

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Références: [Benzoni-Gavage 2010](#) ou [Demailly 2006](#) ou [Agarwal and O'Regan 2008](#) pour un exposé complet; [Boularas et al 2009](#) pour un exposé vivant et accessible.

Définition, existence et unicité

Considérons une équation différentielle (https://fr.wikipedia.org/wiki/Équation_différentielle) du premier ordre:

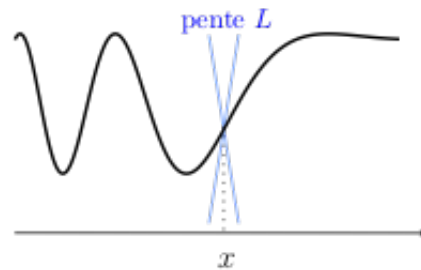
$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0 \quad (\text{EDO})$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^d$ et $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$. x_0 est la **condition initiale**. Lorsque f ne dépend pas de t , l'ED est dite **autonome**, lorsque f est linéaire ou affine en x , l'ED est dite **linéaire**.

L'existence et l'unicité d'une solution de (EDO) sont assurées par le théorème de Cauchy-Lipschitz (https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_Cauchy-Lipschitz). (EDO) est un problème local en temps, nous nous contentons ici de donner quelques éléments dans le cas plus simple de solutions globales en supposant que f est globalement lipschitzienne.

Hypothèse: La fonction f est dite *globalement lipschitzienne* en x uniformément en t , s'il existe une constante L telle que:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L |x - y|, \quad \forall t, x, y.$$



Une fonction lipschitzienne est continue mais pas nécessairement dérivable. Lorsque f admet une dérivée uniformément bornée par une constante C , i.e. $|\partial f(t, x)/\partial x| \leq C$ pour tout (t, x) , alors elle est lipschitzienne avec constante C .

On dira que (EDO) admet une **solution unique** si, étant données deux fonctions $x_i(t)$ vérifiant (EDO), $i = 1, 2$, alors $x_1(t) = x_2(t)$ pour tout $t \geq 0$.

Proposition (existence et unicité): Supposons que $(t, x) \rightarrow f(t, x)$ soit continue et globalement lipschitzienne en x uniformément en t , alors (EDO) admet une et une seule solution.

Lemme (inégalité de Gronwall (https://fr.wikipedia.org/wiki/Lemme_de_Grönwall)): Soit $I = [a, \infty]$ ou $[a, b]$ ou $[a, b[$ avec $a < b$. Soit α, β, u des fonctions réelles définies sur I . On suppose que β et u sont continues et que la partie négative de α est intégrable sur tout sous-intervalle borné et fermé de I . Si $\beta \geq 0$ et u vérifie:

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)u(s) ds, \quad \forall t \in I$$

alors

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\beta(s) \exp\left(\int_s^t \beta(r) dr\right) ds, \quad t \in I.$$

Si de plus α est non-décroissante alors:

$$u(t) \leq \alpha(t) \exp\left(\int_a^t \beta(s) ds\right), \quad t \in I.$$

L'**unicité** fait appel à l'inégalité de Gronwall. Elle permet de démontrer que si $x_i(\cdot)$, $i = 1, 2$, sont deux solutions de (EDO), alors le fait que f soit globalement lipschitzienne implique que:

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq e^{L|t|} |x_1(0) - x_2(0)|, \quad \forall t \geq 0.$$

Donc si $x_1(0) = x_2(0) = x_0$ alors $x_1(t) = x_2(t)$ pour tout t .

Il existe deux méthodes classiques pour exhiber des solutions du problème de Cauchy et donc montrer l'**existence** d'une solution. Nous verrons plus loin la méthode d'**approximation d'Euler**, une autre approche classique, puissante mais moins constructive, consiste à faire appel aux **approximations successives de Picard**. On se donne $x^{(0)}(t)$ continue, par exemple $x^{(0)}(t) = x_0$ pour tout t , et on pose:

$$x^{(n+1)} = \mathcal{I}x^{(n)}$$

où \mathcal{I} est un opérateur qui à une fonction $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ associe une $\mathcal{I}x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ définie par

$$[\mathcal{I}x](t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds, \quad t \geq 0.$$

La solution de (EDO) apparaît alors comme un point fixe (https://fr.wikipedia.org/wiki/Point_fixe) de l'opérateur \mathcal{I} , i.e. x telle que $x = \mathcal{I}x$. La démonstration de l'existence d'une solution de (EDO) consiste alors à démontrer l'existence d'un point fixe de l'opérateur \mathcal{I} en démontrant que cet opérateur est contractant. La preuve de ce résultat est donnée dans [Benzoni-Gavage 2010 p. 147].

