Intégration

Chapitre 5 : Théorèmes limites et applications

Olivier Cots, Serge Gratton & Ehouarn Simon

12 octobre 2020

Le but de ce chapitre 5 est :

- d'étendre les théorèmes de convergence déjà vus ("limites sous le signe intégrale"), et d'en proposer de nouveaux pour le cas d'une fonction mesurable f par rapport à une mesure μ sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$:

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu$$

- de faire le lien, quand il est possible, entre les intégrales de Lebesgue et Riemann ;

- d'étudier quelques propriétés d'intégrales dépendant de paramètres.

Chapitre 5 : Théorèmes limites et applications

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu$$

Chapitre 5 : Théorèmes limites et applications

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \lim_n \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu$$

Définition 5.1.1 – Espace mesuré complet

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Il est appelé **espace mesuré complet** si

$$[N \subset A,\ \text{avec } N \in \mathcal{P}(E) \text{ et } A \in \mathcal{A} \text{ t.q. } \mu(A) = 0] \Rightarrow N \in \mathcal{A}.$$

Définition 5.1.2 – Convergence μ-p.p.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de E dans $\overline{\mathbb{R}}$.

On dit que (f_n) **converge presque partout** vers f (et on note $f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} f$) si

$$\exists A \in \mathcal{A} \text{ négligeable tel que } [x \notin A] \Rightarrow [f_n(x) \to f(x)].$$

Remarque 5.1.1. **La convergence simple implique la convergence μ-p.p.**.

Remarque 5.1.2. La définition de la convergence μ-p.p. est une application de la définition 4.2 à la propriété $P(x) =$ "$f_n(x)$ converge vers $f(x)$".

Proposition 5.1.3

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit $(f_n)_n \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))^{\mathbb{N}} = \mathcal{M}^{\mathbb{N}}$ t.q. $f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} f$.

Alors $\exists g \in \mathcal{M}$ t.q. $f = g$ μ-p.p. et si $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est **complet alors** $f \in \mathcal{M}$.

- Par **hypothèse**, $f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} f$: $\exists A \in \mathcal{A}$ t.q. $\mu(A) = 0$ et $\forall x \in A^c$, $f_n(x) \to f(x)$.

Il vient,

$$\forall a \in \mathbb{R}, f^{-1}([-\infty, a]) = (f^{-1}([-\infty, a]) \cap A) \cup (f^{-1}([-\infty, a]) \cap A^c).$$

D'une part, $f^{-1}([-\infty, a]) \cap A \subset A$, avec $A \in \mathcal{A}$ t.q. $\mu(A) = 0$. Si $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un **espace mesuré complet**, il vient

$$f^{-1}([-\infty, a]) \cap A \in \mathcal{A}.$$

D'autre part, on pose $g = \limsup f_n$. D'après le chapitre 2, $g \in \mathcal{M}$ et de plus, $\forall x \in A^c$, $f(x) = g(x)$ et ainsi $f = g$ μ-p.p.

Proposition 5.1.3

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit $(f_n)_n \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))^{\mathbb{N}} = \mathcal{M}^{\mathbb{N}}$ t.q. $f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} f$.

Alors $\exists g \in \mathcal{M}$ t.q. $f = g$ μ-p.p. et si $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est **complet alors** $f \in \mathcal{M}$.

On a

$$\begin{aligned} f^{-1}([-\infty\,, a]) \cap A^c &= \{x \in A^c, f(x) \in [-\infty\,, a]\} \\ &= \{x \in A^c, g(x) \in [-\infty\,, a]\} \\ &= g^{-1}([-\infty\,, a]) \cap A^c. \end{aligned}$$

Or, g mesurable de $(E, \mathcal{A})$ dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})) \Rightarrow g^{-1}([-\infty\,, a]) \in \mathcal{A}$. [1]

Par **stabilité** par passage au complémentaire et intersection finie,

$$f^{-1}([-\infty\,, a]) \cap A^c \in \mathcal{A}.$$

Finalement, par **stabilité** par union finie, $\forall a \in \mathbb{R}, f^{-1}([-\infty\,, a]) \in \mathcal{A}$, et f mesurable. ∎

1. $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ est la tribu engendrée par les intervalles de la forme $[-\infty\,, a]$.

