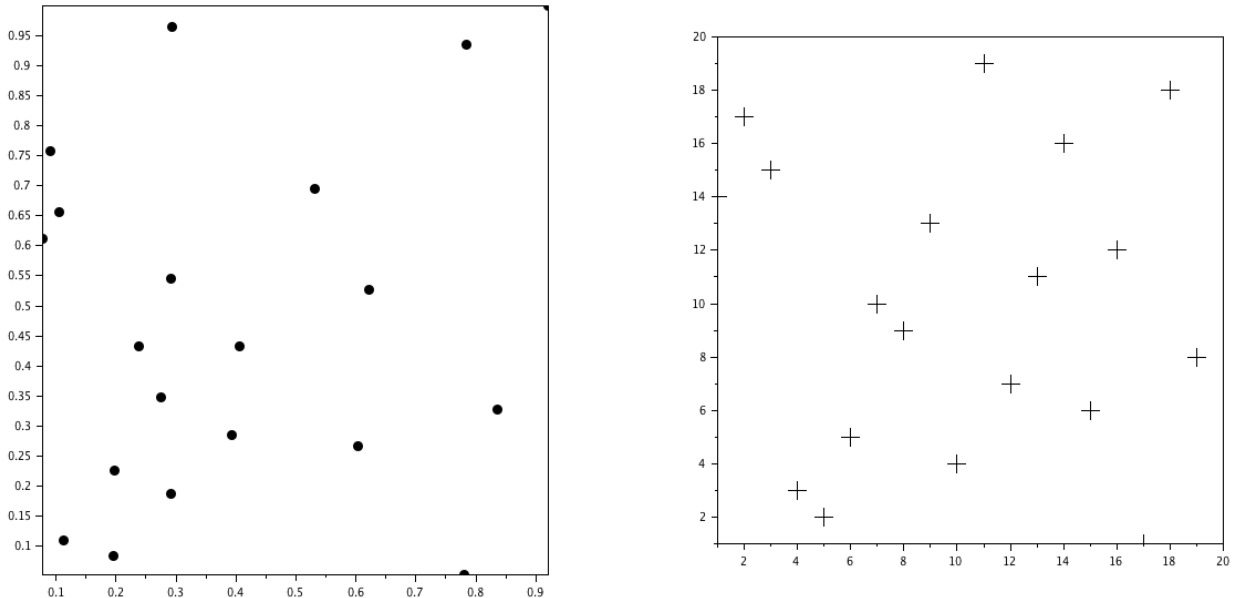


FIGURE 1 – À gauche le nuages dans  $[0, 1]^2$ , à droite le graphe  $\{j, \pi(j)\} : j = 1, \dots, N$

1. Nous verrons plus tard pourquoi.

# 1 LA LOI DE LA PLUS LONGUE SOUS-SUITE CROISSANTE D'UNE PERMUTATION ALÉATOIRE

Avant d'étudier le comportement de  $\ell(\pi_N)$  - qui est aléatoire -, familiarisons nous avec l'application  $\ell$ , et trouvons une méthode pour simuler ses différentes valeurs, c'est à dire calculer  $\ell(\pi)$  pour une permutation  $\pi$  - déterministe - donnée.

## 1.1 PATIENCE SORTING

On commence par un algorithme simple, le *patience sorting*, qui joue à un célèbre jeu de cartes : le solitaire<sup>2</sup>. Soit donc un paquet de  $N$  cartes étiquetées par les entiers  $1 \dots N$ , mélangé dans un ordre représenté par une permutation  $\pi$ . Nous construisons des piles de cartes selon la règle suivante : *un entier peut être placé sous la pile d'entiers plus grands la plus à gauche, ou placé dans une nouvelle pile à droite*, le but étant de finir avec le moins de piles possible.

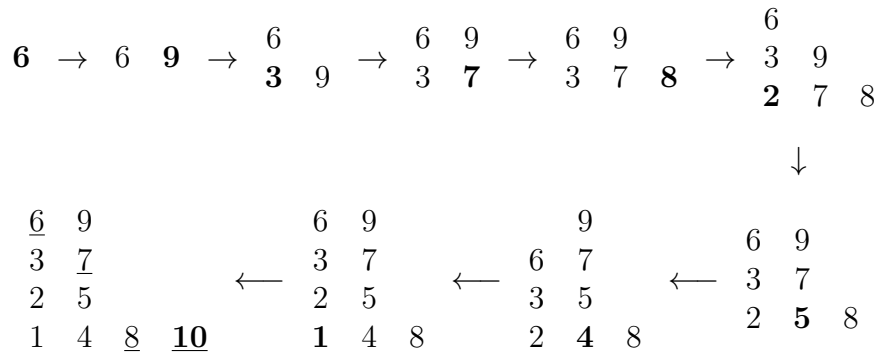


FIGURE 2 – Patience sorting pour la permutation (6 9 3 7 8 2 5 4 1 10)

**Lemme 1.1** Soit  $\pi$  l'ordre d'un paquet de cartes étiquetées par les entiers  $\{1, \dots, N\}$ . La stratégie du *patience sorting* proposée précédemment appliquée à  $\pi$  donne exactement  $\ell(\pi)$  piles de cartes.

*Preuve.* Tout d'abord, si  $i_1 < \dots < i_k$  est une sous-suite croissante, alors  $i_j$  est forcément placé dans une pile à droite de  $i_{j-1}$ , car le contraire impliquerait  $i_j < i_{j-1}$ , et donc le nombre de piles est forcément plus grand ou égal à  $k$ . Le *patience sorting* fournit en plus une manière de trouver une des plus grandes sous-suites croissantes. En effet, en partant de la pile de droite, il suffit de prendre l'élément  $i$  le plus grand, puis de prendre le plus grand élément inférieur à  $i$  dans la pile suivante et ainsi de suite (voir les éléments soulignés de la Figure 2).

□

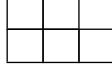
Un inconvénient de cette construction, et on le voit dans l'exemple de la Figure 2, c'est qu'à chaque étape du *patience sorting*, les piles ne sont pas forcément ordonnées par tailles décroissantes, ce qui sera commode pour établir des classes d'équivalences ensuite. Une légère modification qui consiste à appliquer le *patience sorting* de manière récursive nous permet de résoudre cela, c'est l'algorithme de Robinson-Schensted.

---

2. *Patience en anglais*

## 1.2 DIAGRAMMES DE YOUNG ET PERMUTATIONS

D'abord on appelle **partition** de  $N$  un vecteur d'entiers non négatifs  $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{|\lambda|})$ , tels que  $N = \lambda_1 + \dots + \lambda_{|\lambda|}$ . On notera  $\lambda \vdash N$ . Une façon de représenter graphiquement une partition, disons  $(2, 2, 1)$ , est le diagramme



qu'on appelle **diagramme de Young** de **forme**  $\lambda = (2, 2, 1)$  et d'**ordre**  $N = 5$ .

Revenons aux permutations. On peut écrire toute permutation dans sa décomposition en cycles disjoints. C'est cette écriture que nous utiliserons dans cette partie. Elle n'est pas unique, en effet pour  $N = 6$  la permutation  $\pi = (23)(451)(6)$  peut être écrite  $(514)(6)(32)$ . On fera donc une première équivalence pour rendre unique cette décomposition, en écrivant les cycles disjoints de  $\pi$  du plus long au plus court, en faisant commencer chaque cycle par son plus petit élément, par exemple  $\pi = (145)(23)(6)$ . Le **type de cycles** de  $\pi$  est la liste  $\lambda(\pi) = (\lambda_1(\pi) \geq \dots \geq \lambda_k(\pi))$  des tailles des différents cycles de  $\sigma$ . On peut par exemple représenter  $\pi$  de manière unique par

$$\begin{array}{c} 5 \\ 4 \quad 3 \\ 1 \quad 2 \quad 6 \end{array}$$

et donc ici  $\lambda(\pi) = (3, 2, 1)$ . On retombe sur nos pattes puisqu'on reconnaît que pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ ,  $\lambda(\sigma)$  est une partition de  $N$ . On peut donc construire des classes d'équivalences selon les types de cycles des permutations du groupe symétrique, et on verra plus tard que c'est la bonne façon de le représenter :

**Théorème 1.1** *Les classes de type de cycles sont les **classes de conjugaison** de  $\mathfrak{S}_N$ , c'est à dire que pour toute partition  $\lambda$ , et pour toute permutation  $\tau$  de type de cycles  $\lambda$ ,  $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$  est de type de cycles  $\lambda$  pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ .*

Enfin, on appelle **tableau de Young** d'ordre  $N$  un diagramme de Young dans lequel les cases du tableau contiennent des entiers distincts de  $\{1, \dots, N\}$  et dont les colonnes et les lignes sont triées dans un ordre croissant.

On notera  $\mathfrak{T}_\lambda$  l'ensemble des tableaux de Young de forme  $\lambda$  et  $d_\lambda$  le nombre de tels tableaux.

