2020-2021

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES CORRIGES DE TRAITEMENT DU SIGNAL
Sciences du Numérique - Première année
ECHANTILLONNAGE - QUANTIFICATION

Exercice 1 : Echantillonnage d'un signal passe-bande

On considère le signal $x(t) = x^+(t) + x^-(t)$, avec $x^+(t) = B\frac{sin(\pi Bt)}{\pi Bt}e^{j2\pi f_0 t}$ et $x^-(t) = B\frac{sin(\pi Bt)}{\pi Bt}e^{-j2\pi f_0 t}$, $f_0 = 8kHz$ et $B = 2kHz$.

1. Déterminer la transformée de Fourier du signal $x(t)$ et la représenter graphiquement.
$X(f) = X^+(f) + X^-(f) = \prod_B(f) * \delta(f - f_0) + \prod_B(f) * \delta(f + f_0) = \prod_B(f - f_0) + \prod_B(f + f_0)$ (voir figure 1)

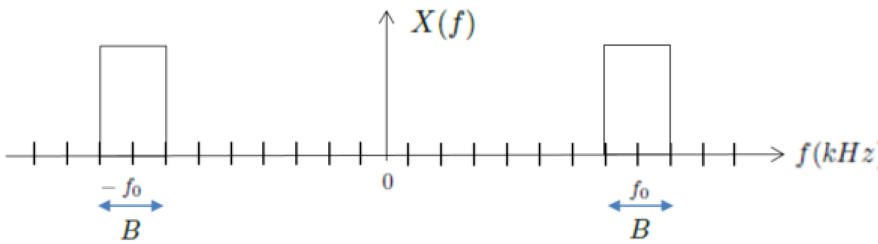

Figure 1 – Transformée de Fourier de $x(t)$.

2. Comment s'écrit la condition de Shannon pour le signal $x(t)$?
$F_e > 2F_{max}$ avec $F_{max} = f_0 + \frac{B}{2} = 9$ kHz ici.
3. On échantillonne le signal $x(t)$ à la fréquence $F_e = 6kHz$.
   (a) Représenter graphiquement la transformée de Fourier du signal échantillonné $x_e(t)$ dans la bande $[-9kHz, 9kHz]$
   Voir sur la figure 2

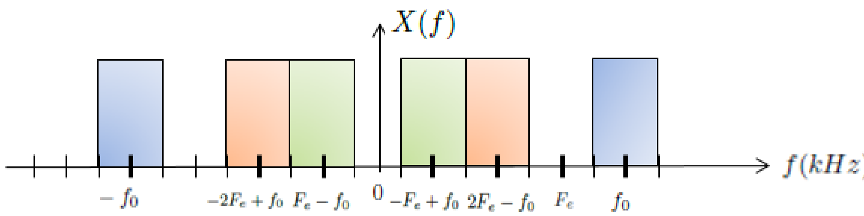

Figure 2 – Transformée de Fourier de $x(t)$ avec $F_e = 8$ kHz.

   (b) On désire restituer le signal $x(t)$ à partir de $x_e(t)$ par un filtrage de réponse en fréquence $H(f)$.

   — 1^{ier} cas : $H(f) = \Pi_F(f)$ avec $F = 6kHz$. Quel sera le signal restitué par ce filtre ?
   Voir la figure 3, on retrouvera $x(t) = B\frac{sin(\pi Bt)}{\pi Bt}e^{j2\pi f_1 t} + B\frac{sin(\pi Bt)}{\pi Bt}e^{-j2\pi f_1 t} = 2Bsinc(\pi Bt)\cos(2\pi f_1 t)$, avec $f_1 = -F_e + f_0 = 2$ kHz.
   — 2^{me} cas : $H(f) = \Pi_B(f + f_0) + \Pi_B(f - f_0)$ avec $f_0 = 8kHz$ et $B = 2kHz$. Quel sera le signal restitué par ce filtre ?
   Voir la figure 4, on retrouvera $x(t) = B\frac{sin(\pi Bt)}{\pi Bt}e^{j2\pi f_0 t} + B\frac{sin(\pi Bt)}{\pi Bt}e^{-j2\pi f_0 t} = 2Bsinc(\pi Bt)\cos(2\pi f_0 t)$, avec $f_0 = 8$ kHz.
   — Conclusion ?
   Il est possible d'échantillonner un signal de type passe-bande sans respecter la condition de Shannon tout en assurant une reconstition parfaite (par filtrage passe-bande), à condition que les repliments se fassent dans les trous du spectre de départ.

