

# ANALYSE DE FOURIER

Martial COULON

ENSEEIH

1ère année Sciences du Numérique

## Objectifs du cours

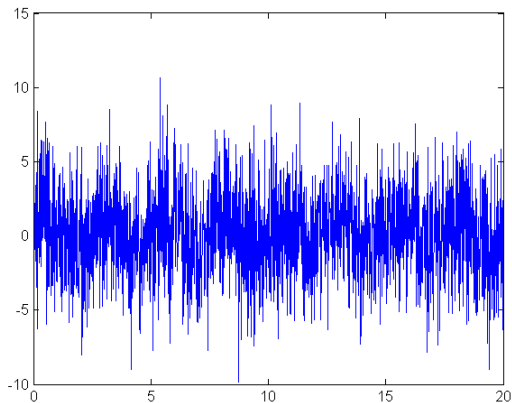
- ▶ connaître et savoir manipuler les outils mathématiques d'analyse de Fourier utiles dans une formation d'ingénieur (résolution Equa-diff et EDP) ;
- ▶ savoir passer de la **représentation temporelle** d'un signal à sa **représentation fréquentielle**, et réciproquement ;
- ▶ introduire certaines notions (convolution, filtrage, distribution de Dirac, ...) utiles dans d'autres cours (traitement du signal et des images, télécommunications)
- ▶ passage des signaux analogiques aux signaux numériques

## Pré-requis pour le cours

- ▶ cours d'Intégration (intégrale de Lebesgue, théorème Fubini, ...)
- ▶ ...

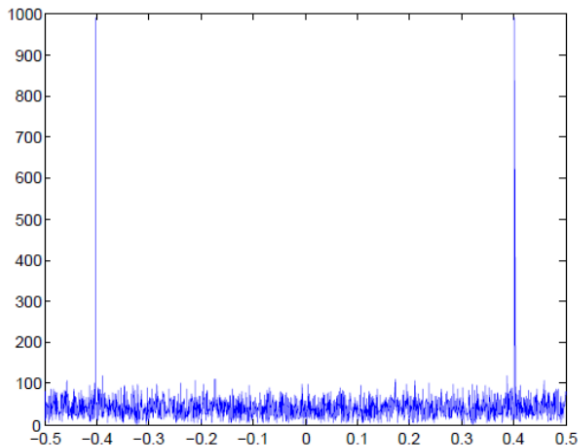
## Pourquoi une représentation fréquentielle ?

Quel est ce signal, observé dans le domaine des **temps** ?



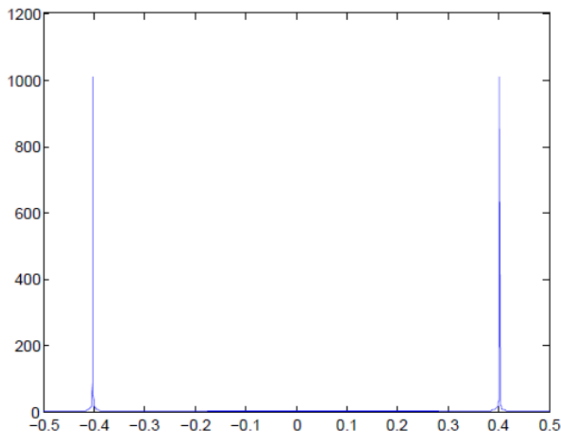
## Pourquoi une représentation fréquentielle ?

... le même, observé dans le domaine des **fréquences** ?



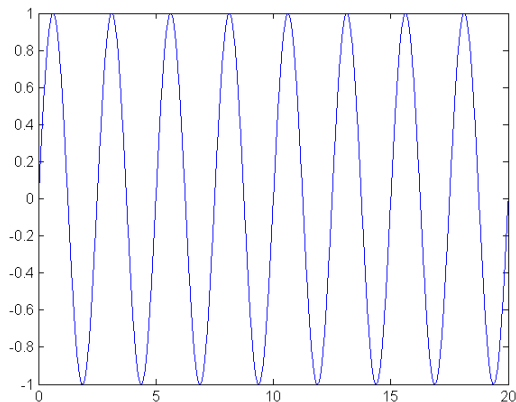
## Pourquoi une représentation fréquentielle ?

... le même, sans bruit, observé dans le domaine des **fréquences** ?



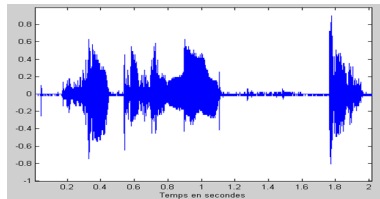
## Pourquoi une représentation fréquentielle ?

... le même, sans bruit, observé dans le domaine des **temps** ?

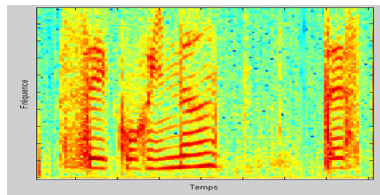


## Autre exemple : signal de parole

### Représentation temporelle

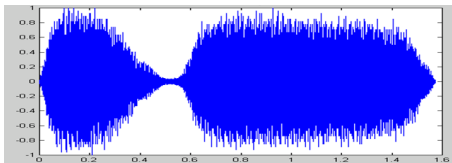


### Représentation fréquentielle

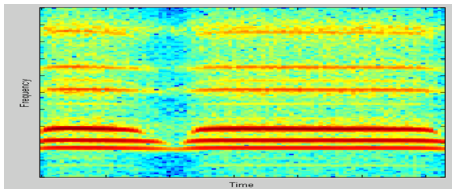


## Autre exemple : sifflement d'un (vieux) train

### Représentation temporelle



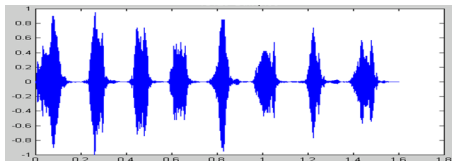
### Représentation fréquentielle



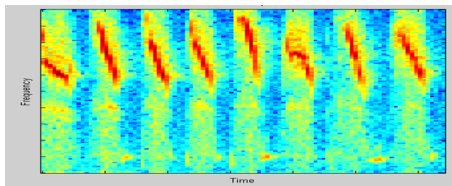


## Autre exemple : chant d'oiseau

### Représentation temporelle

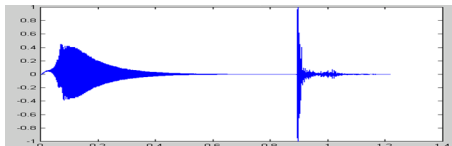


### Représentation fréquentielle

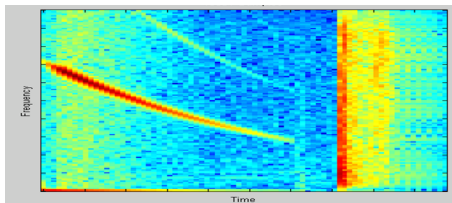


## Autre exemple : l'oeuf qui tombe...

### Représentation temporelle



### Représentation fréquentielle



## Autre exemple : IRM

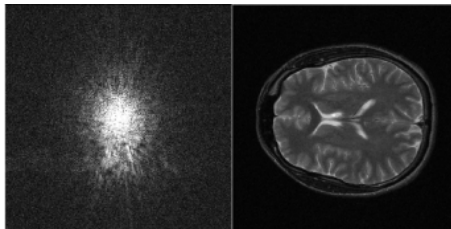
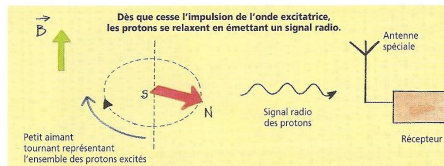
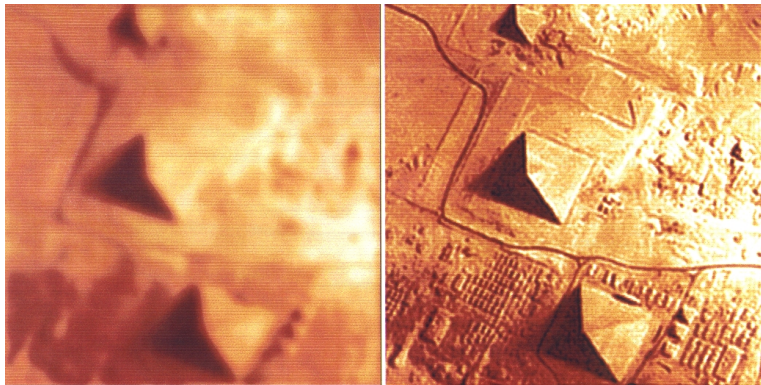


