Recherche de couples propres

2017–2018

$\lambda \in \mathbb{C}$ valeur propre de A : $\exists x\mathbb{C}^n,\ x \neq 0,\ A \cdot x = \lambda x$
x est appelé vecteur propre associé à λ.

- Résultats ayant une signification physique : mode de vibration d'une structure, traitement du signal, ...
- Eléments de réponse pour vérifier une propriété numérique : conditionnement d'une matrice, convergence de méthodes itératives, ...

- Rechercher toutes les valeurs propres
  Exemple : les valeurs propres ont une signification physique
- Vérifier que les valeurs propres obéissent à une certaine propriété (le calcul exact n'est pas requis)
  Exemple : toutes les valeurs propres en module sont inférieures à 1
- Calculer la (les) plus grande(s) des valeurs propres en module et/ou la (les) plus petite(s), ainsi qu'une vecteur propre associé
  Exemple : calcul du nombre de conditionnement, algorithmes de classement de pages Web.

- Localisation des valeurs propres
- Algorithme de la puissance itérée / Cas d'une matrice symétrique $\Longrightarrow$ les valeurs propres sont obtenues successivement dans l'ordre décroissant de la valeur de leur module.
- Algorithme de Jacobi / Cas d'une matrice symétrique $\Longrightarrow$ toutes les valeurs propres sont obtenues simultanément.

- Si une valeur propre est complexe, l'algorithme échoue
- Si un sous-espace propre est de dimension supérieure à 1, obtention plusieurs fois de la même valeur propre, les vecteurs propres forment une base du sous-espace propre
- Procédé itératif convergent (suite de vecteurs) avec mise en œuvre d'un test d'arrêt et convergence pas toujours assurée quelque soit le vecteur de départ

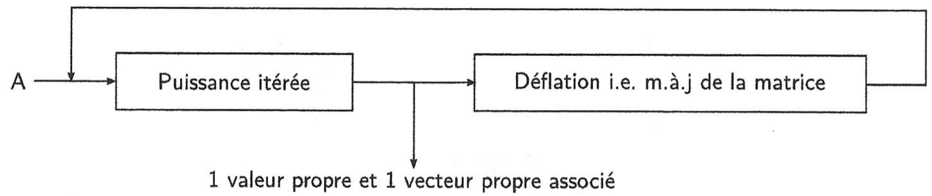
Algorithm 1 Méthode de la puissance itérée (Power method)

Input : Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
Output : (λ_1, v_1) couple propre associé à la plus grande (en module) valeur propre.
$x_0 \in \mathbb{R}^n$ donné et $p = 0$
$\beta_p = {}^t x_p \cdot A \cdot x_p$
repeat
  $y_{p+1} = A \cdot x_p$
  $x_{p+1} = Y_{p+1} / \|y_{p+1}\|$
  $\beta_{p+1} = {}^t x_{p+1} \cdot A \cdot x_{p+1}$
  $p = p + 1$
until $|\beta_{p+1} - \beta_p| / |\beta_p| < \varepsilon$
$\lambda_1 = \beta_{p+1}$ et $v_1 = x_{p+1}$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, les valeurs propres de A ont des images dans le plan complexe qui appartiennent à $\bigcup_{i=1}^{n} D_i$ avec : $D_i = \left\{ z \in \mathbb{C} / |z - a_{ii}| \leqslant \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}| \right\}$

Remarque : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si toutes les valeurs propres sont réelles, alors D_i et $\bigcup_{i=1}^{n} D_i$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$

$$\rho(A) \leqslant \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \rho(A) \leqslant \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$



Hypothèse : toutes les valeurs propres sont réelles, non nulles et distinctes en module. Soient $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$ les valeurs propres de A

- 1ère application de l'algorithme $\Longrightarrow$ λ_1 et un vecteur propre associé
- Opération de déflation : modification de la matrice
- 2ème application de l'algorithme $\Longrightarrow$ λ_2 et un vecteur propre associé
- En n passages, toutes les valeurs propres et une base de vecteurs propres associés

