Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Лабораторная работа № 3

на тему

«Машинный ноль и машинное эпсилон в формулах разностных производных»

Автор: Склярова Юлия Андреевна
Группа: 422

Москва
2024 - 2025 год

№8

$s=3, r=1, (p,q)=(2,1)$. Проверка: $s+r=4=p+q+1$.

$$\begin{cases} u_{k+2}=u_k+u_k'\cdot 2h+u_k''\cdot 2h^2+u_k'''\cdot\frac{4h^3}{3}+u_k^{IV}(\theta_2)\cdot\frac{2h^4}{3} \\ u_{k+1}=u_k+u_k'h+u_k''\cdot\frac{h^2}{2}+u_k'''\cdot\frac{h^3}{6}+u_k^{IV}(\theta_+)\cdot\frac{h^4}{24} \\ u_k=u_k \\ u_{k-1}=u_k-u_k'h+u_k''\cdot\frac{h^2}{2}-u_k'''\cdot\frac{h^3}{6}+u_k^{IV}(\theta_+)\cdot\frac{h^4}{24} \end{cases}$$

Домножим u_{k+2} на C_2, u_{k+1} на C_1, u_k на C_0, u_{k-1} на C_{-1} $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_2+C_1+C_0+C_{-1}=0 \\ \\ 2C_2+C_1-C_{-1}=0 \\ \\ 2C_2+\frac{C_1}{2}+\frac{C_{-1}}{2}=0 \\ \\ \frac{4C_2}{3}+\frac{C_1}{6}-\frac{C_1}{6}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2=1 \\ C_1=-3 \\ C_0=3 \\ C_{-1}=-1 \end{cases}$$

Тогда получаем

$$\left|\frac{u_{k+2}-3u_{k+1}+3u_k-u_{k-1}}{h^3}-u_k'''\right| \le \left[\frac{2}{3}\left|u_k^{IV}(\theta_2)\right|+\frac{1}{8}\left|u_k^{IV}(\theta_+)\right|+\frac{1}{24}\left|u_k^{IV}(\theta_-)\right|\right]\cdot h \le \frac{5M_4}{6}h, \text{ где } M_4=\max_{x\in[a,b]}\left|u^{IV}(x)\right| \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow K_u=\frac{5M_4}{6}}$$

Теперь будем считать, что проекция третьей производной функции вычислена точно ($fl(u_i')=u_i'$), а проекция функции вычислена приближенно ($fl(u_i)=\widetilde{u}_i$).

<u>Опр:</u> **Машинное эпсилон $\varepsilon_{\text{маш}}$** - это наименьшее положительное число, которое при прибавлении к единице меняет результат: $\varepsilon_{\text{маш}}=\min\{\varepsilon>0 \; and \; 1.+\varepsilon>1\}$.

Рассмотрим произвольное $A>0$. Из определения $\Rightarrow A+A\varepsilon_{\text{маш}}>A$. Значит, $A\varepsilon_{\text{маш}}$ является наименьшим положительным числом, которое при суммировании с числом A изменяет его значение. Далее

$$\forall A>0: A(1+\rho_A)=\widetilde{A}\equiv A+(\widetilde{A}-A)=A(1+\frac{\widetilde{A}-A}{A})\Rightarrow\left|\frac{\widetilde{A}-A}{A}\right|=|\rho_A|<\varepsilon_{\text{маш}}$$

$$\left|\frac{\widetilde{u}_{k+2}-3\widetilde{u}_{k+1}+3\widetilde{u}_k-\widetilde{u}_{k-1}}{h^3}-u_k'''\right|=$$

$$=\left|\frac{\widetilde{u}_{k+2}-u_{k+2}-3\widetilde{u}_{k+1}+3u_{k+1}+3\widetilde{u}_k-3u_k-\widetilde{u}_{k-1}+u_{k-1}}{h^3}+\frac{u_{k+2}-3u_{k+1}+3u_k-u_{k-1}}{h^3}-u_k'''\right|\le$$

$$\le\left|\frac{\widetilde{u}_{k+2}-u_{k+2}}{h^3}\right|+3\left|\frac{\widetilde{u}_{k+1}-u_{k+1}}{h^3}\right|+3\left|\frac{\widetilde{u}_k-u_k}{h^3}\right|+\left|\frac{\widetilde{u}_{k-1}-u_{k-1}}{h^3}\right|+\frac{5M_4}{6}h=$$

$$=\frac{|u_{k+2}|}{h^3}\left|\frac{\widetilde{u}_{k+2}-u_{k+2}}{u_{k+2}}\right|+3\frac{|u_{k+1}|}{h^3}\left|\frac{\widetilde{u}_{k+1}-u_{k+1}}{u_{k+1}}\right|+3\frac{|u_k|}{h^3}\left|\frac{\widetilde{u}_k-u_k}{u_k}\right|+\frac{|u_{k-1}|}{h^3}\left|\frac{\widetilde{u}_{k-1}-u_{k-1}}{u_{k-1}}\right|+\frac{5M_4}{6}h\le$$

$$\le\frac{8M_0}{h^3}\varepsilon_{\text{маш}}+\frac{5M_4}{6}h=\varepsilon(h)$$

Найдем h_{min}:

$$\varepsilon'(h) = -\frac{24M_0}{h^4}\varepsilon_{\text{маш}} + \frac{5M_4}{6} = 0 \;\Rightarrow\; h^4 = \frac{144M_0}{5M_4}\varepsilon_{\text{маш}} \;\Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow\; h_{min} \sim \varepsilon_{\text{маш}}^{\frac{1}{4}}}$$

Заметим, что условие равенства 0 производной не является достаточным для нахождения точки минимума. Также необходимо, чтобы при переходе через эту точку производная меняла знак с минуса на плюс. Действительно, когда $h < h_{min}:\ -\frac{24M_0}{h^4}\varepsilon_{\text{маш}} + \frac{5M_4}{6} < 0$, так как знаменатель первой дроби меньше, значит, сама дробь больше. И наоборот, когда $h > h_{min}:\ -\frac{24M_0}{h^4}\varepsilon_{\text{маш}} + \frac{5M_4}{6} > 0$, так как знаменатель первой дроби больше, значит, сама дробь меньше.

№	S	(p,q)	r	**Теоретический** $h_{\min} \sim (\varepsilon_{\text{маш}})^{\frac{1}{k}}$	**Расчетное значение** $h_{\mathbf{min}}$		
					$\sin(x)$	$10^5\sin(x)$	$\mathrm{tg}(x)$
8	3	(2,1)	1	$h_{min} \sim \varepsilon_{\text{маш}}^{\frac{1}{4}}$	1.220703e-04	1.220703e-04	1.220703e-06

Таблица 1: Таблица данных