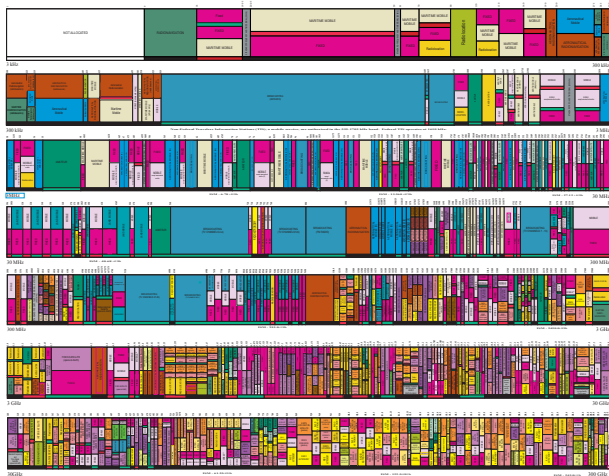
Figure 1: K-space data (left) and resulting brain image after 2D-FT (right)

## Autre exemple : déconvolution d'image

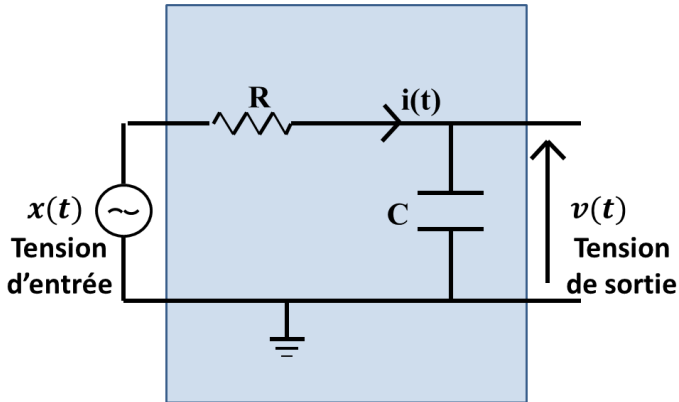


## Autre exemple : spectre radio (USA)

UNITED  
STATES  
FREQUENCY  
ALLOCATIONS  
THE RADIO SPECTRUM



Autre exemple : étude d'un système par résolution d'équation différentielle



**Système linéaire :  $RCv'(t) + v(t) = x(t)$**

## Plan du cours

### Transformée de Fourier

Espaces de fonctions

Transformée de Fourier dans  $L^1(\mathbb{R})$

Premières propriétés

Règles de calcul de la transformée de Fourier dans  $L^1(\mathbb{R})$

Transformée de Fourier inverse dans  $L^1(\mathbb{R})$

Transformée de Fourier dans  $L^2(\mathbb{R})$

Convolution et Transformée de Fourier

Transformée de Fourier discrète

### Distributions

Introduction

Problème de la modélisation d'une impulsion

Définition d'une distribution

Distributions régulières

Produit d'une distribution et d'une fonction

Dérivée d'une distribution

Convergence d'une suite de distributions

Série de Fourier de distributions

Transformée de Fourier de distributions

Transformée de Fourier et convolution de distributions

Echantillonnage d'un signal à bande limitée

## Plan du cours

### Transformée de Fourier

- Espaces de fonctions

- Transformée de Fourier dans  $L^1(\mathbb{R})$

- Premières propriétés

- Règles de calcul de la transformée de Fourier dans  $L^1(\mathbb{R})$

- Transformée de Fourier inverse dans  $L^1(\mathbb{R})$

- Transformée de Fourier dans  $L^2(\mathbb{R})$

- Convolution et Transformée de Fourier

- Transformée de Fourier discrète

### Distributions

- Introduction

- Problème de la modélisation d'une impulsion

- Définition d'une distribution

- Distributions régulières

- Produit d'une distribution et d'une fonction

- Dérivée d'une distribution

- Convergence d'une suite de distributions

- Série de Fourier de distributions

- Transformée de Fourier de distributions

- Transformée de Fourier et convolution de distributions

- Echantillonnage d'un signal à bande limitée



## Plan du cours

### Transformée de Fourier

Espaces de fonctions

Transformée de Fourier dans  $L^1(\mathbb{R})$

Premières propriétés

Règles de calcul de la transformée de Fourier dans  $L^1(\mathbb{R})$

Transformée de Fourier inverse dans  $L^1(\mathbb{R})$

Transformée de Fourier dans  $L^2(\mathbb{R})$

Convolution et Transformée de Fourier

Transformée de Fourier discrète

### Distributions

Introduction

Problème de la modélisation d'une impulsion

Définition d'une distribution

Distributions régulières

Produit d'une distribution et d'une fonction

Dérivée d'une distribution

Convergence d'une suite de distributions

Série de Fourier de distributions

Transformée de Fourier de distributions

Transformée de Fourier et convolution de distributions

Echantillonnage d'un signal à bande limitée

## Espaces de fonctions

### Définition : espaces $L^p$

Soit  $p \geq 1$  et  $I$  un intervalle borné ou non de  $\mathbb{R}$ . On pose :

$$\begin{aligned} L^p(I) &= \left\{ x : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } \int_I |x(t)|^p dt < +\infty \right\} \\ L^\infty(I) &= \{ x : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } x \text{ bornée p.p. sur } I \} \end{aligned}$$

### Normes

$$\begin{aligned} \|x\|_p &= \left( \int_I |x(t)|^p dt \right)^{1/p} \\ \|x\|_\infty &= \inf \{ \alpha \text{ tel que } |x(t)| \leq \alpha \text{ p.p. sur } I \} \end{aligned}$$

### Propriété

Si  $I$  de **mesure finie**, on a

$$L^\infty(I) \subset \dots \subset L^{p+1}(I) \subset L^p(I) \subset \dots \subset C \subset L^1(I) \subset L^1_{\text{loc}}(I)$$

## Séries de Fourier

Fourier (1768-1830) : décomposition d'une fonction périodique en somme d'exponentielles (*Théorie analytique de la chaleur*)



Si  $x$  fonction périodique de période  $T$  de carré intégrable sur  $[0, T]$ , alors :

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{j2\pi n \frac{t}{T}}$$

(convergence dans  $L^2([0, T])$ ), mais pas forcément ponctuelle)

Problème : comment faire pour une fonction  $x$  non périodique ?

## Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

On se place dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ .

### Définition

Soit une fonction  $x \in L^1(\mathbb{R})$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . La **transformée de Fourier** de  $x$  est définie par

$$\forall f \in \mathbb{R}, \hat{x}(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2j\pi f t} dt$$

On note aussi parfois la transformée  $X(f)$  ou  $TF(x)(f)$ .