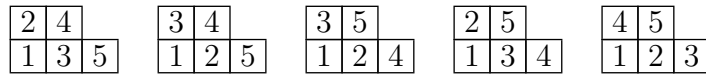


FIGURE 3 –  $\mathfrak{T}_{(2,2,1)}$  - Tableaux de Young de forme  $(2,2,1)$

**Lemme 1.2 (La formule des équerres [Sch61])** *Soit  $\lambda \vdash N$ ,*

$$d_\lambda = \frac{N!}{\prod_{\square \in \lambda} h(\square)}$$

*où  $\square$  désigne chaque case du diagramme de Young associé à  $\lambda$ , et  $h(\square)$ <sup>3</sup> la longueur de l'équerre de  $\square$ , c'est à dire le nombre de cases à droite et au dessus de  $\square$ , en comptant  $\square$  une seule fois.*

Ce qui nous intéresse pour la suite est le diagramme de Young associé à une permutation  $\pi$  par l'algorithme de Robinson-Schensted que nous noterons aussi  $\lambda(\pi)$ <sup>4</sup>.

3. Pour *hook*, équerre en anglais

4. Un diagramme n'étant qu'une façon de représenter une partition et inversement.

### 1.3 LA CORRESPONDANCE DE SCHENSTED

Dans la suite, nous modifions légèrement le *patience sorting* pour qu'une permutation  $\pi$  nous fournisse un unique tableau de Young  $P = P(\pi) \in \mathfrak{T}_{\lambda(\pi)}$ , qu'on appellera **tableau d'insertion**, construit grâce à l'**algorithme de Robinson-Schensted** : *On considère maintenant qu'à l'insertion d'un entier  $i$ , on fait sortir du tableau l'entier  $k$  qu'il fait "sauter". On réinsère ensuite  $k$  via le patience sorting en considérant le tableau sans les lignes dans lesquelles il était précédemment.* On peut donc reformuler le Lemme 1.1 de la manière suivante :

**Théorème 1.2** *Pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ ,  $\ell(\sigma) = |\lambda(\sigma)|$ .*

Par ailleurs, en constatant simplement que la plus longue sous-suite croissante de  $\sigma = (\sigma_1 \dots \sigma_N)$  est exactement la plus longue sous-suite décroissante de  $\sigma' = (\sigma_N \dots \sigma_1)$ , on obtient alors immédiatement que  $|\lambda(\sigma')| = \lambda_1(\sigma)$ . On notera  $\lambda'(\sigma) := \lambda(\sigma')$  et on a le corollaire suivant :

**Corollaire 1.1** *Pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ ,  $\ell(\sigma) = \lambda'_1(\sigma)$ .*

Plus généralement on notera  $\lambda'$  le **diagramme transposé** de  $\lambda$ <sup>5</sup>, s'obtenant en échangeant lignes et colonnes.

Cela dit, il est impossible de retrouver  $\pi$  à partir de  $P$  car pour une partition  $\lambda$  il existe  $d_\lambda$  tableaux de Young différents. Pour palier à cela, reprenons l'algorithme de Robinson-Schensted, et construisons en parallèle un deuxième tableau  $Q = Q(\pi)$ , qu'on appellera **tableau d'enregistrement** construit de la manière suivante : à la  $i$ -ème itération de l'algorithme de Robinson-Schensted, on ajoute la carte étiquetée  $\pi(i)$  dans une certaine pile que l'on note  $P_{i_0}$ . On ajoute simultanément à la pile  $Q_{i_0}$  la carte étiquetée  $i$ . Une façon imagée de voir la construction de  $Q$  serait de reconstituer la forme de  $P$  sur un plateau de *puissance 4* avec des jetons numérotés de 1 à  $N$ .

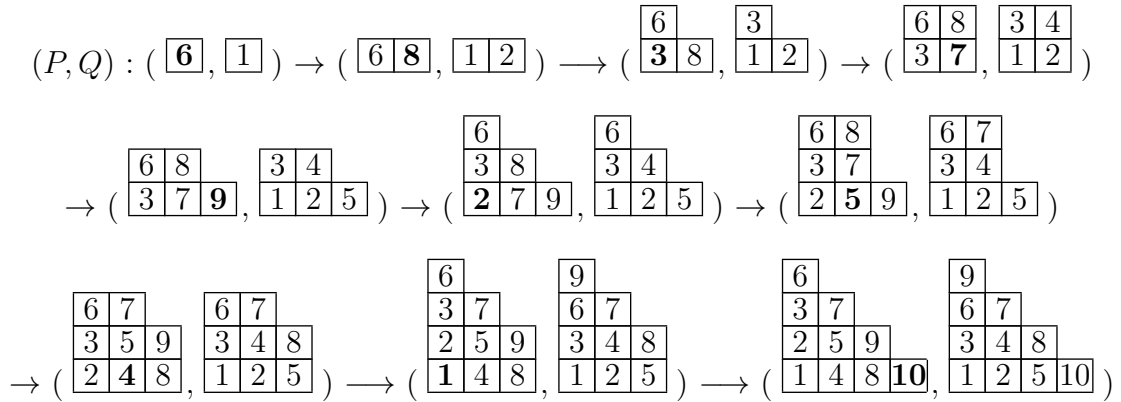


FIGURE 4 – Algorithme de Robinson-Schensted pour la permutation (6 8 3 7 9 2 5 4 1 10)

**Lemme 1.3** *Si l'algorithme de Robinson-Schensted construit  $(P(\pi), Q(\pi))$  à partir de  $\pi$ , alors il construit  $(Q(\pi), P(\pi))$  à partir de  $\pi^{-1}$ , i.e.*

$$(P(\pi), Q(\pi)) = (Q(\pi^{-1}), P(\pi^{-1}))$$

et  $P(\pi), Q(\pi) \in \mathfrak{T}_\lambda$  si et seulement si  $P(\pi'), Q(\pi') \in \mathfrak{T}_{\lambda'}$ .

Il se trouve que cette construction fournit deux tableaux de Young qui ne servent en réalité qu'à rendre la construction unique pour chaque permutation. Le Lemme 1.3 nous permet de construire l'inverse de l'algorithme de Robinson-Schensted, c'est-à-dire de retrouver  $\pi$  à partir de  $(P(\pi), Q(\pi))$  et donc d'établir une bijection qui nous sera fort utile.

5. Cela nous servira pour faciliter les calculs des simulations et dans la section suivante.

**Théorème 1.3** *À chaque permutation on peut associer un unique couple de tableaux de Young et réciproquement, i.e.*

$$\mathfrak{S}_N \simeq \bigsqcup_{\lambda \vdash N} \mathfrak{T}_\lambda \times \mathfrak{T}_\lambda \quad (1.1)$$

**Corollaire 1.2** *Pour tout  $N \geq 0$ ,  $N! = \sum_{\lambda \vdash N} d_\lambda^2$*

Cela étant fait, nous n'aurons plus aucune utilité de ce couple de tableaux de Young, mais uniquement de leur forme. La bijection ne servant qu'à dénombrer le groupe symétrique d'une façon adéquate à notre problème.

## 1.4 MESURES DE PLANCHEREL

Prenons maintenant un point de vue probabiliste. D'abord voyons  $\ell_N : \pi \rightarrow \ell(\pi)$  comme une variable aléatoire sur  $\mathfrak{S}_N$  muni de sa mesure uniforme  $\mathbf{P}$  (qui n'est autre que la loi de  $\pi_N$ ). Il est clair que  $\ell_N$  a-même loi sous  $\mathbf{P}$  que  $\ell(\pi_N)$  sous  $\mathbb{P}$  i.e.  $\mathbf{P}(\sigma : \ell_N(\sigma) \leq n) = \mathbb{P}(\omega : \ell(\pi_N(\omega)) \leq n)$  pour tout entier  $n$ .

Ensuite considérons la chaîne de Markov à valeur dans l'espace des diagrammes de Young,  $\{\Lambda^{(k)}, k = 1, \dots, N\}$ , que nous verrons comme la construction de l'algorithme de Robinson-Schensted sous la probabilité  $\mathbf{P}$ , c'est à dire le processus discret qui à un diagramme de Young de forme  $\mu \vdash k$ , mène avec une certaine loi de transition à un diagramme de forme  $\nu \vdash k + 1$ . On appellera **mesure de Plancherel** d'ordre  $k$  la loi de  $\Lambda^{(k)}$  qu'on notera  $\mathbf{P}_k$ .

