Modélisation et contrôle numérique de systèmes dynamiques en agronomie
Partie 5: Contrôle I

Module de Formation Continue Supagro Montpellier -
Cursus Data Science -
16-19 Janvier 2018, Montpellier, France

Céline Casenave[1]
[1]INRA UMR INRA-SupAgro MISTEA, Montpellier, France

16-19/01/2018

Qu'est ce que le CONTROLE?

Objectif: contrôler, commander, piloter un système
= donner au système le comportement souhaité

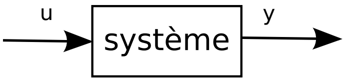
Comportements souhaités: par exemple,

- atteinte d'une certaine valeur (**régulation**). Ex: radiateur.
- **poursuite** d'une quantité variable. Ex: missile.
- **stabilisation/destabilisation** d'un système instable/stable. Ex: prolifération de nuisibles.

Contraintes: par exemple,

- contraintes sur les valeurs des entrées (saturations),
- temps de réaction pas trop long,
- oscillations faibles,
- minimisation de la consommation d'énergie, etc.

Qu'est ce que le CONTROLE?



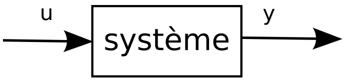
Qu'est ce que le CONTROLE?

Entrées u:

= actionneurs

= commandes

Qu'est ce que le CONTROLE?



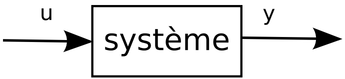
Entrées u:

- actionneurs
- commandes

Sorties y:

- sorties contrôlées, c'est à dire ce que l'on veut contrôler
- sorties mesurées, c'est à dire ce que l'on mesure

Qu'est ce que le CONTROLE?



<u>Entrées u</u>:

- = actionneurs
- = commandes

<u>Sorties y</u>:

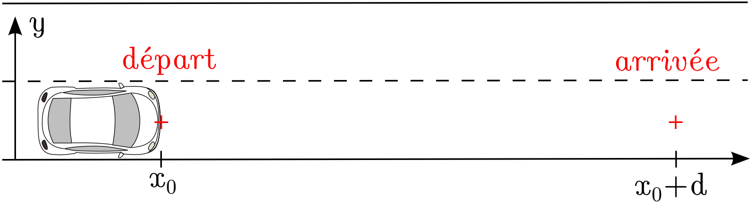
- = sorties contrôlées, c'est à dire ce que l'on veut contrôler
- = sorties mesurées, c'est à dire ce que l'on mesure

Question: quelle commande *u* choisir pour obtenir le comportement de y souhaité?

expression de u = **loi de commande**

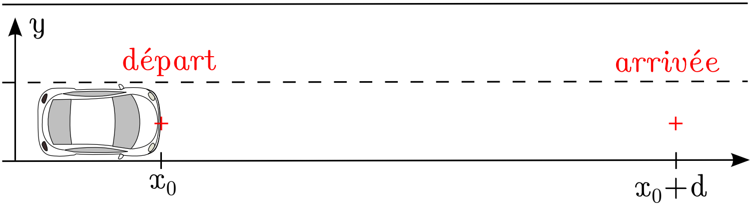
Commande boucle ouverte

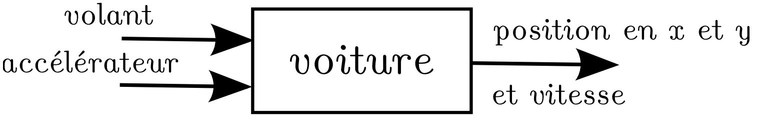
Exemple: pilotage d'une voiture



Commande boucle ouverte

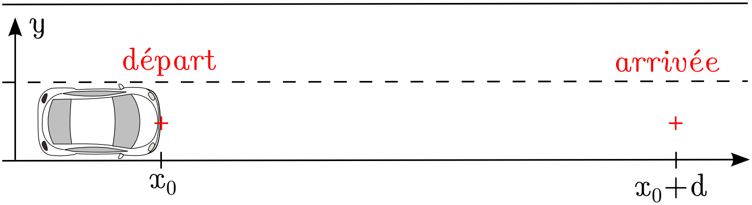
Exemple: pilotage d'une voiture



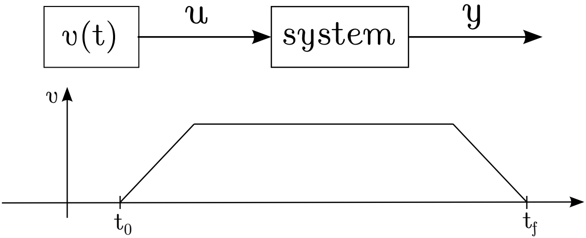


Commande boucle ouverte

Exemple: pilotage d'une voiture

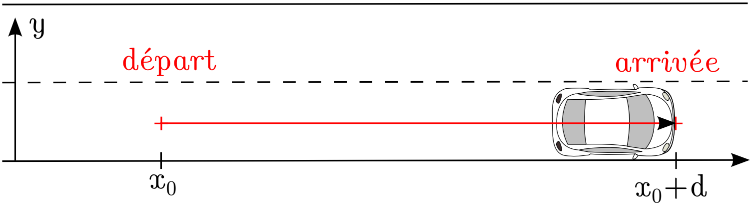


Loi de commande boucle ouverte:

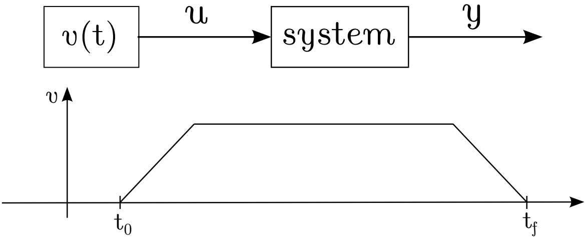


Commande boucle ouverte

Exemple: pilotage d'une voiture

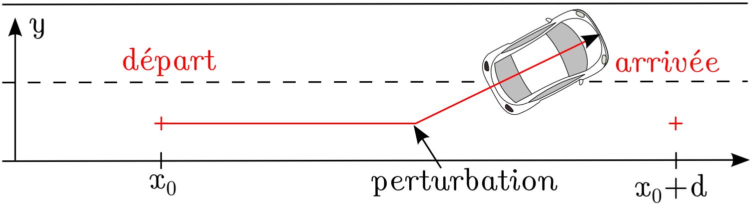


Loi de commande boucle ouverte:

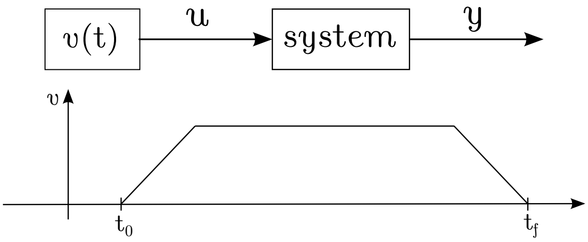


Commande boucle ouverte

Exemple: pilotage d'une voiture

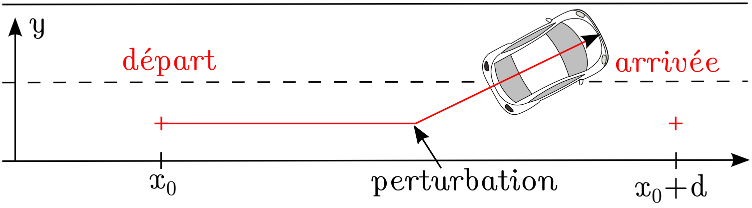


Loi de commande boucle ouverte:

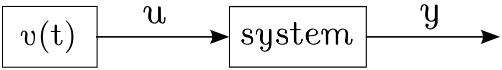


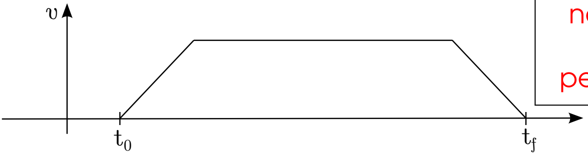
Commande boucle ouverte

Exemple: pilotage d'une voiture



Loi de commande boucle ouverte:





non robuste aux perturbations

Commande boucle fermée

Exemple: pilotage d'une voiture

Loi de commande boucle fermée = Comportement d'un conducteur

Commande boucle fermée

Exemple: pilotage d'une voiture

Loi de commande boucle fermée
= Comportement d'un conducteur

Informations visuelles
sur la sortie y

Commande boucle fermée

Exemple: pilotage d'une voiture

Loi de commande boucle fermée
= Comportement d'un conducteur

Informations visuelles sur la sortie y $\Longrightarrow$ Comparaison avec la sortie désirée y^*

Commande boucle fermée

Exemple: pilotage d'une voiture

Loi de commande boucle fermée
= Comportement d'un conducteur

Informations visuelles sur la sortie y $\Longrightarrow$ Comparaison avec la sortie désirée y^* $\Longrightarrow$ Ajustement de la commande u

Commande boucle fermée

Exemple: pilotage d'une voiture

Loi de commande boucle fermée = Comportement d'un conducteur

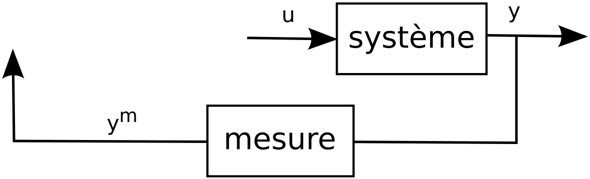
Informations visuelles sur la sortie y $\Longrightarrow$ Comparaison avec la sortie désirée y^* $\Longrightarrow$ Ajustement de la commande u

Commande boucle fermée

Exemple: pilotage d'une voiture

Loi de commande boucle fermée
= Comportement d'un conducteur

Informations visuelles sur la sortie y $\Longrightarrow$ Comparaison avec la sortie désirée y^* $\Longrightarrow$ Ajustement de la commande u

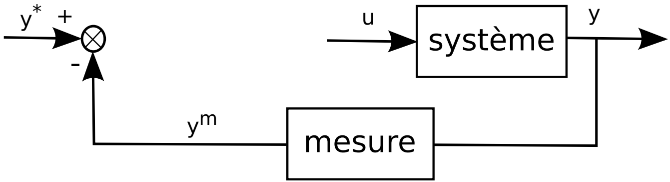


Commande boucle fermée

Exemple: pilotage d'une voiture

Loi de commande boucle fermée
= Comportement d'un conducteur

Informations visuelles sur la sortie y $\Longrightarrow$ Comparaison avec la sortie désirée y^* $\Longrightarrow$ Ajustement de la commande u

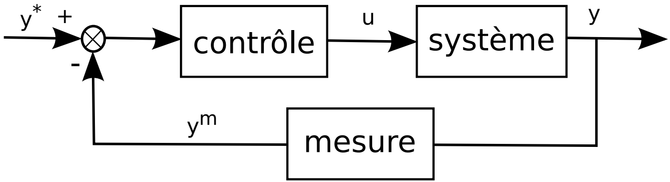


Commande boucle fermée

Exemple: pilotage d'une voiture

Loi de commande boucle fermée
= Comportement d'un conducteur

Informations visuelles sur la sortie y $\Longrightarrow$ Comparaison avec la sortie désirée y^* $\Longrightarrow$ Ajustement de la commande u

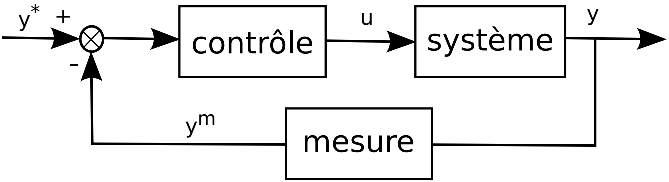


Commande boucle fermée

Exemple: pilotage d'une voiture

Loi de commande boucle fermée
= Comportement d'un conducteur

Informations visuelles sur la sortie y $\Longrightarrow$ Comparaison avec la sortie désirée y^* $\Longrightarrow$ Ajustement de la commande u

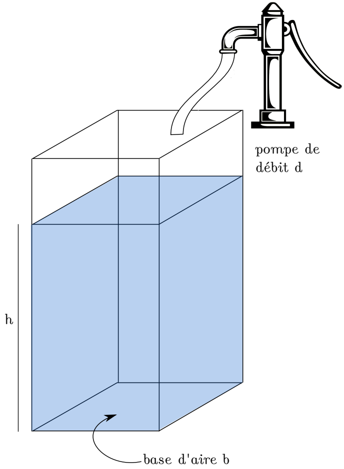


<u>Boucle de régulation naturelle</u>: exemple de la régulation de la température du corps.

Exemple d'illustration
Remplissage d'un réservoir pour l'irrigation

Objectif: maintenir un réservoir à un volume V_c constant.

Entrée u: débit $d > 0$ d'une pompe qui puise dans la nappe fréatique pour alimenter le réservoir



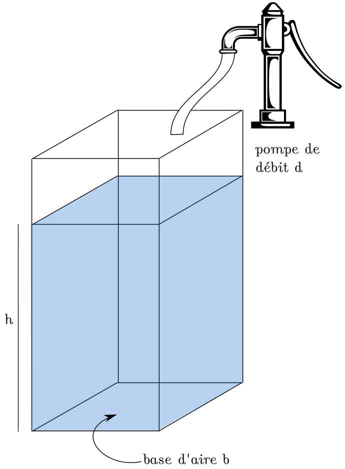
Exemple d'illustration
Remplissage d'un réservoir pour l'irrigation

Objectif: maintenir un réservoir à un volume V_c constant.

Entrée u: débit $d > 0$ d'une pompe qui puise dans la nappe fréatique pour alimenter le réservoir

Modèle du réservoir
hauteur d'eau: h
aire de la base: b
volume d'eau: $V = b \times h$

$$\frac{dV}{dt} = d$$



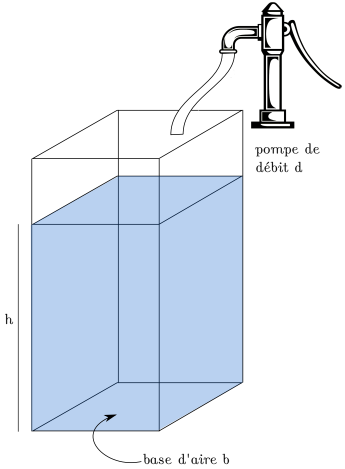
Exemple d'illustration
Remplissage d'un réservoir pour l'irrigation

Objectif: maintenir un réservoir à un volume V_c constant.