### Exemple

$$x(t) = \mathbb{1}_{[a;b]}(t) \Rightarrow \hat{x}(f) = (b-a) \operatorname{sinc}(\pi(b-a)f) e^{-j\pi(a+b)f}.$$

Cas particulier où  $b = -a = T/2$  (fonction porte) :  $\hat{x}(f) = T \operatorname{sinc}(\pi T f)$

## Théorème

Soit une fonction  $x \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors

1.  $\hat{x}$  est une fonction continue et bornée sur  $\mathbb{R}$   $\Leftrightarrow \hat{x} \in L^\infty(\mathbb{R})$  ;
2. l'application  $x \mapsto \hat{x}$  est linéaire continue de  $L^1(\mathbb{R})$  dans  $L^\infty(\mathbb{R})$ .
3. théorème de Riemann-Lebesgue :

$$\lim_{|f| \rightarrow +\infty} \hat{x}(f) = 0$$

## Injectivité de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

l'application  $x \mapsto \hat{x}$  est injective de  $L^1(\mathbb{R})$  dans  $C^0(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire :

$$\forall f \in \mathbb{R}, \hat{x}(f) = 0 \Leftrightarrow x(t) = 0 \text{ p.p. sur } \mathbb{R}$$

et donc

$$\forall f \in \mathbb{R}, \hat{x}(f) = \hat{y}(f) \Leftrightarrow x(t) = y(t) \text{ p.p. sur } \mathbb{R}$$

## Règles de calcul de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

### Théorème (de transfert)

Soit  $x$  et  $y$  deux fonctions de  $L^1(\mathbb{R})$ . Alors

- $x\hat{y}$  et  $\hat{x}y$  sont dans  $L^1(\mathbb{R})$  ;

▸

$$\int_{\mathbb{R}} x(t)\hat{y}(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \hat{x}(t)y(t)dt$$

### Théorème : transformée de Fourier et dérivation

1. si la fonction  $t \mapsto t^k x(t)$  est dans  $L^1(\mathbb{R})$ , pour  $k = 0, \dots, n$ , alors  $\hat{x}$  est  $n$  fois dérivable, et

$$\forall k = 1, \dots, n, \quad \widehat{x^{(k)}}(f) = (-2j\pi t)^k \hat{x}(f)$$

2. si  $x \in C^n(\mathbb{R})$  et si  $x^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ , pour  $k = 0, \dots, n$ , alors :

$$\forall k = 1, \dots, n, \quad \widehat{x^{(k)}}(f) = (2j\pi f)^k \hat{x}(f)$$

3. si  $x \in L^1(\mathbb{R})$  et si  $x$  est à support compact, alors  $\hat{x} \in C^\infty(\mathbb{R})$ .

## Propriétés : parité et conjugaison

Soit  $x \in L^1(\mathbb{R})$ .

1. si  $x$  est paire,  $\hat{x}$  est paire.
2. si  $x$  est impaire,  $\hat{x}$  est impaire.
3. si  $x$  est réelle paire,  $\hat{x}$  est réelle paire.
4. si  $x$  est réelle impaire,  $\hat{x}$  est imaginaire pure impaire.

## Propriétés : transformée de Fourier et translation

Soit  $x \in L^1(\mathbb{R})$ .

1. soit  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Alors

$$\widehat{x(t - t_0)}(f) = e^{-2j\pi f t_0} \hat{x}(f)$$

2. soit  $f_0 \in \mathbb{R}$ . Alors

$$e^{2j\pi f_0 t} \widehat{x}(t)(f) = \hat{x}(f - f_0)$$

## Transformée de Fourier inverse dans $L^1(\mathbb{R})$

### Théorème de réciprocité

Si  $x$  et  $\hat{x}$  sont dans  $L^1(\mathbb{R})$ . On pose

$$\check{\hat{x}}(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{x}(f) e^{+2j\pi ft} df.$$

Alors

$$x(t) = \check{\hat{x}}(t) \text{ p.p. } t \in \mathbb{R}$$

et  $x(t) = \check{\hat{x}}(t)$  en tout point  $t$  où  $x$  est continue.

### Théorème : condition suffisante pour que $\hat{x} \in L^1(\mathbb{R})$

Si  $x \in C^2(\mathbb{R})$ , et si  $x$ ,  $x'$ , et  $x''$  sont dans  $L^1(\mathbb{R})$ , alors  $\hat{x} \in L^1(\mathbb{R})$ .



Comment faire si  $\hat{x} \notin L^1(\mathbb{R})$  ?

Dans ce cas, l'intégrale  $\int_{\mathbb{R}} \hat{x}(f) e^{+2j\pi ft} df$  n'est pas définie, mais la limite

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{[-a; +a]} \hat{x}(f) e^{+2j\pi ft} df$$

**peut** exister.

## Théorème

Soit  $x \in L^1(\mathbb{R})$  telle que

1. il existe un nombre fini de réels  $a_1, \dots, a_p$  tels que  $x$  soit  $C^1$  sur  $] -\infty; a_1[$ ,  $] a_1; a_2[$ ,  $\dots$ ,  $] a_p; +\infty[$  ;
2.  $x' \in L^1(\mathbb{R})$

Alors

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{[-a; +a]} \hat{x}(f) e^{+2j\pi ft} df = \frac{1}{2} (x(t^+) + x(t^-))$$

**Exemple :**  $x(t) = \pi \mathbb{1}_{[-1/2\pi; +1/2\pi]}(t)$

On a :  $\hat{x}(f) = \sin_c(f) \notin L^1(\mathbb{R})$ . Donc

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \hat{x}(f) e^{+2j\pi f t} df &= \int_{-a}^a \frac{\cos(2\pi t f) \sin f}{f} df + \int_{-a}^a \frac{\sin(2\pi t f) \sin f}{f} df \\ &= 2 \int_0^a \frac{\cos(2\pi t f) \sin f}{f} df \quad (\text{car } \frac{\sin(2\pi t f) \sin f}{f} \text{ impaire}) \\ &= \int_0^a \frac{\sin((2\pi t + 1)f)}{f} df - \int_0^a \frac{\sin((2\pi t - 1)f)}{f} df \end{aligned}$$

Or, on montre que  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{\sin(f)}{f} df = \frac{\pi}{2}$  (théorème de Cauchy pour les fonctions de la variable complexe). D'où :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{\sin(\lambda f)}{f} df = \begin{cases} +\frac{\pi}{2} & \text{si } \lambda > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } \lambda < 0 \\ 0 & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

En posant  $\lambda = 2\pi t + 1$  ou  $\lambda = 2\pi t - 1$ , on obtient :


1. pour  $t > \frac{1}{2\pi}$  :  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \hat{x}(f) e^{+2j\pi f t} df = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$
2. pour  $t < -\frac{1}{2\pi}$  :  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \hat{x}(f) e^{+2j\pi f t} df = (-\frac{\pi}{2}) - (-\frac{\pi}{2}) = 0$
3. pour  $t \in ]-\frac{1}{2\pi}, +\frac{1}{2\pi}[$  :  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \hat{x}(f) e^{+2j\pi f t} df = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$
4. pour  $t = \pm \frac{1}{2\pi}$  :  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \hat{x}(f) e^{+2j\pi f t} df = \frac{\pi}{2}$

Finalement, on a bien

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \hat{x}(f) e^{+2j\pi f t} df = \frac{1}{2} (x(t^+) + x(t^-))$$

## Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

### Position du problème

- ▶  $L^2(\mathbb{R})$  : espace des fonctions à **énergie finie**.
- ▶ Problème :  $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$ .
- ▶  comment définir une transformée de Fourier pour une fonction de  $L^2(\mathbb{R})$  ?

### Définition

On dit qu'une fonction  $x$  est à **décroissance rapide** si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad t^k x(t) \xrightarrow{|t| \rightarrow +\infty} 0$$

### L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

On note  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  l'espace des fonctions  $x$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) telles que

1.  $x$  est  $C^\infty$  ;
2.  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $x^{(k)}$  est à décroissance rapide.

## Propriétés de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

1.  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$ ,  $\forall p \geq 1$  ;
2.  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est stable par dérivation ;
3.  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est stable par multiplication par un polynôme ;
4.  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est stable par transformée de Fourier.