D'autre part, on peut voir les couples de tableaux de Young comme l'*enregistrement* de chaque étape de ce processus, indiquant d'une part l'endroit où la nouvelle case est insérée et de l'autre le temps  $k$  auquel a été ajouté cette même case. Il nous permet donc de dénombrer, pour un diagramme de Young  $\lambda$  d'ordre  $N$ , le nombre de façons que l'algorithme de Robinson-Schensted peut utiliser pour construire  $\lambda$ , ce qui nous permet en fait d'exhiber la loi de notre processus de Markov grâce à (1.1), c'est à dire

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_N(\lambda) &= \mathbf{P}(\sigma : \Lambda^{(N)}(\sigma) = \lambda) \\ &= \mathbf{P}(\sigma : (P(\sigma), Q(\sigma)) \in \mathfrak{T}_\lambda^2) = \frac{d_\lambda^2}{N!} \end{aligned} \quad (1.2)$$

D'après le Théorème 1.2,  $\ell_N$  est de même loi que  $|\Lambda^{(N)}|$  sous  $\mathbf{P}$  et donc en remarquant que

$$\mathbf{P}_N(\lambda : |\lambda| = n) = \mathbf{P}\left(\bigsqcup_{\substack{\lambda \vdash N \\ |\lambda| = n}} \{\Lambda^{(N)} = \lambda\}\right)$$

on obtient

$$\mathbf{P}(\ell_N = n) = \sum_{\substack{\lambda \vdash N \\ |\lambda| = n}} \mathbf{P}_N(\lambda) = \frac{1}{N!} \sum_{\substack{\lambda \vdash N \\ |\lambda| = n}} d_\lambda^2 \quad (1.3)$$

est bien la mesure que nous cherchions, et le Corollaire 1.2 montre que c'est bien une mesure de probabilité. C'est cette façon de poser le problème qui servira à construire un estimateur de Monte-Carlo pour simuler des réalisations de  $\ell(\pi_N)$ .

## 1.5 $\ell_N$ ET LES MATRICES ALÉATOIRES

On va maintenant identifier les  $d_\lambda$  dans la théorie des représentations, c'est cela qui nous permettra d'utiliser  $U(n)$ , le groupe unitaire des matrices  $n \times n$ , notamment grâce à la dualité de Schur-Weyl que nous expliquerons ensuite. On doit ces résultats à Rains [Rai98].

### 1.5.1 REPRÉSENTATIONS DE $\mathfrak{S}_N$

Soit  $G$  un groupe fini et  $V$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. Une **représentation** de  $G$  est un couple  $(V, \rho)$ , où  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  est un homéomorphisme,  $GL(V)$  étant le groupe linéaire de  $V$ , c'est à dire l'espace des fonctions continues linéaires et inversibles de  $V$  dans lui même. On a en fait une action du groupe  $G$  sur l'espace  $V$ <sup>6</sup>. Le **degré** de  $\rho$  est la quantité  $d_\rho = \dim V$ .

La représentation qui envoie tous les éléments de  $G$  vers l'identité de  $V$  est la représentation triviale et est de degré 1. Si  $W$  est sous-espace vectoriel de  $V$  et pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ ,  $\rho(\sigma)(W) \subset W$ , on dit que  $W$  est **stable** par l'action de  $G$ . On dit alors que  $(W, \rho|_W)$  est une **sous-représentation** de  $(V, \rho)$ . Une représentation  $(V, \rho)$  est dite **irréductible** si elle ne possède aucune sous-représentation exceptées la représentation triviale et elle même. C'est l'étude de ces représentations qui nous intéressera.

Si  $G = \mathfrak{S}_N$  et  $V = \mathbb{C}^N$ , alors on peut considérer la représentation matricielle  $(V, \rho)$  qui associe à une permutation  $\sigma$  sa matrice de permutation de  $GL(\mathbb{C}^N) \simeq GL_N(\mathbb{C}) \simeq M_N(\mathbb{C})$ . On serait donc tenté de continuer en écrivant pour un vecteur  $v \in V$ ,  $\{e_i\}_{i=1, \dots, N}$  la base canonique de  $V$  et  $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ ,  $\rho(\sigma)(v) = \sum_{i=1}^N e_{\sigma(i)} v_i = \sum_{i=1}^N e_i v_{\sigma^{-1}(i)}$ <sup>7</sup>. Il se trouve que ce n'est pas la bonne représentation, tout simplement parce qu'elle n'est pas irréductible.

D'après le Théorème 1.1, les classes de permutations de même type de cycles sont les classes de conjugaisons de  $\mathfrak{S}_N$ , et on a le lemme suivant :

**Lemme 1.4** *Le nombre de classes d'équivalence de représentations irréductibles d'un groupe fini est égal au nombre de ses classes de conjugaison.*

Autrement dit, on peut associer chaque classe de représentations irréductibles de  $\mathfrak{S}_N$  à un type de cycle, et donc à une partition. Soient  $(V_\lambda, \rho_\lambda)$ ,  $\lambda \vdash N$  ces représentations irréductibles qu'on indexe par les partitions de  $N$  par commodité.

Enfin on appelle **caractère** d'une représentation  $(V, \rho)$  la fonction définie par  $\chi(g) = \text{Tr}(\rho(g))$ . Le caractère d'une représentation hérite de l'invariance par conjugaison de la forme linéaire  $\text{Tr}$ , c'est à dire qu'il est constant sur chaque classe de conjugaison de  $G$ . Dans notre cas, on notera  $\chi_\lambda$  le caractères de la représentation  $(V_\lambda, \rho_\lambda)$ , qui, comme son nom l'indique, caractérise nos représentations irréductibles, c'est-à-dire qu'on peut montrer que deux représentations irréductibles sont isomorphes si et seulement si elles ont le même caractère. On notera  $\chi_\lambda(\mu)$  le représentant du caractère de chaque classe associée à la partition  $\mu$ . C'est une autre façon de dire que les classes de représentations irréductibles dénombrent les classes de conjugaisons d'un groupe. Cela permet de montrer - ce que nous n'allons pas faire - un théorème fondamentale pour la suite.

**Théorème 1.4** *Soient  $\lambda$  une partition de  $N$  et  $e$  l'élément neutre de  $\mathfrak{S}_N$ . Alors,*

$$d_\lambda = \dim V_\lambda = \chi_\lambda(e) \quad (1.4)$$

où  $d_\lambda$  est le nombre de tableaux de Young de forme  $\lambda$ .

(1.4) et (1.3) donnent finalement,

$$\mathbf{P}(\ell_N \leq n) = \frac{1}{N!} \sum_{\substack{\lambda \vdash N \\ |\lambda| \leq n}} \chi_\lambda(e)^2 \quad (1.5)$$

6. Dans la littérature on note  $G \curvearrowright V$ .

7. Écriture qui ne dépend en fait pas de la base choisie.

### 1.5.2 DUALITÉ DE SCHUR-WEYL

Il existe une relation entre les caractères du groupe symétrique et ceux du groupe unitaire, c'est la dualité de Schur-Weyl. Sans expliciter son énoncé, nous utiliserons les résultats de Frobenius qui passent par les polynômes symétriques. Grâce à cette relation, on peut voir (1.5) comme le produit scalaire de deux polynômes symétriques sur les valeurs propres d'une matrice unitaire  $k \times k$ , c'est à dire les fonctions sur  $U(k)$  définies par

$$P_j(U) := \sum_{i=1}^n x_i^j \text{ où } x_1, \dots, x_k \text{ sont les valeurs propres de } U$$

$$P_\lambda(U) := \prod_{j=1}^k P_{\lambda_j} \text{ pour } \lambda \vdash N \text{ telle que } |\lambda| = k$$

**Lemme 1.5** *Il existe une base orthonormée de l'espace des polynômes symétriques qu'on appelle **fonctions de Schur**<sup>8</sup>, qui se trouvent être aussi les caractères  $\{s_\mu, \mu \vdash k\}$ <sup>9</sup> du groupe unitaire  $U(k)$ .*

On peut alors écrire pour tout  $\lambda \vdash N$  telle que  $|\lambda| = k$

$$P_\lambda = \sum_{\mu \vdash k} \chi_\mu(\lambda) s_\mu$$

C'est là que s'exprime la fameuse dualité de Schur-Weyl. Diaconis et Shahshahani [DS91] donnent une expression de ce produit scalaire pour tout  $n \leq k$  :

$$\int_{U(n)} P_\kappa(U) \overline{P_\lambda(U)} dU = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{\mu, \nu \vdash k \\ |\mu|, |\nu| \leq n}} \chi_\mu(\kappa) \chi_\nu(\lambda) \int_{U(n)} s_\mu(U) \overline{s_\nu(U)} dU$$

où  $dU$  est la mesure de Haar normalisée sur  $U(n)$ , et  $\kappa, \lambda \vdash N$  tels que  $|\kappa| = |\lambda| = k$ .