Exemple de non-unicité:

On considère l'ED autonome:

$$\dot{x}(t) = 2\sqrt{x(t)}, \quad x(0) = 0.$$

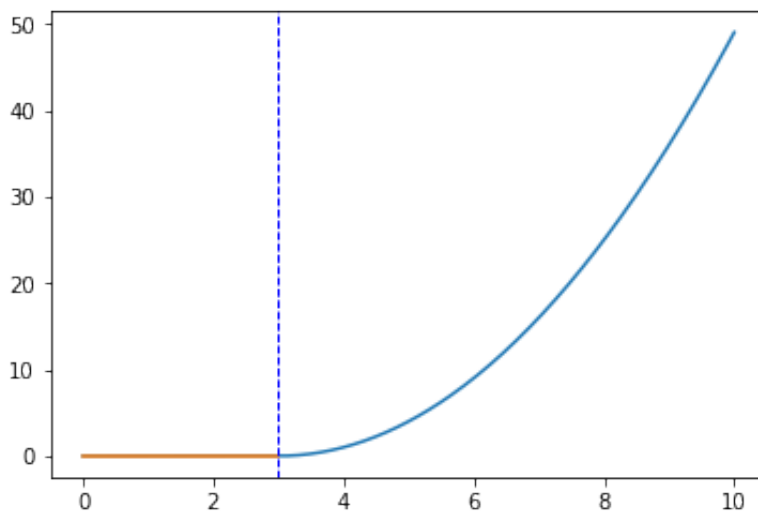
Il est clair que $x_1(t) = 0, t \geq 0$ est une solution de cette équation ainsi que $x_2(t) = t^2, t \geq 0$. Par une technique de *recollement* consistant à mettre bout à bout ces deux solutions, on peut construire une infinité de solutions. En effet:

$$x_1(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq a \\ (t-a)^2, & t \geq a \end{cases}$$

défini une solution différente pour tout $a \geq 0$. Ici $f(x) = 2\sqrt{x}$ n'est pas globalement uniformément lipschitzienne à cause de son comportement en O .

```
In [33]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
a = 3
t0, t1 = 0, 10
le_temps = np.linspace(t0,t1,300, endpoint=True)
courbe = (le_temps-a)**2
courbe[le_temps-a<0] = 0

plt.plot(le_temps, courbe)
plt.plot([t0,a],[0,0])
plt.axvline(a, color='b', linestyle='dashed', linewidth=1)
plt.show()
```



Exemple de non-existence de solution globale

Considérons un modèle de croissance de population - peu réaliste - où le taux de croissance per capita est linéaire en la taille de population:

$$\dot{x}(t) = \lambda x(t)^2, \quad x(0) = x_0$$

On peut vérifier que la solution de cette équation est:

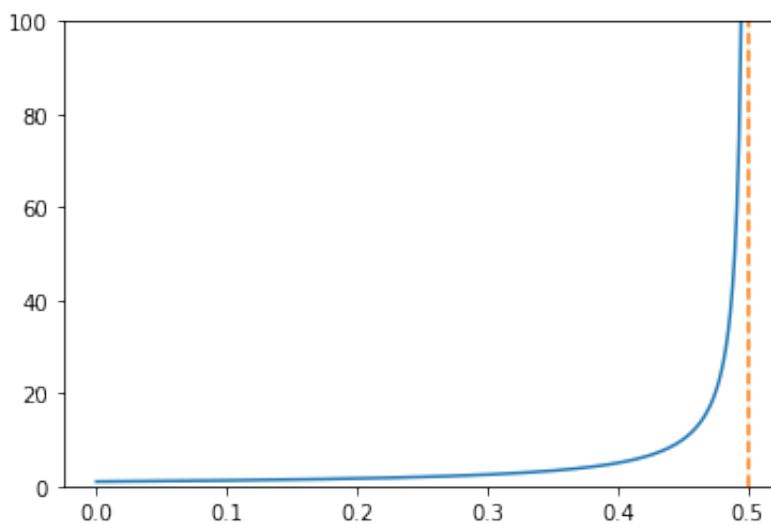
$$x_t = \frac{x_0}{1 - \lambda x_0 t}$$

qui est définie sur $t \in [0, \frac{1}{\lambda x_0}[$ et on a effectivement $x(t) \uparrow \infty$ lorsque $t \uparrow \frac{1}{\lambda x_0}$. Il n'est pas possible d'étendre la solution à tout $t > 0$ dans la mesure où $f(x) = \lambda x^2$ n'est pas à croissance au plus linéaire, donc pas globalement lipschitzienne, à cause de son comportement en $+\infty$.

```
In [9]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
lbd, x0 = 2, 1
t0, t1 = 0, 1/(lbd*x0)
le_temps = np.linspace(t0,t1,300, endpoint=False)

courbe = lambda t: x0/(1-lbd*x0*t)

plt.plot(le_temps, courbe(le_temps))
plt.plot([t1,t1],[0,100], linestyle='--')
plt.ylim([0,100])
plt.legend()
plt.show()
```



Équations différentielles linéaires

On considère le problème de Cauchy linéaire: \index{equation@équation différentielle!linéaire}

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0 \quad (\text{EDO L})$$

où l'on suppose que la matrice $A(t)$ et le vecteur $b(t)$ sont continus en t , on obtient alors l'existence et l'unicité d'une solution à ce problème puisque $f(t, x) = A(t)x + b(t)$ est globalement lipschitzienne en x uniformément en t .

On s'intéresse à l'ensemble des solutions de (EDO L) lorsque la condition initiale (c.i.) x_0 parcourt \mathbb{R}^d . On définit $x^*(t)$ comme étant la solution de (EDO L) de c.i. x^* . Pour tout x_0 donné on considère $x(t)$ la solution de (EDO L) avec c.i. x_0 et $y(t)$ la solution de l'ED homogène:

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) \quad (\text{EDO LH})$$

avec la c.i. $y(0) = x_0 - x^*$ alors il est clair que $x(t) = x^*(t) - y(t)$. Ainsi, pour construire l'ensemble des solutions de (EDO L), il suffit de se donner une solution particulière de (EDO L) et de la sommer avec l'ensemble des solutions de l'équation (EDO LH).

Enfin on vérifie aisément que l'ensemble des solutions de (EDO LH) forme un espace vectoriel, i.e. si $y^1(t)$ et $y^2(t)$ sont des solutions de (EDO LH) (avec c.i. respectives y_0^1 et y_0^2) alors $\alpha_1 y^1(t) + \alpha_2 y^2(t)$ est solution de (EDO LH) (avec c.i. $\alpha_1 y_0^1 + \alpha_2 y_0^2$) pour tout $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Nous allons voir qu'il est possible de décrire simplement cet espace vectoriel.

Résolvante

Les solutions de (EDO LH) forment un espace vectoriel dont on peut construire une base en considérant la *résolvante*, c'est à dire la famille de matrices $\Phi(t, s)$ définie par:

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, s) = A(t) \Phi(t, s), \quad t \geq 0, \quad \Phi(s, s) = I$$

pour tous $0 \leq s \leq t$; alors les colonnes de $\Phi(t, 0)$ forment une base de l'ensemble des solutions de (EDO LH) [Agarwal and O'Regan2008 p. 116].

On peut expliciter Φ en utilisant les approximations successives de Picard:

$$\begin{aligned}\Phi^{(0)}(t, s) &= I \\ \Phi^{(1)}(t, s) &= I + \int_s^t A(r) \Phi^{(0)}(t, s) dr = I + \int_s^t A(r) dr \\ \Phi^{(2)}(t, s) &= I + \int_s^t A(r) \Phi^{(1)}(t, s) dr = I + \int_s^t A(r) dr + \int_s^t \int_s^r A(r) A(r') dr' dr \\ &\vdots \\ \Phi^{(n+1)}(t, s) &= I + \int_s^t A(r) \Phi^{(n)}(t, s) dr\end{aligned}$$

Lorsque $n \rightarrow \infty$ d'après cette dernière équation et du fait que les approximations successives de Picard convergent, on a que $\Phi^{(n+1)}(t, s)$ converge vers $\Phi(t, s)$ et que:

$$\Phi(t, s) = I + \int_s^t A(r) dr + \int_s^t \int_s^r A(r) A(r') dr' dr + \dots$$

La résolvante vérifie les propriétés suivantes:

$$\Phi(t, s) = \Phi(t, r) \times \Phi(r, s)$$

et en particulier $\Phi(t, s) = \Phi(s, t)^{-1}$ et $\Phi(t, t) = I$.

