1. Filtrage de Kalman

1.1 Système linéaire gaussien en tems discret

1.1.1 Définition

$$X_{k+1} = A\,X_k + B\,W_k\;,\;\; 0 \leq k < k_{max}$$

- $X_k \to \mathbb{R}^n$
- bruit: $W_k \to \mathbb{R}^m$, $W_k \sim N(0, Q_W)$
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$

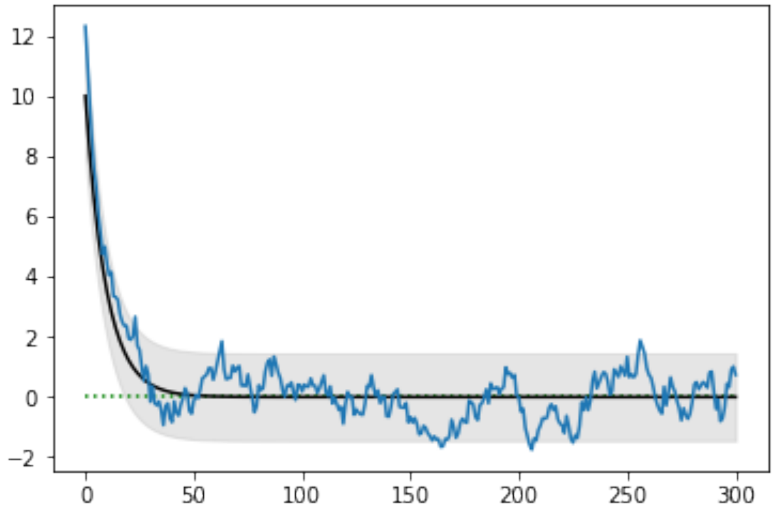
Il s'agit d'un **système gaussien**: $X_{0:k_{max}}$ est un vecteur aléatoire gaussien. (Notation: $Z_{k':k} = (Z_{k'}, Z_{k'+1}, \dots, Z_k)$, $k' \leq k$).

La moyenne $\bar{X}_k = \mathbb{E}(X_k)$ et la covariance $Q^X_k = \mathrm{Var}(X_k)$ sont donnés par:

$$\begin{aligned}\bar{X}_{k+1} &= A\,\bar{X}_k \\ Q^X_{k+1} &= A\,Q^X_k\,A^* + B\,Q_W\,B^*\end{aligned}$$

1.1.2 Simulation

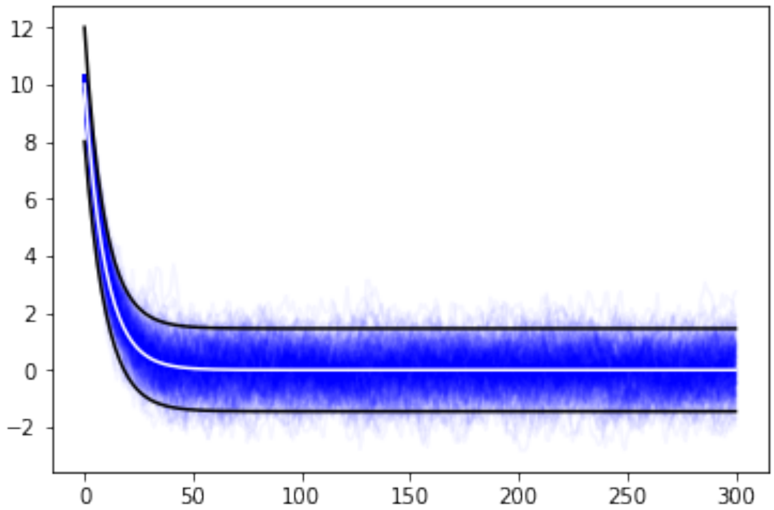
In [2]:
```
%matplotlib inline

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

kmax = 300

EX0, VX0 = 10, 5
A, B, QW = 0.9, 1, 0.1
sQW = np.sqrt(QW)
sVX0 = np.sqrt(VX0)

def sys_lin(EX0, sVX0, A, B, sQW):
    W = sQW*np.random.randn(kmax)
    X = np.ones(kmax+1)
    X[0] = EX0+sVX0*np.random.randn()
    for k in range(kmax):
        X[k+1] = A*X[k]+B*W[k]
    return X

def sys_lin_loi(EX0, sVX0, A, B, sQW):
    espX = np.ones(kmax+1)
    varX = np.ones(kmax+1)
    espX[0] = EX0
    for k in range(kmax):
        espX[k+1] = A*espX[k]
        varX[k+1] = A*A*varX[k]+B*B*QW
    return espX, varX

X = sys_lin(EX0, sVX0, A, B, sQW)
espX, varX = sys_lin_loi(EX0, sVX0, A, B, sQW)

plt.plot([0, kmax], [0, 0], color="g", linestyle=':')
plt.plot(espX,color='k')
plt.fill_between(range(kmax+1),espX+2*np.sqrt(varX),
                 espX-2*np.sqrt(varX), color = '0.75', alpha=0.4)
plt.plot(X)
plt.show()
```