On remarque d'abord que  $P_1(U) = \text{Tr}(U)$  et en prenant  $\kappa = \lambda = (1, 1, \dots, 1)$ , on obtient  $k = N$  et  $P_\kappa(U) \overline{P_\lambda(U)} = |\text{Tr}(U)|^{2N}$ . Les fonctions de Schur étant orthogonales et de norme égale à 1, on obtient enfin

$$\int_{U(n)} |\text{Tr}(U)|^{2N} dU = \sum_{\substack{\mu \vdash N \\ |\mu| \leq n}} \chi_\mu((1, \dots, 1))^2$$

La partition  $(1, 1, \dots, 1)$  est associée à l'identité du groupe symétrique, et donc finalement,

$$F_N(n) = \mathbf{P}(\ell_N \leq n) = \frac{1}{N!} \int_{U(n)} |\text{Tr}(U)|^{2N} dU \quad (1.6)$$

## 2 COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE $\ell_N$

Plusieurs démonstrations, utilisant les divers outils définies en section 1, sont possibles. Nous en présentons ici 3. Les deux premières sont des approches physiques du problème, la troisième utilise des arguments combinatoires introduits en section 1.4.

8. Qu'on ne définira pas ici. Voir [ER88] pour une preuve et une définition correctes

9. Les partitions sont indéniablement l'élément central de notre étude !



## 2.1 PROCESSUS DE HAMMERSLEY

Nous revenons sur le problème physique qui faisait guise d'introduction pour montrer le théorème central de cette deuxième section.

**Théorème 2.1 (Hammersley [AD95])**

$$\text{La limite } \Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}[\ell_N]}{\sqrt{N}} \text{ existe et } \frac{\ell_N}{\sqrt{N}} \xrightarrow{\text{proba}} \Lambda$$

Avant de prouver ce théorème nous aurons besoin de quelques outils, commençons par une majoration de  $\Lambda$  simple à obtenir<sup>10</sup> qui nous servira dans la suite :

**Lemme 2.1** Pour  $N \rightarrow \infty$ ,

$$\limsup \frac{\mathbf{E}[\ell_N]}{\sqrt{N}} \leq e$$

*Preuve.* Pour  $1 \leq k \leq N$ , soit  $u_N(k)$  le nombre (aléatoire) de sous-suites croissantes de longueur  $k$  de la permutation aléatoire  $\pi_N$ . Sa valeur moyenne a  $\frac{1}{k!}$  chance d'être croissante parmi les  $\binom{N}{k}$  sous-suite de longueur  $k$ . On a donc

$$\mathbf{E}[u_N(k)] = \frac{1}{k!} \binom{N}{k}$$

On peut donc majorer la probabilité

$$\mathbf{P}(\ell_N \geq k) = \mathbf{P}(u_N(k) \geq 1) \leq \mathbf{E}[u_N(k)] = \frac{N(N-1) \dots (N-k+1)}{(k!)^2} \leq \frac{N^k}{(k/e)^{2k}}.$$

Soit maintenant  $\delta > 0$  et prenons  $k = \lfloor (1+\delta)e\sqrt{N} \rfloor$ . On obtient

$$\mathbf{P}(\ell_N \geq k) \leq \frac{N^k}{(k/e)^{2k}} \leq \left( \frac{1}{1+\delta} \right)^{2k} \leq \left( \frac{1}{1+\delta} \right)^{2(1+\delta)e\sqrt{N}} \rightarrow 0 \text{ quand } N \rightarrow \infty$$

ce qui donne pour  $N$  assez grand

$$\mathbf{E}[\ell_N] \leq (1+\delta)e\sqrt{N} \tag{2.1}$$

$\delta$  étant quelconque on a le résultat.

□

On considère  $\Pi$  un nuage poissonnien d'intensité 1 sur  $\mathbb{R}_+^2$ , et donc  $\#(\Pi \cap [0, 1]^2)$  est une variable aléatoire de loi de Poisson de moyenne 1. On peut donc voir ce nuage de points  $(X_k, Y_k)_{k=1}^N$  comme le nuage poissonnien  $\Pi \cap [0, 1]^2$  conditionné à l'évènement  $\{\#(\Pi \cap [0, 1]^2) = N\}$ . Tout se passe donc comme précédemment, et cette façon de poser le problème va nous permettre de généraliser nos résultats. En effet, on va mesurer ce qu'on va appeler les **chaînes** d'un nuage de points, c'est à dire les chemins croissants selon l'ordre partiel  $\prec$ , appelons  $A$  la<sup>11</sup> plus longue chaîne, et  $L(A)$  sa longueur, c'est à dire le nombre de points par lesquels passe  $A$ . On a montré en introduction que sachant  $\{\#(\Pi \cap [0, 1]^2) = N\}$ ,  $L(\Pi \cap [0, 1]^2) \stackrel{(d)}{=} \ell(\pi_N)$ , où  $\pi_N$  est la permutation de loi uniforme sur  $\mathfrak{S}_N$ . On choisira donc ce point de vue dans cette partie.

Posons la variable aléatoire  $L_{s,t} = L(\Pi \cap [s, t]^2)$  pour tous  $s, t \in \mathbb{R}_+$ . Il est facile de voir que

$$L_{0,m} + L_{m,n} \leq L_{0,n}, \text{ pour } 0 \leq m < n$$

10. Quand on connaît la formule de Stirling

11. Ou un représentant, les chaînes maximale n'étant pas uniques

**Théorème 2.2 (Théorème ergodique sous-additif de Kingman)** *Si une suite de variable aléatoires  $(X_{m,n})_{0 \leq m < n}$ , vérifie :*

- (1)  $X_{0,n} \geq X_{0,m} + X_{m,n}$ , pour tous  $m < n$ ,
- (2) Pour tout  $k \geq 1$ , la suite  $(X_{nk,(n+1)k})_{n=1}^{\infty}$  est i.i.d,
- (3) Pour tout  $m \geq 1$ , les processus  $(X_{0,k})_{k=1}^{\infty}$  et  $(X_{m,m+k})_{k=1}^{\infty}$  sont de même loi,
- (4)  $\mathbb{E}[|X_{0,1}|] < \infty$  et il existe une constante  $M > 0$  telle que pour tout  $n \geq 1$ ,  $\mathbb{E}[X_{0,n}] \geq -Mn$ .

Alors,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[X_{0,n}]}{n}$  existe et est égale à  $\inf_n \frac{\mathbb{E}[X_{0,n}]}{n}$ . De plus  $\frac{X_{0,n}}{n}$  converge presque-sûrement vers cette limite.

*Preuve du théorème 2.1.* On applique donc le Théorème 2.2 à la suite sous-suite  $(-L_{m,n})_{m < n}$ , ce qui nous donne la convergence en probabilité que nous attendions : Nous avons déjà constaté que (1) est vérifiée, (2) provient du fait que  $\#(\Pi \cap [0, t]^2), t \geq 0$  est un processus à accroissement indépendants et que  $L_{s,t}$  a même loi que  $L_{q,r}$  si  $t - s = r - q$ , (3) du fait de la stationnarité de ses accroissements et (4) provient de (2.1). Ce qui nous donne

$$\frac{L_{0,n}}{n} \rightarrow \Lambda = \sup_n \frac{\mathbb{E}[L_{0,n}]}{n}$$

Comme  $L_{0,n}$  est croissante en  $n$ , on obtient la convergence non seulement pour des temps discrets mais pour des temps continue. On considère donc le processus  $L_{0,t}, t \geq 0$ , mais pour retrouver la loi de  $\ell_N$ , nous allons construire la suite des temps de sauts du processus

$$S_n = \inf\{s > 0 : \#(\Pi \cap [0, s[ \times [0, s]) = n\}, \text{ pour tout } n \geq 0$$

On obtient alors que l'ensemble  $\frac{1}{S_{n+1}}(\Pi \cap [0, S_{n+1}[ \times [0, S_{n+1}[)$  est un nuage de  $n$  points aléatoire sur le pavé  $[0, 1]^2$ , et grâce à la propriété de conditionnement d'un processus de Poisson, on sait que ces points sont distribués uniformément, et par conséquent  $L_{0,S_{n+1}}$  a même loi que  $\ell_N$ .

On pose  $N(t) = \#(\Pi \cap [0, \sqrt{t}[ \times [0, \sqrt{t}[), t \geq 0$  qui est un processus de Poisson de paramètre 1, d'instant de sauts qu'on notera  $T_n, n \geq 0$ . On remarque que pour tout  $n$ ,  $T_n = S_n^2$ . Par définition, les variables  $W_n = T_n - T_{n-1}$  sont i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1. On a donc

$$\frac{1}{n} S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n W_k \rightarrow 1 \text{ p.s., ou de façon équivalente } \frac{T_n}{\sqrt{n}} \rightarrow 1$$

D'après les résultats précédents  $\frac{L_{0,T_{n+1}}}{T_{n+1}} \rightarrow \Lambda$ , on peut donc conclure avec le lemme de Slutsky que

$$\frac{L_{0,T_{n+1}}}{\sqrt{n}} = \frac{T_{n+1}}{\sqrt{n}} \frac{L_{0,T_{n+1}}}{T_{n+1}} \rightarrow \Lambda.$$

$\ell_N$  étant de même loi que  $L_{0,T_{N+1}}$ , on a  $\frac{\ell_N}{\sqrt{N}} \xrightarrow{\text{proba}} \Lambda$ .

