

SIMULATION DU TRANSPORT D'ONDE ACOUSTIQUE AVEC LA MÉTHODE DE GALERKIN DISCONTINUE

Julie Durette et Steven Dufour
Polytechnique Montréal

1. Équation d'onde acoustique

L'équation d'onde acoustique dans \mathbb{R}^3 s'écrit

$$\frac{1}{c^2 \rho} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla u \right) + \beta \frac{\partial u}{\partial t} = f, \quad (1)$$

où

$u = u(x, y, z, t)$ est la fonction de pression acoustique,

c est la vitesse de l'onde,

ρ est la densité du milieu de propagation,

β est un coefficient d'absorption et

f est un terme source externe.

Un changement de variable nous permet ensuite d'obtenir un système d'équations aux dérivées partielles d'ordre 1 [1].

$$W = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_t u \\ \frac{1}{\rho} \partial_x u \\ \frac{1}{\rho} \partial_y u \\ \frac{1}{\rho} \partial_z u \end{pmatrix}$$

Système d'équations

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2 \rho} \partial_t W_1 + \beta W_1 - (\partial_x W_2 + \partial_y W_3 + \partial_z W_4) = f; \\ \rho \partial_t W_2 - \partial_x W_1 = 0; \\ \rho \partial_t W_3 - \partial_y W_1 = 0; \\ \rho \partial_t W_4 - \partial_z W_1 = 0. \end{cases}$$

2. Méthode de Galerkin discontinue

Formulation variationnelle

— basée sur la méthode des résidus pondérés.

Flux numérique de la méthode de Galerkin discontinue

— assure la transmission de l'information à travers le maillage, à partir la frontière du domaine et entre les éléments;

— permet une discontinuité dans la solution entre les éléments, causée par exemple par un changement de milieu.

Discrétisation du domaine

— divise le domaine en plusieurs éléments tétraédriques.

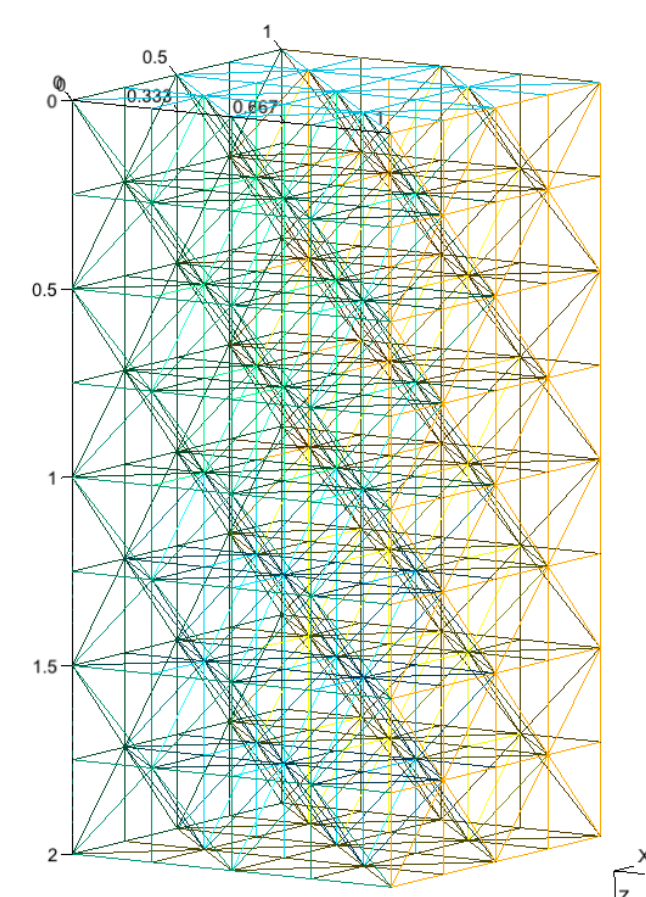


Fig. 1: Exemple de maillage 3D

3. Applications

Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis a été introduite pour résoudre des problèmes en aéronautique. Les applications ont été ensuite transférées dans différents domaines comme le génie civil, géologique ou physique.