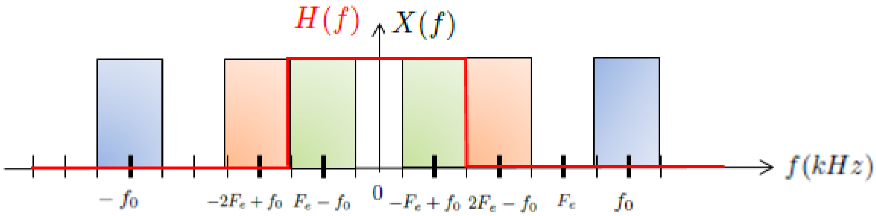

FIGURE 3 –

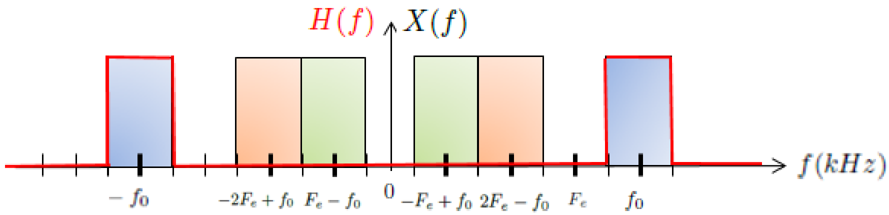

FIGURE 4 –

Exercice 2 : Echantillonneur bloqueur

L'échantillonneur bloqueur est un échantillonneur réalisable en pratique qui consiste à acquérir un échantillon du signal, $x(t)$, toutes les T_e secondes (période d'échantillonnage) et à le bloquer pendant τ secondes ($\tau << T_e$).

1. Proposer une écriture du signal échantillonné de cette manière, $x_e(t)$, en fonction de l'expression du signal échantillonné de manière idéale : $x_{ei}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(kT_e)\delta(t-kT_e)$.
   Le signal échantillonné par bloqueur va être constitué d'une somme de fonctions porte espacées de T_e, de largeur τ et de hauteur $x(kT_e)$ si $x(kT_e)$ représente la valeur de l'échantillon prélevé sur le signal $x(t)$ à l'instant kT_e. On peut donc écrire le signal échantillonné, $x_e(t)$, de la manière suivante : $x_e(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(kT_e)\Pi_\tau\left(t-\frac{\tau}{2}-kT_e\right) = \Pi_\tau\left(t-\frac{\tau}{2}\right) * \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(kT_e)\delta(t-kT_e) = \Pi_\tau\left(t-\frac{\tau}{2}\right) * x_{ei}(t)$.
2. Calculer la transformée de Fourier du signal échantillonné à l'aide de cette méthode. L'écrire en fonction de la transformée de Fourier, $X(f)$, du signal de départ.
   $X_e(f) = \tau sinc\,(\pi f\tau)\,e^{-j\pi f\tau} * X_{ei}(f) = \tau sinc\,(\pi f\tau)\,e^{-j\pi f\tau} * F_e\sum_{k\in\mathbb{Z}} X\,(f-kF_e)$, où $F_e = \frac{1}{T_e}$ représente la fréquence d'échantillonnage du signal.
3. Est-il possible de dimensionner τ pour que l'échantillonnage par bloqueur se rapproche d'un échantillonnage idéal.
   Si le critère de Shannon est vérifié, on pourra récupérer $X(f)$ à condition que $\frac{1}{\tau} >> F_{max}$, en appelant F_{max} la fréquence maximale du signal $x(t)$. On aura alors, en effet, $sinc\,(\pi f\tau) \simeq 1$ sur la bande du signal.