Théorème 5.1.4 – Tribu et mesure complétées

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Il existe $\mathcal{B}$ une tribu sur E et ν une mesure sur $\mathcal{B}$ telles que

i) $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$,

ii) $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = \nu(A)$,

iii) $\forall N \subset E$, t.q. $\exists A \in \mathcal{A}$ t.q. $N \subset A$ et $\mu(A) = 0$, on a

$$N \in \mathcal{B} \text{ et } \nu(B) = 0.$$

La tribu $\mathcal{B}$ est appelée **tribu complétée** de $\mathcal{A}$ et ν **mesure complétée** de μ.

L'espace $(E, \mathcal{B}, \nu)$ est un **espace mesuré complet**.

- Admis. Rq. : $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N})$, $\mathcal{N} := \{N \subset E \mid \exists A \in \mathcal{A} \text{ t.q. } N \subset A \text{ et } \mu(A) = 0\}$. ■

Remarque 5.1.3. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, f une fonction de E dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $g \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ t.q. $f = g$ μ-p.p.. Alors f est mesurable pour la tribu complétée. Ainsi d'après la proposition 5.1.3, si $f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} f$ alors f est mesurable pour la tribu complétée.

Théorème 5.1.5 – Convergence monotone

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Soit (f_n) une suite croissante de $\mathcal{M}_+(\mathcal{A})$, qui converge μ-p.p. vers f **mesurable**. Alors

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \lim_n \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Remarque 5.1.4. Ce théorème étend le théorème de Beppo-Levi, vu au chapitre 3, au cadre de la convergence μ-p.p.

Remarque 5.1.5. Si l'espace mesuré est complet alors l'hypothèse f mesurable est inutile. Si l'espace n'est pas complet et f non mesurable alors le résultat reste vrai si l'on remplace f par une fonction g mesurable t.q. $f = g$ μ-p.p. (qui existe cf. Proposition 5.1.3).

- *Idée :*

Appliquer le théorème de Beppo-Levi sur la partie de E sur laquelle la convergence simple a lieu. Le complémentaire de celle-ci étant de mesure nulle, les intégrales de f et des f_n sur ce dernier sont nulles.

- *(Preuve du théorème de convergence monotone).*

Par hypothèse, $f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} f$: $\exists A \in \mathcal{A}$ t.q. $\mu(A) = 0$ et $\forall x \in A^c, f_n(x) \to f(x)$.

1. Montrons que $\lim_n \int_{A^c} f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_{A^c} f \,\mathrm{d}\mu$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \tilde{f}_n = f_n \mathbb{1}_{A^c}$. La suite $(\tilde{f}_n)$ vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \tilde{f}_n \in \mathcal{M}_+$ comme produit de fonctions mesurables positives ($A^c \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbb{1}_{A^c}$ mesurable) ;
- $(\tilde{f}_n)$ converge simplement vers $\tilde{f} := f \mathbb{1}_{A^c}$ par hypothèse sur la suite (f_n) ;
- la suite $(\tilde{f}_n)$ est croissante :

$$\forall x \in A, \tilde{f}_n(x) = 0 = \tilde{f}_{n+1}(x). \qquad \begin{aligned} \forall x \in A^c, \tilde{f}_n(x) &= f_n(x) \\ &\leq f_{n+1}(x) \quad \text{par croissance de } (f_n) \\ &\leq \tilde{f}_{n+1}(x). \end{aligned}$$

D'après le théorème de Beppo-Levi,

$$\lim_n \int_E \tilde{f}_n \,\mathrm{d}\mu = \int_E \tilde{f} \,\mathrm{d}\mu \Leftrightarrow \lim_n \int_E f_n \mathbb{1}_{A^c} \,\mathrm{d}\mu = \int_E f \mathbb{1}_{A^c} \,\mathrm{d}\mu.$$

2. Comme $\mu(A) = 0$, il vient

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu = 0 \text{ (cf. Chapitre 4) }.$$

D'où, par la relation de Chasles (cf. Chapitre 4), f étant mesurable,

$$\int_{A^c} f \,\mathrm{d}\mu = \int_{A^c} f \,\mathrm{d}\mu + \int_A f \,\mathrm{d}\mu = \int_E f \,\mathrm{d}\mu$$

On montre de même que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_{A^c} f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu$, ce qui conduit au résultat. ■

Théorème 5.1.6 – Convergence dominée

Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n) \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$. On suppose que :

- $\exists g \in \mathcal{M}_+$ intégrable sur E telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq g$ μ-p.p. ;
- $f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} f$, f **mesurable** ;

Alors, on a

i) $\int_E |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$, *i.e.* $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$,

ii) $\lim_n \int_E |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = \lim_n \|f_n - f\|_1 = 0$,

iii) $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \lim_n \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu$.