## Propriétés de la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

L'application  $x \mapsto \hat{x}$  est linéaire, continue, **bijective** de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , c-à-d :

$$\begin{aligned}\forall f \in \mathbb{R}, \hat{x}(f) &= \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2j\pi f t} dt \\ \forall t \in \mathbb{R}, x(t) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{x}(f) e^{+2j\pi f t} df\end{aligned}$$

## Propriétés de la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

L'application  $x \mapsto \hat{x}$  est une **isométrie** de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  pour la norme définie sur  $L^2(\mathbb{R})$ . Donc,  $\forall x, y \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  :

$$\begin{aligned}\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle_{L^2} &= \langle x, y \rangle_{L^2} \\ \|\hat{x}\|_2 &= \|x\|_2\end{aligned}$$

c'est-à-dire (formules de Parseval-Plancherel)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \hat{x}(f) \overline{\hat{y}(f)} df &= \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{y(t)} dt \\ \int_{\mathbb{R}} |\hat{x}(f)|^2 df &= \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt \text{ (conservation de l'énergie)}\end{aligned}$$

## Propriété : densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est **dense** dans  $L^2(\mathbb{R})$ .

## Définition de la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

- ▶ L'isométrie  $x \mapsto \hat{x}$  de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  se prolonge de façon unique en une isométrie de  $L^2(\mathbb{R})$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ .
- ▶ Ce prolongement est la **transformée de Fourier dans  $L^2(\mathbb{R})$** .
- ▶ Soit  $x \in L^2(\mathbb{R})$  : sa transformée de Fourier dans  $L^2(\mathbb{R})$  est notée  $\mathcal{F}(x)$  (on note  $\mathcal{F}^{-1}(x)$  la transformée inverse). On a alors :

$$\mathcal{F}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n \text{ (dans } L^2(\mathbb{R}))$$

$$\text{où } X_n(f) = \int_{[-n; +n]} x(t) e^{-2j\pi f t} dt$$

## Propriétés de la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

1. si  $x \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , les transformées de Fourier sur  $L^1(\mathbb{R})$  et sur  $L^2(\mathbb{R})$  coïncident, c-à-d  $\hat{x} = \mathcal{F}(x)$  p.p.
2. l'application  $x \mapsto \mathcal{F}(x)$  est bijective de  $L^2(\mathbb{R})$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ , et on a :

$$\forall x \in L^2(\mathbb{R}), \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(x)) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(x)) = x \text{ p.p.}$$

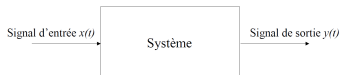
3.  $\forall x, y \in L^2(\mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(x)(f) \overline{\mathcal{F}(y)(f)} df &= \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{y(t)} dt \\ \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(x)(f)|^2 df &= \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt \end{aligned}$$



## Principe de la convolution

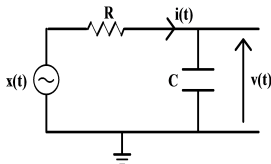
### Convolution et système linéaire



La sortie d'un système linéaire est reliée à l'entrée par un **produit de convolution**.

☞ intérêt du produit de convolution (entre autres) pour l'étude des systèmes linéaires.

### Exemple : cellule RC



## Définition de la convolution

### Définition

Soient  $x$  et  $y$  deux fonctions. Le **produit de convolution** entre  $x$  et  $y$  en un point  $t \in \mathbb{R}$  est défini par (si l'intégrale existe)

$$x * y(t) = \int_{\mathbb{R}} x(u)y(t-u)du$$

### Propriétés

- ▶ linéarité :  $x * (ay_1 + by_2) = ax * y_1 + bx * y_2$
- ▶ commutativité :  $x * y = y * x$
- ▶ associativité :  $(x_1 * x_2) * x_3 = x_1 * (x_2 * x_3)$

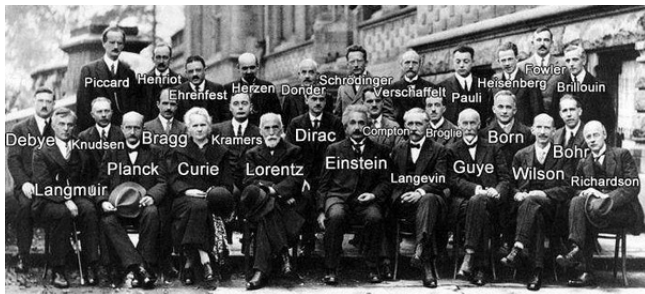
### Exemple

- ▶ système intégrateur :  $y(t) = \int_{-\infty}^t x(u)du.$
- ▶  $x(t) = \mathbb{1}_{[0;T]}(t)$ . Calculer  $x * x$ . Conclusions ?

## Exemple

- $x(t) = \mathbb{1}_{[0;T]}(t)$ . Calculer  $x * x$ . Conclusions ?
- système intégrateur :  $y(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du$ .
- 🖱 Principe de **causalité** : “le principe de causalité sera sans doute un des derniers auxquels les sciences renonceront un jour” (Gilles Cohen-Tannoudji).

## Congrès de Solvay 1927



## Propriété : support

Soient  $x$  et  $y$  deux fonctions telles que  $x * y(t)$  existe pour tout  $t$ . Alors :

$$\text{Supp}(x * y) \subseteq \overline{\text{Supp}(x) + \text{Supp}(y)}$$

avec  $A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$ .

## Interprétation physique de la convolution

- ▶ Dans tout système physique,  $\exists$  diverses constantes de temps de l'appareil de mesures  $\Rightarrow$  impossibilité à discerner deux impulsions très rapprochées (*résolution* finie du système)

- ▶ le produit de convolution  $\simeq$  moyennage  $\Rightarrow$  permet de prendre en compte ce phénomène

En effet,  $y(t) = x * h(t) = \int_{\mathbb{R}} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \Rightarrow y(t)$  est une moyenne de  $x(\tau)$  pondéré par  $h(t - \tau) \Rightarrow$  "lissage" de  $x(t)$

## Conditions (suffisantes) d'existence du produit de convolution

### Convolution dans $L^1(\mathbb{R})$

Soient  $x, y \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors :

1.  $x * y$  est défini p.p., et  $x * y \in L^1(\mathbb{R})$  ;
2. la convolution est une application bilinéaire continue de  $L^1(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R})$  dans  $L^1(\mathbb{R})$ , telle que

$$\|x * y\|_1 \leq \|x\|_1 \|y\|_1$$

### Convolution dans $L^1(\mathbb{R})/L^2(\mathbb{R})$

Soient  $x \in L^1(\mathbb{R})$  et  $y \in L^2(\mathbb{R})$ . Alors :

1.  $x * y$  est défini p.p., et  $x * y \in L^2(\mathbb{R})$  ;
2. la convolution est une application bilinéaire continue de  $L^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ , telle que

$$\|x * y\|_2 \leq \|x\|_1 \|y\|_2$$

## Convolution dans $L^p(\mathbb{R})/L^q(\mathbb{R})$

Soient  $x \in L^p(\mathbb{R})$  et  $y \in L^q(\mathbb{R})$  avec

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Alors :

1.  $x * y$  est défini **partout**, et est une fonction **continue** et **bornée** sur  $\mathbb{R}$  ;
2. la convolution est une application bilinéaire continue de  $L^p(\mathbb{R}) \times L^q(\mathbb{R})$  dans  $L^\infty(\mathbb{R})$ , telle que

$$\|x * y\|_\infty \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

Cas particuliers :

- $p = 1, q = +\infty$  ;
- $p = q = 2$ .