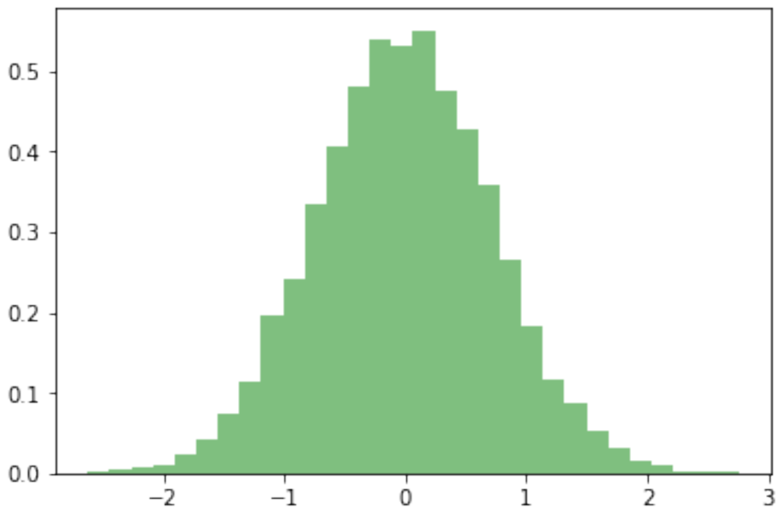
In [3]:
```
from ipywidgets import interact, fixed

def plt_sys_lin(A, B, iseed):
    np.random.seed(iseed)
    X = sys_lin(10, 0, A, B, 1)
    plt.plot([0, kmax], [0, 0], color="g", linestyle=':')
    plt.plot(X)
    plt.ylim([-4,15])
    plt.show()

interact(plt_sys_lin, A=(0,1,0.01), B=(0.,6,0.1),
         iseed=(1,100,1))
plt.show()
```

1.1.3 Un peu de vectorisation

In [4]:
```
kmax = 300

mcmax = 300
EX0, VX0 = 10, 5
A, B, QW = 0.9, 1, 0.1
sQW = np.sqrt(QW)
sVX0 = np.sqrt(VX0)

def sys_lin_vec(mcmax,EX0, sVX0, A, B, sQW):
    W = sQW*np.random.randn(kmax,mcmax)
    X = np.ones((kmax+1,mcmax))
    X[0,] = EX0+sVX0*np.random.randn()
    for k in range(kmax):
        X[k+1,] = A*X[k,]+B*W[k,]
    return X

X = sys_lin_vec(mcmax, EX0, sVX0, A, B, sQW)
plt.plot(X,alpha=.04,color='b')
plt.plot(espX,color='w')
plt.plot(espX+2*np.sqrt(varX),color='k')
plt.plot(espX-2*np.sqrt(varX),color='k')
plt.show()
```



In [5]:
```
mcmax = 10000
X = sys_lin_vec(mcmax, EX0, sVX0, A, B, sQW)
num_bins = 30
n, bins, patches = plt.hist(X[-1,], num_bins, normed=1,
                            facecolor='green', alpha=0.5)
plt.show()
```