Entrée u: débit $d > 0$ d'une pompe qui puise dans la nappe fréatique pour alimenter le réservoir

Modèle du réservoir
hauteur d'eau: h
aire de la base: b
volume d'eau: $V = b \times h$

$$\frac{d(b \times h)}{dt} = d$$



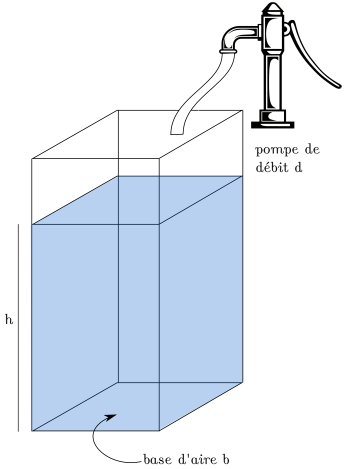
Exemple d'illustration
Remplissage d'un réservoir pour l'irrigation

Objectif: maintenir un réservoir à un volume V_c constant.

Entrée u: débit $d > 0$ d'une pompe qui puise dans la nappe fréatique pour alimenter le réservoir

Modèle du réservoir
hauteur d'eau: h
aire de la base: b
volume d'eau: $V = b \times h$

$$b \times \frac{dh}{dt} = d$$



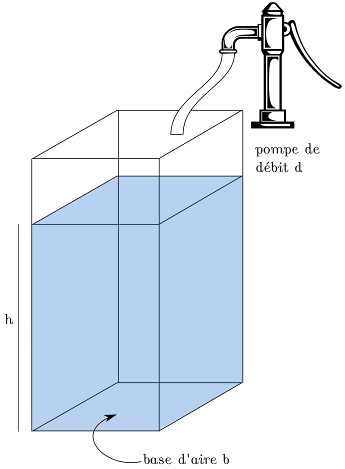
Exemple d'illustration
Remplissage d'un réservoir pour l'irrigation

Objectif: maintenir un réservoir à un volume V_c constant.

Entrée u: débit $d > 0$ d'une pompe qui puise dans la nappe fréatique pour alimenter le réservoir

Modèle du réservoir
hauteur d'eau: h
aire de la base: b
volume d'eau: $V = b \times h$

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{d}{b}}$$



Exemple d'illustration
Remplissage d'un réservoir pour l'irrigation

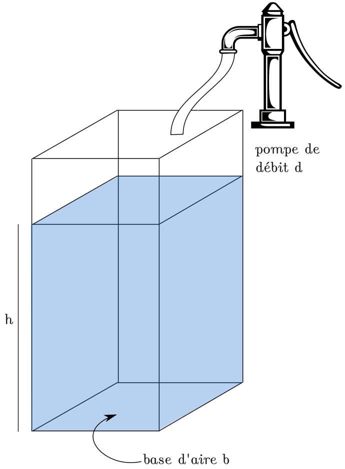
Objectif: maintenir un réservoir à un volume V_c constant.

Entrée u: débit $d > 0$ d'une pompe qui puise dans la nappe fréatique pour alimenter le réservoir

Modèle du réservoir
hauteur d'eau: h
aire de la base: b
volume d'eau: $V = b \times h$

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{d}{b}}$$

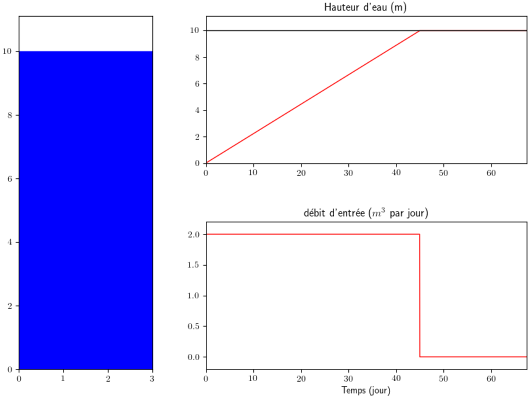
Condition initiale: $h(0) = 0$



Modèle du réservoir

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{d}{b}}$$

avec $h(0) = 0$



(simulation avec $b = 9$, $V_c = 90$, $d_{max} = 2$)

Exemple d'illustration
Remplissage d'un réservoir pour l'irrigation

Modèle du réservoir

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{d}{b}}$$

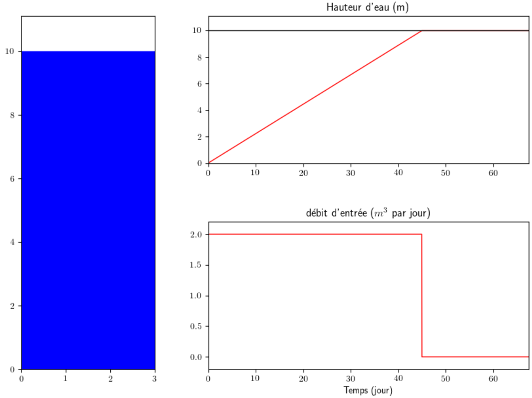
avec $h(0) = 0$

Commande boucle ouverte
débit maximum: d_{max}

$$d(t) = \begin{cases} d_{max} \text{ si } t \in [0, T] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

avec:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d}{b}$$



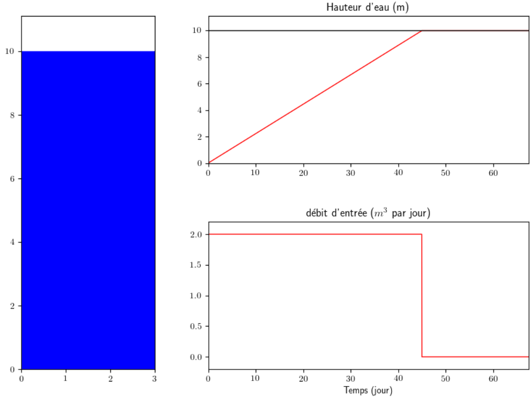
(simulation avec $b = 9$, $V_c = 90$, $d_{max} = 2$)

Exemple d'illustration
Remplissage d'un réservoir pour l'irrigation

Modèle du réservoir

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{d}{b}}$$

avec $h(0) = 0$



Commande boucle ouverte

débit maximum: d_{max}

$$d(t) = \begin{cases} d_{max} \text{ si } t \in [0, T] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

avec:

$$\int_0^T \frac{dh}{dt}(s)ds = \int_0^T \frac{d(s)}{b}ds$$

(simulation avec $b = 9$, $V_c = 90$, $d_{max} = 2$)