## Liens entre convolution et transformée de Fourier

### Convolution et transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Soient  $x, y \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors :

1. Pour tout  $f \in \mathbb{R}$  :

$$\widehat{x * y}(f) = \hat{x}(f)\hat{y}(f)$$

$$\widetilde{x * y}(f) = \check{x}(f)\check{y}(f)$$

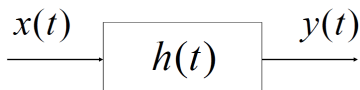
2. si  $\hat{x}$  et  $\hat{y}$  sont dans  $L^1(\mathbb{R})$ , alors pour tout  $f \in \mathbb{R}$  :

$$\widehat{xy}(f) = \hat{x} * \hat{y}(f)$$

$$\widetilde{xy}(f) = \check{x} * \check{y}(f)$$

## Interprétation : filtrage

Soit un système linéaire de réponse impulsionnelle  $h(t)$ .



domaine temporel :  $y(t) = h * x(t)$

domaine fréquentiel :  $\hat{y}(f) = H(f)\hat{x}(f)$

où  $H = \hat{h}$  est la **transmittance** ou **fonction de transfert** du système.

☞ atténuation/amplification/coupure de certaines composantes fréquentielles du signal d'entrée.

☞ **filtre**.



## Exemple 1 : tension en créneau aux bornes d'une cellule RC

### Filtre

- ▶ Réponse impulsionnelle :

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$$

- ▶ Fonction de transfert :

$$H(f) = \frac{1}{1 + 2j\pi \frac{f}{f_c}}$$

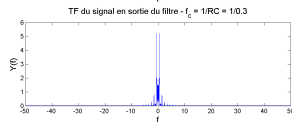
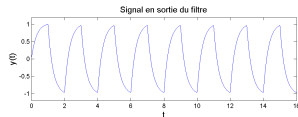
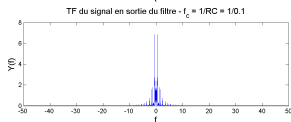
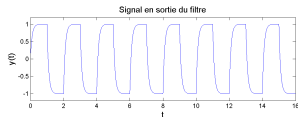
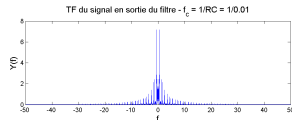
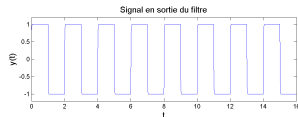
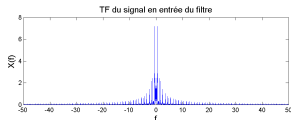
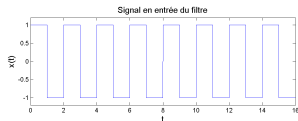
où  $f_c = 1/RC$  est la fréquence de coupure (filtre passe-bas).

### Signal en entrée

$$x(t) = \sum_{k=0}^{L-1} m(t - 2kT) \text{ avec } m(t) = \mathbb{1}_{[0;T]}(t) - \mathbb{1}_{[T;2T]}(t)$$

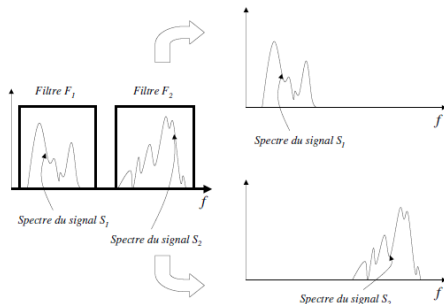
$$\hat{x}(f) = 2jT \operatorname{sinc}(\pi T f) \sin\left(\frac{3}{2}\pi T f\right) \frac{\sin(2\pi L T f)}{\sin(2\pi T f)} e^{-j(2L+1/2)\pi T f}$$

## Effets du filtrage suivant la valeur de la fréquence de coupure



## Exemple 2 : séparation des *spectres*

- ▶ 2 signaux  $s_1$  et  $s_2$  mélangés dans le domaine temporel, mais dont les *spectres* (c-à-d  $\hat{s}_1$  et  $\hat{s}_2$ ) sont disjoints ;
- ▶ 🖱️ séparation des signaux par filtrage.



## Convolution et transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Soient  $x, y \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Alors :

1. Pour tout  $f \in \mathbb{R}$  :

$$\widehat{x * y}(f) = \hat{x}(f)\hat{y}(f)$$

$$\widetilde{x * y}(f) = \check{x}(f)\check{y}(f)$$

2. Pour tout  $f \in \mathbb{R}$  :

$$\widehat{xy}(f) = \hat{x} * \hat{y}(f)$$

$$\widetilde{xy}(f) = \check{x} * \check{y}(f)$$

## Convolution et transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Soient  $x, y \in L^2(\mathbb{R})$ . Alors :

1. Pour tout  $f \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned}x * y(f) &= \text{TF}^{-1}(\mathcal{F}(x)\mathcal{F}(y))(f) \\x * y(f) &= \text{TF}(\mathcal{F}^{-1}(x)\mathcal{F}^{-1}(y))(f)\end{aligned}$$

2. Pour tout  $f \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned}\text{TF}(xy)(f) &= \mathcal{F}(x) * \mathcal{F}(y)(f) \\ \text{TF}^{-1}(xy)(f) &= \mathcal{F}^{-1}(x) * \mathcal{F}^{-1}(y)(f)\end{aligned}$$

## Convolution et dérivation

### Régularisation par convolution

Soit  $x \in L^1(\mathbb{R})$ , et  $y \in C^p(\mathbb{R})$  telle que  $y^{(k)}$  **bornée** pour  $k = 0, \dots, p$ .

Alors

1.

$$x * y \in C^p(\mathbb{R})$$

2.

$$(x * y)^{(k)} = x * \left( y^{(k)} \right), \quad \forall k = 0, \dots, p$$

## Transformée de Fourier discrète

### Position du problème

Fonction à temps continu  $x(t)$  remplacée par une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  (échantillonnage :  $x_n = x(nT_e)$  où  $T_e$  est la période d'échantillonnage)

En supposant que  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n| < +\infty$  (càd  $x \in L^1(\mathbb{Z}, \mu_d)$ ), on pose

$$\forall f \in \mathbb{R}, X_d(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-2j\pi n f}$$

$X_d$  est la **transformée de Fourier discrète** de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ .

### Autre expression

$$\forall f \in \mathbb{R}, X_d(f) = X(z)|_{z=e^{2j\pi f}}$$

avec

$$X(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n z^{-n}, \quad z \in \mathbb{C}$$

$X$  est la **transformée en Z** de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  (notée aussi  $TZ(x)$ ).

## Utilisation de la théorie des fonctions de la variable complexe

(Non détaillée ici)

- ▶ Notion de domaine de convergence pour  $X$  ( $|z| \in ]R^-; R^+ [$ ) ;
- ▶ Il existe une transformée en  $Z$  inverse (passage de  $X(z)$  à  $x_n$ )

## Propriétés

▶

$$TZ(x_{n-n_0}) = z^{-n_0} X(z)$$

▶

$$TZ(a^n x_n) = X\left(\frac{z}{a}\right), \quad a \in \mathbb{C}$$



## Produit de convolution

Soient 2 suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ .

Le **produit de convolution discret** est défini par

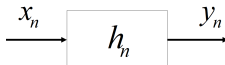
$$x * y(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k y_{n-k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_{n-k} y_k = y * x(n)$$

## Lien entre TZ et produit de convolution discret

$$TZ(x * y)(z) = X(z)Y(z)$$

☞ même expression que lien TF/produit de convolution de fonctions

## Interprétation : filtrage numérique



$h_n$  : réponse impulsionnelle numérique du filtre

☞  $y_n = x * h(n)$  et  $Y(z) = H(z)X(z)$

## Plan du cours

### Transformée de Fourier

Espaces de fonctions

Transformée de Fourier dans  $L^1(\mathbb{R})$

Premières propriétés

Règles de calcul de la transformée de Fourier dans  $L^1(\mathbb{R})$

Transformée de Fourier inverse dans  $L^1(\mathbb{R})$

Transformée de Fourier dans  $L^2(\mathbb{R})$

Convolution et Transformée de Fourier

Transformée de Fourier discrète

### Distributions

Introduction

Problème de la modélisation d'une impulsion

Définition d'une distribution

Distributions régulières

Produit d'une distribution et d'une fonction

Dérivée d'une distribution

Convergence d'une suite de distributions

Série de Fourier de distributions

Transformée de Fourier de distributions

Transformée de Fourier et convolution de distributions

Echantillonnage d'un signal à bande limitée

## Naissance des Distributions

- ▶ Laurent Schwartz (1915-2002) : médaille Fields 1950

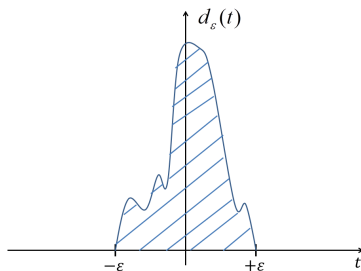


- ▶ objectif initial : résolution des équations aux dérivées partielles (par transformée de Fourier)
- ▶ généralisation des notions de fonction et de mesure
- ▶ définition rigoureuse de la notion d'impulsion