Remarque 5.1.6. Si l'espace mesuré est complet alors l'hypothèse f mesurable est inutile. Si l'espace n'est pas complet et f non mesurable alors le résultat reste vrai si l'on remplace f par une fonction g mesurable t.q. $f = g$ μ-p.p. (qui existe cf. Proposition 5.1.3).

► *Idée :* Appliquer le lemme de Fatou sur la partie de E sur laquelle les deux hypothèses sont valides. Le complémentaire de celle-ci est alors de mesure nulle, et les intégrales de f et des f_n sur ce dernier sont nulles.

- *(Preuve du théorème de Convergence dominée).*

Par hypothèses, on a

- $\exists g \in \mathcal{M}_+$ intégrable sur E telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq g$ μ-p.p. :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists A_n \in \mathcal{A} \text{ t.q. } \mu(A_n) = 0 \text{ et } \forall x \in A_n^c, |f_n(x)| \leq g(x),$$

- $f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} f$: $\exists A \in \mathcal{A}$ t.q. $\mu(A) = 0$ et $\forall x \in A^c, f_n(x) \to f(x)$.

On a

$$\begin{aligned}
\mu((A^c \cap (\cap_n A_n^c))^c) &= \mu((A \cup (\cup_n A_n))) \\
&\leq \mu(A) + \sum_n \mu(A_n) \text{ (par sous } \sigma\text{-additivité)} \\
&\leq 0 \quad (\mu(A) = \mu(A_n) = 0)
\end{aligned}$$

D'où $\mu((A^c \cap (\cap_n A_n^c))^c) = 0$ et $A \cup (\cup_n A_n)$ est négligeable.

Si de plus, $A^c \cap (\cap_n A_n^c) = \varnothing$, alors $\mu(A^c \cap (\cap_n A_n^c)) = 0$ et

$$\mu(E) = \mu(A^c \cap (\cap_n A_n^c)) + \mu((A^c \cap (\cap_n A_n^c))^c) = 0.$$

Auquel cas, toute intégrale sur E est nulle, ce qui démontre le théorème. Pour la suite, on suppose $\mu(E) > 0$, ce qui implique que $A^c \cap (\cap_n A_n^c) \neq \varnothing$.

i) Montrons que $\int_E |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$.

On a

$$\forall x \in A^c \cap (\cap_p A_p^c),\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n(x)| \leq g(x).$$

A la limite, il vient

$$\forall x \in A^c \cap (\cap_p A_p^c), \quad |f(x)| \leq g(x).$$

Comme $A \cup (\cup_p A_p)$ est négligeable, il vient que $|f| \leq g$ μ-p.p.

Or, f mesurable et g est intégrable, d'où $\int_E |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$.[2]

2. Utiliser l'indicatrice sur $A^c \cap (\cap_p A_p^c)$ avec le théorème de comparaison et l'égalité de l'intégrale pour deux fonctions égales presque partout, cf. Chapitres 3 et 4.

ii) Montrons que $\lim_n \int_E |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0$.

On a $\forall x \in A^c \cap (\cap_p A_p^c), \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(x) - f_n(x)| \leq |f(x)| + |f_n(x)| \leq 2g(x)$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, h_n = (2g - |f - f_n|)\mathbb{1}_{A^c \cap (\cap_p A_p^c)}$. On montre que (h_n) est une suite de fonctions de $\mathcal{M}_+$.