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{1}{\|A \cdot X_0\|} A \cdot \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i V_i \right) ;\ \alpha_1 = \dfrac{1}{\|A \cdot X_0\|} ;\ X_1 = \alpha_1 \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i V_i \\ X_p = \alpha_p \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^p V_i ;\ X_p = \alpha_p \lambda_1^p \left(c_1 V_1 + c_2 \left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^p V_2 + \ldots + c_n \left(\dfrac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^p V_n \right) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{r} \lim\limits_{p \to +\infty} \|X_{2p}\| = \lim\limits_{p \to +\infty} \alpha_{2p} \lambda_1^{2p} \|c_1 V_1\| = 1 \\ \lim\limits_{p \to +\infty} \alpha_{2p} \lambda_1^{2p} = \dfrac{1}{\|c_1 V_1\|} \end{array} \right\} \Longrightarrow \begin{array}{r} \lim\limits_{p \to +\infty} X_{2p} = \dfrac{c_1 V_1}{\|c_1 V_1\|} = W_1 \\ \text{où } W_1 \text{ est un vecteur propre} \\ \text{normé associé à } \lambda_1 \end{array}$$

Méthode applicable si $c_1 \neq 0$ (faible taux d'échec avec choix arbitraire de X_0)

Soit $B = A - \lambda_1 W_1 \cdot {W_1}^T$

- Rang de $B = n - 1$ $\quad (B \cdot W_1 = 0)$
- B est symétrique
- B possède les mêmes valeurs propres $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ que A et les mêmes vecteurs propres associés

L'application de l'algorithme de la puissance itérée à B produit λ_2 et W_2

$$C = B - \lambda_2 W_2 \cdot {W_2}^T \longrightarrow \lambda_3, W_3 \longrightarrow \ldots \longrightarrow \lambda_n, W_n$$

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, λ valeur propre de A et u vecteur propre associé. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ non valeur propre de A. Montrer que $\mu = \frac{1}{\lambda - \alpha}$ est valeur propre de $(A - \alpha I)^{-1}$ et que, pour cette matrice, u est vecteur propre associé à μ.
- Soit A symétrique et inversible. Soient $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$ les valeurs propres de A. On note $\|\cdot\|$ la norme vectorielle euclidienne.

  Quelles valeurs l'algorithme suivant permet-il d'obtenir ?

  i = 0, $x_i = \ldots$

  Boucler

  > Résolution du système $A \cdot y_{i+1} = x_i$
  > $x_{i+1} = \frac{y_{i+1}}{\|y_{i+1}\|}$
  > $\beta_{i+1} = {}^t x_{i+1} \cdot A \cdot x_{i+1}$
  > $i = i + 1$

  Jusqu'à convergence

Quelles valeurs l'algorithme suivant permet-il d'obtenir ?

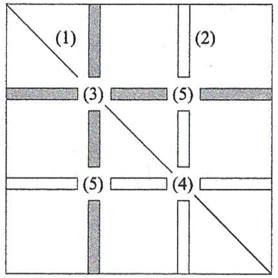
i = 0, $x_i = \ldots$

Boucler

> Résolution du système $(A - \alpha I) \cdot y_{i+1} = x_i$
> $x_{i+1} = \frac{y_{i+1}}{\|y_{i+1}\|}$
> $\beta_{i+1} = {}^t x_{i+1} \cdot A \cdot x_{i+1}$
> $i = i + 1$

Jusqu'à convergence

$A_{k+1} = {\Theta_k}^{-1} \cdot A_k \cdot \Theta_k$; quels sont les modifications entre k et $k+1$?



(1) $\quad a_{ip}^{(k+1)} = a_{pi}^{(k+1)} = C \cdot a_{ip}^{(k)} - S \cdot a_{jp}^{(k)} \quad \forall p = 1, \dots, n \qquad p \neq i, j$

(2) $\quad a_{jp}^{(k+1)} = a_{pj}^{(k+1)} = S \cdot a_{ip}^{(k)} + C \cdot a_{jp}^{(k)} \; \forall p = 1, \dots, n \qquad p \neq i, j$

(3) $\quad a_{ii}^{(k+1)} = C^2 \cdot a_{ii}^{(k)} - 2 \cdot C \cdot S \cdot a_{ij}^{(k)} + S^2 \cdot a_{jj}^{(k)}$

(4) $\quad a_{jj}^{(k+1)} = S^2 \cdot a_{ii}^{(k)} + 2 \cdot C \cdot S \cdot a_{ij}^{(k)} + C^2 \cdot a_{jj}^{(k)}$

(5) $\quad a_{ij}^{(k+1)} = a_{ji}^{(k+1)} = (C^2 - S^2) \cdot a_{ij}^{(k)} + C \cdot S \cdot \left(a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}\right)$