□

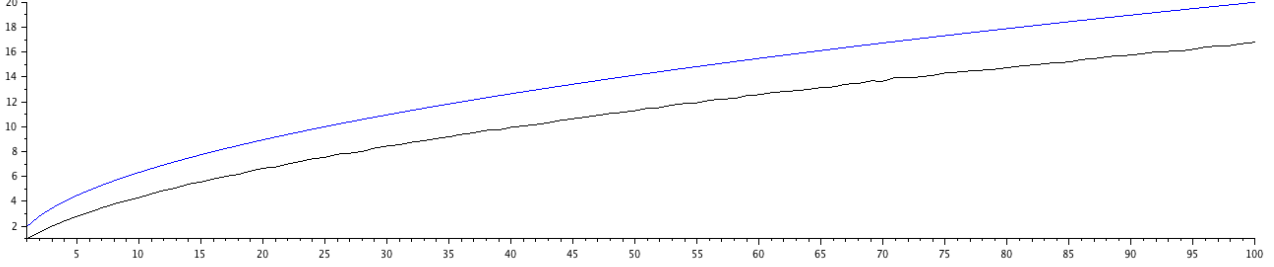


FIGURE 5 – En noir, les valeurs de l’estimateur de Monte-Carlo en fonction de  $N = 1, \dots, 100$ , en bleu la fonction  $x \rightarrow 2\sqrt{x}$  sur l’intervalle  $[0, 100]$

**Théorème 2.3**  $\Lambda = 2$ .

*Preuve.* On cherche maintenant la valeur numérique de  $\Lambda$ . Des simulations par estimateurs de Monte-Carlo nous donnent  $\Lambda \sim 2$  (voir Figure 5 et le code en Annexe B - de complexité  $2^N$ ).<sup>12</sup> On cherche en fait à montrer que  $\Lambda = 2$ . Hammersley [AD95] le montre grâce à l’argument suivant : On considère  $\tilde{L}(x, t) = L(\Pi \cap [0, x] \times [0, t])$ .

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}[\tilde{L}(x, t)] = \mathbb{E}[D(x, t)]$$

où  $D(x, t)$  la distance de la particule la plus proche du point  $(x, t)$  selon l’ordre  $\prec$  sur le pavé  $[0, x] \times [0, t]$ . D’autre part, pour un processus de Poisson,  $\mathbb{E}[D(x, t)] \sim \left( \frac{d}{dx} \mathbb{E}[\tilde{L}(x, t)] \right)^{-1}$ . Ce qui nous assure que  $w(x, t) = \mathbb{E}[\tilde{L}(x, t)]$  satisfait l’équation aux dérivées partielles

$$\frac{dw}{dt} = \left( \frac{dw}{dx} \right)^{-1} ; w(0, t) = w(x, 0) = 0$$

qui a pour unique solution  $w(x, t) = 2\sqrt{xt}$ . On a  $\mathbb{E}[\tilde{L}(1, N)] \sim \mathbf{E}[\ell_N]$ , donc  $\mathbf{E}[\ell_N] \sim 2\sqrt{N}$ , et on a (\*).

□

## 2.2 MATRICES ALÉATOIRES ET DÉTERMINANTS DE TOEPLITZ

Cette méthode consistera à réécrire la loi de  $\ell_N$  comme le déterminant d’une matrice de Toeplitz et donc utiliser des résultats de convergence connus. Le résultat que nous allons montrer ici est développé par Johansson [Joh98] en 1998, et équivalent à (\*).

**Théorème 2.4** Si  $F_N$  est la fonction de répartition de  $\ell_N$ , alors quand  $N \rightarrow \infty$

$$F_N(\lfloor x\sqrt{N} \rfloor) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

12. Il se trouve que l’algorithme de Robinson-Schensted nous donne un temps  $N \log N$ .

Soit  $N(t), t \geq 0$  le processus de Poisson de paramètre 1 définie dans la section précédente. Sachant  $\{N(t_0) = N\}$ , tout se passe comme précédemment avec  $N$  particules sur le pavé  $[0, \sqrt{t_0}]^2$  et  $\ell_N$  indépendant de  $N(t_0)$ . On pose  $\phi_n(t) := \mathbf{P}(\ell_{N(t)} \leq n)$  et on considère ensuite le polynôme

$$B_n(x) = \sum_N \frac{(x/2)^{2N}}{N!} \mathbf{P}(\ell_k \leq n) \text{ tel que } \phi_n(t) = e^{-t} B_n(2\sqrt{t}) \quad (2.2)$$

**Lemme 2.2 (Gessel [Ges90])** *Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $\Re(z) > 0$ ,*

$$B_n(z) = \det_{1 \leq i, j \leq n} (b_{|i-j|}(z))$$

où  $b_j$  est la  $j$ -ème fonction de Bessel hyperbolique, et on a le résultat suivant :

$$b_j(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos(j\theta) d\theta - \frac{\sin(j\pi)}{\pi} \int_0^\infty e^{-z \cosh t - jt} dt^{13}$$

Ce lemme nous fournit un autre objet intéressant : le déterminant d'une matrice hermitienne de Toeplitz. C'est donc la méthode que propose Johansson [Joh98] avec une matrice de Toeplitz plus... commode.

### 2.2.1 MATRICES DE TOEPLITZ

Essayons de réécrire  $F_N$  d'une manière un peu plus exploitable. D'abord remarquons que

$$\text{pour tout entier } m \text{ impair, } \int_{U(n)} \text{Tr}(U + U^*)^m dU = 0. \quad (2.3)$$

En effet  $\int_{U(n)} \text{Tr}(U)^p \overline{\text{Tr}(U)}^q dU = 0$  si  $p \neq q$ <sup>14</sup>, et le binôme de Newton donne donc

$$\begin{aligned} \int_{U(n)} \text{Tr}(U + U^*)^m dU &= \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} \int_{U(n)} \text{Tr}(U)^k \overline{\text{Tr}(U)}^{m-k} dU = 0, \text{ si } 2k \neq m \\ &= \frac{(2N)!}{N!^2} \int_{U(n)} |\text{Tr}(U)|^{2N} dU, \text{ si } m = 2N \end{aligned}$$

ce qui donne avec (1.6)

$$F_N(n) = \frac{N!}{(2N)!} \int_{U(n)} \text{Tr}(U + U^*)^{2N} dU \quad (2.4)$$

Revenons en à notre processus de Poisson, (2.4) puis (2.3) nous donnent

$$\begin{aligned} \phi_n(t) &= \sum_N e^{-t} \frac{t^N}{N!} \mathbf{P}(\ell_N \leq n) = e^{-t} \sum_N \frac{t^N}{(2N)!} \int_{U(n)} \text{Tr}(U + U^*)^{2N} dU \\ &= e^{-t} \int_{U(n)} \sum_N \frac{(\sqrt{t} \text{Tr}(U + U^*))^N}{N!} dU \\ &= e^{-t} \int_{U(n)} e^{\sqrt{t} \text{Tr}(U + U^*)} dU \end{aligned}$$

13. Un simple coup d'oeil sur Wikipedia suffit.

14. C'est un fait structurel profond qui fait intervenir les *produits tensoriels* dont nous ne ferons qu'évoquer le nom.  $\int_{U(n)} U^{\otimes p} \otimes (U^*)^{\otimes q} dU = 0$  si  $p \neq q$  très exactement

D'autre part la formule d'intégration de Weyl pour le groupe unitaire des matrices  $n \times n$  nous donne, pour  $\mathbb{U}$  le cercle unité de  $\mathbb{C}$ , et  $\prod_{j=1}^n dz_j$  mesure uniforme sur  $\mathbb{U}^n$ ,

$$\begin{aligned} \int_{U(n)} e^{\sqrt{t} \text{Tr}(U+U^*)} dU &= \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{U}^n} e^{\sqrt{t} \text{Tr}(\text{diag}(z_1, \dots, z_n) + \text{diag}(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n))} \prod_{j < k} |z_k - z_j|^2 \prod_{j=1}^n dz_j \\ &= \frac{1}{n!} \int_{[-\pi, \pi]^n} \exp(\sqrt{t} \sum_{j=1}^n e^{i\theta_j} + e^{-i\theta_j}) \prod_{j < k} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^2 \prod_{j=1}^n \frac{d\theta_j}{2\pi} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n n!} \int_{[-\pi, \pi]^n} \prod_{j=1}^n e^{2\sqrt{t} \cos \theta_j} \prod_{j < k} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^2 \prod_{j=1}^n d\theta_j \quad (2.5) \end{aligned}$$

Un dernier théorème nous permettra d'exprimer  $\phi_n(t)$  comme le déterminant d'une matrice de Toeplitz particulièrement "simple" :