## Problème de la modélisation d'une impulsion (ou de masse ponctuelle)

### Principe de l'impulsion

- ▶ Emission d'une énergie non nulle pendant une durée infiniment petite.
- ▶ Densité (répartition) temporelle d'énergie  $d_\varepsilon$  :
  - ▶  $\forall t \in \mathbb{R}, d_\varepsilon(t) \geq 0$  ;
  - ▶  $d_\varepsilon(t) = 0$  pour  $|t| > \varepsilon$  ;
  - ▶  $\forall \varepsilon > 0, \int_{\mathbb{R}} d_\varepsilon(t) dt = 1$ .



## Passage à la limite

Soit  $d(t)$  la limite (ponctuelle) de  $d_\varepsilon$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . La fonction  $d$  vérifie-t-elle

- $\forall t \in \mathbb{R}, d(t) \geq 0$  ;
- $d(t) = 0$  pour  $t \neq 0$  ;
- $\int_{\mathbb{R}} d(t) dt = 1$  ?

## Si cette fonction existait...

on aurait :

- $d(t)$  dérivée de la fonction d'Heaviside ;
- pour toute fonction  $f$  dérivable :  $\int_{\mathbb{R}} d(t) f(t) dt = f(0)$ .

... **mais elle n'existe pas !**

## Comment faire ?

Il existe une distribution (à voir...) qui permet de retrouver (en un sens) ces propriétés...

## Définition d'une distribution

### L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

On note  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  l'espace des fonctions infiniment dérivables et à support compact sur  $\mathbb{R}$  (fonctions *test*).

### Exemples

► ?

### Définition : distribution

On appelle **distribution** sur  $\mathbb{R}$  toute application  $T$  **linéaire** et **continue** de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ).

Notation :

$$\begin{aligned} T &: \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle \end{aligned}$$

On note  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  l'espace des distributions.

## Convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

On dit qu'une suite  $(\varphi_n)_n$  d'éléments de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  converge vers une fonction  $\varphi$  de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  **si et seulement si** :

1. il existe un **compact**  $\mathcal{K}$  tel que  $\forall n, \text{Supp}(\varphi_n) \subset \mathcal{K}$ .
2.  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi_n^{(k)}$  **converge uniformément** vers  $\varphi^{(k)}$ .

## Exemples

- Distribution de Dirac en  $a$ . Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On pose :

$$\begin{aligned}\delta_a : \mathcal{D}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)\end{aligned}$$



- Soient  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $(\lambda_n)_n$  une suite quelconque définie sur  $\mathbb{Z}$ . On pose :

$$\begin{aligned}\Delta_a : \mathcal{D}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \langle \Delta_a, \varphi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n \varphi(na)\end{aligned}$$



## Distributions régulières

### Définition

Soit  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ . Alors, pour toute  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ,  $f\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ . On pose alors :

$$\begin{aligned} T_f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx \end{aligned}$$

$T_f$  est la **distribution régulière** associée à  $f$ .

### Injectivité

L'application  $f \mapsto T_f$  est **injective** de  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , et on a donc

$$T_f = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ p.p.}$$

Ainsi, on peut faire l'**identification**  $f \leftrightarrow T_f$ , et écrire

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$$

## Exemples

- ▶ Distribution constante
- ▶ Distribution d'Heaviside
- ▶ Distribution en valeur principale

## Contre-exemple

La distribution  $\delta$  **n'est pas** une distribution régulière : il **n'existe pas de fonction**  $f$  telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx = \varphi(0)$$

## Produit d'une distribution et d'une fonction

### Position du problème

- Soit  $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ .
- Problème :  $fg \notin L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  *a priori*  $\Rightarrow fg$  ne définit pas une distribution régulière.
- et si de plus  $g$  continue ?

### Définition

Soient  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  et  $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Alors on définit **le produit de  $T$  par  $g$**  par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \langle gT, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle$$

### Exemples

- ?
- produit d'une fonction par un Dirac.

## Dérivée d'une distribution

Cas d'une fonction telle que  $f' \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$

### Définition : dérivée d'une distribution

Soit  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  une distribution quelconque. Alors l'application

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto (-1)^k \langle T, \varphi^{(k)} \rangle\end{aligned}$$

est une distribution : c'est la **dérivée d'ordre  $k$  de  $T$** .

$$\langle T^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle T, \varphi^{(k)} \rangle$$

### Exemples

- ▶  $T$  une distribution constante ;
- ▶  $T = T_h$  ;
- ▶  $T = \delta_a$ .

## Lien entre $T_{f'}$ et $T'_f$ pour une distribution régulière

Soit  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ , dérivable p.p., telle que  $f' \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ .

☞ quel lien existe-t-il entre  $T_{f'}$  et  $T'_f$  ?

### Cas où $f$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}$

On a alors

$$T'_f = T_{f'}$$

### Cas où $f$ est $C^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$

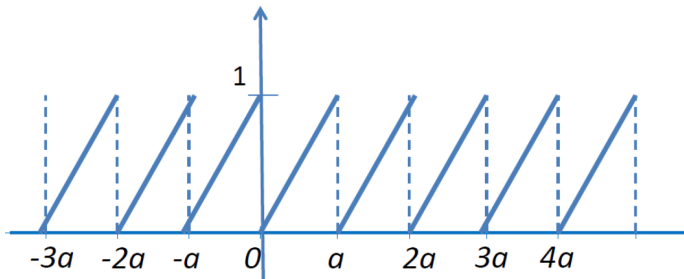
Soit  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  telle que :

- ▶ il existe une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  de réels où  $f$  est  $C^1$  sur  $(]a_n; a_{n+1}[)_{n \in \mathbb{Z}}$
- ▶ les discontinuités  $\sigma_n = f(a_n^+) - f(a_n^-)$  sont d'amplitudes finies pour tout  $n$ .

Alors :

$$T'_f = T_{f'} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sigma_n \delta_{a_n}$$

Exemple : fonction en dents de scie de période  $a$  ( $a > 0$ )



$$T'_f = \frac{1}{a} - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{na}$$

## Convergence d'une suite de distributions

### Définition : convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

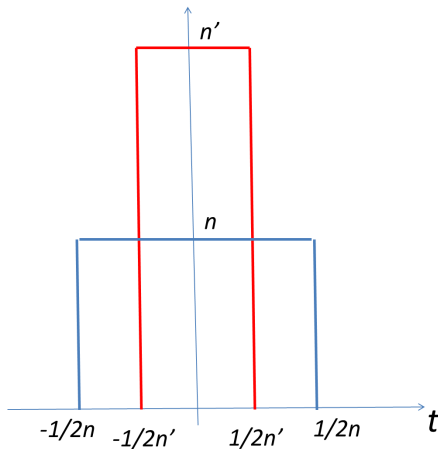
On dit qu'une suite  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  vers une distribution  $T$  si et seulement si

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \langle T_n, \varphi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle T, \varphi \rangle$$

### Exemples

- ▶  $T_n = \delta_{a_n}$  avec  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$  ;
- ▶  $T_n = T_{f_n}$  avec  $f_n(x) = n \mathbf{1}_{[-1/2n; +1/2n]}(x)$  ;
- ▶  $T_n = T_{f_n}$  avec  $f_n(x) = \sin(2\pi n x)$ .