Procédé itératif : $\begin{cases} A_1 = A \\ A_{k+1} = \Theta_k^{-1} \cdot A_k \cdot \Theta_k \end{cases}$

…jusqu'à la convergence : $\lim_{k \to +\infty} A_k = D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Choix de Θ_k ? Une matrice orthogonale $(\Theta_k^{-1} = {}^t\Theta_k)$ car pour tout k :

- A_k est symétrique
- A_k possède les mêmes valeurs propres que A (vecteurs propres différents)

Pour obtenir les valeurs propres de A, il suffit donc que A_k converge vers une matrice diagonale.

Soient $A_k = \left[a_{ij}^{(k)}\right]$ et $S_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij}^{(k)}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} \left(a_{ii}^{(k)}\right)^2 \geqslant 0$

$\lim_{k \to +\infty} A_k = D \iff \lim_{k \to +\infty} S_k = 0$

Des transformations précédentes :

$$S_{k+1} - S_k = 2 \left(a_{ij}^{(k+1)}\right)^2 - 2 \left(a_{ij}^{(k)}\right)^2$$

Pour la convergence, les paramètres sont fixés t.q. $S_{k+1} - S_k$ soit le plus négatif possible :

- On maximise $a_{ij}^{(k)}$ $\Longrightarrow$ valeur de i et j

$$\left|a_{ij}^{(k)}\right| = \max_{l,m=1,\dots,n,\, l \neq m} \left|a_{lm}^{(k)}\right|$$

- On annule $a_{ij}^{(k+1)}$ $\Longrightarrow$ valeur de α

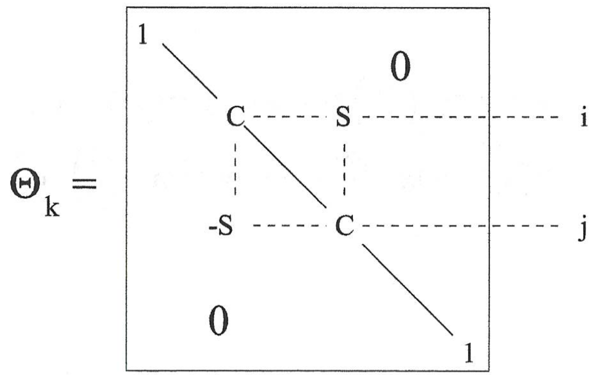
$$a_{ij}^{(k+1)} = (C^2 - S^2) \cdot a_{ij}^{(k)} + C \cdot S \cdot \left(a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}\right) = 0$$

  - Si $a_{jj}^{(k)} = a_{ii}^{(k)}$ $\qquad \alpha = signe(a_{ij}^{(k)}) \frac{\pi}{4}$
  - Si $a_{jj}^{(k)} \neq a_{ii}^{(k)}$ $\qquad tg(2\alpha) = \frac{2a_{ij}^{(k)}}{a_{jj}^{(k)} - a_{ii}^{(k)}}$ avec $|\alpha| < \frac{\pi}{4}$

Θ_k choisie comme une matrice de rotation, i.e. définie à partir de 3 paramètres :

$$[i, j, \alpha] = [\text{numéro de ligne, numéro de colonne, angle de la rotation}]$$

Soient $C = \cos(\alpha)$ et $S = \sin(\alpha)$



CSAD
CTD 2.1

Recherche de Couples propres

Théorème d'Hadamard-Gerchgörin.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, les vp de A (sont des images) ds le plan complexe qui $\in$ à $\cup D_i$ avec D_i

$$D_i = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \}.$$

Corollaire. $\rho(A) \leq \max_{i=1\dots n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ $\quad \rho(A) \leq \max_{j=1\dots n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

Méthode de la puissance itérée

$$x_{p+1} = \frac{A x_p}{\|A x_p\|}$$

V_i : vecteurs propres de A
λ_i : valeurs propres
$X_0 = \sum_{i=1} c_i V_i$

$$\alpha_p = \frac{\alpha_{p-1}}{\|A X_{p-1}\|}$$

$$X_p \longrightarrow \alpha_p \lambda_1^p C_1 V_1$$

Opération de déflation (Cas d'une matrice symétrique)

$$B = A - \lambda_1 W_1 . W_1^T$$

- $\operatorname{rg} B = n - 1$ $\quad (B . W_1 = 0)$.
- B est sym

B a les mêmes vp $\lambda_2, \dots \lambda_n$ que A et les mêmes $\vec{vp}$ associés.

$$BV_i = AV_i - \lambda_1 W_1 \underbrace{W_1^T V_i}_{=0} \quad \text{car } V_i \perp W_1.$$

Exercice :

① $(A - \alpha I)$ inversible ?