1.2 Loi conditionnelle gaussienne

Soit $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ un vecteur aléatoire gaussien à valeurs dans $\mathbb{R}^{n+d}$ de moyenne $\bar{Z}$ et de covariance Q_Z avec:

$$\bar{Z} = \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix} \qquad Q_Z = \begin{pmatrix} Q_{XX} & Q_{XY} \\ Q_{XY}^* & Q_{YY} \end{pmatrix}$$

où $Q_{YY} > 0$ alors $X|Y$ est gaussien $N(\widehat{X}, R)$ avec:

$$\widehat{X} = \bar{X} + Q_{XY}\, Q_{YY}^{-1}\, (Y - \bar{Y}) \qquad R = Q_{XX} - Q_{XY}\, Q_{YY}^{-1}\, Q_{XY}^*$$

In [6]:
```
import scipy.stats as stats

barZ = np.array([[1],[3]])
QZ = np.array([[3,1],[1,1]])

a = barZ[0]
b = QZ[0,0]
xx = np.linspace(-6, 10, 100)

R = QZ[0,0]-QZ[0,1]*QZ[0,1]/QZ[1,1]

def pltbayesgauss(obs):
    hatX = barZ[0]+QZ[0,1]*(obs-barZ[1])/QZ[1,1]
    plt.plot([obs,obs],[0,1],':')
    plt.plot(xx, stats.norm.pdf(xx, a, b),label='loi a priori')
    plt.plot(xx, stats.norm.pdf(xx, hatX, R),label='loi a posterior
i')
    plt.ylim([0,0.25])
    plt.legend()
    plt.show()

interact(pltbayesgauss, obs=(-6,10,0.1))
plt.show()
```

1.3 Problème de filtrage linéaire

$$
\begin{aligned}
X_{k+1} &= A\,X_k + B\,W_k \quad 0 \leq k < k_{max} && \text{(équation d'état)} \\
Y_k &= H\,X_k + V_k \quad 0 < k \leq k_{max} && \text{(équation d'observation)}
\end{aligned}
$$

- $X_k \to \mathbb{R}^n$, $Y_k \to \mathbb{R}^d$
- bruit d'état: $W_k \to \mathbb{R}^m$, $W_k \sim N(0, Q_W)$
- bruit de mesure: $V_k \to \mathbb{R}^d$, $V_k \sim N(0, Q_V)$, $Q_V > 0$
- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $H \in \mathbb{R}^{n\times d}$

Il s'agit d'un **système gaussien**: $(X_0, \ldots, X_{k_{max}}, Y_1, \ldots, Y_{k_{max}})$ est un vecteur aléatoire gaussien. (Notation: $Z_{k':k} = (Z_{k'}, Z_{k'+1}, \ldots, Z_k)$, $k' \leq k$).

Filtrage: On veut estimer l'état caché à l'aide des observations. À l'instant k, on dispose des observations $Y_{1:k}$ et on veut estimer X_k.

La loi de X_k sachant les observations $Y_{1:k}$ est gaussienne de moyenne $\widehat{X}_k$ et de covariance R_k donné par:

initialisation

- $\widehat{X}_0 \leftarrow \bar{X}_0$
- $R_0 \leftarrow Q_0$

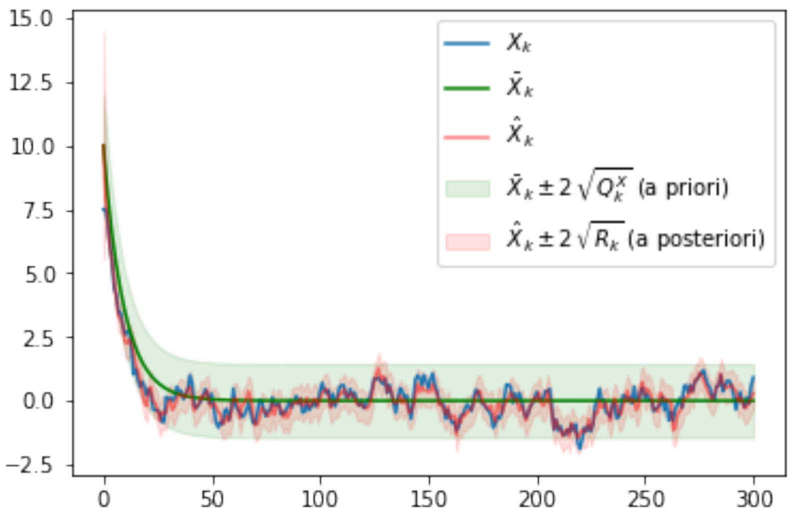
itérations $k = 1, 2, 3 \dots$

- **prédiction** (calcul de la loi de $X_k | Y_{0:k-1}$)
  - $\widehat{X}_{k^-} \leftarrow A\,\widehat{X}_{k-1}$
  - $R_{k^-} \leftarrow A\,R_{k-1}\,A^* + B\,Q^W\,B^*$
- **correction** (calcul de la loi de $X_k | Y_{0:k}$)
  - $K_k \leftarrow R_{k^-}\,H^*\,[H\,R_{k^-}\,H^* + Q^V]^{-1}$ gain
  - $\widehat{X}_k \leftarrow \widehat{X}_{k^-} + K_k\,[Y_k - H\,\widehat{X}_{k^-}]$
  - $R_k \leftarrow [I - K_k\,H]\,R_{k^-}$

In [7]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

kmax = 300

EX0, VX0 = 10, 5
A, B, QW = 0.9, 1, 0.1
H, QV = 1, 0.2
sQW = np.sqrt(QW)
sQV = np.sqrt(QV)
sVX0 = np.sqrt(VX0)

def sys_lin_esp_etat(EX0, sVX0, A, B, H, sQW, sQV):
    W = sQW*np.random.randn(kmax)
    V = sQV*np.random.randn(kmax)
    X = np.ones(kmax+1)
    Y = np.ones(kmax+1)
    X[0] = EX0+sVX0*np.random.randn()
    Y[0] = 0 # on s en moque
    for k in range(kmax):
        X[k+1] = A*X[k]+B*W[k]
        Y[k+1] = H*X[k+1]+V[k]
    return X,Y

def kalman(EX0, sVX0, A, B, H, sQW, sQV, Y):
    hatX = np.ones(kmax+1)
    R = np.ones(kmax+1)
    hatX[0] = EX0
    R[0] = sVX0*sVX0
```

```
    for k in range(kmax):
        # prediction
        predX = A*hatX[k]
        predR = A*A*R[k]+B*B*sQW*sQW
        # correction
        gain = predR * H / (H*predR*H+sQV*sQV)
        hatX[k+1] = predX + gain * (Y[k+1]-H*predX)
        R[k+1] = (1-gain*H)*predR
    return hatX, R

X,Y = sys_lin_esp_etat(EX0, sVX0, A, B, H, sQW, sQV)
espX, varX = sys_lin_loi(EX0, sVX0, A, B, sQW)
hatX, R = kalman(EX0, sVX0, A, B, H, sQW, sQV, Y)

plt.fill_between(range(kmax+1),espX+2*np.sqrt(varX),
                 espX-2*np.sqrt(varX),
                 color = 'g', alpha=0.12,
                 label=r'$\bar X_k\pm 2\,\sqrt{Q^X_k}$ (a priori)')
plt.fill_between(range(kmax+1),hatX+2*np.sqrt(R),
                 hatX-2*np.sqrt(R),
                 color = 'r', alpha=0.12,
                 label=r'$\hat X_k\pm 2\,\sqrt{R_k}$ (a posteriori)
')
plt.plot(X,label=r'$X_k$')
plt.plot(espX,color='g',label=r'$\bar X_k$')
plt.plot(hatX,color='r',alpha=0.5,label=r'$\hat X_k$')

