I & A
3.1

Les Espaces $\mathcal{L}^p$, L^p

I / Définition et structure

$(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré $1 \leq p < +\infty$ $p \in \mathbb{R}$

Définition : On appelle $\mathcal{L}^p$ l'ensemble des fonctions mesurables u telles que $\int |u|^p d\mu < +\infty$.

Propriété : $\mathcal{L}^p$ est un espace vectoriel.

Démo : Si $u \in \mathcal{L}^p$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$|\lambda u|^p = |\lambda|^p |u|^p \quad \text{donc} \int |\lambda u|^p = |\lambda|^p \int |u|^p < +\infty.$$

Si $u_1, u_2 \in \mathcal{L}^p$ $\int |u_1 + u_2|^p \leq \int (2 \max(u_1, u_2))^p = \int 2^p (\max(|u_1|, |u_2|))^p$

$$\leq 2^p \int |u_1|^p + |u_2|^p < +\infty.$$

Remarque : ① Si f est integrable $\int |f| d\mu = 0 \iff f = 0$ μpp

$\Leftarrow$ si $f = 0$ μpp $\int f d\mu = \int 0 d\mu = 0$.

$$\Rightarrow \{x, |f(x)| \neq 0\} \subset \bigcup^{n} \underbrace{\{x, |f(x)| \geq \tfrac{1}{n}\}}_{A_n,\ (A_n)\uparrow \text{ au sens de l'inclusion}}.$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \mu(A_n)$

$$\frac{1}{n} \mathbb{1}_{\underbrace{\{x, |f(x)| \geq \frac{1}{n}\}}_{A_n}} \leq |f|$$

d'où $0 \leq \mu(A_n) \leq n \underbrace{\int |f| d\mu}_{0}$.

② l'application $u \to \left(\int |u|^p d\mu\right)^{1/p}$ ne peut pas être une norme sur $\mathcal{L}^p$

car $\left(\int |u|^p d\mu\right)^{1/p} = 0 \iff u = 0$ μpp.

③. La relation $u \mathcal{R} v \iff u = v$ μpp est une relation d'eq sur $\mathcal{L}^p$

Définition : On appelle L^p l'ensemble des classes d'équivalences de $\mathcal{L}^p$ pour la relation "μpp égal"

Propriété : L^p est un espace vectoriel pour les opérations suivantes

$\underset{L^p}{\hat{u}} = cl(u) + \underset{L^p}{\hat{v}} = cl(v) \equiv cl(u+v)$. $\quad \lambda . \hat{u} = cl(\lambda u)$ où $\hat{u} = cl(u)$.

Démo : On vérifie que la définition de $+$ ne dépend pas des rep choisies

$\hat{u} = cl(u) = cl(u_1)$ avec $u \mathcal{R} u_1$ $\quad$ de ⊕ $u \mathcal{R} u_1 \Rightarrow u = u_1$ μpp $\quad$ d'où $u + v = u_1 + v_1$ μpp
$\hat{v} = cl(v) = cl(v_1)$ avec $v \mathcal{R} v_1$. $\quad$ $v \mathcal{R} v_1 \Rightarrow v = v_1$ μpp. $\quad$ $cl(u+v) = cl(u_1 + v_1)$

$$\varphi(\lambda(u+v)) = \varphi(\lambda u) + \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(u) + \lambda\varphi(v).$$

Conséquence : si $\hat{u} \in L^p$, on peut définir $\|\hat{u}\|_p = \left(\int |u|^p d\mu\right)^{1/p}$ $\hat{u} = \varphi(u)$

alors $\|\hat{u}\|_p = 0 \iff \hat{u} = \varphi(0)$ $\{u, \varphi = 0 \ \mu pp\}$.

Propriété : Inégalité de Young :

Soit $p, q \geq 1$ tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$\forall (a,b) \geq 0 \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Démo : $ab = e^{\ln(ab)} = e^{\frac{1}{p}p\ln a + \frac{1}{q}q\ln b}$

$\underset{\text{exp convexe}}{\leq} \frac{1}{p}e^{p\ln a} + \frac{1}{q}e^{p\ln b} = \frac{1}{p}a^p + \frac{b^q}{q}$.

Inégalité de Hölder : Si $p, q \geq 0$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $u \in L^p$, $v \in L^q$ alors uv est intégrable et

$$\int |uv| d\mu \leq \left(\int |u|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int |v|^q d\mu\right)^{1/q}.$$

Démo : Si $u = 0 \ \mu pp$ ou $v = 0 \ \mu pp$ l'inégalité est vraie.

Sinon on a d'après Young $|uv| \leq \frac{|u|^p}{p} + \frac{|v|^q}{q}$.

Soit $u_1 = \frac{u}{\left(\int |u|^p d\mu\right)^{1/p}}$ et $v_1 = \frac{v}{\left(\int |v|^q d\mu\right)^{1/q}}$

Alors $\int |u_1 v_1| \leq \int \frac{|u_1|^p}{p} + \frac{|v_1|^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

d'où $\int |uv| d\mu \leq \left(\int \frac{|u_1|^p}{p} d\mu\right)^{1/p} \times \left(\int \frac{|v|^q}{q} d\mu\right)$.

Proposition : Inégalité de Minkowski :

Soient $u, v \in L^p$ alors. $p \in \mathbb{R}^{+*}$

$$\left(\int |u+v|^p d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int |u|^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int |v|^p d\mu\right)^{1/p}.$$

Démo : $\int |u+v|^p d\mu \leq \int (|u| + |v|) |u+v|^{p-1} d\mu = \int |u| |u+v|^{p-1} d\mu + \int |v| |u+v|^{p-1} d\mu$

Soit q tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow p - 1 = \frac{p}{q}$

$\int |u+v|^{(p-1)q} d\mu = \int |u+v|^p d\mu < +\infty$ car $u, v \in L^p$ donc $|u+v|^{p-1} \in L^q$.

D'après Hölder $\int |u| |u+v|^{p-1} d\mu \leq \left(\int |u|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int |u+v|^p d\mu\right)^{1-1/p}$

d'où $\int |u+v|^p d\mu \leq \left[\left(\int |u|^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int |v|^p d\mu\right)^{1/p}\right] \left(\int |u+v|^p d\mu\right)^{1-\frac{1}{p}}$