Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Лабораторная работа № 2

на тему

«Сравнительный анализ решений нелинейных САУ тремя методами»

Автор: Склярова Юлия Андреевна
Группа: 422

Москва
2024 - 2025 год

Исходная система № 8:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 1, \\ x^{\frac{2}{3}} - y = 0; \end{cases} \quad (y > 0) \;\Rightarrow\; \begin{cases} f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 1 = 0, \\ g(x,y) = x^{\frac{2}{3}} - y = 0; \end{cases}$$

Из второго уравнения из-за того, что x стоит под дробной степенью, получаем также, что $x > 0$.

Ссылка на desmos с графиками: https://www.desmos.com/Calculator/hbepxab3wt.

Эта программа не видит два уравнения как систему и рисует их независимо друг от друга, поэтому в силу условия на y и сделанного вывода для x на графике стоит рассматривать только первую четверть.
Сегмент локализации корня: $[0.4, 0.6] \times [0.6, 0.8]$
Эквивалентная система :

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{y^2}{2}} \equiv \varphi(x,y) \\ \\ y = x^{\frac{2}{3}} \equiv \psi(x,y) \end{cases}$$

Матрица Якоби для эквивалентной системы:

$$J_{\vec{\varphi}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-y}{\sqrt{2(1-y^2)}} \\ \\ \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$||J_{\vec{\varphi}}(\vec{x})|| = \max\left\{\left|\frac{-y}{\sqrt{2(1-y^2)}}\right|,\ \left|\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right|\right\} \ \leq\ q < 1,\ \max_{\vec{x}\in[\vec{a},\vec{b}]} ||J_{\vec{\varphi}}(\vec{x})|| \leq q$$

Матрица Якоби для исходной системы:

$$J_{\vec{f}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x & 2y \\ \\ \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} & -1 \end{pmatrix}$$

Получаем

$$||J_{\vec{f}}(\vec{x})|| = \max\left\{|4x| + |2y|,\ \left|\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right| + |-1|\right\}$$

Обозначим det - определитель матрицы $J_{\vec{f}}(\vec{x})$.

$$det = -4x - \frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}}y$$

Тогда

$$J_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x}) = \frac{1}{det}\begin{pmatrix} -1 & -2y \\ \\ -\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} & 4x \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ ||J_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x})|| = \max\left\{\left|\frac{-1}{det}\right| + \left|\frac{-2y}{det}\right|,\ \left|\frac{-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}{det}\right| + \left|\frac{4x}{det}\right|\right\}$$

Следовательно,

$$\mu \geq \max_{\vec{x}\in[\vec{a},\vec{b}]} ||J_{\vec{f}}(\vec{x})|| \cdot \max_{\vec{x}\in[\vec{a},\vec{b}]} ||J_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x})||$$

Метод	**Пара корней $\vec{\xi}_r^*$**		**Норма невязки**	**Начальный вектор**		**Число итераций $N+1$**	$\mathbf{q_r}$	$\boldsymbol{\mu}_\mathbf{r}$
	ξ_r^*	η_r^*	$\|\|\vec{f}(\vec{\xi}_r^*)\|\|$	x_0	y_0			
Простая итерация	0.532896	0.657302	0.000005	0.4	0.6	31	0.940510	3.468423
Метод Зейделя	0.532878	0.657282	0.000061			12		
Метод Ньютона	0.532897	0.657298	0.000000			4		