Exemple d'illustration
Remplissage d'un réservoir pour l'irrigation

Modèle du réservoir

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{d}{b}}$$

avec $h(0) = 0$

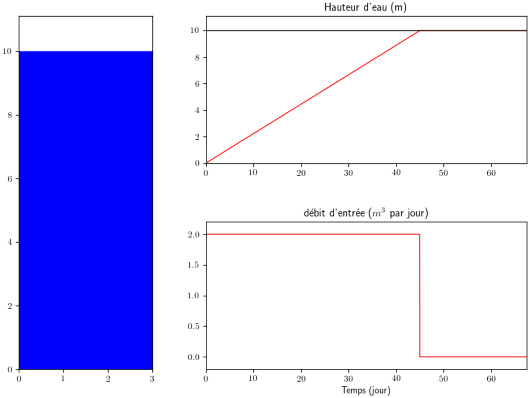
Commande boucle ouverte

débit maximum: d_{max}

$$d(t) = \begin{cases} d_{max} \text{ si } t \in [0, T] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

avec:

$$h(T) - h(0) = \int_0^T \frac{d_{max}}{b} ds$$



(simulation avec $b = 9$, $V_c = 90$, $d_{max} = 2$)

Exemple d'illustration
Remplissage d'un réservoir pour l'irrigation

Modèle du réservoir

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{d}{b}}$$

avec $h(0) = 0$

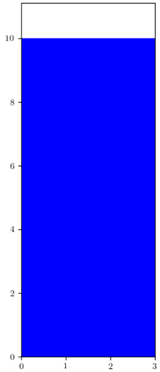
Commande boucle ouverte

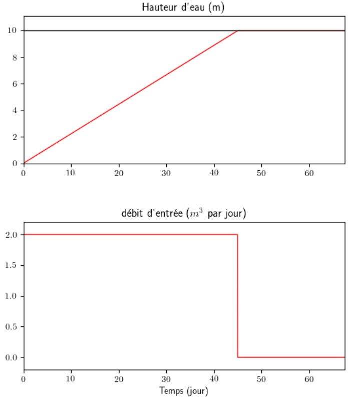
débit maximum: d_{max}

$$d(t) = \begin{cases} d_{max} \text{ si } t \in [0, T] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

avec:

$$h(T) = T\frac{d_{max}}{b}$$





(simulation avec $b = 9$, $V_c = 90$, $d_{max} = 2$)

Exemple d'illustration
Remplissage d'un réservoir pour l'irrigation

Modèle du réservoir

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{d}{b}}$$

avec $h(0) = 0$

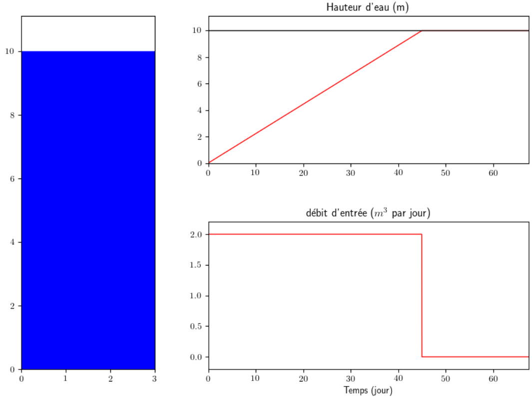
Commande boucle ouverte

débit maximum: d_{max}

$$d(t) = \begin{cases} d_{max} \text{ si } t \in [0, T] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

avec:

$$T = \frac{h(T) \times b}{d_{max}}$$



(simulation avec $b = 9$, $V_c = 90$, $d_{max} = 2$)

Exemple d'illustration
Remplissage d'un réservoir pour l'irrigation

Modèle du réservoir

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{d}{b}}$$

avec $h(0) = 0$

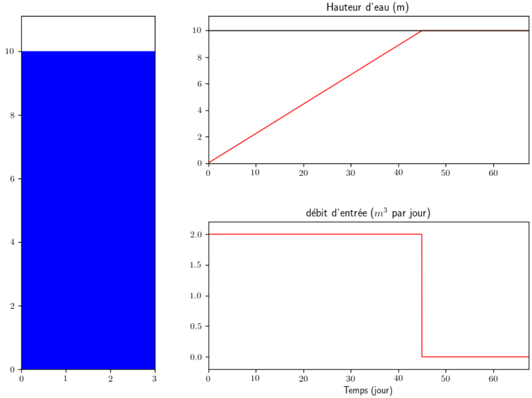
Commande boucle ouverte

débit maximum: d_{max}

$$d(t) = \begin{cases} d_{max} \text{ si } t \in [0, T] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

avec:

$$T = \frac{V_c}{d_{max}}$$



(simulation avec $b = 9$, $V_c = 90$, $d_{max} = 2$)

Exemple d'illustration
Remplissage d'un réservoir pour l'irrigation

Modèle du réservoir

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{d + p - c}{b}}$$

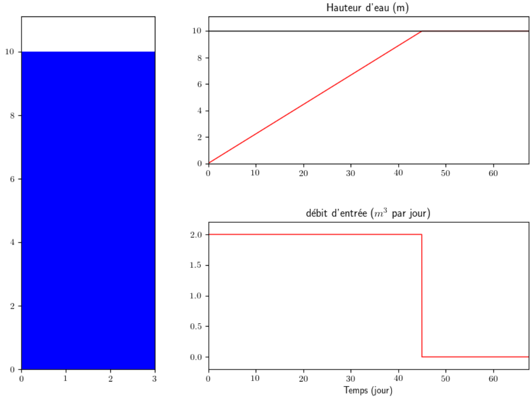
avec $h(0) = 0$
débit de précipitations: p
débit de prélevement des agriculteurs: c

Commande boucle ouverte

débit maximum: d_{max}

$$d(t) = \begin{cases} d_{max} \text{ si } t \in [0, T] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

avec $T = \frac{V_c}{d_{max}}$.



(simulation avec $b = 9$, $V_c = 90$, $d_{max} = 2$)

Exemple d'illustration
Remplissage d'un réservoir pour l'irrigation

Modèle du réservoir

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{d + p - c}{b}}$$

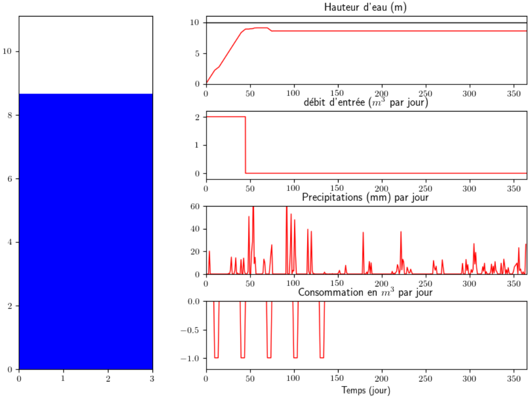
avec $h(0) = 0$
débit de précipitations: p
débit de prélevement des agriculteurs: c

Commande boucle ouverte

débit maximum: d_{max}

$$d(t) = \begin{cases} d_{max} \text{ si } t \in [0, T] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

avec $T = \frac{V_c}{d_{max}}$.