Méthode de Galerkin discontinue

Adaptée à la simulation d'équations aux dérivées partielles dans des milieux hétérogènes de formes complexes, elle peut être appliquée à plusieurs problèmes tels que

- l'aéroacoustique,
- le transport des neutrons,
- la simulation de tsunamis et d'avalanches ou,
- l'électromagnétisme.

Équation d'onde acoustique

La simulation de la propagation d'une onde acoustique peut être utilisée pour

- la simulation sismique,
- l'exploration gazifière,
- l'imagerie médicale par ultrason.

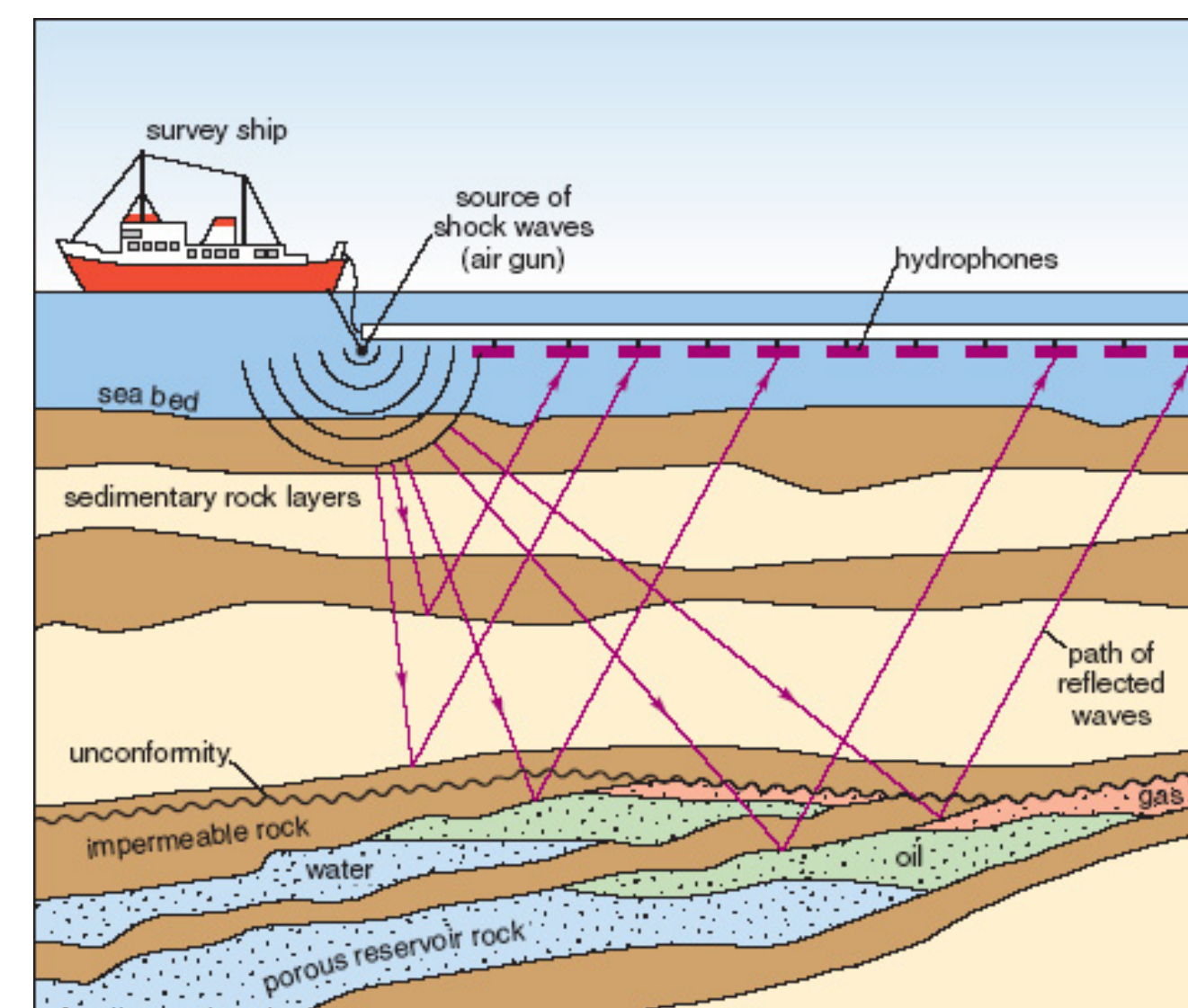


Fig. 2: Prospection sismique (Source : <http://www.open.edu/>)

4. Exemple de simulation et analyse

Propagation d'une onde dans un milieu homogène

Les images montrent la propagation d'une onde aux temps $t = 0, 4$, $t = 1, 0$ et $t = 1, 4$ dans un milieu homogène sans absorption.