Solution générale

Une fois la résolvante obtenue, afin de déterminer les solutions de (EDO L) on utilise la méthode de variation des constantes (https://fr.wikipedia.org/wiki/Méthode_de_variation_des_constants).

On cherche une fonction $y(t)$ telle que $x(t) = \Phi(t, 0) y(t)$ soit solution de (EDO L), c'est à dire telle que:

$$\dot{\Phi}(t, 0) y(t) + \Phi(t, 0) \dot{y}(t) = A(t) \Phi(t, 0) y(t) + b(t)$$

ce qui donne $\Phi(t, 0) \dot{y}(t) = b(t)$, donc:

$$\dot{y}(t) = \Phi(t, 0)^{-1} b(t) = \Phi(0, t) b(t)$$

et ainsi, la fonction $y(t)$ s'écrit:

$$y(t) = y(0) + \int_0^t \Phi(0, s) b(s) ds$$

Enfin $x(0) = \Phi(0, 0) y(0) = y(0)$, donc la solution de (EDO L) s'écrit

$$x(t) = \Phi(t, 0) x_0 + \Phi(t, 0) \int_0^t \Phi(0, s) b(s) ds$$

En conclusion:

Solution générale: On considère la résolvante $\Phi(t, s)$ solution de l'équation:

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, s) = A(t) \Phi(t, s), \quad t \geq 0, \quad \Phi(s, s) = I$$

alors pour toute condition initiale x_0 , la solution du problème de Cauchy (EDO L) est donnée par:

$$x(t) = \Phi(t, 0) x_0 + \int_0^t \Phi(t, s) b(s) ds.$$

Cas autonome $A(t) \equiv A$

Lorsque $A(t) \equiv A$:

$$\Phi(t, s) = I + (t - s)A + \frac{1}{2}(t - s)^2 A^2 + \frac{1}{3!}(t - s)^3 A^3 + \dots$$

qui est une série absolument convergente que l'on appelle exponentielle de la matrice $(t - s)A$:

$$\Phi(t, s) = \Phi(t - s) = e^{(t-s)A}$$

où:

Définition: Soit M une matrice carrée, on définit l'exponentielle e^M de la matrice M (https://fr.wikipedia.org/wiki/Exponentielle_d'une_matrice) par:

$$e^M := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} M^n$$

(avec les conventions usuelles $A^0 = I$ et $0! = 1$). On a les propriétés suivantes:

- Si M_1 et M_2 commutent, i.e. telles que $M_1 M_2 = M_2 M_1$, alors $e^{M_1} e^{M_2} = e^{M_2} e^{M_1} = e^{M_1 + M_2}$,
- e^M est inversible et son inverse est e^{-M} ,
- si C est inversible alors $e^{CMC^{-1}} = C e^M C^{-1}$.

Les solutions du problème de Cauchy autonome sont donc:

$$x(t) = e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} b(s) ds.$$

Comportement asymptotique

On considère le problème de Cauchy autonome suivant:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0 \quad (\text{EDO})$$

pour laquelle on suppose qu'il existe une solution globale. On peut par exemple supposé que f est globalement lipschitzienne.

Supposons que la solution $x(t)$ de (EDO) converge vers un point x^* de \mathbb{R}^d , alors nécessairement $x(t)$ va cesser d'évoluer au "bout d'un certain temps" de telle sorte que $\dot{x}(t) = 0$ et donc nécessairement $f(x^*) = 0$:

Un point $x^* \in \mathbb{R}^d$ tel que $f(x^*) = 0$ est appelé **point d'équilibre** de (EDO).

Dans un premier temps sans se poser la question du comportement asymptotique de la solution de l'EDO, on peut chercher à déterminer les points d'équilibre de l'EDO.

Dans un second temps, on peut chercher à caractériser la nature de ces points d'équilibre:

Un point d'équilibre x^* sera dit **stable** si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 : |x_0 - x^*| < \eta \Rightarrow |x(t) - x^*| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Si de plus:

$$|x(t) - x^*| \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow \infty$$

alors le point est dit **asymptotiquement stable**. Un point d'équilibre qui n'est pas stable est dit **instable**.

Il existe une méthode d'analyse de la stabilité des EDO assez générale dite de Lyapounov (https://fr.wikipedia.org/wiki/Stabilité_de_Liapounov), elle est puissante mais assez difficile à utiliser en pratique.