α n'est pas vp de $A \longrightarrow \det(A - \alpha I) \neq 0 \rightarrow A - \alpha I$ est inversible

$(\lambda$ vp $\rightarrow \lambda$ racine de $\det(A - \beta I))$.

$$(A - \alpha I) u = (\lambda - \alpha) u$$

$$(A - \alpha I)^{-1} (\lambda - \alpha) u = u.$$

$$(A - \alpha I)^{-1} u = \frac{1}{\lambda - \alpha} u.$$

② Cet algorithme va calculer la plus ~~grande~~ petite valeur propre de $A^{\ddagger}$ en module.

③ Cet algorithme permet d'obtenir :

$$\mu = \frac{1}{\Lambda - \alpha} \qquad \mu = \max_{i \in [\![1,n]\!]} \mu_i \qquad \mu = \max_{i \in [\![1,n]\!]} \left| \frac{1}{\lambda_i - \alpha} \right| = \frac{1}{|\lambda_k - \alpha|},$$

$$|\lambda_k - \alpha| = \min_{i \in [\![1,n]\!]} |\lambda_i - \alpha| \qquad \lambda_k \text{ vp de } \Lambda.$$

Donc λ_k vp la plus proche de α.

Algorithme de Jacobi pour une matrice symétrique

Obtention simultannée de toutes les vp.

Θ matrice orthogonale / orthonormale

$\Theta^T A \Theta$ m̂ vp que A

$$E_k = A_k - \mathrm{Diag}(A_k)$$

$$\|A\|_F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \qquad \|E_k\|_F = S_k.$$

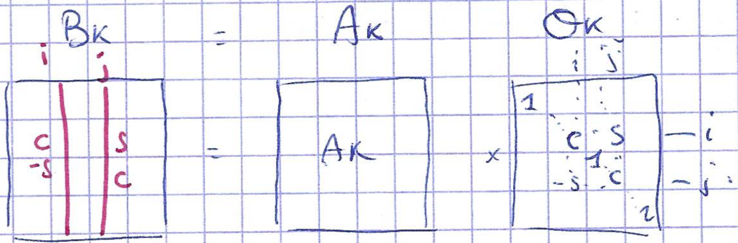
$$\lim_{k \to +\infty} S_k = 0 \iff \lim_{k \to +\infty} \|E_k\| = 0 \iff \lim_{k \to +\infty} E_k = 0.$$

$$\iff \lim_{k \to +\infty} A_k = \mathrm{diag}(A_k).$$

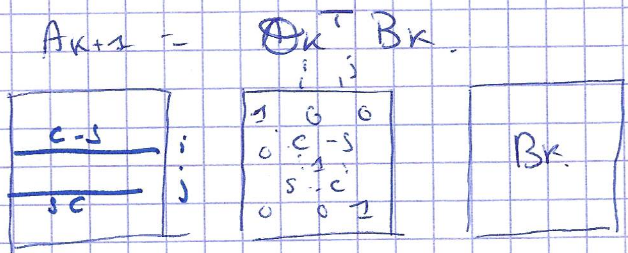
Rotation de Givens.

$$A_{k+1} = \Theta_k^T A_k \Theta_k.$$

$B_k = A_k \, \Theta_k$



$A_{k+1} = \Theta_k^T B_k.$



$S_{k^+} - S_k$
- que les termes hors diagonaux
- que les termes des lignes i et j / colonnes i et j de A_{k+1} et A_k.
- symétrique → termes de ligne i, j ×2. (Δa_{ij})

$$S_{k+1} - S_k = \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^{n} 2\left[(a_{ip}^{k+1})^2 - (a_{jp}^{k+1})^2\right] + 2(a_{ij})^2 - \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i,j}}^{n} 2\left[(a_{ip}^{k})^2 - (a_{jp}^{k})^2\right] - 2(a_{ij}^{k})^2.$$

$$= 2(a_{ij}^{k+1})^2 - 2(a_{ij}^{k})^2.$$