Chapitre 1

Introduction

Le traitement numérique du signal désigne l'ensemble des opérations effectuées sur un signal à traiter, représenté par un nombre fini de valeurs, pour fournir un autre nombre fini de valeurs représentant le signal traité. Travailler avec des signaux et des traitements numériques présente un certain nombre d'avantages. Les principaux étant :

— Une plus grande robustesse vis à vis du bruit (dans le cadre des transmissions).

— Une meilleure stabilité et reproductibilité des équipements. Il est, en effet, possible, en numérique, de construire des systèmes identiques, comme il est possible d'anticiper les dérives temporelles liées aux conditions extérieures (température, pression...). Les marges à prendre en compte au moment de la conception des équipements sont donc réduites.

— La possibilité de définir des fonctions nouvelles, notament des fonctions évoluant dans le temps tel que, par exemple, le filtrage adaptatif, mais également des fonctions de compression, de codage correcteur d'erreurs...

Le nombre fini de valeurs représentant le signal numérique à traiter peut être issu d'un processus numérique (on dit aussi discret) ou provenir d'un signal analogique (représentant une grandeur physique qui évolue dans le temps) qui a été numérisé (on dit aussi discrétisé). Pour numériser un signal analogique (défini à tout instant par des valeurs rélles) deux opérations sont nécessaires : une opération d'échantillonnage (discrétisation dans le domaine temporel) et une opération de quantification (discrétisation dans le domaine des amplitudes).
Nous allons considérer, dans la suite, des signaux déterministes et regarder plus en détail les opérations d'échantillonnage et de quantification. Les résultats obtenus restent valables pour des signaux aléatoires. Seul le formalisme utilisé pour les démonstations changerait en faisant appel aux équations normales.

1.1 Numérisation du signal : échantillonnage

1.1.1 Principe, impact

Nous considérons ici un échantillonnage idéal périodique et un signal à échantillonner, $x(t)$, déterministe. Si nous notons T_e la période d'échantillonnage, le signal $x(t)$ échantillonné de manière périodique à T_e est constitué d'une succession d'élements prélevés tous les T_e : $\{x(kT_e)\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. La figure 1.1 présente un exemple d'échantillonnage d'une fonction sinusoïdale.

Afin d'étudier l'effet de cet échantillonnage temporel, nous allons associer à $\{x(kT_e)\}\,,\ k \in \mathbb{Z}$, le modèle à temps continu suivant :

$$x_e(t) = x(t)\, Ш_{T_e}(t),$$

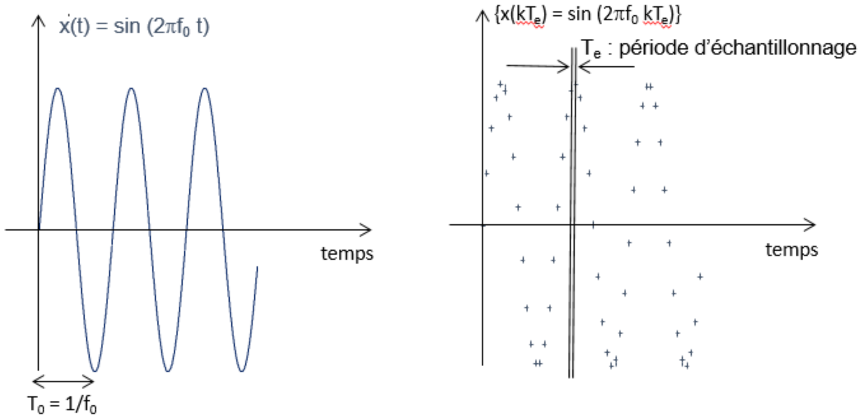

FIGURE 1.1 – Exemple de sinusoïde échantillonnée

où $Ш_{T_e}(t)$ représente le peigne de Dirac de largeur T_e. Si $X(f)$ est la Transformée de Fourier de $x(t)$ alors la transformée de Fourier de $x_e(t)$ est donnée par :

$$X_e(f) = \frac{1}{T_e} X(f) * \delta(f - kF_e) = F_e \sum_n X(f - kF_e) \tag{1.1}$$