De plus, elle converge simplement vers $2g\mathbb{1}_{A^c \cap (\cap_p A_p^c)}$ et on a ainsi

$$\liminf_{n \to +\infty} h_n = 2g\mathbb{1}_{A^c \cap (\cap_p A_p^c)}.$$

D'après le lemme de Fatou,

$$\int_E 2g\mathbb{1}_{A^c \cap (\cap_p A_p^c)} \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_E (2g - |f - f_n|)\mathbb{1}_{A^c \cap (\cap_p A_p^c)} \,\mathrm{d}\mu.$$

Or $\mu((A^c \cap (\cap_p A_p^c))^c) = 0$, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{(A^c \cap (\cap_p A_p^c))^c} (2g - |f - f_n|) \,\mathrm{d}\mu = 0 = \int_{(A^c \cap (\cap_p A_p^c))^c} g \,\mathrm{d}\mu.$$

D'où,

$$\int_E 2g \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E (2g - |f - f_n|) \,\mathrm{d}\mu.$$ [2]

Par linéarité de l'intégrale, il vient

$$2\int_E g \,\mathrm{d}\mu \leq 2\int_E g \,\mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to+\infty} \int_E |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu,$$

et $\limsup\limits_{n\to+\infty} \int_E |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu \leq 0$.

Finalement, $0 \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} \int_E |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu \leq \limsup\limits_{n\to+\infty} \int_E |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu \leq 0$,

$$\Rightarrow \lim_n \int_E |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

2. cf. preuve du théorème de convergence monotone.

iii) Montrons que $\lim_n \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_E f \, \mathrm{d}\mu$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n intégrable (car $|f_n| \leq g$ μ-p.p. avec g intégrable).

De même, d'après i), f est intégrable.

D'où,

$$\begin{aligned} \left| \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu - \int_E f \, \mathrm{d}\mu \right| &= \left| \int_E (f_n - f) \, \mathrm{d}\mu \right| \\ &\leq \int_E |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \\ &\to 0 \text{ par ii) .} \end{aligned}$$

■

Exemple 5.1.1 (Convergence dominée).

Soit l'espace mesuré $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$. Soient les fonctions (pour $n \geq 1$)

$$\begin{array}{cccc} f_n & : & [0,1] & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \mapsto & 1 - x^{1/n} \end{array}$$

Pour tout $x \in]0,1]$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ et $f_n(0) = 1$ pour tout $n \geq 1$. Or $\lambda(\{0\}) = 0$, d'où $f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} f$ (sur $[0,1]$) avec f la fonction nulle.

Pour tout $n \geq 1$, $|f_n| \leq 1$ qui est une fonction intégrable sur $[0,1]$. En effet

$$\int_{[0,1]} 1 \, \mathrm{d}\lambda = \lambda([0,1]) = 1 < \infty \ .$$

Donc, par théorème de convergence dominée,

$$\int_{[0,1]} f_n \, \mathrm{d}\lambda \to 0 \ .$$

Chapitre 5 : Théorèmes limites et applications

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda$$

Théorème 5.2.1 – Intégrale de Riemann sur un segment

Soit f mesurable sur $([a,b],\mathcal{B}([a,b]))$, $-\infty < a \leq b < +\infty$, et admettant une intégrale de Riemann sur $[a,b]$.

Alors f admet également une intégrale de Lebesgue sur $[a,b]$ et on a

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda$$

Remarque 5.2.1. En pratique, on pourra chercher à calculer des intégrales de Lebesgue en se ramenant à des segments sur lesquels les intégrales de Riemann et Lebesgue coïncident (cf TD).

► *Idée :*
On construit l'intégrale de Riemann depuis des fonctions en escalier, qui sont également des fonctions étagées, fonctions sur lesquelles on a construit l'intégrale de Lebesgue. On va ainsi revenir à des fonctions en escalier associées à l'intégrale de Riemann de f, les intégrer au sens de Lebesgue, et passer à la limite.

- *(Preuve du théorème sur l'intégrale de Riemann sur un segment).*

On définit la subdivision régulière

$$x(n,k) = a + (b-a)2^{-n}k, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall k = 0, \dots, 2^n.$$

On définit également

$$\forall k > 1, I(n,k) =]x(n,k-1), x(n,k)] \text{ et } I(n,1) = [x(n,0), x(n,1)].$$

On pose

$$u(n,k) = \inf_{x \in [x(n,k-1),x(n,k)]} f(x) \text{ et } v(n,k) = \sup_{x \in [x(n,k-1),x(n,k)]} f(x).$$

Enfin on définit (somme de Darboux)

$$g_n = \sum_{k=0}^{2^n} u(n,k)\, \mathbb{1}_{I(n,k)} \text{ et } h_n = \sum_{k=0}^{2^n} v(n,k)\, \mathbb{1}_{I(n,k)}.$$