(simulation avec $b = 9$, $V_c = 90$, $d_{max} = 2$)

Non robuste aux perturbations

Exemple d'illustration
Remplissage d'un réservoir pour l'irrigation

Modèle du réservoir

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{d + p - c}{b}}$$

avec $h(0) = 0$
débit de précipitations: p
débit de prélevement des agriculteurs: c

Commande boucle fermée

$$d = \alpha b(h_c - h)$$

avec $h_c = \frac{V_c}{b}$ et $\alpha > 0$.

Exemple d'illustration
Remplissage d'un réservoir pour l'irrigation

Modèle du réservoir

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{d + p - c}{b}}$$

avec $h(0) = 0$
débit de précipitations: p
débit de prélevement des agriculteurs: c

Commande boucle fermée

$$d = \alpha b(h_c - h)$$

avec $h_c = \frac{V_c}{b}$ et $\alpha > 0$.

$\Rightarrow$ **Dynamique boucle fermée**: $\frac{dh}{dt} = \alpha(h_c - h) + \frac{p-c}{b}$

Exemple d'illustration
Remplissage d'un réservoir pour l'irrigation

Modèle du réservoir

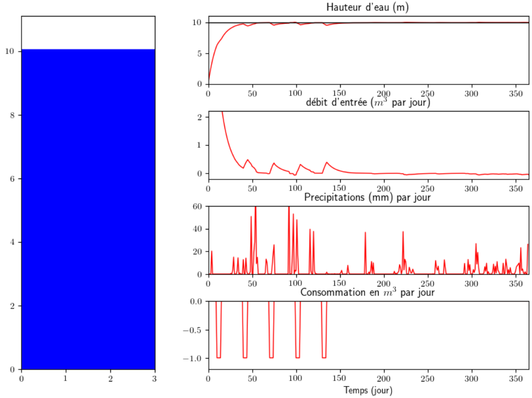
$$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{d + p - c}{b}}$$

avec $h(0) = 0$
débit de précipitations: p
débit de prélevement des agriculteurs: c

Commande boucle fermée

$$d = \alpha b(h_c - h)$$

avec $h_c = \frac{V_c}{b}$ et $\alpha > 0$.



(simulation avec $b = 9$, $V_c = 90$, $d_{max} = 2$)

$\Rightarrow$ **Dynamique boucle fermée:** $\frac{dh}{dt} = \alpha(h_c - h) + \frac{p-c}{b}$

Comment trouver une loi de commande?
Different types de lois de commande

Lois de commande statiques:

$$\boxed{u = f(y^* - y^m)}$$

2 lois de commande classiques:

- **loi de commande “bang-bang” ou “tout ou rien”**:

$$u(t) = \begin{cases} u_{max} \text{ si } y^* - y^m(t) > 0 \\ u_{min} \text{ si } y^* - y^m(t) \leqslant 0 \end{cases}$$

- **Loi de commande proportionnelle**:

$$u(t) = u_c + K_p(y^* - y^m(t))$$

Comment trouver une loi de commande?
Different types de lois de commande

Lois de commande statiques:

$$\boxed{u = f(y^* - y^m)}$$

Lois de commande dynamiques:

$$\boxed{\frac{du}{dt} = f(u, y^* - y^m)}$$

Exemple:
Loi de commande Proportionnel Intégrale Dérivée (PID):

$$u(t) = u_c + K_p(y^* - y^m(t)) + K_i \int_0^t (y^* - y^m(s))ds + K_d \frac{d(y^* - y^m)}{dt}(t)$$

Comment trouver une loi de commande?
Different types de lois de commande

Lois de commande statiques:

$$\boxed{u = f(y^* - y^m)} \qquad \boxed{u = f(x, y^*)}$$

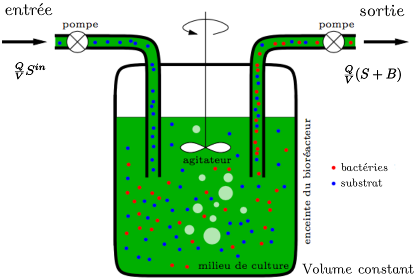
Lois de commande dynamiques:

$$\boxed{\frac{du}{dt} = f(u, y^* - y^m)} \qquad \boxed{\frac{du}{dt} = f(u, x, y^*)}$$

Retour de sortie   Retour d'état

Exemple: culture de micro-organismes
Système considéré

Croissance d'une population de micro-organismes *B* sur un substrat *S* dans un réacteur continu à volume *V* constant.



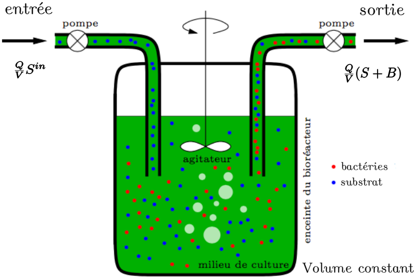
Exemple: culture de micro-organismes
Système considéré

Croissance d'une population de micro-organismes B sur un substrat S dans un réacteur continu à volume V constant.

Réaction

biomasse: B / substrat: S

$$S \xrightarrow[B]{} B$$



Exemple: culture de micro-organismes
Système considéré

Croissance d'une population de micro-organismes B sur un substrat S dans un réacteur continu à volume V constant.

Réaction

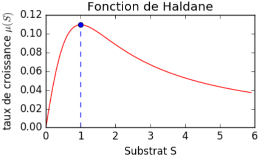
biomasse: B / substrat: S

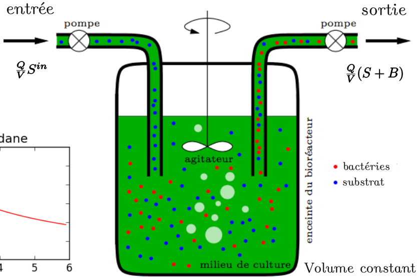
$$S \xrightarrow[B]{} B$$

Taux de croissance:

$$\mu(S) = \frac{\mu^* S}{K_S + S + \frac{S^2}{K_I}}$$

avec $1 - 4\frac{K_S}{K_I} < 0$





Exemple: culture de micro-organismes
Système considéré

Croissance d'une population de micro-organismes B sur un substrat S dans un réacteur continu à volume V constant.

Réaction

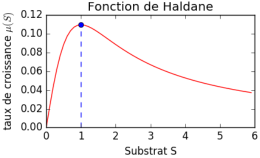
biomasse: B / substrat: S

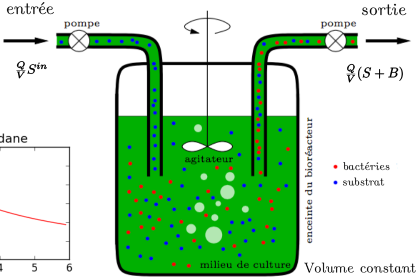
$$S \xrightarrow[B]{} B$$

Taux de croissance:

$$\mu(S) = \frac{\mu^* S}{K_S + S + \frac{S^2}{K_I}}$$

avec $1 - 4\frac{K_S}{K_I} < 0$





Débits d'entrée et de sortie

$$Q_{in} = Q_{out} = Q$$

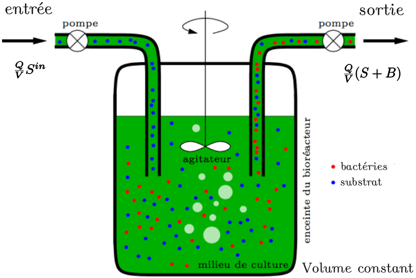
Réacteur alimenté par un milieu de concentration S^{in} en S et sans bactéries

Exemple: culture de micro-organismes
Problématique

Croissance d'une population de micro-organismes B sur un substrat S dans un réacteur continu à volume V constant.

