EXAMEN TRAITEMENT DU SIGNAL - 1SN

Jeudi 18 Janvier 2018

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 (5 points)

Pour $f_0 > 0$, on considère un signal déterministe

$$x(t) = f_0 \left[\frac{\sin(\pi f_0 t)}{\pi f_0 t}\right]^2 = f_0 \text{sinc}^2(\pi f_0 t).$$

1. On échantillonne le signal $x(t)$ avec la fréquence d'échantillonnage $F_e = 1/T_e$. Déterminer la transformée de Fourier du signal échantillonné

$$x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)\delta(t - kT_e)$$

notée $X_e(f)$. Représenter graphiquement $X_e(f)$ lorsque $F_e = 4f_0$.

2. On construit le signal numérique $y(kT_e)$ de la manière suivante

$$y(kT_e) = \begin{cases} x(kT_e) \text{ si } k \text{ pair} \\ -x(kT_e) \text{ sinon.} \end{cases}$$

c'est-à-dire $y(kT_e) = (-1)^k x(kT_e)$. Montrer que la transformée de Fourier du signal échantillonné $y_e(t)$ est définie par

$$Y_e(f) = X_e\left(f + \frac{F_e}{2}\right).$$

Représenter $Y_e(f)$ pour $F_e = 4f_0$.

3. Comment peut-on restituer le signal $x(t)$ à partir du signal échantillonné $x_e(t) + y_e(t)$ avec $y(kT_e) = (-1)^k x(kT_e)$?

Exercice 2 : Questions de cours (2 points)

- Qu'appelle-t'on formule d'interpolation de Shannon ? Quel est son intérêt ?
- Qu'est ce qu'un signal stationnaire ?
- Qu'est ce qu'un bruit blanc ?
- Qu'est ce qu'un filtre anti-repliement ? Est-il analogique ou numérique ?

Exercice 3 (3 points)

On considère un signal aléatoire stationnaire $X(t)$ de moyenne nulle et de fonction d'autocorrélation $R_X(\tau) = \Lambda_1(\tau)$ avec

$$\Lambda_1(\tau) = \begin{cases} 1-\tau \text{ si } 0 \leq \tau \leq 1 \\ 1+\tau \text{ si } -1 \leq \tau \leq 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

et on forme le signal aléatoire

$$Y(t) = \int_{t-2}^{t} X(u)du$$

- Montrer que $Y(t)$ est obtenu par filtrage linéaire de $X(t)$ avec un filtre dont on déterminera la fonction de transfert et la réponse impulsionnelle.
- Montrer que la densité spectrale de puissance de $X(t)$ s'écrit

$$s_Y(f) = \frac{[1-\cos(2\pi f)]\,[(1-\cos(4\pi f)]}{4\pi^4 f^4}$$

On rappelle la relation $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.

Transformée de Fourier

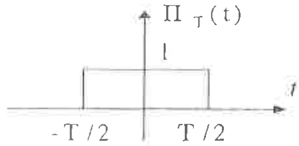
$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-i2\pi f t} dt \qquad x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{i2\pi f t} df$$

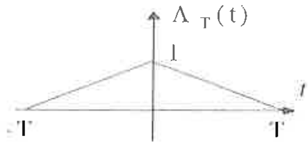
	T.F.	
$x(t)$ réelle paire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ réelle paire
$x(t)$ réelle impaire	$\rightleftharpoons$	$X(f)$ imaginaire pure impaire
$x(t)$ réel	$\rightleftharpoons$	$\left\{ \begin{array}{c} \mathrm{Re}\{X(f)\} \text{ paire} \\ \mathrm{Im}\{X(f)\} \text{ impaire} \\ \lvert X(f)\rvert \text{ pair} \\ \arg\{X(f)\} \text{ impaire} \end{array} \right.$
$ax(t) + by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) e^{-i2\pi f t_0}$
$x(t) e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t) \,.\, y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f) \,.\, Y(f)$
$x(at)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{f}{a}\right)$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval
$\int_{\mathbb{R}} x(t) y^*(t) dt = \int_{\mathbb{R}} X(f) Y^*(f) df$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$

Série de Fourier
$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \rightleftharpoons X(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta(f - n f_0)$
avec $c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt$

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi f t_0}$
$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T \frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} = T \sin c(\pi T f)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T \sin c^2(\pi T f)$
$B \sin c(\pi B t)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B \sin c^2(\pi B t)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$





!!!!!! Attention !!!!!

$\Pi_T(t)$ est de support égal à T.
$\Lambda_T(t)$ est de support égal à $2T$
et on a $\Pi_T(t) * \Pi_T(t) = T\,\Lambda_T(t)$

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } t \neq 0 \\ +\infty \text{ si } t = 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(t)\, dt = 1 \\ \delta(t - t_0) f(t) &= \delta(t - t_0) f(t_0) \\ \delta(t - t_0) * f(t) &= f(t - t_0) \end{aligned}$$

3