Convergence de  $f_n = n\mathbb{1}_{[-1/2n; +1/2n]}(x)$





### Convergence dans $L^p(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions qui converge vers  $f$  dans  $L^p(\mathbb{R})$ .

Alors

$$T_{f_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} T_f$$

### Convergence ponctuelle et dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions qui converge simplement vers  $f$ , i.e.  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$  p.p. S'il existe  $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  telle que

$$\forall n, |f_n(x)| \leq g(x) \text{ p.p.,}$$

Alors

$$T_{f_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} T_f$$

## Convergence des dérivées

$$\text{Si } T_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} T, \text{ alors : } \forall k \in \mathbb{N}, T_n^{(k)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} T^{(k)}$$

## Dérivée d'une série de distributions

Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions continues, dérivables p.p., et de dérivées localement intégrables, telle que

$(T_n)_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  une suite quelconque de distributions. On pose

$$\sum_{n=0}^N f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$$

Alors

$$\sum_{n=0}^N f'_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} T'_f$$

## Série de Fourier de distributions

### Position du problème

- ▶ Soit  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite de  $\mathbb{C}$ , et  $a > 0$ . On considère la série

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{j2\pi n \frac{x}{a}}$$

- ▶ Au sens des fonctions, une condition **nécessaire** de convergence est que  $c_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .
- ▶ Si la série converge, elle est égale (dans  $L^2(\mathbb{R})$ ) à une fonction périodique de période  $a$ .
- ▶ Qu'en est-il au sens des distributions ?

## Distribution périodique

On dit qu'une distribution est **périodique de période  $a$**  si et seulement si

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

où  $\tau_a T$  est la translatée de  $T$  définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a} \varphi \rangle$$

avec

$$\tau_{-a} \varphi(x) = \varphi(x + a)$$

## Suite à croissance lente

On dit qu'une suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est à **croissance lente** si et seulement si il existe  $A > 0$  et  $k \in \mathbb{N}$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |c_n| \leq A|n|^k$$

## Convergence d'une série au sens des distributions

Soit  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite de  $\mathbb{C}$  à **croissance lente**, et  $a > 0$ . On pose

$$f_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{j2\pi n \frac{x}{a}}$$

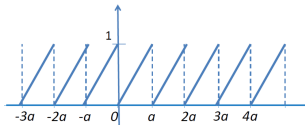
Alors  $T_{f_N}$  converge dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  vers une distribution périodique de période  $a$  lorsque  $N \rightarrow +\infty$ .

## Développement en série de Fourier du peigne de Dirac

Objectif : exprimer  $\Delta_a$  sous la forme

$$\Delta_a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{j2\pi n \frac{x}{a}} \quad (\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}))$$

## Fonction en dents de scie de période $a$ ( $a > 0$ )



$f$  périodique de période  $a$ , avec  $f \in L^2([0, a])$ . On a donc

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{j2\pi n \frac{x}{a}} = \frac{1}{2} + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{e^{j2\pi n \frac{x}{a}}}{j\pi n} \quad (\text{convergence dans } L^2(\mathbb{R}))$$

c'est-à-dire  $\sum_{n=-N}^N f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2(\mathbb{R})} f$ , avec  $f_0(x) = \frac{1}{2}$  et  $f_n(x) = \frac{e^{j2\pi n \frac{x}{a}}}{j\pi n}$ ,  $n \neq 0$ .

On a donc aussi :

$$\sum_{n=-N}^N f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$$

D'où :

$$\sum_{n=-N}^N f'_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} T'_f$$

On a ainsi

$$T'_f = \frac{1}{a} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} e^{j2\pi n \frac{x}{a}} \text{ (convergence dans } \mathcal{D}') \text{)}$$

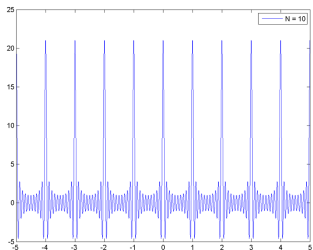
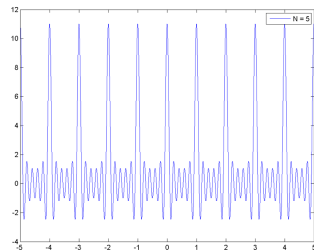
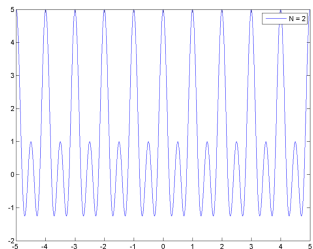
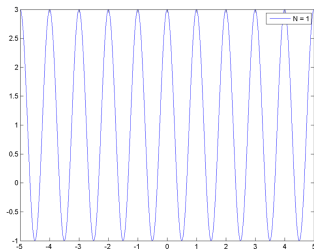
Par ailleurs, on a vu que :

$$T'_f = \frac{1}{a} - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{na} = \frac{1}{a} - \Delta_a$$

On a donc :

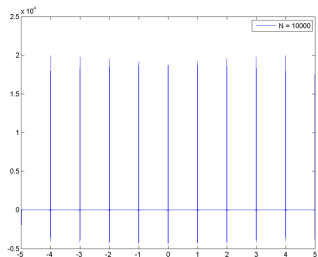
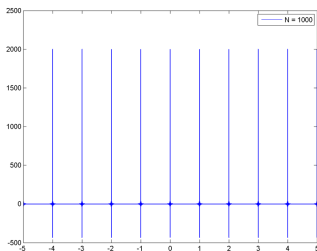
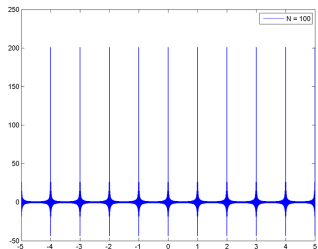
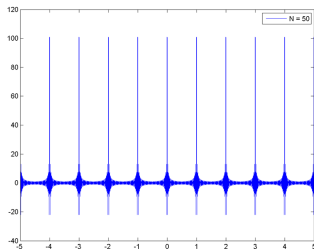
$$\Delta_a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{na} = \frac{1}{a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{j2\pi n \frac{x}{a}}$$

## Illustration de la convergence : $N = 1, 2, 5, 10$ .





## Illustration de la convergence : $N = 50, 100, 1000, 10000$ .



## Transformée de Fourier de distributions

### Cas d'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$

Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors

- ▶  $\hat{f}$  est continue, donc  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})_{\text{loc}}$  et définit une distribution régulière ;
- ▶ Formellement,

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \langle T_{\hat{f}}, \varphi \rangle = \langle T_f, \hat{\varphi} \rangle$$

- ▶ Cette expression a-t-elle un sens ?

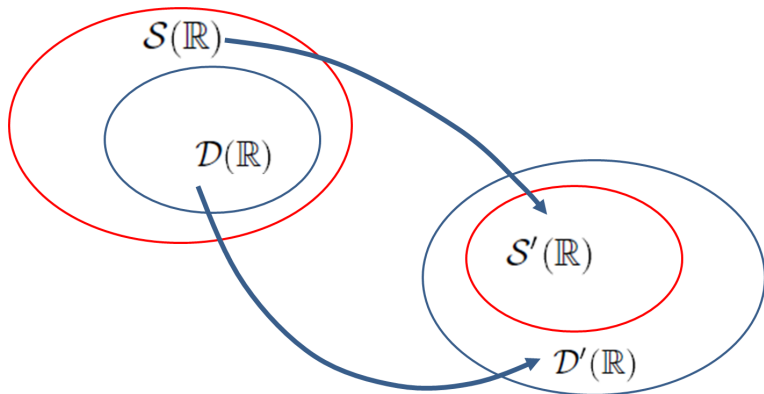
### Distributions tempérées

On appelle **distribution tempérée** sur  $\mathbb{R}$  toute application  $T$  **linéaire** et **continue** de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ).