On a alors

- (g_n) suite croissante de fonctions mesurables qui converge vers g, (h_n) suite décroissante de fonctions mesurables qui converge vers h,
- puisque f est Riemann integrable, f est bornée. Dans ce cas, g_n et h_n, qui sont de signe quelconque, sont majorées en valeur absolue par la fonction constante égale à $\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$ qui est Lebesgue intégrable sur $[a,b]$.
  D'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_{[a,b]} g_n \,\mathrm{d}\lambda \to \int_{[a,b]} g \,\mathrm{d}\lambda \text{ et } \int_{[a,b]} h_n \,\mathrm{d}\lambda \to \int_{[a,b]} h \,\mathrm{d}\lambda,$$

- les fonctions h_n et g_n sont à la fois étagées et en escalier. Leurs intégrales de Rieman et de Lebesgue sont les mêmes. Il vient

$$\int_a^b g_n(x)dx \to \int_{[a,b]} g \,\mathrm{d}\lambda \text{ et } \int_a^b h_n(x)dx \to \int_{[a,b]} h \,\mathrm{d}\lambda,$$

- puisque f est Riemann intégrable (caractérisation par les sommes de Darboux) :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b g_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b h_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Finalement, il vient

$$\int_{[a,b]} g \, \mathrm{d}\lambda = \int_{[a,b]} h \, \mathrm{d}\lambda = \int_a^b f(x) dx,$$

et

$$\int_{[a,b]} (h - g) \, \mathrm{d}\lambda = 0.$$

Finalement, f est intégrable, car majorée en valeur absolue (par la constante $\sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$ sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$, on a que

$$\int_{[a,b]} f \, \mathrm{d}\lambda = \int_{[a,b]} g \, \mathrm{d}\lambda + \int_{[a,b]} (f - g) \, \mathrm{d}\lambda.$$

Or

$$0 \leq \int_{[a,b]} (f - g) \, \mathrm{d}\lambda \leq \int_{[a,b]} (h - g) \, \mathrm{d}\lambda = 0,$$

d'où

$$\int_{[a,b]} f \, \mathrm{d}\lambda = \int_{[a,b]} g \, \mathrm{d}\lambda = \int_a^b f(x) dx. \qquad \blacksquare$$

Théorème 5.2.2 – Intégrale de Riemann impropre

Soient $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ et f mesurable sur $([a, b], \mathcal{B}([a, b]))$.

On suppose que f possède une intégrale de Riemann impropre[2] sur $[a\,, b[$ *absolument convergente*, c-a-d que

$$\lim_{t \to b^-} \int_a^t |f(x)| dx < +\infty.$$

La fonction f est alors intégrable au sens de Lebesgue et on a l'égalité

$$\int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b f(x) dx.$$

► *Idée :* Soit (b_n) une suite croissante de $\mathbb{R}$ qui tend vers b. On se ramène à des intégrales sur des segments via la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n = f \mathbb{1}_{[a,b_n]}$.

2. Par définition, f est Riemann-intégrable sur tout segment de la forme $[a\,, t[$, avec $t < b$.

► *(Preuve du théorème sur l'intégrale de Riemann impropre).*

Soit (b_n) une suite croissante de $\mathbb{R}$ qui tend vers b et telle que $\forall n \in \mathbb{N}, a < b_n$.
On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n = f \mathbb{1}_{[a,b_n]}.$$

1. On suppose f positive sur $[a, b]$. Montrons que $\displaystyle\int_{[a,b]} f \, \mathrm{d}\lambda = \int_a^b f(x)dx$.

Alors (f_n) est une suite croissante de fonctions mesurables positives qui converge μ-p.p vers $f \mathbb{1}_{[a,b]}$.[3] D'après le théorème de convergence monotone,

$$\begin{aligned}\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, \mathrm{d}\lambda &= \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_{[a,b]} \, \mathrm{d}\lambda \\ &= \int_{[a,b]} f \, \mathrm{d}\lambda\end{aligned}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n \, \mathrm{d}\lambda = \int_{[a,b_n]} f \, \mathrm{d}\lambda$.

3. cf preuve du théorème de convergence monotone.