**Théorème 2.5 (Identité d'Andréief généralisée)** *Pour tout intervalle  $J$ , et toutes fonctions intégrables  $\phi_k$  et  $\psi_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  et  $f$ , on a l'identité*

$$\int_{J^n} \prod_{j=1}^n f(\theta_j) \det_{1 \leq j, k \leq n} (\phi_k(\theta_j)) \det_{1 \leq j, k \leq n} (\psi_k(\theta_j)) \prod_{j=1}^n d\theta_j = n! \det_{1 \leq j, k \leq n} \left( \int_J \phi_j(\theta) \psi_k(\theta) f(\theta) d\theta \right)$$

*Preuve.* C'est une conséquence de la formule de Leibniz  $\det A = \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \prod_i a_{i, \sigma(i)}$ . On pourra consulter [Mil09] pour plus de détails et d'applications. □

Soit  $g_t(\theta) = e^{2\sqrt{t} \cos \theta}$ . On appelle **déterminant de Toeplitz** de générateur  $g_t$ , le déterminant  $D_n(g_t)$  de la matrice de Toeplitz

$$\mathcal{T}_n(g_t) = (g_t^{(k-j)})_{j,k=0}^{n-1}$$

où  $g_t^{(k)} = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi]} e^{-ik\theta} g_t(\theta) d\theta$  est le  $k$ -ième coefficient de Fourier de  $g_t$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Lemme 2.3** *Pour tout entier  $n$  et tout  $t > 0$ ,*

$$\phi_n(t) = e^{-t} D_n(g_t)$$

*Preuve.* Nous rappelons que  $\Delta(z_1, \dots, z_n) := \det V(z_1, \dots, z_n) = \prod_{j < k} |z_j - z_k|$ , où  $V(z) = (z_j^{k-1})_{j,k=1}^n$  est la matrice de Vandermonde d'ordre  $n$  de  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ . En remarquant que pour tout  $\theta_1, \dots, \theta_n \in [-\pi, \pi]$ ,  $\Delta(e^{-i\theta_1}, \dots, e^{-i\theta_n}) = \Delta(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$  et pour tout  $k, j = 1, \dots, n$

$$g_t^{(k-j)} = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi]} e^{ij\theta} e^{-ik\theta} g_t(\theta) d\theta$$

une application de l'identité d'Andréief à (2.5) donne immédiatement

$$D_n(g_t) = \frac{1}{(2\pi)^n n!} \int_{[-\pi, \pi]^n} \prod_{j=1}^n g_t(\theta_j) |\Delta(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})|^2 \prod_{j=1}^n d\theta_j \quad (2.6)$$

et donc on a le résultat. □

Ce qui nous permet d'utiliser un résultat de Szegö (1958) sur le comportement asymptotique des déterminant de Toeplitz.

**Théorème 2.6 (Théorème de Szegö)** *Pour toute fonction  $f$  continue et intégrable sur  $\mathbb{U}$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log D_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi]} \log(f(e^{i\theta})) d\theta + \sum_{k \geq 1} k |(\log g_t)^{(k)}|^2$$

$g_t$  étant intégrable et continue sur  $[-\pi, \pi]$ , on applique le Théorème 2.6 qui donne pour  $n$  assez grand,  $D_n(g_t) \sim e^t$  et donc  $\phi_n(t) \rightarrow 1$  quand  $n \rightarrow \infty$  pour tout  $t$  fixé. Cela nous a donc permis d'étudier - ou plutôt de confirmer que nous sommes sur la bonne voie - le comportement asymptotique de  $\phi_n(t)$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Pour autant, ce qui nous intéresse est son comportement lorsque  $t \rightarrow \infty$  et quand  $n$  est grand, en fait de l'ordre de  $\sqrt{t}$ . C'est grâce à cela que nous pourrions exhiber le comportement de  $F_N$  quand  $N \rightarrow \infty$ .

## 2.2.2 UN POINT DE VUE DE PHYSIQUE STATISTIQUE

Il suffit de chercher un peu dans la littérature pour trouver des résultats sur les matrices de Toeplitz en physique statistique. Par exemple, dans [JKVM06] et [JJKV08],  $D_n(g_t)$  est vu comme la fonction de partition d'un gaz de Coulomb à  $n$  particules sur le cercle unité de potentiel extérieur  $V_{ext}(\theta) = \sqrt{t} \cos \theta$  avec répulsion  $V(\theta_j, \theta_k) = \log(|e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^{-1})$ , c'est à dire une fonction de la forme

$$Z_n = \frac{1}{n!} \int e^{-\beta H} \prod_{j=1}^n \frac{d\theta_j}{2\pi}$$

où dans notre cas,  $\beta = 2$  et  $H(\theta_1, \dots, \theta_n) = \sum_{j < k} V(\theta_j, \theta_k) - \sum_j V_{ext}(\theta_j)$ .

Soit maintenant  $G_n(\gamma) := D_n(\exp(n\gamma \cos)) = B_n(n\gamma)$  (grâce à (2.2) et au Lemme (2.3)), de sorte que

$$\phi_n(t) = e^{-t} G_n\left(\frac{2\sqrt{t}}{n}\right) \quad (2.7)$$

**Lemme 2.4 (Gross et Witten [GW80])** *Pour tout  $\lambda \geq 0$ ,  $z(\lambda, n) := B_n(2\lambda^{-1})$  on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2} \log z(\lambda/n, n) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^2}, & \lambda \geq 2 \\ \frac{2}{\lambda} + \frac{1}{2} \log \frac{\lambda}{2} - \frac{3}{4}, & \lambda < 2 \end{cases}$$

Comme  $G_n(\gamma) = z(\frac{2}{n\gamma}, n)$  du lemme précédent, on conclut que, ce qu'on appelle l'énergie libre du système de particules,

$$G(\gamma) := \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2} \log G_n(\gamma) = \begin{cases} \frac{\gamma^2}{4}, & \gamma \leq 1 \\ \gamma - \frac{1}{2} \log \gamma - \frac{3}{4}, & \gamma > 1 \end{cases} \quad (2.8)$$

et on constate que lorsque  $n \sim 2\sqrt{t}$  on a une transition importante de  $\phi_n$  qu'il faut étudier.  $d^3G/d\gamma^3$  n'étant pas différentiable en 1, Gross et Witten appellent cela une *transition de phase du troisième ordre*. On reprend maintenant (2.7) et (2.8) en tenant compte de cette transition, d'abord pour  $x < 2$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \phi_{\lfloor x\sqrt{t} \rfloor}(t) = -1 + x^2 G(2/x) = -1 + 2x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{x^2}{2} \log \frac{x}{2} \quad (2.9)$$

puis pour  $x > 2$ ,  $\phi_{\lfloor x\sqrt{t} \rfloor}(t) \sim 1$  quand  $t \rightarrow \infty$ , mais un résultat de Seppäläinen plus précis donne pour  $x \geq 2$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{t}} (1 - \phi_{\lfloor x\sqrt{t} \rfloor}(t)) = -2x \cosh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + 2\sqrt{x^2 - 4} \quad (2.10)$$

De (2.9) et (2.10), Johansson [Joh98] montre que pour tout  $\varepsilon$  strictement positif, existent  $C$  et  $\delta$  strictement positifs tels que

$$\begin{aligned} 0 \leq \phi_n(t) &\leq Ce^{-\delta t} \text{ si } n < 2\sqrt{t}/(1+\varepsilon), \\ 0 \leq 1 - \phi_n(t) &\leq \frac{C}{n} \text{ si } n > 2\sqrt{t}/(1-\varepsilon) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Il suffit alors de remarquer que pour tous  $n, N$  entiers,

$$F_{N+1}(n) \leq F_N(n)$$

et le lemme suivant, dont la démonstration est particulièrement longue, montré avec rigueur dans [Joh98], donne immédiatement le résultat attendu.

**Lemme 2.5 (Johansson [Joh98])** *Pour tout  $N$  suffisamment grand et  $n \leq N$ ,*

$$\phi_n(\mu_N) - \frac{C}{N^2} \leq F_N(n) \leq \phi_n(\nu_N) + \frac{C}{N^2}$$

*pour  $\mu_N = N + 4\sqrt{N \log N}$  et  $\nu_N = N - 4\sqrt{N \log N}$*

qui permet de conclure.

*Preuve du théorème 2.4.* Nous avons tous pour montrer le Théorème 2.4. En effet, soit  $x < 2$ . Le Lemme 2.5 nous donne

$$F_N(\lfloor x\sqrt{N} \rfloor) \leq \phi_{\lfloor x\sqrt{N} \rfloor}(\mu_N) + \frac{C}{N^2}$$

Comme  $(1+\varepsilon)\lfloor x\sqrt{N} \rfloor \leq \sqrt{\nu_N}$ , (2.11) nous dit que pour  $N$  suffisamment grand,

$$0 \leq F_N(\lfloor x\sqrt{N} \rfloor) \leq Ce^{-\delta\nu_N} + \frac{C}{N^2}$$

Soit maintenant  $x > 2$ , la première inégalité du Lemme 2.5 nous dit que

$$\phi_{\lfloor x\sqrt{N} \rfloor}(\mu_N) - \frac{C}{N^2} \leq F_N(\lfloor x\sqrt{N} \rfloor) \leq 1$$

et comme  $(1-\varepsilon)\lfloor x\sqrt{N} \rfloor \geq \sqrt{\mu_N}$  pour  $N$  suffisamment grand, dans (2.11) la deuxième inégalité nous donne

$$1 - \frac{C}{\lfloor x\sqrt{N} \rfloor} - \frac{C}{N^2} \leq F_N(\lfloor x\sqrt{N} \rfloor) \leq 1$$

et donc (\*)

□

## 2.3 COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES MESURES DE PLANCHEREL

Pour cette troisième et dernière partie nous introduisons une nouvelle façon de représenter les diagrammes de Young lorsque  $N \rightarrow \infty$ . On évitera les notions de topologie et de métrique, néanmoins ces résultats existent et l'analyse et les convergences dont nous parlerons fonctionnent dans un espace métrique tout à fait définissable.