Cas linéaire

On considère le problème de Cauchy autonome linéaire suivant:

$$\dot{x}(t) = A x(t), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0$$

Le point 0 est un point d'équilibre de ce système. Notons que:

$$x(t) = e^{tA} x_0 = \left(I + tA + \frac{t^2}{2} A^2 + \frac{t^3}{3!} A^3 + \dots \right) x_0$$

maintenant supposons que x_0 soit tel qu'il existe un réel λ (voire un complexe, cf. infra) vérifiant $A x_0 = \lambda x_0$ alors $A^n x_0 = \lambda^n x_0$ et:

$$x(t) = x_0 + t \lambda x_0 + \frac{(t \lambda)^2}{2} x_0 + \frac{(t \lambda)^3}{3!} x_0 + \dots = e^{\lambda t} x_0$$

Donc lorsque $\lambda < 0$ (du moins sa partie réelle est strictement négative dans la cas complexe) alors $x(t)$ converge exponentiellement vite vers 0.

Les x_0 tels qu'il existe $A x_0 = \lambda x_0$ sont des vecteurs de \mathbb{R}^d qui ne sont pas modifiés par la matrice A (à un coefficient de proportionnalité près, éventuellement négatif), ils sont appelés **vecteurs propres** de la matrices A et les λ les **valeurs propres** de la matrice A .

Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice

Remarque: En mathématiques, ces concepts sont traditionnellement introduits dans le cadre des endomorphismes. Les endomorphismes sur \mathbb{R}^d sont simplement les applications linéaires de \mathbb{R}^d dans lui-même, mais ces applications se mettent toutes sous la forme $x \rightarrow Ax$ pour une certaine matrice carrée A de taille $d \times d$; on peut donc identifier ces endomorphismes aux matrices associées et donc introduire ces concepts directement sur les matrices. Toutefois la plupart des références en français sur le sujet refusent ce raccourci, nous proposons donc une référence en anglais [Jeffrey 2010](#).

Etant donnée une matrice réelle A de dimension $n \times n$, un scalaire $\lambda \neq 0$ sera appelé **valeur propre** (https://fr.wikipedia.org/wiki/Valeur_propre,_vecteur_propre_et_espace_propre) de A lorsqu'il existe $x \in \mathbb{R}^d$ non-nul tel que

$$Ax = \lambda x$$

le vecteur x est alors appelé **vecteur propre** de A associé à la valeur propre λ .

Il est possible de trouver une solution x non nulle à $Ax = \lambda x$ si et seulement si le **déterminant** de la matrice $A - \lambda I$ est nul (lorsque ce déterminant est non nul, alors le seul x vérifiant $(A - \lambda I)x = 0$ est $x = 0$). On définit le **spectre** de la matrice A par:

$$Sp(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} ; \det(A - \lambda I) = 0\}$$

notez que

$$p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I)$$

est un **polynôme dit caractéristique** de degré d , et les valeurs propres sont les racines de ce polynôme c'est à dire les solution de:

$$p_A(\lambda) = 0$$

appelée **équation caractéristique**. Le [théorème de d'Alembert-Gauss](#) (https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_fondamental_de_l'algèbre) assure que le polynôme caractéristique admet d racines (éventuellement complexes et non nécessairement distinctes).

Notez que de considérer la solution de (???) avec une condition initiale complexe ne pose aucune difficulté.

Le point 0 est un point d'équilibre de (???) et:

- 0 est asymptotiquement stable ssi $Re(\lambda) < 0$ pour tout $\lambda \in Sp(A)$;
- 0 est stable ssi pour tout $\lambda \in Sp(A)$:
 - $Re(\lambda) \leq 0$;
 - et lorsque $Re(\lambda) = 0$ alors la multiplicité géométrique de λ correspond à sa multiplicité algébrique (la multiplicité géométrique de λ est la dimension du noyau de $A - \lambda I$; la multiplicité algébrique de λ est la multiplicité comme racine du polynôme caractéristique).

Ce résultat s'appuie en fait sur la compréhension de la résolvante du système (???) qui est en effet donnée par [Agarwal and O'Regan 2008 p. 133]:

$$\Phi(t, 0) = [e^{\lambda_1 t} v_1, \dots, e^{\lambda_n t} v_n]$$

où λ_i sont les valeurs propres de A et v_i des vecteurs propres associés.