De plus, $\int_a^b f(x)dx$ est convergente par hypothèse. Comme f est positive sur $[a,b]$, il vient

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\int_a^{b_n} f(x)dx| &= \int_a^{b_n} f(x)dx \\ &\leq \int_a^{b} f(x)dx < +\infty\end{aligned}$$

car f est positive et par définition de la suite (b_n). f est ainsi Riemann-intégrable sur $[a,b_n]$, avec $n \in \mathbb{N}$. Elle est, de plus, mesurable par hypothèse. D'après le théorème précèdant, f est Lebesgue-intégrable sur $[a,b_n]$ et on a

$$\int_{[a,b_n]} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_a^{b_n} f(x)dx.$$

D'où,

$$\int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to+\infty} \int_a^{b_n} f(x)dx = \int_a^{b} f(x)dx.$$

2. On suppose que f n'est pas de signe constant et que $\int_a^b |f(x)|dx < +\infty$.

Alors $(|f_n|)$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives qui converge μ-p.p vers $|f|\mathbb{1}_{[a,b]}$.[3] D'après le théorème de convergence monotone,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n| \,\mathrm{d}\lambda = \int_{[a,b]} |f| \,\mathrm{d}\lambda.$$

De plus $\int_a^b |f(x)|dx$ est absolument convergente, donc $|f|$ est Riemann-intégrable sur $[a, b_n]$ avec $n \in \mathbb{N}$. D'après le théorème précédant,

$$\begin{aligned}\int_a^{b_n} |f(x)|dx &= \int_{[a,b_n]} |f| \,\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f_n| \,\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

Il vient

$$\int_{[a,b]} |f| \,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b |f(x)|dx < +\infty.$$

3. cf. preuve du théorème de convergence monotone.

D'où $|f|\mathbb{1}_{[a,b]}$ est Lebesgue-intégrable. Or,

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq |f|\mathbb{1}_{[a,b]}.$$

D'après le théorème de convergence dominée, il vient

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} f\mathbb{1}_{[a,b]} \,\mathrm{d}\lambda \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b_n]} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda.$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, f est Riemann-intégrable sur $[a, b_n]$[3]. D'après le théorème précédant,

$$\int_a^{b_n} f(x)dx = \int_{[a,b_n]} f \,\mathrm{d}\lambda.$$

Finalement,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda.$$

■

3. car $|f|$ l'est.

Exemple 5.2.1 (Intégrale impropre).

Soit l'espace mesuré $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$. Soit la fonction

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-x} \end{array}$$

f est continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeur dans $\mathbb{R}$, elle est donc mesurable. Soit $t > 0$, on a,

$$\begin{aligned} \int_0^t f(x)dx &= -[e^{-x}]_0^t \\ &= 1 - e^{-t}. \end{aligned}$$

D'où

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty \quad (f \text{ positive}).$$

Finalement, f est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\int_{\mathbb{R}_+} f \, \mathrm{d}\lambda = \int_0^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Remarque 5.2.2. Par simplicité, on a supposé, dans les deux théorèmes faisant le lien entre les intégrales de Riemann et Lebesgue (sur un segment et intégrale de Riemann impropre), que la fonction f **est mesurable**. Cette hypothèse est souvent **vérifiée en pratique** (f continue, continue par morceaux, etc..).

Néanmoins, ces théorèmes restent valides, même sans cette hypothèse, dès lors que l'on se place sur la **tribu complétée** de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et que l'on intègre vis-à-vis de la **mesure complétée** de λ.

Sinon, sur la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, si on ne suppose pas la mesurabilité de la fonction f alors nous avons la variante ci-après sur le lien Riemann-Lebesgue.

Théorème 5.2.3 – Variante

Soit f intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$, $-\infty < a \leq b < +\infty$.

Alors $\exists g \in \mathcal{L}^1([a, b], \mathcal{B}([a, b]), \lambda)$ telle que

i) $f = g$ μ-p.p.,

ii) $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} g \, \mathrm{d}\lambda$.

Chapitre 5 : Théorèmes limites et applications

$$F(u) = \int_E f(u, x) \, \mathrm{d}\mu(x)$$

Théorème 5.3.1 – Continuité sous l'intégrale

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Soit $f : \mathcal{I} \times E \to \mathbb{R}$, avec $\mathcal{I}$ intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, telle que

i) $\forall u \in \mathcal{I}$, $x \mapsto f(u, x) \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (mesurable),

ii) $\exists u_\infty \in \mathcal{I}$ tel que pour presque tout x, $u \mapsto f(u, x)$ est continue en u_∞,

iii) $\exists g \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ positive et intégrable telle que pour presque tout x, $\forall u \in \mathcal{I}$, $|f(u, x)| \leq g(x)$.

