

Exercice 1.

Afin de tester la satisfaction des clients à service donné, on effectue un sondage et on définit une variable aléatoire Y_i de la façon suivante :

$$\begin{aligned} Y_i &= 1 \text{ si le client } i \text{ est satisfait} \\ Y_i &= 0 \text{ si le client } i \text{ n'est pas satisfait} \end{aligned}$$

A l'aide d'un échantillon (Y_1, \dots, Y_n) de même loi de Bernoulli

$$\begin{aligned} P[Y_i = 0] &= \theta \\ P[Y_i = 1] &= 1 - \theta \end{aligned}$$

on désire tester les hypothèses $H_0 : \theta = \theta_0 = 0.52$ et $H_1 : \theta = \theta_1 = 0.48$.

1. Construire la vraisemblance des observations y_1, \dots, y_n et expliciter la région de rejet de H_0 du test de Neyman-Pearson (pour l'application numérique, on choisira un risque de première espèce $\alpha = 0.1$).
2. Déterminer la puissance de ce test.

Exercice 2. Soit X_1, \dots, X_n un échantillon d'une loi normale de moyenne m et de variance σ^2 . On veut faire le test d'hypothèses binaires suivant :

$$\begin{aligned} H_0 &: m = m_0; \sigma^2 \text{ quelconque} \\ H_1 &: m \neq m_0; \sigma^2 \text{ quelconque} \end{aligned}$$

Pour construire le test, on retient le test du rapport des vraisemblances maximales ou test GLR (Generalized Likelihood Ratio).

1. On suppose $m = m_0$ connu. Rappeler l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) de σ^2 .
2. Lorsque m et σ^2 sont inconnus, rappeler leurs estimateurs du maximum de vraisemblance.
3. Donner la forme du test GLR.
4. En décomposant $\sum_{i=1}^n (x_i - m_0)^2$, montrer que l'on peut définir un test équivalent à l'aide de la statistique

$$T_n = \frac{\bar{X} - m_0}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}}$$

5. On rappelle que sous l'hypothèse H_0 , les deux variables aléatoires

$$U = \frac{\bar{X} - m_0}{\sigma/\sqrt{n}} \text{ et } V = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}$$

ont des lois connues $U \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $V \sim \chi_{n-1}^2$. En déduire la loi de T_n . Soit $\alpha = 5\%$ le risque de première espèce. Donner la région critique du test effectué à l'aide de T_n .

Exercice 3.

On considère les observations $x_i, i = 1, \dots, n$ (avec $n = 10$) définies par

$x_1 = 1$	$x_2 = 0$	$x_3 = 1$	$x_4 = 1$	$x_5 = 1$	$x_6 = 1$	$x_7 = 1$	$x_8 = 2$	$x_9 = 0$	$x_{10} = 0$
-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	--------------

On suppose que les variables aléatoires associées à ces observations sont indépendantes et issues de la même loi de Poisson $P(\lambda)$. On rappelle que si X suit une loi de Poisson de paramètre λ , on a $E[X] = \text{var}[X] = \lambda$ et $\varphi_X(t) = E[e^{itX}] = \exp[\lambda(e^{it} - 1)]$. On désire tester les deux hypothèses

$$\begin{cases} H_0 : \lambda = \lambda_0 \text{ (absence de planète)} \\ H_1 : \lambda = \lambda_1 \text{ (présence de planète)} \end{cases}$$

avec $\lambda_1 < \lambda_0$.

1. Vérifier que la statistique du test de Neyman-Pearson peut s'écrire $T = \sum_{i=1}^n X_i$ et déterminer la région critique associée.
2. Déterminer la fonction caractéristique de T et en déduire que T suit une loi de Poisson que l'on précisera sous chaque hypothèse.
3. Préciser le test de puissance maximale tel que le risque de première espèce α vérifie $\alpha \leq 0.05$. On précisera le risque maximal α , la décision prise au vu des données $x_i, i = 1, \dots, 10$ et la puissance de ce test. Pour les applications numériques, on prendra $\lambda_0 = 1$ et $\lambda_1 = 0.1$.
4. On suppose que n est suffisamment grand pour pouvoir utiliser les résultats du théorème de la limite centrale.
 - Donner la loi approchée de T issue de ce théorème.
 - Quelle est la valeur du seuil obtenue lorsqu'on confond la loi de T avec son approximation. En comparant avec la valeur obtenue précédemment, dire ce que vous pensez de cette approximation pour $n = 10$.
 - Déterminer les courbes COR (caractéristiques opérationnelles du récepteur) découlant de cette loi approchée. On posera

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

et on notera $\Phi^{-1}(x)$ son inverse. En supposant que n est suffisamment grand pour faire les approximations nécessaires, déterminer les paramètres qui influent sur la performance asymptotique ($n \rightarrow \infty$) du test. De ces deux cas

Premier Cas : $n = 100, \lambda_0 = 1, \lambda_1 = 0.1$

Deuxième Cas : $n = 100, \lambda_0 = 2, \lambda_1 = 1.1$

indiquer celui qui engendre la meilleure performance.