où $F_e = \frac{1}{T_e}$ représente la fréquence d'échantillonnage (nombre d'échantillons prélevés par unité de temps). La transformée de Fourier du signal $x(t)$ est donc périodisée par l'opération d'échantillonnage. Afin de conserver la même information dans le signal échantillonné et dans le signal à temps continu, F_e doit être choisie de manière à respecter la condition suivante :

$$F_e > 2F_{max}, \tag{1.2}$$

si F_{max} représente la fréquence maximale de $X(f)$. Cette condition s'appelle la condition de Shannon. Claude Shannon est un ingénieur en génie électrique et un mathématicien né en 1916 aux Etats Unis. Il est un des pères de la théorie de lŠinformation. Il a montré en 1949 que tout signal à temps continu dont le spectre est limité en bande pouvait être représenté, sans perte d'information, par une série d'échantillons du signal d'origine, à condition de correctement choisir la fréquence à laquelle on prélève ces échantillons.

1.1.2 Restitution par filtrage

— Si la condition de Shannon est respectée, il est alors possible de reconstituer le signal $x(t)$, à partir de la suite des échantillons prélevés tous les T_e, en utilisant un filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_c \in [F_{max}\ F_e - F_{max}]$. En notant $y(t)$ le signal reconstitué et $Y(f)$ sa transformée de Fourier, nous avons :

$$Y(f) = H_{PB}(f) X_e(f)$$

et donc :

$$y(t) = h_{PB}(t) * x_e(t) = h_{PB}(t) * \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(kT_e)\delta(t - kT_e) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(kT_e) h_{PB}(t - kT_e)$$

La reconstitution par filtrage est donc équivalente à une interpolation. Le signal est reconstruit en sommant les décalages, tous les T_e, de la fonction d'interpolation $h_{PB}(t)$ pondérée par les échantillons du signal.

Lorsque $F_e = 2F_{max}$ (limite de Shannon), un seul filtre passe-bas est possible : c'est un filtre passe-bas idéal de réponse en fréquence $H_{PB}(f) = \Pi_{F_e}(f)$. Sa réponse impulsionnelle est donc $h_{PB}(t) = F_e sinc\left(\pi F_e t\right)$ et :

$$y(t) = F_e \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(kT_e) sinc\left(\pi F_e (t - kT_e)\right)$$

Cette expression est appelée formule de reconstitution de Shannon. Elle permet de voir l'échantillonnage idéal d'une autre manière : comme étant la décomposition du signal sur la base orthogonale des fonctions $sinc\left(\pi F_e (t - kT_e)\right),\ k \in \mathbb{Z}$.

— Si la condition de Shannon n'est pas respectée, il n'est alors plus possible de reconstituer le signal $x(t)$, à partir de la suite des échantillons prélevés tous les T_e, car les périodisations de $X(f)$ tous les F_e vont venir se superposer à $X(f)$. On parle de repliement ou d'aliasing (voir exercice **??**).

1.1.3 Remarques

— Lorsque le signal $x(t)$ a un spectre de type passe-bande, il est possible de ne pas respecter la condition de Shannon tout en étant capable de reconstituer le signal de départ. La condition est alors que, par un choix astucieux de F_e, les repliements puissent se faire dans les trous du spectre de départ (voir exercice **??**).

— L'échantillonnage présenté plus haut est un échantillonnage idéal. En pratique, il est impossible de prélever un échantillon de signal toutes les T_e secondes. On pourra, par exemple,

  — Utiliser un filtre, mais qui ne sera pas un filtre idéal. Il est alors nécessaire de surcéhantilloner par rapport à la limite de Shannon.

  — Procéder par extrapolation : $x(kT_e + \tau) = x(kT_e)$ pour $0 \leq \tau \leq T_e$ (bloqueur d'ordre 0) ou $x(kT_e + \tau) = x(kT_e) + \frac{\tau}{T_e}\left(x(kT_e) - x((k-1)T_e)\right)$ pour $0 \leq \tau \leq T_e$ (bloqueur d'ordre 1 ou extrapolateur linéaire)

  — Procéder par interpolation : par exemple $x(kT_e+\tau) = x(kT_e) + \frac{\tau}{T_e}\left(x((k+1)T_e) - x(kT_e)\right)$, $0 \leq \tau \leq T_e$, pour un interpolateur d'ordre 1 (causal à un retard près)...

  Les exercices **??** et **??** étudient deux méthodes "pratiques" d'échantillonnage.