Alors la fonction $u \mapsto F(u) = \int_E f(u, x) \, \mathrm{d}\mu(x)$ est définie en tout point $u \in \mathcal{I}$ et est continue en u_∞.

► *Idée :*

Prendre une suite qui converge vers u_∞ (hypothèse ii)) et appliquer le théorème de convergence dominée (hypothèses i) et iii)).

► *(Preuve du théorème de continuité sous l'intégrale).*

1. Montrons que F est bien définie sur $\mathcal{I}$.

Soit $u \in \mathcal{I}$. On pose $\forall x \in E, f_u(x) = f(u,x)$. Alors, f_u est mesurable par i). De plus, $|f_u| \leq g$ μ-p.p., avec g intégrable par iii). Donc f_u est intégrable et F est bien définie sur $\mathcal{I}$.

2. Montrons que F est continue en u_∞.

Soit (u_n) une suite de $\mathcal{I}$ qui converge vers u_∞. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E, f_n(x) = f(u_n, x).$$

La suite (f_n) vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par i),
- $\exists g \in \mathcal{M}_+$ intégrable sur E telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq g$ μ-p.p. par iii) ;
- $f_n \xrightarrow{\text{p.p.}} f_{u_\infty}$: d'après ii), $\exists A \in \mathcal{A}, \mu(A) = 0$ et $\forall x \in A^c, \quad f_n(x) \to f(u_\infty, x)$.

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_n \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_E f_{u_\infty} \,\mathrm{d}\mu \Leftrightarrow \lim_n F(u_n) = F(u_\infty).$$

■

Corollaire 5.3.2 – Continuité "globale" sous l'intégrale

Soit $f : \mathcal{I} \times E \to \mathbb{R}$, avec $\mathcal{I}$ intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, telle que

i) $\forall u \in \mathcal{I}$, $x \mapsto f(u,x) \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (mesurable),

ii) pour presque tout x, $u \mapsto f(u,x)$ est continue sur $\mathcal{I}$,

iii) $\exists g \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ positive et intégrable telle que pour presque tout x, $\forall u \in \mathcal{I}$, $|f(u,x)| \leq g(x)$.

Alors la fonction $u \mapsto F(u) = \int_E f(u,x)\,\mathrm{d}\mu(x)$ est définie et continue sur $\mathcal{I}$.

Exemple 5.3.1 (Convolution). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée et continue. La convolée de f et ϕ est définie par

$$u \mapsto (f \star \phi)(u) := \int_{\mathbb{R}} \phi(u-x) f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)$$

Pour tout x, $u \mapsto \phi(u-x)f(x)$ est continue. Pour tout u, $|\phi(u-x)f(x)| \leq \|\phi\|_\infty |f(x)|$ et $\int_{\mathbb{R}} \|\phi\|_\infty |f(x)|\,\mathrm{d}\lambda(x) < \infty$ par hypothèse. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \phi(u-x)f(x)$ est mesurable comme produit de fonctions mesurables. Donc par le théorème de continuité globale, $f \star \phi$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 5.3.3 – Dérivation sous l'intégrale

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Soit $f : \mathcal{I} \times E \to \mathbb{R}$, avec $\mathcal{I}$ intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, telle que

i) $\forall u \in \mathcal{I}$, $x \mapsto f(u,x) \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (mesurable),

ii) $\forall u \in \mathcal{I}$, $x \mapsto f(u,x)$ est intégrable,

iii) $\exists u_\infty \in \mathcal{I}$ tel que pour presque tout x, $\frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x)$ existe,

iv) $\exists g \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ positive et intégrable telle que pour presque tout x,

$$\forall u \in \mathcal{I}, |f(u,x) - f(u_\infty, x)| \leq g(x)|u - u_\infty|.$$

Alors la fonction $u \mapsto F(u) = \int_E f(u,x)\,\mathrm{d}\mu(x)$ est définie en tout point $u \in \mathcal{I}$ et est dérivable en u_∞. De plus,

$$F'(u_\infty) = \int_E \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

► *Idée :* idem continuité.