Exemple 1

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

alors

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$$

le polynôme caractéristique admet deux racines complexes $\lambda_1 = +i$ et $\lambda_2 = -i$. En fait 0 n'est pas stable, pour le comprendre il suffit de remarquer que:

$A^{4n+1} = A$, $A^{4n+2} = -I$, $A^{4n+3} = -A$, $A^{4n+4} = I$ pour tout n , donc:

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$x(t) = e^{tA} x(0) = \begin{pmatrix} \cos(t) x_1(0) + \sin(t) x_2(0) \\ -\sin(t) x_1(0) + \cos(t) x_2(0) \end{pmatrix}$$

et

$$|x(t)|^2 = x_1(t)^2 + x_2(t)^2 = [\cos(t) x_1(0) + \sin(t) x_2(0)]^2 + [-\sin(t) x_1(0) + \cos(t) x_2(0)]^2 = |x(0)|^2$$

donc les trajectoires de $x(t)$ décrivent des cercles centrés en 0 et de rayon égal à $|x(0)|^2$.

Cas non-linéaire

On considère le problème de Cauchy autonome non-linéaire suivant:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0 \quad (\text{EDO NL A})$$

et x^* un point d'équilibre. On suppose f différentiable et à dérivées continues.

On peut supposer que $f(0) = 0$ et donc que $x^* = 0$ en faisant le changement de variable $x \rightarrow x - x^*$ dans (EDO NL A). On se place donc dans le cas $f(0) = 0$ et on étudie les propriétés du point d'équilibre 0. On note $J_f(0)$ la matrice jacobienne de f au point d'équilibre 0.

Exemple: Les points d'équilibre de l'équation logistique.

Linéarisation

Une méthode classique consiste à étudier le système linéarisé en 0:

$$\dot{x}(t) = J_f(0) x(t), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0$$

où $J_f(x)$ est la matrice jacobienne de f en x :

$$J_f(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_d} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_d} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_d(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_d(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_d(x)}{\partial x_d} \end{pmatrix}$$

Alors:

- si pour tout $\lambda \in Sp(J_f(0))$ on a $\Re(\lambda) < 0$ alors 0 est asymptotiquement stable pour (EDO NL A);
- s'il existe $\lambda \in Sp(J_f(0))$ tel que $\Re(\lambda) > 0$ alors 0 est instable pour (EDO NL A).

Si toutes les valeurs propres ont des parties réelles nulles alors 0 est stable pour l'EDO linéarisée mais on ne peut rien dire de 0 pour l'EDO non linéaire de départ.

Approche de Lyapounov

On se place dans un voisinage \mathcal{V} de 0, une fonction $V : \mathcal{V} \mapsto \mathbb{R}$ continue et différentiable sur $\mathcal{V} \setminus \{0\}$ est appelée *fonction de Lyapounov* si:

- $V(0) = 0$ et $V(x) > 0$ pour tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$;
- $f(u) \nabla V(u) \leq 0$ pour tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$.

On a alors le résultat suivant: s'il existe une fonction de Lyapounov pour (EDO) alors le point d'équilibre 0 est stable.

Approximation numérique

Le module `integrate` de SciPy (<https://www.scipy.org>) propose deux outils pour intégrer numériquement des EDO (https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_methods_for_ordinary_differential_equations?oldid=550976985): `integrate.odeint` et `integrate.ode`.

- `integrate.odeint` est une fonction implémentant le solveur LSODA d'ODEPACK qui bascule automatiquement entre une méthode de prédiction-correction d'Adam Adams pour des problèmes non-raides à une méthode BDF pour les problèmes raides.
- `integrate.ode` est une classe offrant une interface orientée objet donnant accès à plusieurs solveurs.

`integrate.ode` est plus flexible mais `integrate.odeint` est nettement plus accessible. Nous nous limiterons ici à ce dernier solveur. La fonction `odeint` comprend 3 arguments obligatoires : une fonction définissant le membre de droit de l'EDO, i.e. la fonction f , un array donnant la condition initiale, est un array de valeurs de t où $x(t)$ doit être calculé. La fonction du membre de droite comprends 2 arguments obligatoires, un array x et un scalaire t , et des arguments optionnels.

Voir [Johansson 2015 p. 223].