On appellera **diagramme de Young continu** toute fonction  $\phi$  décroissante, à support compact et telle que  $\int_0^\infty \phi(x)dx = 1$ . Soit maintenant pour une partition  $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{|\lambda|}) \vdash N$ , on pose pour tout  $x \geq 0$ ,

$$\phi_\lambda(x) = N^{-1/2} \lambda'_{\lfloor x\sqrt{N} \rfloor + 1}$$

dont la définition est motivée par le Corollaire 1.1 et qui est bien un diagramme de Young continu.

**Théorème 2.7** *Pour tout  $\lambda \vdash N$ ,*

$$\log \prod_{\square \in \lambda} h(\square) \sim \frac{N \log N}{2} + NH(\phi_\lambda) \quad (2.12)$$

où

$$H(f) = \int_0^\infty dx \int_0^{f(x)} dy \log(f(x) - x + f^{-1}(y) - y)$$

Soit  $\Lambda^{(k)}, k \geq 0$  la chaîne de Markov décrite en Section 1.4. Le Lemme 1.2 et (2.12) nous donnent

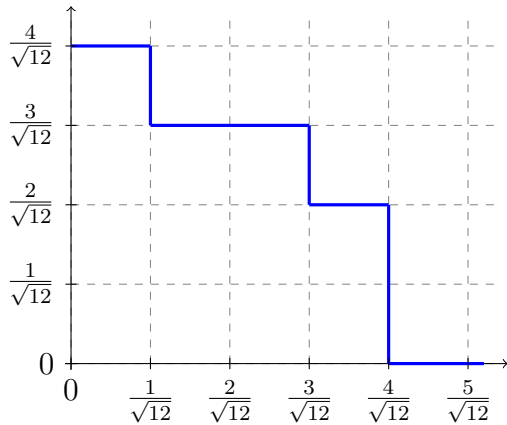
$$\mathbf{P}_N(\lambda) \sim \exp(-N(1 + 2H(\phi_\lambda)) + o(\sqrt{N} \log N))$$

quand  $N$  est grand, ce qui suggère que la limite de  $\Lambda^{(N)}$  quand  $N \rightarrow \infty$  est déterministe, c'est à dire que pour tout  $x \geq 0$ , la variable aléatoire

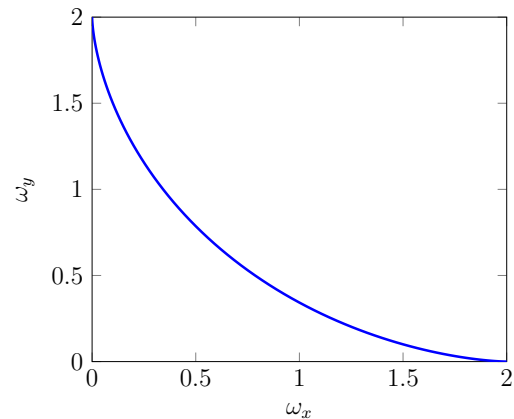
$$Z_N(x) = \phi_{\Lambda^{(N)}}(x)$$

converge en probabilité vers  $f^*(x)$ , où  $f^*$  est solution de

$$H(f^*) = \inf \{H(f) : f \text{ diagramme de Young continu}\}$$



(a) Le graphe de  $\phi_\lambda$  pour  $\lambda = (4, 4, 3, 1)$



(b) Le graphe de  $f^*$

FIGURE 6 – Quelques diagrammes de Young continus

**Théorème 2.8** *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , quand  $N \rightarrow \infty$*

$$\mathbf{P}_N(\lambda : |\phi_\lambda(x) - f^*(x)| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

Il se trouve que pour  $x > 2$ ,  $f^*(x) = 0$ ,  $f^*(0) = 2$ , et pour  $\begin{cases} \omega_x(t) = (\frac{2t}{\pi} + 1) \sin t + \frac{2}{\pi} \cos t \\ \omega_y(t) = (\frac{2t}{\pi} - 1) \sin t + \frac{2}{\pi} \cos t \end{cases}$  on a

$$\{(x, f^*(x)) : 0 \leq x \leq 2\} = \{(\omega_x(t), \omega_y(t)) : -\pi/2 \leq t \leq \pi/2\}$$

Une application du Théorème 2.8 et du Corollaire 1.1 donne directement

$$N^{-1/2} \ell_N \stackrel{(d)}{=} Z_N(0) \rightarrow 2$$



Cependant cet argument n'est pas suffisant pour montrer  $(*)$ . Il est développé par Logan et Shepp [LS77] avec lequel ils montrent

$$\mathbf{E}[\ell_N] \geq (2 + o(1))N^{1/2}$$

Pour conclure il nous suffit donc de montrer que

$$\mathbf{E}[\Lambda^{(N)}] - \mathbf{E}[\Lambda^{(N-1)}] \leq \frac{1}{\sqrt{N}}$$

qui donne par induction

$$\mathbf{E}[\ell_N] \leq 2\sqrt{N} \quad (2.13)$$

Nous voulons maintenant d'exhiber la loi de transition de notre chaîne de Markov. Lorsque  $\Lambda^{(n-1)} = \mu$  devient  $\Lambda^{(n)} = \nu$ , nous avons deux partitions  $\mu \vdash n-1$  et  $\nu \vdash n$ , qui ne diffèrent que d'une case. C'est à dire qu'il existe un  $i$  tel que  $\nu_i = \mu_i + 1$ , autrement dit une case  $\square$  du diagramme  $\nu$  qui n'est pas dans  $\mu$ , ce que nous noterons  $\square := \nu - \mu$ . Nous appellerons  $\square$  un **coin** de  $\nu$  et notons  $\mu \nearrow \nu$  cette relation.

**Lemme 2.6** *Pour tout  $\mu \vdash n-1$  et  $\nu \vdash n$  tels que  $\mu \nearrow \nu$ ,*

$$\mathbf{P}(\Lambda^{(n)} = \nu | \Lambda^{(n-1)} = \mu) = \frac{d_\mu}{nd_\nu} \quad (2.14)$$

*Preuve.* Par définition et grâce à (1.2), nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\Lambda^{(n)} = \nu | \Lambda^{(n-1)} = \mu) &= \frac{\mathbf{P}(\{\Lambda^{(n)} = \nu\} \cap \{\Lambda^{(n-1)} = \mu\})}{\mathbf{P}(\Lambda^{(n-1)} = \mu)} \\ &= \frac{\mathbf{P}(\{\Lambda^{(n)} = \nu\} \cap \{\Lambda^{(n-1)} = \mu\})}{d_\mu^2 / (n-1)!} \end{aligned}$$

Dans cette expression, le numérateur est donné par  $\frac{1}{n!}$  fois le nombre de permutations  $\sigma = (\sigma_1 \dots \sigma_n)$  telles que l'algorithme de Robinson-Schensted construise des tableaux de Young de forme  $\lambda((\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})) = \mu$  pour qu'à l'insertion du dernier coin, nous retombions sur un tableau de Young de forme  $\lambda((\sigma_1 \dots \sigma_n)) = \nu$ . Si on se souvient de la définition du tableau d'enregistrement  $Q$ , alors on sait que ce dernier coin  $\square = \nu - \mu$  contient l'entier  $\sigma_n$ . Finalement, le nombre de tableaux de Young de forme  $\nu \vdash n$  dont le coin  $\square$  contient  $\sigma_n$  est  $d_\mu$  et on a

$$\mathbf{P}(\Lambda^{(n)} = \nu | \Lambda^{(n-1)} = \mu) = \frac{d_\mu d_\nu / n!}{d_\mu^2 / (n-1)!}$$

et donc (2.14). □

*Preuve de (2.13).* On remarque que  $\Lambda^{(n)} - \Lambda^{(n-1)}$  est la fonction indicatrice de l'ensemble

$$E_n = \{\Lambda^{(n)} = \Lambda^{(n-1)} \nearrow\} := \{\Lambda^{(n-1)} \nearrow \Lambda^{(n)}\}$$

Pour pouvoir trouver une majoration, on utilise la relation (2.14) pour avoir

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(E_n) &= \sum_{\mu \vdash n-1} \mathbf{P}_{n-1}(\mu) \mathbf{P}(E_n | \Lambda^{(n-1)} = \mu) \\ &= \sum_{\mu \vdash n-1} \mathbf{P}_{n-1}(\mu) \mathbf{P}(\Lambda^{(n)} = \mu \nearrow | \Lambda^{(n-1)} = \mu) \end{aligned}$$

C'est la moyenne sous la mesure  $\mathbf{P}_{n-1}$  de la quantité  $d_{\mu_{\nearrow}}/nd_{\mu}$ , on peut donc appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz et déduire que

$$\mathbf{E}[\Lambda^{(n)} - \Lambda^{(n-1)}] = \mathbf{P}(E_n) \leq \left( \sum_{\mu \vdash n-1} \mathbf{P}_{n-1}(\mu) \left( \frac{d_{\mu_{\nearrow}}}{nd_{\mu}} \right)^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \sum_{\mu \vdash n-1} \frac{d_{\mu_{\nearrow}}^2}{n!} \right)^{1/2}$$

la quantité à droite, étant la somme des probabilités que  $\Lambda^{(n)}$  soit de forme  $\mu_{\nearrow}$ , est majorée par 1. On a donc (2.13) et finalement (\*).