- *(Preuve du théorème de dérivation sous l'intégrale).*

- Les hypothèses i) et ii) assurent que F est bien définie sur $\mathcal{I}$.
- Montrons que F est dérivable en u_∞.

Soit (u_n) une suite de $\mathcal{I}$ qui converge vers u_∞ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \neq u_\infty$.
On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E, \phi_n(x) = \frac{f(u_n, x) - f(u_\infty, x)}{u_n - u_\infty}.$$

D'après iv), $|\phi_n| \leq g$ μ-p.p., avec g intégrable, et d'après iii), $\phi_n \xrightarrow{\text{p.p.}} \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, .)$:

$$\exists A \in \mathcal{A}, \mu(A) = 0 \text{ et } \forall x \in A^c, \phi_n(x) \to \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x).$$

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_n \int_E \phi_n \, \mathrm{d}\mu = \int_E \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x) \, \mathrm{d}\mu(x).$$

Soit $\lim_n \frac{F(u_n) - F(u_\infty)}{u_n - u_\infty} = F'(u_\infty) = \int_E \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x) \, \mathrm{d}\mu(x)$ ■

Corollaire 5.3.4 – Dérivation "globale" sous l'intégrale

Soit $f : \mathcal{I} \times E \to \mathbb{R}$, avec $\mathcal{I}$ intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, telle que

i) $\forall u \in \mathcal{I}$, $x \mapsto f(u,x) \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (mesurable),

ii) $\exists u_0 \in \mathcal{I}$, $x \mapsto f(u_0,x)$ est intégrable,

iii) pour presque tout x, $u \mapsto f(u,x)$ est dérivable sur $\mathcal{I}$,

iv) $\exists g \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ positive et intégrable telle que pour presque tout x,

$$\forall u \in \mathcal{I}, \quad |\frac{\partial f}{\partial u}(u,x)| \leq g(x).$$

Alors la fonction $u \mapsto F(u) = \int_E f(u,x)\,\mathrm{d}\mu(x)$ est définie et dérivable sur $\mathcal{I}$. De plus,

$$\forall u \in \mathcal{I}, \quad F'(u) = \int_E \frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

► *Idée :* Exploiter l'inégalité des accroissements finies, là où les hypothèses le permettent (à savoir μ-p.p.).

► *(Preuve du corollaire de dérivation "globale").*

1. Montrons que F est définie sur $\mathcal{I}$.

D'après ii), $\exists u_0 \in \mathcal{I}$ tel que $x \mapsto f(u_0, x)$ est intégrable.

Soit $u \in \mathcal{I}$. On a

$$\forall x \in E, \quad |f(u,x)| \leq |f(u_0,x)| + |f(u,x) - f(u_0,x)|.$$

Or, d'après iii), pour presque tout x, $u \mapsto f(u,x)$ est dérivable sur l'intervalle ouvert $]u, u_0[$ et continue sur l'intervalle fermé $[u, u_0]$.

De plus, pour presque tout x, $\forall v \in]u, u_0[, |\frac{\partial f}{\partial u}(v,x)| \leq g(x)$ d'après iv).

Par inégalité des accroissements finis, pour presque tout x,

$$|f(u,x) - f(u_0,x)| \leq g(x)|u - u_0|.$$

D'où g intégrable $\Rightarrow x \to f(u,x) - f(u_0,x)$ intégrable.

Finalement, $x \mapsto f(u,x)$ est intégrable, et ce $\forall u \in \mathcal{I}$, donc F est bien définie sur $\mathcal{I}$.

2. Montrons que F est dérivable sur $\mathcal{I}$ et que

$$\forall u \in \mathcal{I}, \quad F'(u) = \int_E \frac{\partial f}{\partial u}(u, x) \, \mathrm{d}\mu(x).$$

Soit $(u, u_\infty) \in \mathcal{I}^2$.

On montre de même que, pour pour presque tout x,

$$|f(u, x) - f(u_\infty, x)| \leq g(x)|u - u_\infty|.$$

De plus, pour presque tout x, $\frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x)$ existe, par hypothèse iii).

En appliquant le théorème précédent, il vient que F est dérivable en u_∞, et que

$$F'(u_\infty) = \int_E \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x) \, \mathrm{d}\mu(x),$$

et ce $\forall u_\infty \in \mathcal{I}$.

■