Développement de Taylor

On considère une solution $x(t)$ de (EDO) définie pour $t \in [0, T]$ avec $t_0 = 0$. On se donne $\delta > 0$, on pose $t_k = k \delta$ et on considère le développement de Taylor:

$$x(t + \delta) = x(t) + \delta x'(t) + \frac{\delta^2}{2} x''(t) + \frac{\delta^3}{3!} x'''(t) + \dots$$

À l'ordre n , on a la formule:

$$x(t + \delta) = x(t) + \delta x'(t) + \frac{\delta^2}{2} x''(t) + \frac{\delta^3}{3!} x'''(t) + \dots + \frac{\delta^n}{n!} x^{(n)}(\tau)$$

pour un certain $\tau \in [t, t + \delta]$

Approximation d'Euler

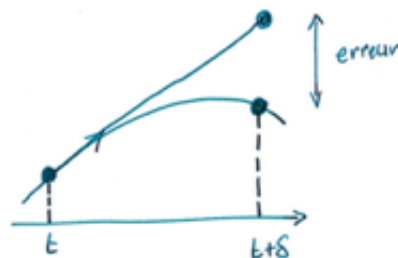
L'approximation d'Euler de $x(t)$ consiste à tronquer à l'ordre 1:

$$x(t + \delta) = x(t) + \delta x'(t) + \frac{\delta^2}{2} x''(\tau)$$

donc

$$x(t + \delta) = x(t) + \delta f(t, x(t)) + O(\delta^2)$$

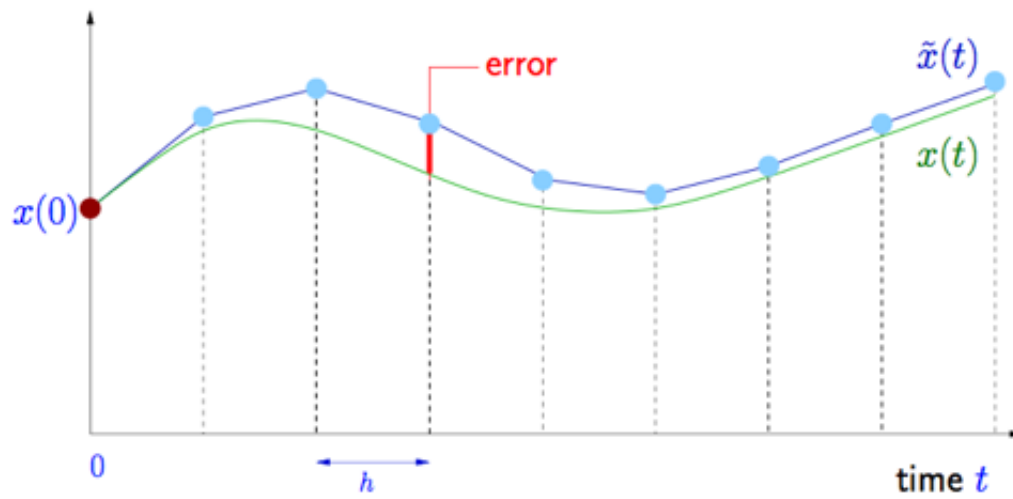
(ordre 1: erreur locale en $O(\delta^2)$, erreur globale en $O(\delta)$)



On obtient l'approximation:

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{x}_k + \delta f(t_k, \tilde{x}_k)$$

δ est le pas de l'approximation, on définit $\tilde{x}(t)$ comme étant l'interpolée linéaire des points \tilde{x}_k .



Approximation de Runge-Kutta

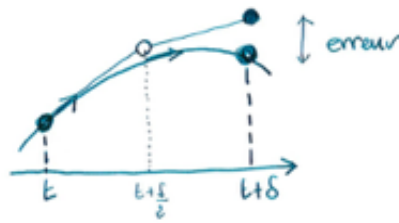
Cette méthode reprend la méthode d'Euler en utilisant une approximation de la dérivée au point milieu.
Le développement de Taylor à l'ordre 3 donne:

$$x(t + \delta) = x(t) + \delta x'(t) + \frac{\delta^2}{2} x''(t) + \frac{\delta^3}{3!} x'''(\tau)$$

mais

$$x'(t + \delta/2) = x'(t) + \frac{\delta}{2} x''(t) + O(\delta^2) \text{ donc } \frac{\delta^2}{2} x''(t) = \delta[x'(t + \delta/2) - x'(t)] + O(\delta^3) \text{ et}$$

$$\begin{aligned} x(t + \delta) &= x(t) + \delta x'(t) + \frac{\delta^2}{2} \frac{x'(t + \delta/2) - x'(t)}{\delta/2} + O(\delta^3) \\ &= x(t) + \delta x'(t + \delta/2) + O(\delta^3) \\ &= x(t) + \delta f(t + \delta/2, x(t + \delta/2)) + O(\delta^3) \\ &= x(t) + \delta f\left(t + \delta/2, x(t) + (\delta/2)f(t, x(t))\right) + O(\delta^3) \end{aligned}$$



il s'agit donc d'un schéma d'ordre 2:

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{x}_k + \delta f\left(t_k + \frac{\delta}{2}, \tilde{x}_k + \frac{\delta}{2} f(t_k, \tilde{x}_k)\right)$$

```

In [2]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def euler( f, x0, t ):
    n = len( t )
    x = np.array( [x0] * n )
    for i in range(n-1):
        x[i+1] = x[i] + ( t[i+1] - t[i] ) * f( x[i], t[i] )
    return x

def rk2a( f, x0, t ):
    n = len( t )
    x = np.array( [ x0 ] * n )
    for i in range( n - 1 ):
        h = t[i+1] - t[i]
        k1 = 0.5 * h * f( x[i], t[i] )
        x[i+1] = x[i] + h * f( x[i] + k1, t[i] + 0.5 * h )
    return x

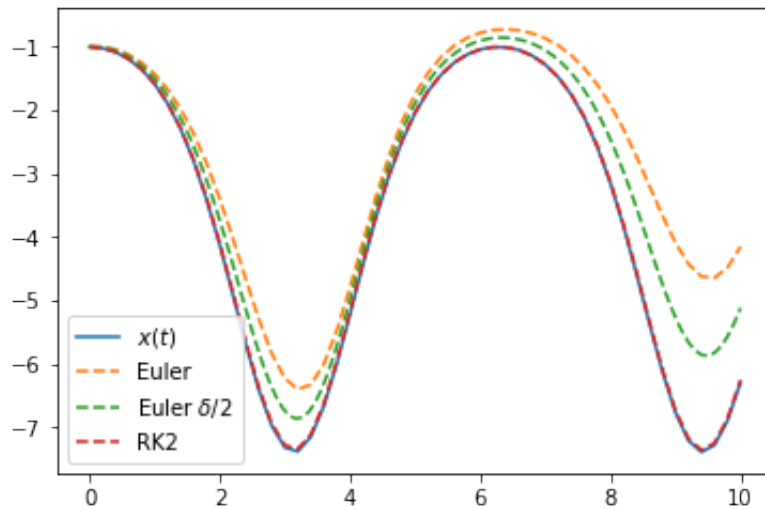
def f( x, t ):
    return x * np.sin( t )

x0, T = -1., 10.0
n = 51
t = np.linspace( 0, T, n )
t2 = np.linspace( 0, T, 2*n )

x = -np.exp( 1.0 - np.cos( t ) )
x_euler = euler( f, x0, t )
x_euler2 = euler( f, x0, t2 )
x_rk2 = rk2a( f, x0, t )

plt.plot(t,x,label=r'$x(t)$')
plt.plot(t,x_euler,label='Euler',linestyle='--')
plt.plot(t2,x_euler2,label=r'Euler $\Delta/2$',linestyle='--')
plt.plot(t,x_rk2,label='RK2',linestyle='--')
plt.legend()
plt.show()

```



Cas des EDO linéaires

Calculer la résolvante est une **très** mauvaise idée.

[Hairer et al 1993 p. 64]

References

[^](#ref-1) [^](#ref-5) Sylvie Benzoni-Gavage. 2010. *Calcul différentiel et équations différentielles*.

[^](#ref-2) Demailly, J.P.. 2006. *Analyse numérique et équations différentielles*.

[^](#ref-3) Driss Boularas and Daniel Fredon and Daniel Petit. 2009. *Mini Manuel de Mathématiques pour les sciences de la vie et de l'environnement*.

[^](#ref-4) [^](#ref-6) [^](#ref-8) R.P. Agarwal and D. O'Regan. 2008. *An introduction to ordinary differential equations*.

[^](#ref-7) Alan Jeffrey. 2010. *Matrix Operations for Engineers and Scientists: An Essential Guide in Linear Algebra*.

[^](#ref-9) Robert Johansson. 2015. *Numerical Python. A Practical Techniques Approach for Industry*.

[^](#ref-10) E. Hairer and S. P. Norsett and G. Wanner. 1993. *Solving Ordinary Differential Equations I : Nonstiff Problems*.