□

## CONCLUSION

Ce sujet implique énormément d'outils très différents les uns des autres, ce mémoire a donc exigé une certaine polyvalence qui a, en contre-partie, forcément pris le pas sur une rigueur absolue. Toutefois, les résultats les plus importants et les plus intuitifs ont été montrés, et de sorte à ce qu'un lecteur ou une lectrice de dernière année de licence puisse comprendre l'intégralité du papier. On pourrait doubler, voir tripler le nombre de pages de ce mémoire, ne serait-ce qu'en s'intéressant à la vitesse de convergence de la variable  $\ell_N$ . En effet, Baik, Deift et Johansson [BDJ99] montrent que  $F_N(2N^{1/2} + tN^{1/6})$  converge vers  $F(t)$  la fonction de répartition de la plus grande valeur propre d'une matrice aléatoire gaussienne, connue sous le nom de loi de Tracy-Widom et une généralisation de la section 2.3 montre que  $(\Lambda_1^{(N)}, \dots, \Lambda_n^{(N)})$  est de même loi jointe que les valeurs propres d'une matrice du  $GUE(n)$ , ensemble des matrices  $n \times n$  de loi gaussienne. Encore un très beau lien avec les matrices aléatoires...

## REMERCIEMENTS

Je remercie simplement Quentin Berger de m'avoir conseillé ce sujet pleins de surprises et d'objets intéressants, pour le temps et la patience accordée.

# RÉFÉRENCES

- [AD95] David Aldous and Persi Diaconis. Hammersley’s interactiong particle process and longest increasing subsequences. *Probability Theory and Related Fields*, page 7, 1995. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.44.2747&rep=rep1&type=pdf>.
- [BDJ99] Jinho Baik, Percy Deift, and Kurt Johansson. On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations. *Journal of the american mathematical society*, 1999. <https://www.ams.org/journals/jams/1999-12-04/S0894-0347-99-00307-0/S0894-0347-99-00307-0.pdf>.
- [DS91] Persi Diaconis and Mehrdad Shahshahani. On the eigenvalues of random matrices. *Journal of Applied Probability*, 1991. [http://statweb.stanford.edu/~cgates/PERSI/papers/random\\_matrices.pdf](http://statweb.stanford.edu/~cgates/PERSI/papers/random_matrices.pdf).
- [ER88] Ömer Eggecioglu and Jeffrey Remmel. The monomial symmetric functions and the frobenius map. *Journal of combinatorial theory*, page 279, 1988. <http://www.cs.ucsb.edu/~omer/DOWNLOADABLE/frobeniusmap90.pdf>.
- [Ges90] Ira M. Gessel. Symmetric functions and p-recursiveness. *J. Combin. Theory Ser.*, page 23, 1990. <http://people.brandeis.edu/~gessel/homepage/papers/dfin.pdf>.
- [GW80] David J. Gross and Edward Witten. Possible third-order phase transition in the large-n lattice gauge theory. *Phys. Rew. D*, pages 448 – 450, 1980. [http://theory.fis.infn.it/colomo/random\\_matrices/Gross-Witten\\_80.pdf](http://theory.fis.infn.it/colomo/random_matrices/Gross-Witten_80.pdf).
- [JJKV08] Niko Jokela, Matti Järvinen, and Esko Keski-Vakkuri. The partition function of a multi-component coulomb gas on a circle. page 4 and 7, 2008. <https://arxiv.org/pdf/0712.4371.pdf>.
- [JKVM06] Niko Jokela, Esko Keski-Vakkuri, and Jaydeep Majumder. On superstring disk amplitudes in a rolling tachyon background. page 4, 2006. <https://arxiv.org/pdf/hep-th/0510205.pdf>.
- [Joh98] Kurt Johansson. The longest increasing subsequence in a random permutation and a unitary random matrix model. *Mathematical Research Letters*, 1998. [https://www.researchgate.net/publication/228879421\\_The\\_longest\\_increasing\\_subsequence\\_in\\_a\\_random\\_permutation\\_and\\_a\\_unitary\\_random\\_matrix\\_model](https://www.researchgate.net/publication/228879421_The_longest_increasing_subsequence_in_a_random_permutation_and_a_unitary_random_matrix_model).
- [LS77] B. F. Logan and L. A. Shepp. A variational problem for random young tableaux. *Advances in Mathematics*, 1977. [https://faculty.wharton.upenn.edu/wp-content/uploads/2012/04/Random-young-tableaux\\_.pdf](https://faculty.wharton.upenn.edu/wp-content/uploads/2012/04/Random-young-tableaux_.pdf).
- [Mil09] Steven J. Miller. 2009 graduate workshop on zeta functions, l-functions and their applications. page 5, 2009. [https://web.williams.edu/Mathematics/sjmiller/public\\_html/ntandrmrmt/talks/UtahWorkshopNotes.pdf](https://web.williams.edu/Mathematics/sjmiller/public_html/ntandrmrmt/talks/UtahWorkshopNotes.pdf).
- [Rai98] E. M. Rains. Increasing subsequences and the classical groups. *AT&T Research*, 1998. [https://pdfs.semanticscholar.org/03e7/1abf187b393cb2e9d869ca54b1d5060b7782.pdf?\\_ga=2.189278379.1680719793.1536876508-776800617.1536255126](https://pdfs.semanticscholar.org/03e7/1abf187b393cb2e9d869ca54b1d5060b7782.pdf?_ga=2.189278379.1680719793.1536876508-776800617.1536255126).
- [Sch61] C. Schensted. Longest increasing and decreasing subsequence. *Canadian Journal of Mathematics*, 1961. <http://www.math.buffalo.edu/%7Edhemmer/464F17/Schensted1961Paper.pdf>.

## ANNEXES

### A. NUAGE DE 20 PARTICULES ET GRAPHE DES PERMUTATIONS ASSOCIÉES

```
function s = permInv(x)
    s = zeros(length(x),1); X0 = gsort(x, 'g', 'i');
    for i = 1:N
        s(i) = find(X0(i) == x)
    end
endfunction

N = 20;
X = grand(N,1, 'unf', 0,1); Y = grand(N,1, 'unf', 0,1);
sigmaInv = permInv(X); thetaInv = permInv(Y); theta = permInv(thetaInv);

pi = theta(sigmaInv);

clf(); subplot(1,2,1); set(gca(), "tight_limits", "on");
set(gca(), "isoview", "on");
plot(X,Y, 'Marker', '.', 'MarkerSize', 9, 'LineStyle', 'none')
subplot(1,2,2); set(gca(), "tight_limits", "on");
set(gca(), "isoview", "on");
plot((1:N)', pi, 'Marker', '+', 'MarkerSize', 17, 'LineStyle', 'none')
```

### B. SIMULATION DE MONTE-CARLO POUR ESTIMER $\Lambda$

```
function len = LLIS(sigma)
    N = length(sigma); T = ones(1,N);
    for i = 1:N
        for j = 1:(i-1)
            if(sigma(j) < sigma(i))
                T(i) = max(T(i), T(j)+1)
            end
        end
    end
    len = max(T)
endfunction

function v = n_LLIS(N)
    n=1e3; v = zeros(1,n);
    for i = 1:n
        v(i) = LLIS(grand(1, 'prm', (1:N)'));
    end
endfunction

function l = ALLIS(n)
    l = zeros(1,n);
    for i = 1:n
        l(i) = mean(n_LLIS(i));
    end
endfunction

N = 100; l = ALLIS(N);

clf(); set(gca(), "tight_limits", "on"); set(gca(), "isoview", "on");
plot2d(1:N, l, style=1); plot2d(1:N, 2*sqrt(1:N), style=2);
```