On note  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  l'espace des distributions. On a :

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

Schématiquement :



## Transformée de Fourier d'une distribution tempérée

Soit  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . On pose :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle$$

Alors  $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .  $\hat{T}$  est la **transformée de Fourier de  $T$**  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

## Transformée de Fourier inverse dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Soit  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . On pose :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle$$

## Propriété de la Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

La transformée de Fourier est une application linéaire, bijective et bicontinue de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , et on a :

$$\forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \hat{\hat{T}} = \check{\check{T}} = T$$

### Lien entre transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et dans $L^1(\mathbb{R})/L^2(\mathbb{R})$

Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$  (ou  $L^2(\mathbb{R})$ ). Alors  $T_f$  est tempérée, et

$$\widehat{T_f} = T_{\widehat{f}}$$

### Conséquence

La transformée de Fourier d'une fonction de  $L^1(\mathbb{R})$  ou de  $L^2(\mathbb{R})$  peut être considérée indifféremment au sens des fonctions ou au sens des distributions.

## Propriétés de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

- ▶ Pour tout  $1 \leq p \leq +\infty$ , si  $f \in L^p(\mathbb{R})$  alors

$T_f$  est une **distribution tempérée**,

et admet donc une transformée de Fourier.

☞ toute fonction de  $L^p(\mathbb{R})$  (y compris de  $L^\infty(\mathbb{R})$ ) admet une transformée de Fourier au sens des distributions, même sans admettre de transformée de Fourier au sens des fonctions.

- ▶ Soit  $f$  une fonction à **croissante lente**, c'est-à-dire qu'il existe  $A > 0$  et  $k \in \mathbb{N}$  tels que

$$|f(x)| \leq A|x|^k, \quad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}$$

Alors  $T_f$  est une **distribution tempérée**.

## Exemple : transformée de Fourier de fonctions sinusoidales

Soit  $f_0 \in \mathbb{R}$ . On pose :  $f(x) = e^{j2\pi f_0 x}$ .

## Transformée de Fourier et dérivée dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Soit  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \widehat{T^{(k)}} = (-2j\pi x)^k \widehat{T}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \widehat{T^{(k)}} = (2j\pi f)^k \widehat{T}$$

## Transformée de Fourier et translation dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Soient  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , et  $a \in \mathbb{R}$ . Alors

$$\widehat{\tau_a T} = e^{-2j\pi a f} \widehat{T}$$

$$\tau_a \widehat{T} = e^{2j\pi a x} T$$

## Transformée de Fourier et convolution de distributions

### Convolution de distributions

On peut définir le produit de convolution de distributions (non traité ici).

Résultats :

- $\delta$  est l'élément neutre, c'est-à-dire, pour toute distribution  $T$  :

$$\delta * T = T$$

- translation : pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$\delta_a * T = \tau_a T.$$

et pour toute fonction  $f$ ,

$$(\delta_a * f)(x) = (\tau_a f)(x) = f(x - a)$$



## Lien entre transformée de Fourier et convolution de distributions

Dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})/\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Soient  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  et  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Alors

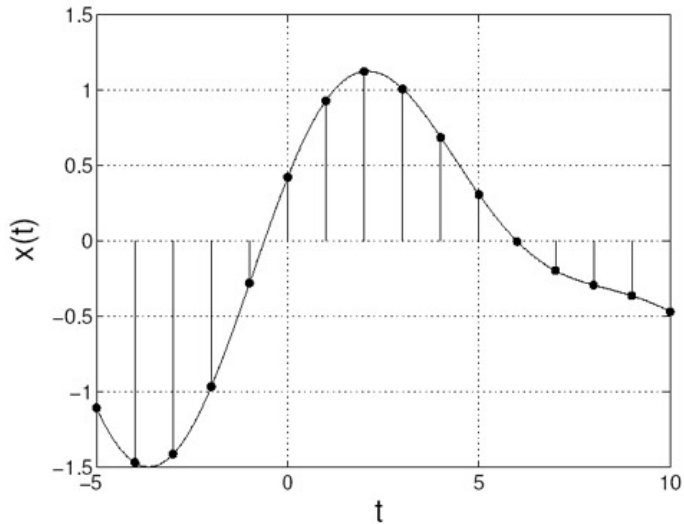
$$\begin{aligned}\widehat{\varphi * T} &= \widehat{\varphi} \widehat{T} \\ \widehat{\varphi T} &= \widehat{\varphi} * \widehat{T}\end{aligned}$$

Dans  $L^2(\mathbb{R})$

Soient  $f$  et  $g$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ . Alors, **au sens des distributions** :

$$\begin{aligned}\widehat{f * g} &= \widehat{f} \widehat{g} \\ \widehat{fg} &= \widehat{f} * \widehat{g}\end{aligned}$$

## Application à l'échantillonnage d'un signal



## Application à l'échantillonnage d'un signal

### Signal échantillonné

Soit  $s(t)$  un signal (une fonction) intégrable sur  $\mathbb{R}$ , à bande limitée, c'est-à-dire telle que

$$\text{Supp}(\hat{s}) \subset [-B; +B].$$

Donc  $s \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Soit  $T_e > 0$ . Le **signal échantillonné** à la période  $T_e$  est défini par

$$s_e = s \Delta_{T_e} = s \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{kT_e} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(kT_e) \delta_{kT_e}$$

## Transformée de Fourier du signal échantillonné

2 expressions de  $\hat{s}_e$  :

- transformée de Fourier discrète :

$$\hat{s}_e(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(kT_e) e^{-j2\pi k T_e f}$$

▸

$$\hat{s}_e(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{s}(f - kF_e)$$

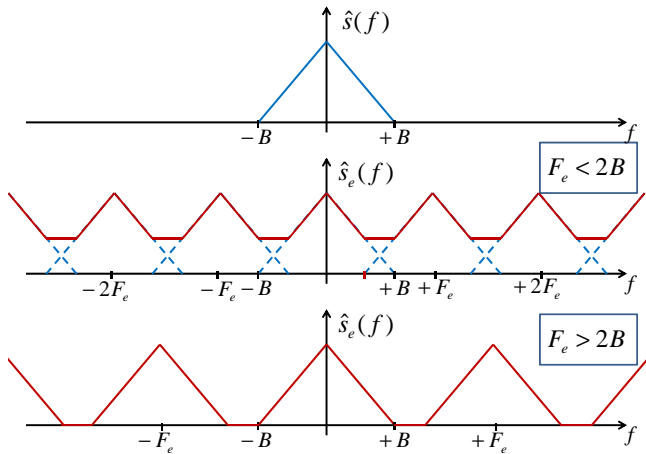
$F_e = 1/T_e$  : fréquence d'échantillonnage.

☞ échantillonner le signal revient à périodiser sa transformée de Fourier.

## 2 situations possibles

- $F_e < 2B$  : les différentes courbes de  $\hat{s}(f)$  se superposent : **recouvrement**  
☞ on ne parvient pas à retrouver la forme de  $\hat{s}(f)$  ☞ on ne peut pas reconstituer  $s(t)$ .
- $F_e \geq 2B$  : les courbes ne se superposent pas : **pas de recouvrement** ☞ on peut retrouver  $\hat{s}(f)$  par filtrage ☞ on peut reconstituer  $s(t)$ .

## Exemple de (non-)recouvrement



## Théorème d'échantillonnage (Nyquist)

*un signal à bande limitée  $[-B; B]$  peut être complètement reconstitué par ses échantillons  $(s(kT_e))_{k \in \mathbb{Z}}$  si  $F_e \geq 2B$ .*

## Formule d'interpolation de Shannon

Par filtrage du signal échantillonné  $s_e$ , on obtient :

$$s(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(kT_e) \frac{\sin(\pi F_e(t - kT_e))}{\pi F_e(t - kT_e)}$$