Problème: contrôler S en utilisant la commande Q

Valeur à atteindre: S^*



Exemple: culture de micro-organismes
Problématique

Croissance d'une population de micro-organismes B sur un substrat S dans un réacteur continu à volume V constant.

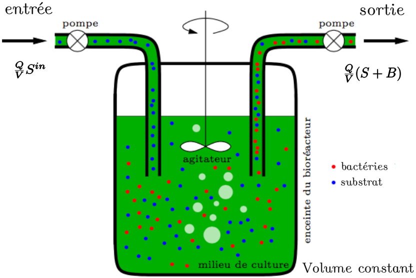
Problème: contrôler S en utilisant la commande Q

Valeur à atteindre: S^*

Modèle:
biomasse: B / substrat: S

$$\left\{\begin{array}{rcrl} \frac{dB}{dt} & = & \mu(S)B & -\frac{Q}{V}B \\ \frac{dS}{dt} & = & -k\mu(S)B & +\frac{Q}{V}(S^{in}-S) \end{array}\right.$$

avec $\mu(S) = \frac{\mu^* S}{K_S + S + \frac{S^2}{K_I}}$



Exemple: culture de micro-organismes
Commande boucle ouverte

Question 1: quelle est la valeur Q^* de Q telle qu'un point d'équilibre stable du système soit donné par (S_{eq}, B_{eq}) avec $S_{eq} = S^*$?

Exemple: culture de micro-organismes
Commande boucle ouverte

Question 1: quelle est la valeur Q^* de Q telle qu'un point d'équilibre stable du système soit donné par (S_{eq}, B_{eq}) avec $S_{eq} = S^*$?

Mais avant ....

Question 2: Quelles sont les valeurs S^* que l'on peut atteindre avec une valeur Q^* de Q constante et positive?

Exemple: culture de micro-organismes
Commande boucle ouverte

Question 1: quelle est la valeur Q^* de Q telle qu'un point d'équilibre stable du système soit donné par (S_{eq}, B_{eq}) avec $S_{eq} = S^*$?

Mais avant ....

Question 2: Quelles sont les valeurs S^* que l'on peut atteindre avec une valeur Q^* de Q constante et positive?

$\Rightarrow$ Calcul des **points d'équilibre stables** du système!

Exemple: culture de micro-organismes
Points d'équilibre

Solutions de:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{dB}{dt} & = & 0 \\ \frac{dS}{dt} & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow (\mathcal{S}) \left\{\begin{array}{rcl} (\mu(S) - \frac{Q}{V})B & = & 0 \\ -k\mu(S)B + \frac{Q}{V}(S^{in} - S) & = & 0 \end{array}\right.$$

En supposant que $Q > 0$ (donc non nul) on a:

$$(\mathcal{S}) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} B & = & 0 \\ \frac{Q}{V}(S^{in} - S) & = & 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} \mu(S) & = & \frac{Q}{V} \\ \mu(S)(S^{in} - S - kB) & = & 0 \end{array}\right.$$

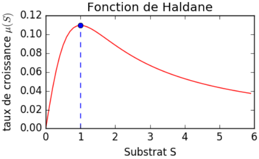
$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} B & = & 0 \\ S & = & S^{in} \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} \mu(S) & = & \frac{Q}{V} \\ B & = & \frac{S^{in}-S}{k} \end{array}\right.$$

Exemple: culture de micro-organismes
Points d'équilibre

Résolution de l'équation $\mu(S) = \frac{Q}{V}$:

Exemple: culture de micro-organismes
Points d'équilibre

Résolution de l'équation $\mu(S) = \frac{Q}{V}$:

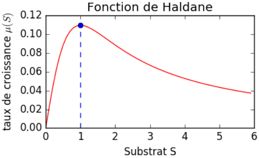


Maximum en $S = \sqrt{K_s K_I}$

car $\mu'(S) = \frac{\mu^*}{\left(K_S + S + \frac{S^2}{K_I}\right)^2} \left(K_S - \frac{S^2}{K_I}\right)$

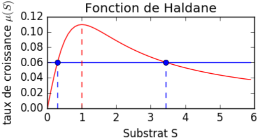
Exemple: culture de micro-organismes
Points d'équilibre

Résolution de l'équation $\mu(S) = \frac{Q}{V}$**:**



Maximum en $S = \sqrt{K_s K_I}$

car $\mu'(S) = \frac{\mu^*}{\left(K_S + S + \frac{S^2}{K_I}\right)^2}\left(K_S - \frac{S^2}{K_I}\right)$

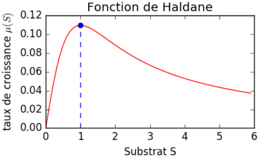


2 solutions si $0 \leqslant \frac{Q}{V} < \mu(\sqrt{K_s K_I})$

$\left(1 \text{ solution si } \frac{Q}{V} = \mu(\sqrt{K_s K_I})\right)$

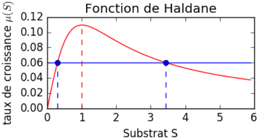
Exemple: culture de micro-organismes
Points d'équilibre

Résolution de l'équation $\mu(S) = \frac{Q}{V}$**:**



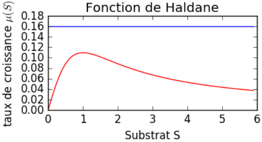
Maximum en $S = \sqrt{K_s K_I}$

car $\mu'(S) = \frac{\mu^*}{\left(K_S + S + \frac{S^2}{K_I}\right)^2}\left(K_S - \frac{S^2}{K_I}\right)$



2 solutions si $0 \leqslant \frac{Q}{V} < \mu(\sqrt{K_s K_I})$

$\left(1 \text{ solution si } \frac{Q}{V} = \mu(\sqrt{K_s K_I})\right)$



0 solution si $\frac{Q}{V} > \mu(\sqrt{K_s K_I})$

Exemple: culture de micro-organismes

Points d'équilibre

Résolution de l'équation $\mu(S) = \frac{Q}{V}$:

$$\mu(S) = \frac{Q}{V} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mu^* S}{K_S + S + \frac{S^2}{K_I}} = \frac{Q}{V}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mu^* S = \left(K_S + S + \frac{S^2}{K_I} \right) \frac{Q}{V}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{Q}{V} K_S + \left(\frac{Q}{V} - \mu^* \right) S + \frac{Q}{V} \frac{S^2}{K_I} = 0}$$

- pour $0 < Q < V \frac{\mu^*}{1+2\sqrt{\frac{K_S}{K_I}}} = V\mu(\sqrt{K_s K_I})$, deux solutions (racines) S_1 et S_2 telles que $0 \leqslant S_1 \leqslant \sqrt{K_S K_I} \leqslant S_2$
- pour $Q > V \frac{\mu^*}{1+2\sqrt{\frac{K_S}{K_I}}} = V\mu(\sqrt{K_s K_I})$, pas de solution.