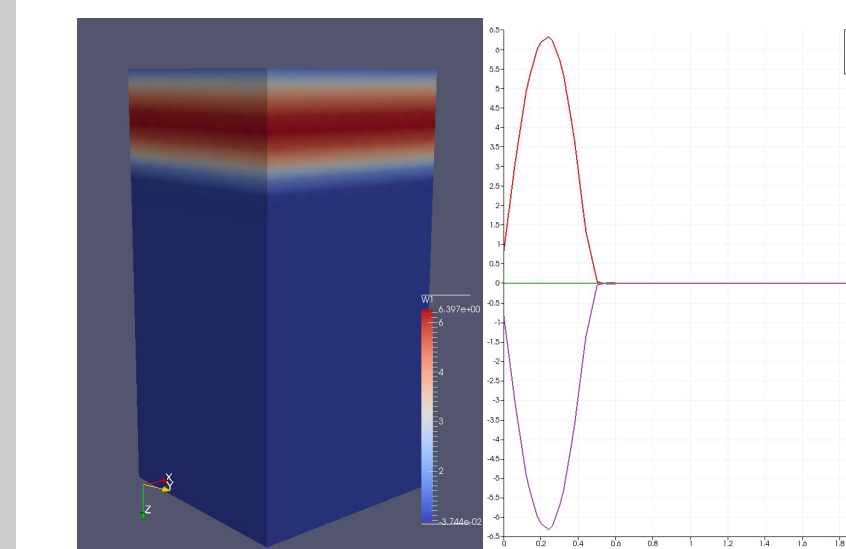


Fig. 4: t=0,4

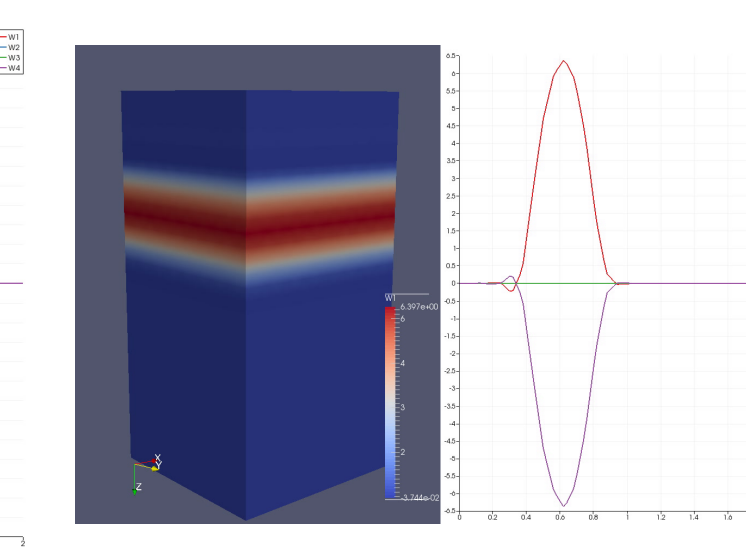


Fig. 5: t=1,0

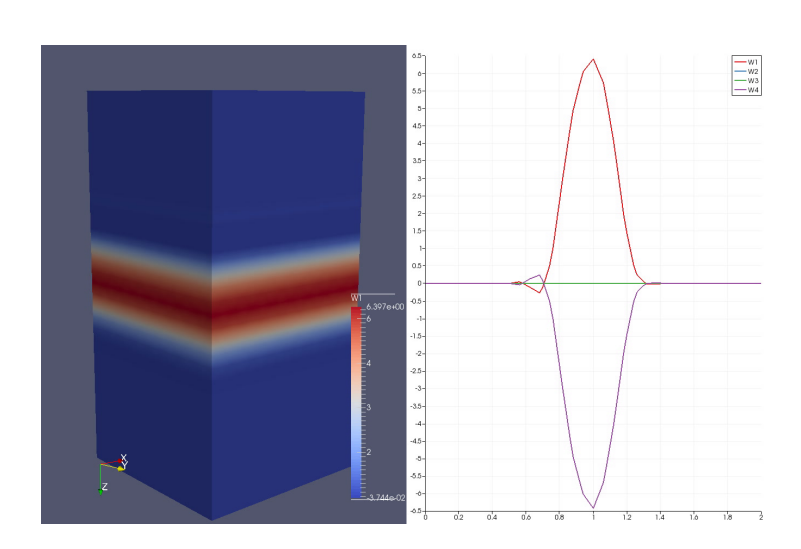


Fig. 6: t=1,4

Analyse de convergence

Lorsque le maillage utilisé est plus fin, l'erreur de calcul diminue linéairement [2].

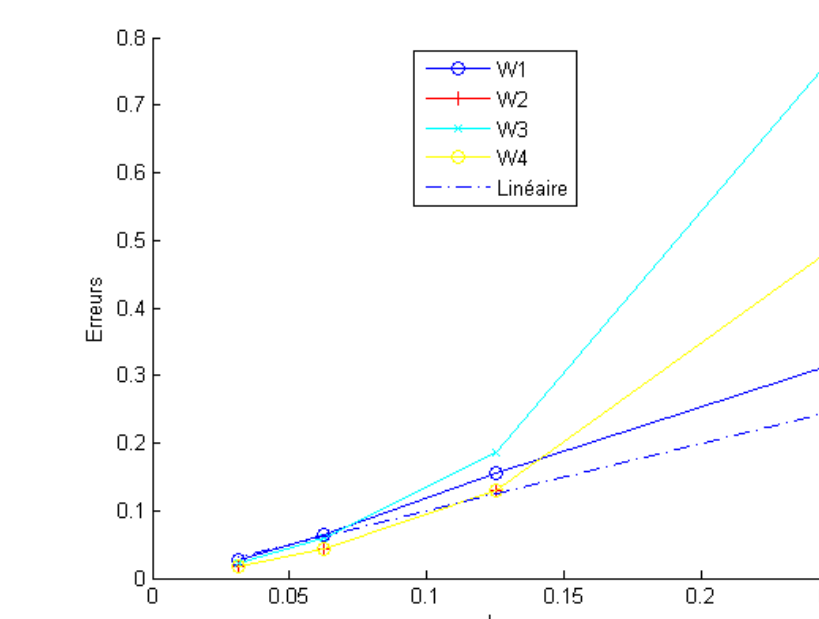


Fig. 7: Diminution des erreurs de calculs en fonction de la taille h des éléments

5. Développements futurs

Les travaux futurs pourront porter sur

- la simulation pour des milieux hétérogènes et poreux,
- la validation des solutions avec des données expérimentales,
- le raffinement dynamique du maillage afin de suivre avec précision la propagation de l'onde,
- la caractérisation d'un milieu à l'aide des simulations.

Références

- [1] Timo LÄHIVAARA et al. "Computational Aspects of the Discontinuous Galerkin Method for the Wave Equation". In : *Journal of Computational Acoustics* 16.04 (2008), p. 507–530. DOI : 10.1142/s0218396x08003762.
- [2] André FORTIN et André GARON. *Les éléments finis : de la théorie à la pratique*. Université Laval, 2011.