plt.legend()
plt.show()
```



1.4 Filtre de Kalman étendu

1.4.1 Filtrage non linéaire en temps dicsret

$$X_{k+1} = f(X_k) + \sigma\, W_k \quad 0 \leq k < k_{max} \qquad \text{(équation d'état)}$$
$$Y_k = h(X_k) + V_k \quad 0 < k \leq k_{max} \qquad \text{(équation d'observation)}$$

- $X_k \to \mathbb{R}^n$, $Y_k \to \mathbb{R}^d$
- bruit d'état: $W_k \to \mathbb{R}^m$, $W_k \sim N(0, Q_W)$
- bruit de mesure: $V_k \to \mathbb{R}^d$, $V_k \sim N(0, Q_V)$, $Q_V > 0$

Filtrage: On veut estimer l'état caché à l'aide des observations. À l'instant k, on dispose des observations $Y_{1:k}$ et on veut estimer X_k.

En général: pas de solution en dimension finie

1.4.2 Filtre de Kalman étendu en temps discret

La loi de X_k sachant les observations $Y_{1:k}$ est gaussienne de moyenne $\widehat{X}_k$ et de covariance R_k donné par:

initialisation

- $\widehat{X}_0 \leftarrow \bar{X}_0$
- $R_0 \leftarrow Q_0$

itérations $k = 1, 2, 3 \ldots$

- **prédiction** (calcul de la loi de $X_k | Y_{0:k-1}$)
  - $F_{k-1} \leftarrow \nabla f(\widehat{X}_{k-1})$
  - $\widehat{X}_{k^-} \leftarrow f(\widehat{X}_{k-1})$
  - $R_{k^-} \leftarrow F_{k-1}\, R_{k-1}\, F^*_{k-1} + \sigma\, Q^W\, \sigma^*$
- **correction** (calcul de la loi de $X_k | Y_{0:k}$)
  - $H_k \leftarrow \nabla h(\widehat{X}_{k^-})$
  - $K_k \leftarrow R_{k^-}\, H^*_k\, [H_k\, R_{k^-}\, H^*_k + Q^V]^{-1}$ gain
  - $\widehat{X}_k \leftarrow \widehat{X}_{k^-} + K_k\, [Y_k - h(\widehat{X}_{k^-})]$
  - $R_k \leftarrow [I - K_k\, H_h]\, R_{k^-}$

1.5 Cas linéaire continu/discret

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= f(X(t)) + \sigma\,\xi(t) && \text{(équation d'état)} \\ Y_k &= H\,X(t_k) + V_k && \text{(équation d'observation)} \end{aligned}$$

- $0 = t_1 < t_1 < t_2 \cdots$
- $X(t) \to \mathbb{R}^n$, $Y_k \to \mathbb{R}^d$
- bruit d'état: $\xi(t)$ bruit blanc gaussien centré de covariance Q_ξ
- bruit de mesure: $V_k \to \mathbb{R}^d$, $V_k \sim N(0, Q_V)$, $Q_V > 0$
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $H \in \mathbb{R}^{n \times d}$

1.5.1 Equation d'état

Si $t_k = k\,\delta$ alors:

$$X(t_{k+1}) = X(t_k) + \delta f(X(t_k)) + \sigma\,W_k$$

où

$$W_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \xi_s\,ds$$

est un bruit blanc gaussien discret de covariance $\delta\,Q_\xi$

1.5.2 Filtre de Kalman étendu continu/discret

initialisation

- $\widehat{X}(0) \leftarrow \bar{X}_0$
- $R(0) \leftarrow Q_0$

itérations $k = 1, 2, 3 \dots$

- **prédiction** calcul de la loi de $X(t)|Y_{0:k-1}$ pour $t_{k-1} < t < t_k$:

$$
\begin{aligned}
(d/dt)\widehat{X}^-(t) &= f(\widehat{X}^-(t)) \\
(d/dt)R^-(t) &= \nabla f(\widehat{X}^-(t))\, R^-(t) + R^-(t)\, \nabla f(\widehat{X}^-(t))^* + \sigma\, Q_\xi\, \sigma^* \\
&\text{avec } \widehat{X}^-(t_{k-1}) = \widehat{X}(t_{k-1})\,,\ R^-(t_{k-1}) = R(t_{k-1})
\end{aligned}
$$

- **correction** (calcul de la loi de $X(t_k)|Y_{0:k}$)

$$
\begin{aligned}
H_k &\leftarrow \nabla h(\widehat{X}^-(t_k)) \\
K_k &\leftarrow R^-(t_k)\, H_k^*\ [H_k\, R^-(t_k)\, H_k^* + Q^V]^{-1} \\
\widehat{X}(t_k) &\leftarrow \widehat{X}^-(t_k) + K_k\ [Y_k - h(\widehat{X}^-(t_k))] \\
R(t_k) &\leftarrow [I - K_k\, H_h]\ R^-(t_k)
\end{aligned}
$$