Exemple: culture de micro-organismes
Points d'équilibre

Bilan: 3 points d'équilibre :

- $E_0 = (B, S) = (0, S^{in})$ (lessivage)
- $E_1 = (B, S) = (\frac{S^{in} - S_1}{k}, S_1)$
- $E_2 = (B, S) = (\frac{S^{in} - S_2}{k}, S_2)$

Exemple: culture de micro-organismes
Points d'équilibre

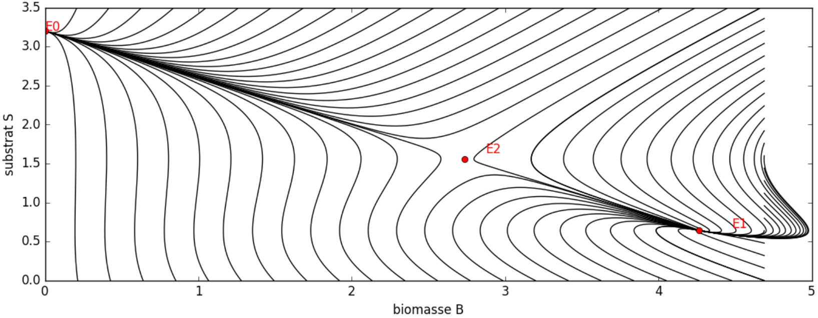
Bilan: 3 points d'équilibre / stabilité locale :

- $E_0 = (B,S) = (0, S^{in})$ (lessivage) stable ssi $\frac{Q}{V} > \mu(S^{in})$
- $E_1 = (B,S) = (\frac{S^{in}-S_1}{k}, S_1)$ stable
- $E_2 = (B,S) = (\frac{S^{in}-S_2}{k}, S_2)$ instable

Exemple: culture de micro-organismes
Points d'équilibre

Bilan: 3 points d'équilibre / stabilité locale :

- $E_0 = (B, S) = (0, S^{in})$ (lessivage) stable ssi $\frac{Q}{V} > \mu(S^{in})$
- $E_1 = (B, S) = (\frac{S^{in} - S_1}{k}, S_1)$ stable
- $E_2 = (B, S) = (\frac{S^{in} - S_2}{k}, S_2)$ instable



Exemple: culture de micro-organismes
Retour à la commande boucle ouverte

Question 2: Quelles sont les valeurs S^* que l'on peut atteindre avec une valeur Q^* de Q constante et positive?

Exemple: culture de micro-organismes
Retour à la commande boucle ouverte

Question 2: Quelles sont les valeurs S^* que l'on peut atteindre avec une valeur Q^* de Q constante et positive?

Réponse: $$S^* \in \left[0, \sqrt{K_S K_I}\right] \cup \left\{S^{in}\right\}$$

puisque seuls E_0 et E_1 sont stables et $0 \leqslant S_1 \leqslant \sqrt{K_S K_I}$

Exemple: culture de micro-organismes
Retour à la commande boucle ouverte

Question 2: Quelles sont les valeurs S^* que l'on peut atteindre avec une valeur Q^* de Q constante et positive?

Réponse: $$S^* \in \left[0, \sqrt{K_S K_I}\right] \cup \left\{S^{in}\right\}$$

puisque seuls E_0 et E_1 sont stables et $0 \leqslant S_1 \leqslant \sqrt{K_S K_I}$

Question 1: quelle est la valeur Q^* de Q telle qu'un point d'équilibre stable du système soit donné par (S_{eq}, B_{eq}) avec $S_{eq} = S^*$?

Exemple: culture de micro-organismes
Retour à la commande boucle ouverte

Question 2: Quelles sont les valeurs S^* que l'on peut atteindre avec une valeur Q^* de Q constante et positive?

Réponse: $$S^* \in \left[0, \sqrt{K_S K_I}\right] \cup \{S^{in}\}$$

puisque seuls E_0 et E_1 sont stables et $0 \leqslant S_1 \leqslant \sqrt{K_S K_I}$

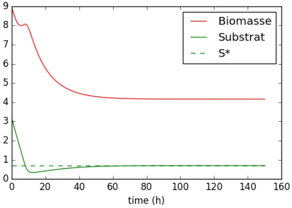
Question 1: quelle est la valeur Q^* de Q telle qu'un point d'équilibre stable du système soit donné par (S_{eq}, B_{eq}) avec $S_{eq} = S^*$?

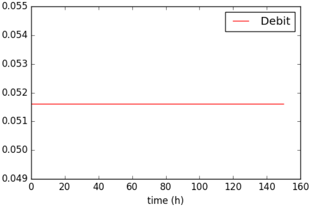
Réponse: $$Q^* = V\mu(S^*)$$

Exemple: culture de micro-organismes
Retour à la commande boucle ouverte

Limitation des valeurs atteignables avec la boucle ouverte

- Cas où $S^* = 0.7 < \sqrt{K_S K_I} = 1$





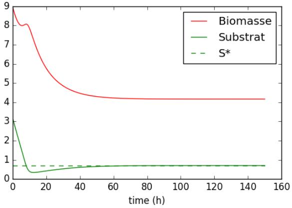
Consigne atteinte

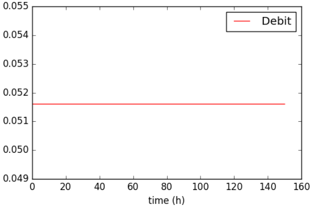
Exemple: culture de micro-organismes

Retour à la commande boucle ouverte

Limitation des valeurs atteignables avec la boucle ouverte

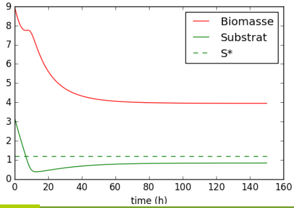
- Cas où $S^* = 0.7 < \sqrt{K_S K_I} = 1$

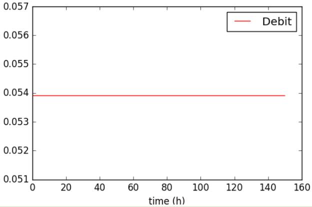




Consigne atteinte

- Cas où $S^* = 1.2 > \sqrt{K_S K_I} = 1$





Consigne non atteinte

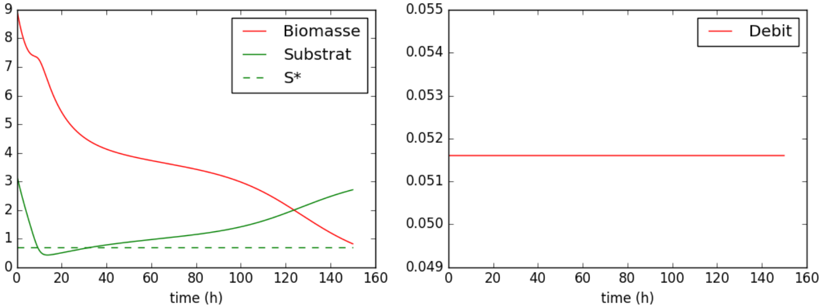
Exemple: culture de micro-organismes
Retour à la commande boucle ouverte

