Exercice 2. Dans cet exercice on calcule la transformée de Fourier de $x(t) = e^{-at^2}$ $(a > 0)$ en résolvant une équation différentielle. Vérifier que X est solution de l'équation différentielle

$$\frac{dX}{df}(f) = -2\,\frac{\pi^2}{a} f X(f)$$

En déduire que

$$X(f) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\pi^2 \frac{f^2}{a}}$$

On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

$(f \in L^1_{(\mathbb{R})}$ ou $L^2_{(\mathbb{R})}$ ou dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}))$

$x(t) = e^{-at^2}$ $a>0$. (est définie continue sur $\mathbb{R}$. positive, C^∞, à décroissance rapide !)

$x(t) = e^{-at^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

TF : $\hat{x}(f) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{e^{-2j\pi f t}\, e^{-at^2}}_{g(t,f)}\, dt$ continûment dérivable

Slide 21 du cours sur la TF.

ici on a $x(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, et on peut appliquer directement le p^{t} ① du Théorème.

$\frac{\partial g}{\partial f} = -2j\pi t\, \underbrace{e^{-2j\pi f t}}_{\text{module}=1}\, e^{-at^2}$

$\left|\frac{\partial g}{\partial f}\right| \leq \underline{2\pi\, |t|\, e^{-at^2}}$ globalement intégrable sur $\mathbb{R}$ (en t)

ainsi, d'après le Th de dérivation d'une fct définies par une intégrale d'une fct de 2 variables

$\hat{x}(f)$ est donc dérivable en tout $f \in \mathbb{R}$

et on a :

$$\frac{\partial}{\partial f}\hat{x}(f) = \int_{\mathbb{R}} -2j\pi t\, e^{-2j\pi f t}\, e^{-at^2}\, dt$$

$u'v$, avec $u = e^{-at^2}$, $v = e^{-2j\pi f t}$

Ainsi :
$$\frac{\partial \hat{x}}{\partial f}(f) = \frac{j\pi}{a} \times \left\{ \left[\underbrace{e^{-at^2}}_{0\text{ en }\pm\infty}\, \underbrace{e^{-2j\pi f t}}_{\text{module }1} \right]_{-\infty}^{+\infty} + 2j\pi f \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} e^{-2j\pi f t}\, dt \right\}$$

$$= -\frac{2\pi^2 f}{a} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} e^{-2j\pi f t}\, dt}_{\hat{x}(f)}$$

$$\frac{\partial \hat{x}}{\partial f}(f) = -\frac{2\pi^2}{a} f\, \hat{x}(f)$$

Solutions de cette EDO classique :

$$\hat{x}(f) = K e^{-\frac{\pi^2 f^2}{a}}$$

on fixe K en considérant une val. particulière : par ex $\hat{x}(0) = K$

et $K = \hat{x}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

Conclusion : $\boxed{\hat{x}(f) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \, e^{-\frac{\pi^2 f^2}{a}}}$

Exo 3
mardi 5 janvier 2021
15:23

Exercice 3. Déterminer la transformée de Fourier de $x(t) = e^{-at}H(t)$ où $H(t) = \mathbb{I}_{[0,\infty[}(t)$ et $a > 0$. En utilisant les propriétés de dérivation de la TF, en déduire la TF de la fonction

$$\frac{t^{n-1}e^{-at}}{(n-1)!}H(t)$$

$x(t) = e^{-at} H(t)$ x est continue sur $\mathbb{R}^+$, positive et intégrable sur $\mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} x(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt = \frac{1}{a} < +\infty.$$

$x \in L^1$ et on peut utiliser la TF. (mais ⚠ $x \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$ car non dérivable en $t=0$)

TF dans L^1 :

$$\boxed{\hat{x}(f)} = \int_{\mathbb{R}} e^{-2j\pi t f} x(t)\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-(2j\pi f + a)t}\,dt$$

$$= \left[-\frac{e^{-(a+2j\pi f)t}}{a+2j\pi f} \right]_0^{+\infty} = \boxed{\frac{1}{a+2j\pi f}}$$

② $\forall k$: $t^k x(t) = t^k e^{-at} H(t) \in L^1(\mathbb{R})$ $(a>0)$

et on peut appliquer le point ① du th (Page 21 - des transparents)

$$(-2j\pi)^{n-1} \widehat{\left(t^{n-1} x(t)\right)}(f) = \frac{\partial^{n-1}\hat{x}}{\partial f^{n-1}}(f)$$

d'où

$$\widehat{\frac{t^{n-1}x(t)}{(n-1)!}}(f) = \frac{1}{(n-1)!\,(-2j\pi)^{n-1}} \underbrace{\frac{\partial^{n-1}\hat{x}}{\partial f^{n-1}}(f)}_{(-1)^{n-1}(n-1)!\,(2j\pi)^{n-1} \times \frac{1}{(a+2j\pi f)^n}}$$

ainsi

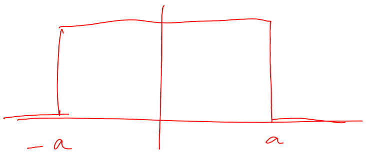
$$\widehat{\frac{t^{n-1}x(t)}{(n-1)!}}(f) = \frac{1}{(a+2j\pi f)^n}$$

Exercice 8. Soient $x(t) = \frac{\sin \pi a t}{\pi t}$ et $y(t) = \frac{\sin \pi b t}{\pi t}$ avec $a > 0$ et $b > 0$. On rappelle que $\widehat{\mathbb{1}_{[-T;T]}}(f) = \cancel{\operatorname{sin_c}(2\pi T f)}$. $\frac{\sin(2\pi T f)}{\pi f}$

1. En utilisant les liens entre TF et produit de convolution, calculer $x * y(t)$.

2. En déduire les valeurs des intégrales

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin \pi a t \, \sin \pi b t}{\pi^2 t^2} \qquad \text{et} \qquad \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du$$



$$\xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{\sin(2\pi a f)}{\pi f}$$

$\Pi_{2a}(t) \in L^1(\mathbb{R})$ $\qquad\qquad$ $\in L^\infty(\mathbb{R})$

$\in L^2(\mathbb{R})$ $\qquad\qquad$ $\in L^2(\mathbb{R})$

$(\notin \mathcal{S}(\mathbb{R}))$.

$$x(t) = \frac{\sin \pi a t}{\pi t}$$

$$y(t) = \frac{\sin \pi b t}{\pi t}$$

càd que $\quad x(t) = \widehat{\mathbb{1}_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]}}(t)$

$$y(t) = \widehat{\mathbb{1}_{[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}]}}(t)$$

et $\quad (x * y)(t) = \widehat{\mathbb{1}_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]}} * \widehat{\mathbb{1}_{[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}]}}$

dans L^2 : on utilise le point 2 page 44.

$$= \widehat{\mathbb{1}_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]} \cdot \mathbb{1}_{[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}]}}(t)$$

$$= \widehat{\mathbb{1}_{[-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}]}}(t)$$

avec $c = \min(a, b)$

$$= \frac{\sin \pi c t}{}$$

πt.

2

$$\int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{\sin \pi a t}{\pi t}}_{\in L^2(\mathbb{R})} \cdot \underbrace{\frac{\sin \pi b t}{\pi t}}_{\in L^2(\mathbb{R})} \, dt = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathbb{1}_{[-a/2, a/2]}}(t) \cdot \widehat{\mathbb{1}_{[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}]}}(t) \, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-a/2, a/2]}(t) \cdot \mathbb{1}_{[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}]}(t) \, dt$$

(c.f slide 31 du cours)

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-c/2, c/2]}(t) \, dt$$

(avec $c = \min(a, b)$)

$$= c$$

- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 u}{u^2} \, du$. ?

si on prend $a = b = 1$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(\pi t)}{\pi^2 t^2} \, dt = 1$$

$u = \pi t$ $\qquad dt = \frac{1}{\pi} du$

et on a : $1 = \frac{1}{\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 u}{u^2} \, du$

d'où le résultat : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 u}{u^2} \, du = \pi$

Exo 9

jeudi 7 janvier 2021
11:18

Exercice 9. Etude d'un filtre analogique standard: la cellulle RC.
On considère le système constitué d'un générateur fournissant une tension d'entrée $x(t)$, d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C. Le signal de sortie que l'on étudie est la tension $v(t)$ aux bornes du condensateur. Cette tension $v(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$x(t) = v(t) + RCv'(t)$$

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$.

2. En supposant que $x(t)$ et $v(t)$ possèdent les bonnes propritétés (qu'on donnera), montrer en utilisant la transformée de Fourier que $v(t)$ peut s'écrire sous la forme

$$v(t) = h * x(t)$$

① $\rightarrow$ c.f. exo3 $\quad \widehat{e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)}(f) = \dfrac{1}{\lambda + 2j\pi f}$

② $\rightarrow$ $x(t) = v(t) + RC\, v'(t)$

$$v'(t) + \frac{1}{RC} v(t) = \frac{1}{RC} x(t)$$

(Hyp : $v \in L^1$, $v' \in L^1$, $x \in L^1$)

$$\widehat{v'}(f) + \frac{1}{RC}\hat{v}(f) = \frac{1}{RC}\hat{x}(f)$$

(p② th page 21)

$$(2j\pi f)\,\hat{v}(f) + \frac{1}{RC}\hat{v}(f) = \frac{1}{RC}\hat{x}(f)$$

$$\hat{v}(f) = \underbrace{\frac{1}{1 + 2j\pi RCf}}\,\hat{x}(f)$$

(Question 1) $\quad \lambda = \dfrac{1}{RC}$

on a : $\quad e^{-t/RC}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t) \xrightarrow{TF} \dfrac{1}{\frac{1}{RC} + 2j\pi f} = \dfrac{RC}{1 + 2j\pi RCf}$

d'où $\quad \hat{v}(f) = \widehat{\underbrace{\left(\frac{1}{RC} e^{-t/RC}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)\right)}_{h(t)}}(f) \cdot \hat{x}(f)$

$$= \widehat{h * x}(f) \qquad \left(\begin{array}{ll} h \in L^1 & \text{naturellement} \\ x \in L^1 & \text{Hyp donnée} \end{array} \right)$$

et par TF inverse [à condition que $\hat{v}$ elle $\hat{m}$ soit dans L^1 (ou L^2)]

$$v(t) = (h * x)(t)$$