Exercice 3 : Signal à spectre non borné - Recherche de F_e

Soit le signal $x(t)$ défini par :

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{si } t \geq 0, a > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases} \tag{1}$$

1. Déterminer la transformée de Fourier $X(f)$ du signal $x(t)$. Tracer $|X(f)|$.
   $X(f) = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j2\pi f)t}dt = \frac{1}{a+j2\pi f}$, $|X(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+4\pi^2 f^2}}$.
2. En théorie le signal $x(t)$ est-il échantillonnable sans perte d'information ? Expliquez votre réponse.
   Non car le spectre non borné $\Rightarrow$ forcément du repliement quand on va échantillonner $\Rightarrow$ signal distordu.
3. En considérant la transformée de Fourier comme négligeable pour une atténuation minimale de 40 dB par rapport à sa valeur maximum, dimensionner la fréquence d'échantillonnage, F_e, à utiliser.
   On a le maximum du spectre pour $f = 0$. On souhaite donc trouver F_{max} telle que :

$$10\log_{10}|X(F_{max})|^2 \leq 10\log_{10}|X(0)|^2 - 10\log_{10}\left(10^4\right) = 10\log_{10}\frac{|X(0)|^2}{10^4}$$

   D'où $\frac{1}{\sqrt{a^2+4\pi^2F_{max}^2}} \leq \frac{1}{10^4a^2}$ et donc $F_{max}^2 \geq \frac{(10^4-1)a^2}{4\pi^2}$. Soit, en négligeant 1 devant 10^4 : $F_{max} \geq \frac{100a}{2\pi}$ et donc $F_e \geq \frac{100a}{\pi}$.

4. Une fois F_e déterminée, quel traitement doit-on appliquer au signal avant de l'échantillonner ?
   Un filtre anti repliement afin de tronquer le spectre du signal à F_{max}.

Exercice 4 : Quantification d'une sinusoïde

Soit un signal sinusoïdal $x(t) = A_0 \sin(2\pi f_0 t + \phi)$, avec $f_0 = 50Hz$, $A_0 = 220\sqrt{2}V$ et ϕ une phase aléatoire uniformément répartie entre 0 et 2π. On suppose que la quantification de cette sinusoïde est effectuée dans de bonnes conditions : pas d'écrétage du signal, pas de quantification $q = \frac{D}{2^{nb}}$ suffisament fin (D représentant la dynamique du signal et nb le nombre de bits de quantification). Elle est donc équivalente à l'ajout d'un bruit, $n_Q(t)$, sur le signal non quantifié de départ, bruit aléatoire, centré qui suit une loi uniforme sur $\left[-\frac{q}{2}, \frac{q}{2}\right]$. Déterminer le rapport signal à bruit de quantification en fonction de nb.

$SNR_{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{P_x}{P_n}\right)$ si P_x représente la puissance du signal $x(t)$ et P_n la puissance du bruit de quantification, $n_Q(t)$, qui vient s'ajouter au signal de départ. $P_x = \frac{A_0^2}{2}$ (résultat classique pour la puissance d'un sinus ou d'un cosinus, calculé en TD dans le cas d'un cosinus) et $P_n = E\left[n_Q^2(t)\right] = \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} \frac{1}{q} n_Q^2(t) dn_Q = \frac{1}{q}\left[\frac{n_Q^3(t)}{3}\right]_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} = \frac{q^2}{12}$, d'où $SNR_{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{3}{2}2^{2nb}\right) \simeq 1.76 + 6nb$

Rappels

Propriétés générales

	T.F.	
$ax(t) + by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi f t_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t) \,.\, y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) \,.\, Y(f)$
$x(at + b)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\|a\|} X\left(\frac{f}{a}\right) e^{i2\pi \frac{b}{a} f}$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval	**Série de Fourier**
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$	$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \rightleftharpoons \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta(f - nf_0)$
$\int_{\mathbb{R}} \|x(t)\|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \|X(f)\|^2 df$	

Table de Transformées de Fourier

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi f t_0}$
$Ш_T(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T} Ш_{1/T}(f)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}\left[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\right]$
$e^{-a\|t\|}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} = T \sin c(\pi T f)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T \sin c^2(\pi T f)$
$B \sin c(\pi B t)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B \sin c^2(\pi B t)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$

!!!!!! Attention !!!!!
$\Pi_T(t)$ note une fenêtre rectangulaire de support égal à T.
$\Lambda_T(t)$ note une fenêtre triangulaire de support égal à $2T$ (de demi-base égale à T).

$$\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T\ \Lambda_T(t)$$