Equation d'advection linéaire 1D

On s'intéresse à l'équation d'advection linéaire 1D :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + a\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0, \quad \forall (x,t) \in]0,L[\times]0,T[\\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad \forall t \in]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x), \quad \forall x \in]0,L[\end{cases} \tag{1}$$

avec $a > 0$.

Pour cela, on considère une discrétisation régulière de $[0,L] \times [0,T]$, de pas d'espace h et de pas de temps Δt, tous les deux supposés constants. On pose $\lambda = \frac{a\Delta t}{h}$ le nombre de Courant.

On se propose d'implanter différents schémas numériques pour cette équation et d'illustrer leurs propriétés numériques.

1 Schémas pour l'advection linéaire 1D

1.1 Schéma explicite décentré en espace

Le schéma s'écrit :

$$\forall n \geq 0, \forall j \in \{1,\cdots,N\}, \quad u_j^{n+1} = (1-\lambda)u_j^n + \lambda u_{j-1}^n \tag{2}$$

Il est consistant à l'ordre 1 en temps et en espace pour la norme $\|.\|_h$, et est stable au sens de Von Neumann sous la condition CFL[1] $|\lambda| \leq 1$.

1.2 Schéma implicite centré en espace

Le schéma s'écrit :

$$\forall n \geq 1, \forall j \in \{1,\cdots,N\}, \quad u_j^n + \frac{\lambda}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) = u_j^{n-1} \tag{3}$$

Il est consistant à l'ordre 1 en temps et 2 en espace pour la norme $\|.\|_h$, et est inconditionnellement stable au sens de Von Neumann.

1. Pour Courant-Friedrichs-Lewy

1.3 Schéma de Lax-Wendroff

Le schéma s'écrit :

$$\forall n \geq 0, \forall j \in \{1, \cdots, N\}, \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\lambda^2}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n). \tag{4}$$

Il est consistant à l'ordre 2 en temps et en espace pour la norme $\|.\|_h$, et est stable au sens de Von Neumann sous la condition CFL $|\lambda| \leq 1$.

2 Travail à réaliser

a) Implanter les trois schémas proposés dans le script `advection.m`.

b) On se donne une condition initiale de la forme d'une densité gaussienne

$$u_0(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \forall x \in]0, L[.$$

Pour chacun des schémas, executer le script `advection.m` pour des valeurs de h et Δt telles que $\lambda \leq 1$ et $\lambda > 1$. Que constatez-vous ?

c) On se donne une condition initiale de la forme d'une fonction porte

$$u_0(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \gamma & \forall x \in [\alpha, \beta] \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right. , \quad \forall x \in]0, L[.$$

Pour chacun des schémas, executer le script `advection.m` pour des valeurs de h et Δt telles que $\lambda \leq 1$ et $\lambda > 1$. Que constatez-vous ?