Correction exercice 1

1) La vraisemblance de ce problème est

$$\begin{aligned} L(y_1, \dots, y_n; \theta) &= \prod_{i=1}^n P[Y_i = y_i] \\ &= \prod_{i=1}^n \theta^{1-y_i} (1-\theta)^{y_i} \\ &= \theta^{n-n\bar{y}} (1-\theta)^{n\bar{y}} \end{aligned}$$

avec

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

On rejette donc H_0 si

$$\frac{L(y_1, \dots, y_n; \theta_1)}{L(y_1, \dots, y_n; \theta_0)} > K_\alpha \iff \bar{y} \ln \left(\frac{\theta_0}{\theta_1} \frac{1-\theta_1}{1-\theta_0} \right) > S_\alpha$$

Pour $\theta_0 = 0.52$ et $\theta_1 = 0.48$, on a

$$\frac{\theta_0}{\theta_1} \frac{1-\theta_1}{1-\theta_0} = \left(\frac{0.52}{0.48} \right)^2 > 1$$

donc on rejette H_0 si

$$\bar{y} > \nu_\alpha$$

où ν_α est un seuil dépendant du risque de première espèce α . Pour déterminer ce seuil, on se fixe une valeur de α

$$\begin{aligned} \alpha &= P[\text{Rejeter } H_0 | H_0 \text{ vraie}] \\ &= P[\bar{Y} > \nu_\alpha | \theta = \theta_0] \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de la limite centrale, on peut approcher la loi de \bar{Y} comme suit

$$\bar{Y} \sim \mathcal{N} \left(1-\theta, \frac{\theta(1-\theta)}{n} \right)$$

Donc

$$\begin{aligned} \alpha &= P \left[U = \frac{\bar{Y} - (1-\theta_0)}{\sqrt{\frac{\theta_0(1-\theta_0)}{n}}} > \frac{\nu_\alpha - (1-\theta_0)}{\sqrt{\frac{\theta_0(1-\theta_0)}{n}}} \middle| U \sim \mathcal{N}(0, 1) \right] \\ &= 1 - F \left(\frac{\nu_\alpha - (1-\theta_0)}{\sqrt{\frac{\theta_0(1-\theta_0)}{n}}} \right) \end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{\nu_\alpha - (1-\theta_0)}{\sqrt{\frac{\theta_0(1-\theta_0)}{n}}} = F^{-1}(1-\alpha)$$

où F est la fonction de répartition d'une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, d'où

$$\nu_\alpha = \sqrt{\frac{\theta_0(1-\theta_0)}{n}} F^{-1}(1-\alpha) + (1-\theta_0)$$

2) La puissance du test est

$$\begin{aligned}\pi &= P[\text{Rejeter } H_0 | H_1 \text{ vraie}] \\ &= P[\bar{Y} > \nu_\alpha | \theta = \theta_1] \\ &= 1 - F\left(\frac{\nu_\alpha - (1 - \theta_1)}{\sqrt{\frac{\theta_1(1-\theta_1)}{n}}}\right)\end{aligned}$$

Correction exercice 2

1)

$$\tilde{\sigma}_{MV}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m_0)^2$$

2)

$$\hat{m}_{MV} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \hat{\sigma}_{MV}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

3) Le test GLR est défini par

$$\text{Rejet de } H_0 \text{ si } \frac{L(X_1, \dots, X_n; H_1)}{L(X_1, \dots, X_n; H_0)} > S_\alpha$$

c'est-à-dire

$$\text{Rejet de } H_0 \text{ si } \frac{(2\pi\hat{\sigma}_{MV}^2)^{-n/2} \exp\left[-\frac{1}{2\hat{\sigma}_{MV}^2} \sum (X_i - \bar{X})^2\right]}{(2\pi\tilde{\sigma}_{MV}^2)^{-n/2} \exp\left[-\frac{1}{2\tilde{\sigma}_{MV}^2} \sum (X_i - m_0)^2\right]} > K_\alpha$$

c'est-à-dire

$$\text{Rejet de } H_0 \text{ si } \frac{\tilde{\sigma}_{MV}^2}{\hat{\sigma}_{MV}^2} > S_\alpha \Leftrightarrow \frac{\sum (X_i - m_0)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} > S_\alpha$$

4) On décompose $\sum (X_i - m_0)^2$ comme suit

$$\begin{aligned}\sum (X_i - m_0)^2 &= \sum (X_i - \bar{X} + \bar{X} - m_0)^2 \\ &= \sum (X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - m_0)^2\end{aligned}$$

donc le test GLR est défini par

$$\begin{aligned}\text{Rejet de } H_0 \text{ si } \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - m_0)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} &> S_\alpha \Leftrightarrow T_n^2 > \mu_\alpha \\ &\Leftrightarrow T_n \in]-\infty, -\mu_\alpha[\cup]\mu_\alpha, \infty[\end{aligned}$$

5) La statistique T_n s'écrit sous la forme suivante :

$$T_n = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \frac{U}{\sigma\sqrt{V}} = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \frac{U}{\sqrt{\frac{V}{n-1}}}$$

où

$$W_n = \frac{U}{\sqrt{\frac{V}{n-1}}} \sim t_{n-1}$$

On en déduit

$$\text{Rejet de } H_0 \text{ si } W_n \in]-\infty, -c_\alpha[\cup]c_\alpha, \infty[$$

et

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= 1 - P[\text{rejeter } H_0 | H_0 \text{ vraie}] \\ &= P[\text{accepter } H_0 | H_0 \text{ vraie}] \\ &= P[|W_n| < c_\alpha | H_0 \text{ vraie}] = 0.95 \end{aligned}$$

Les tables de la loi de Student donnent la valeur de c_α .

Correction exercice 3

1) Des calculs élémentaires donnent

$$\text{Rejet de } H_0 \text{ si } T = \sum_{i=1}^n X_i < S_\alpha$$

2) La fonction caractéristique de T est

$$E[e^{itT}] = \prod_{j=1}^n E[e^{itX_j}] = \exp[n\lambda(e^{it} - 1)]$$

qui est la fonction caractéristique d'une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$ donc $T \sim P(n\lambda)$. Sous H_0 , on a $T \sim P(n\lambda_0) = P(10)$ et sous H_1 , on a $T \sim P(n\lambda_1) = P(1)$.

3) On a $\alpha = P[\text{rejeter } H_0 | H_0 \text{ vraie}] = P[T < S_\alpha | T \sim P(n\lambda_0) = P(10)]$. En analysant les tables de la loi de Poisson $P(10)$, on trouve

$$S_\alpha = 5 \Rightarrow \alpha = 0.0293 \text{ et } S_\alpha = 6 \Rightarrow \alpha > 0.05.$$

Donc le test est défini par

$$\text{Rejet de } H_0 \text{ si } T < 5$$

et le risque de première espèce associé est $\alpha = 0.0293 < 0.05$. Les données sont telles que $\sum_{i=1}^n x_i = 8$ et donc on accepte l'hypothèse H_0 avec $\alpha = 0.0293$. Le calcul de la puissance du test conduit à

$$\begin{aligned} \pi &= 1 - \beta = P[\text{rejeter } H_0 | H_1 \text{ vraie}] \\ &= P[T < 5 | T \sim P(1)] \\ &= \sum_{i=0}^4 p_i \sim 0.9963 \end{aligned}$$

La puissance du test est donc excellente.

4) a) Pour n grand, l'approximation normale est $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}(n\lambda, n\lambda)$.

b) On trouve $K_\alpha = n\lambda_0 + \sqrt{n\lambda_0}\Phi^{-1}(\alpha) \sim 4.8$. On trouve 4.8 au lieu de 5 et donc l'approximation est satisfaisante pour $n = 10$ (puisque T prend des valeurs discrètes avoir $T < 5$ ou $T < 4.8$, c'est la même chose).

c) Un calcul simple conduit à

$$\text{PD} = 1 - \beta = \Phi\left(\sqrt{n}\frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\sqrt{\lambda_1}} + \sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda_1}}\Phi^{-1}(\alpha)\right)$$

c'est-à-dire asymptotiquement

$$\text{PD} = 1 - \beta \sim \Phi\left(\sqrt{n}\frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)$$

Le paramètre qui règle la performance asymptotique du test est donc $\sqrt{n}\frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\sqrt{\lambda_1}}$. Dans les deux cas proposés $\lambda_0 - \lambda_1 = 0.9$ et $n = 100$. Le premier test est meilleur car PD est une fonction décroissante de λ_1 lorsque $\lambda_0 - \lambda_1$ et n sont fixés.