— Lorsque le signal $x(t)$ ne présente pas de fréquence maximale F_{max} mais que son spectre décroit quand la fréquence augmente, il est alors possible de réaliser une opération d'échantillonnage avec une réversibilité acceptable. On se définit alors une fréquence maximale, correspondant à l'atténuation minimale souhaitée par rapport à la valeur maximale du spectre, on positionne un filtre dit filtre anti-repliement, qui va couper le spectre au delà de la fréquence maximale choisie, puis on échantillonne (voir exercice **??**).

— On définit en numérique des fréquences normalisées : $\widetilde{f} = \frac{f}{F_e}$ qui sont donc sans dimension et qui permettent de s'affranchir de la connaissance de la valeur de F_e dans les traitements à réaliser sur le signal.

1.2 Numérisation du signal : Quantification

1.2.1 Quantification : principe, impact

Un signal quantifié est un signal dont les amplitudes ne pourront prendre qu'un nombre fini de valeurs. Chaque valeur du signal sera approchée par un multiple entier d'une quantité élémentaire appelée pas de quantification. Le nombre de valeurs possibles, pour l'amplitude du signal après quantification, va être donné par le nombre de bits de quantification utilisés : avec nb bits on pourra coder 2^{nb} niveaux sur la dynamique D du signal. Dans le cas d'une quantification uniforme (pas de quantification q constant sur toute la dynamique du signal), le pas de quantification est donné par : $q = \frac{D}{2^{nb}}$. La figure 1.2 présente un exemple de quantification uniforme d'une fonction sinusoïdale.

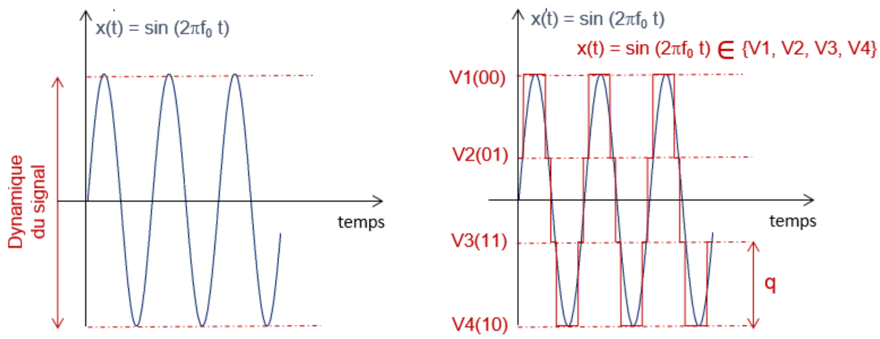

FIGURE 1.2 – Exemple de sinusoïde quantifiée.

Plusieurs types de quantification existent. On peut, par exemple, affecter tous les échantillons de signal appartenant à un niveau donné à la valeur min de ce niveau (quantification par troncature : on approche par nq toutes les valeurs de signal comprises entre nq et $(n+1)q$) ou bien affecter à la valeur nq toutes les valeurs de signal comprises entre $\left(n-\frac{1}{2}\right)q$ et $\left(n+\frac{1}{2}\right)q$ (quantification par arrondi). Dans tous les cas, l'opération de quantification est une opération non linéaire irréversible. Cependant, si elle est effectuée dans de bonnes conditions (pas d'écrétage du signal, pas de quantification suffisament fin) elle est équivalente à l'ajout d'un bruit, $n_Q(t)$, sur le signal non quantifié de départ $x(t)$ pour donner le signal quantifié $x_Q(t)$ (voir figure 1.3 pour un exemple) :

$$x_Q(t) = x(t) + n_Q(t), \tag{1.3}$$

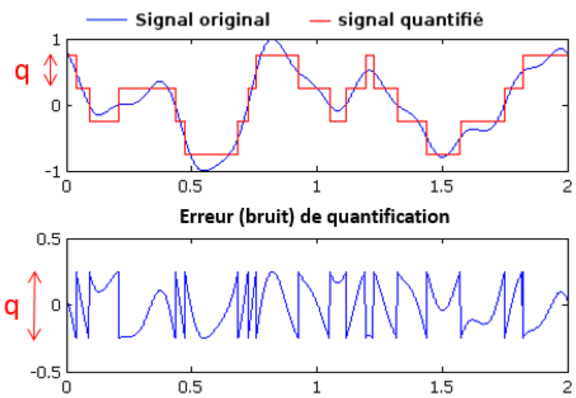

FIGURE 1.3 – Erreur, ou bruit, de quantification.

Ce bruit peut être modélisé comme un signal aléatoire de moyenne nulle, suivant une loi uniforme sur $\left[-\frac{q}{2},\ \frac{q}{2}\right]$ et le rapport signal à bruit de quantification s'écrit :

$$SNR_Q(dB) = 10\log_{10}\left(\frac{P_x}{P_{n_Q}}\right)$$

où

$$P_{n_Q} = E\left[n_Q^2\right] = \int_{\mathbb{R}} n_Q^2 p_{n_Q} dn_Q = \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} n_Q^2 \times \frac{1}{q} dn_Q = \frac{q^2}{12}$$

ce qui conduit à

$$SNR_Q(dB) = 6\ nb + constante,$$

où la constante dépend du signal considéré (voir exercice **??**).
A l'heure actuelle, du fait du nombre de bits de quantification disponibles sur les processeurs, cette opération s'avère alors quasi transparente.

1.2.2 Remarque

Afin de diminuer le nombre de bits nécessaires pour quantifier un signal, il faudrait pouvoir adapter le pas de quantification à l'amplitude du signal d'entrée. On a alors une quantification non uniforme. En pratique cette opération est réalisée en utilisant une compression avant quantification uniforme, de manière à amplifier les faibles amplitudes et à minimiser l'effet des fortes amplitudes. Deux lois de compression sont normalisées et utilisées : la loi A et la loi μ. Ce sont deux approximations de la loi logarithmique utilisée pour les signaux audio dans les applications traitant la voix humaine. L'échantillon de signal, y, en sortie de la compression est donné, en fonction de l'échantillon du signal en entrée x, par :

— Loi A :

$$\begin{aligned} y &= sgn(x)\frac{A\,|x|}{1+\ln(A)} \quad 0 \le |x| \le \frac{1}{A} \\ &= sgn(x)\frac{1+\ln(A\,|x|)}{1+\ln(A)} \quad \frac{1}{A} \le |x| \le 1 \end{aligned}$$

La loi A est utilisée principalement en Europe avec un paramètre de compression de 87,6. Elle permet, en téléphonie par exemple, d'utiliser 8 bits de quantification au lieu des 12 qui seraient nécessaires avec un quantifieur uniforme étant donnée la dynamique du signal à quantifier (figure 1.4).

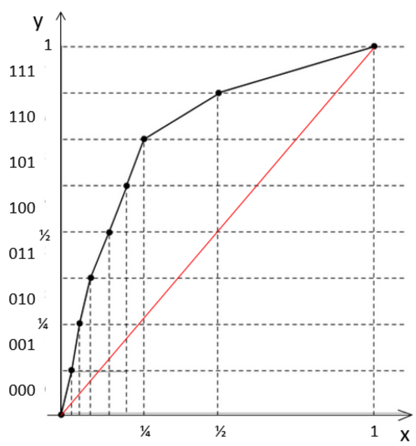

FIGURE 1.4 – Caractéristique de compression à 13 segments (loi A)

— Loi μ : $y = sgn(x)\frac{\ln(1+\mu|x|)}{\ln(1+\mu)}$, $-1 \leq x \leq 1$, utilisée principalement aux États-Unis et au Japon avec $\mu = 255$.

1.3 Numérisation du signal : exemples sur une image

La figure 1.5 présente une image de 512×512 pixels, codée sur $nb = 8$ bits et sa version sous échantillonnée d'un facteur 4 (128×128 pixels). Cette image (Barbara) est très utilisée en traitement d'images. Elle permet ici de voir apparaitre le phénomène de Moiré : on voit apparaitre sur l'image sous échantillonnée des structures différentes de celles contenues dans l'image d'origine.

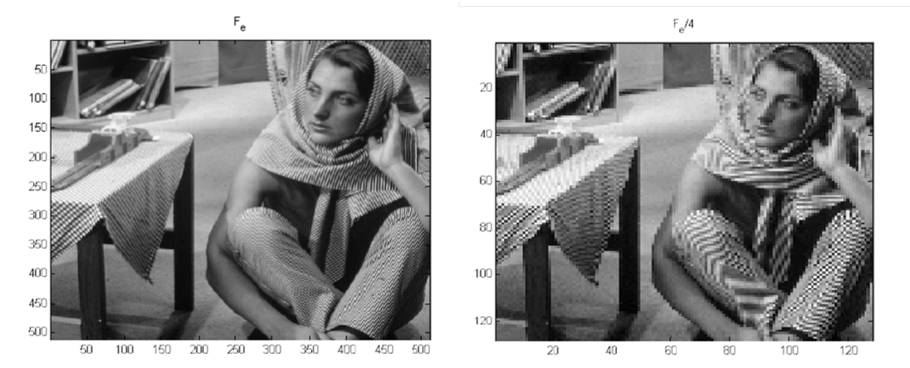

FIGURE 1.5 – Image de départ (quantifiée sur 8 bits, 512×512 pixels), Image sous échantillonnée d'un facteur 4

La figure 1.6 présente Barbara codée sur $nb = 4$ bits et sur $nb = 2$ bits. Dans le dernier cas, par exemple, on ne voit alors plus que $2^{nb} = 2^2 = 4$ niveaux de gris (au lieu de $2^8 = 256$ allant du noir au blanc sur l'image de départ).

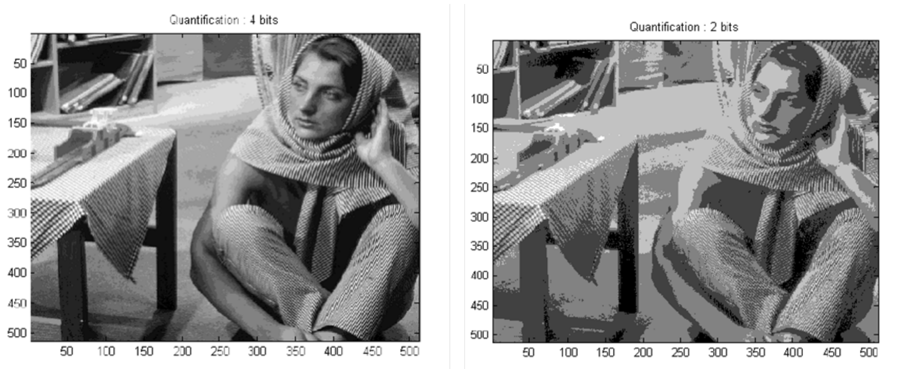

FIGURE 1.6 – Image quantifiée sur $nb = 4$ bits, Image quantifiée sur $nb = 2$ bits

1.4 Outils de traitement du signal à numériser

Un certain nombre d'outils de traitement du signal sont définis pour des signaux analogiques (signaux définis à chaque instant par des valeurs réelles) :

— La transformée de Fourier et la densité spectrale de puissance, permettant de visualiser la représentation fréquentielle des signaux pour en extraire de l'information (exemples : bande occupée par le signal en vue d'une transmission, détection de défauts apparaissant comme des composantes fréquentielles particulières).

— Les fonctions d'auto et d'inter corrélation, permettant d'accéder à la densité spectrale de puissance du signal, mais également utiles pour d'autres fonctions (exemple : extraction d'un signal dans du bruit).
— Les filtres, permettant de construire et de modifier des signaux (exemples : modulation, réduction du bruit, suppression de certaines composantes fréquentielles).

Il va être nécessaire de réaliser un certain nombre d'approximations, d'estimations pour passer des outils précédents, défnis de manière théorique sur des signaux analogiques, aux outils que l'on va être capable d'implanter en numérique. L'objectif de ce cours de traitement numérique du signal est de présenter, d'expliquer ces modifications et leurs impacts sur les résultats attendus afin d'être capable d'utiliser correctement les outils numériques et d'analyser correctement les résultats obtenus.

1.5 Notion de temps de traitement et de traitement temps réel

Comme on pourra le constater par la suite, tous les traitements numériques des signaux sont basés sur une même opération de base qui est l'opération d'addition/multiplication (ou MAC = Multiplication Accumulation). Le temps nécessaire à un traitement sera donc évalué en nombre d'addition/multiplication nécessaires. Un traitement est accompli en temps réel quand il délivre un échantillon de signal en sortie de traitement pour un échantillon de signal en entrée (c'est-à-dire à chaque période d'échantillonnage T_e).