Non robuste aux perturbations

Erreur sur la commande appliquée:

$$D_{\text{réel}} = D_{\text{calc}}(1+\delta)$$

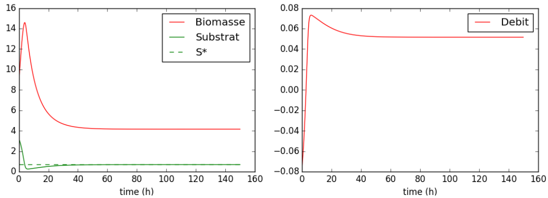
Ici avec $\delta = 0.1$ et $S^* = 0.7 < \sqrt{K_S K_I} = 1$:



Exemple: culture de micro-organismes
Commande boucle fermée: action proportionnelle

Loi de la forme: $Q(t) = V\mu(S^*) + K_p(S^* - S^m(t))$

- Cas où $S^* = 0.7 < \sqrt{K_S K_I} = 1$

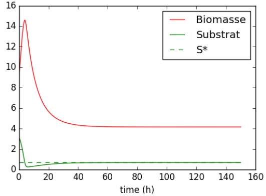


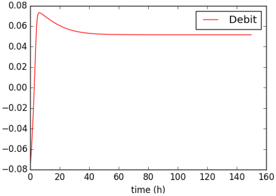
Consigne atteinte

Exemple: culture de micro-organismes
Commande boucle fermée: action proportionnelle

Loi de la forme: $Q(t) = V\mu(S^*) + K_p(S^* - S^m(t))$

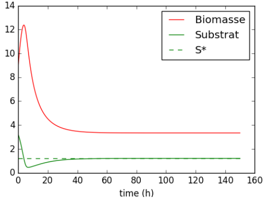
- Cas où $S^* = 0.7 < \sqrt{K_S K_I} = 1$

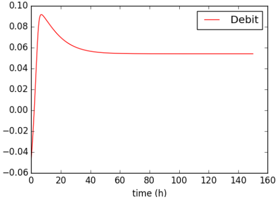




Consigne atteinte

- Cas où $S^* = 1.2 > \sqrt{K_S K_I} = 1$



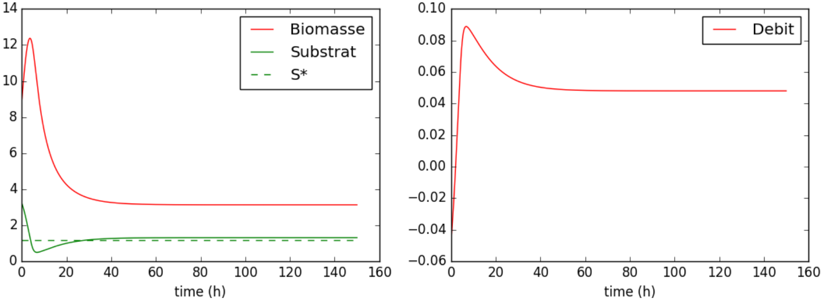


Consigne atteinte aussi

Exemple: culture de micro-organismes
Commande boucle fermée: action proportionnelle

Loi de la forme: $Q(t) = V\mu(S^*) + K_p(S^* - S^m(t))$

Erreur sur la commande avec $\delta = 0.1$ et $S^* = 1.2 > \sqrt{K_S K_I} = 1$:

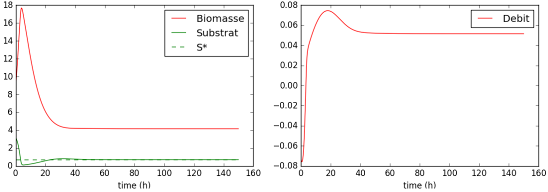


$\Rightarrow$ Non robuste aux perturbations

Exemple: culture de micro-organismes
Commande boucle fermée: action intégrale

Loi de la forme: $Q(t) = V\mu(S^*) + K_p(S^* - S^m(t)) + K_i \int_0^t (S^* - S^m(s))$

- Cas où $S^* = 0.7 < \sqrt{K_S K_I} = 1$

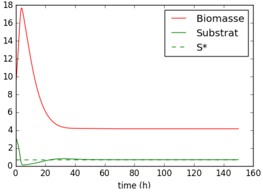


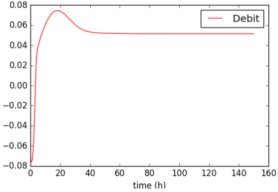
Consigne atteinte

Exemple: culture de micro-organismes
Commande boucle fermée: action intégrale

Loi de la forme: $Q(t) = V\mu(S^*) + K_p(S^* - S^m(t)) + K_i \int_0^t (S^* - S^m(s))$

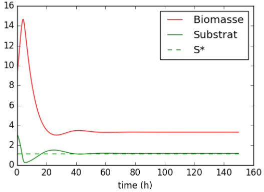
- Cas où $S^* = 0.7 < \sqrt{K_S K_I} = 1$

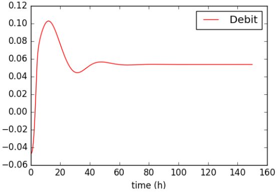




Consigne atteinte

- Cas où $S^* = 1.2 > \sqrt{K_S K_I} = 1$



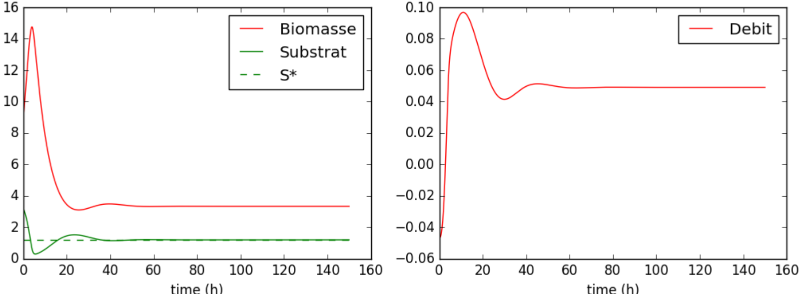


Consigne atteinte aussi

Exemple: culture de micro-organismes
Commande boucle fermée: action intégrale

Loi de la forme: $Q(t) = V\mu(S^*) + K_p(S^* - S^m(t)) + K_i \int_0^t (S^* - S^m(s))$

Erreur sur la commande avec $\delta = 0.1$ et $S^* = 1.2 > \sqrt{K_S K_I} = 1$:



$\Rightarrow$ Robuste aux perturbations

Exemple: culture de micro-organismes

Commande boucle fermée: action dérivée

Loi de la forme:

$$u(t) = u_c + K_p(y^* - y^m(t)) + K_i \int_0^t (y^* - y^m(s))ds + K_d \frac{d(y^* - y^m)}{dt}$$

Erreur sur la commande avec $\delta = 0.1$ et $S^* = 1.2 > \sqrt{K_S K_I} = 1$: