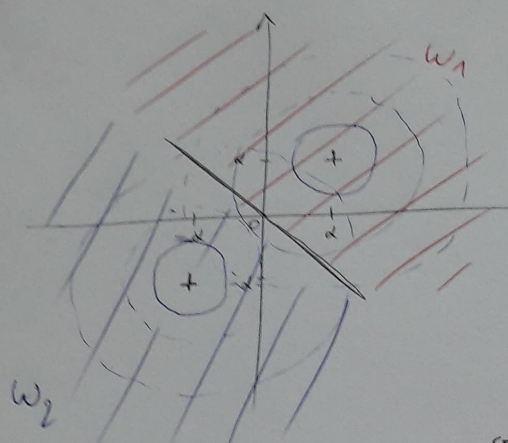
1) Classification bayésienne



On choisit d'assigner x à ω_1 si :

$$\frac{1}{(2\pi)|\Sigma|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu_1)^T\Sigma^{-1}(x-\mu_1)\right] \geq \frac{1}{(2\pi)|\Sigma|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu_2)^T\Sigma^{-1}(x-\mu_2)\right]$$

$$\Leftrightarrow (x-\mu_1)^T\Sigma^{-1}(x-\mu_1) \leq (x-\mu_2)^T\Sigma^{-1}(x-\mu_2)$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} \text{ donc } \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sigma^2 & 0 \\ 0 & 1/\sigma^2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1-\alpha & x_2-\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sigma^2 & 0 \\ 0 & 1/\sigma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1-\alpha \\ x_2-\alpha \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1+\alpha & x_2+\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sigma^2 & 0 \\ 0 & 1/\sigma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1+\alpha \\ x_2+\alpha \end{bmatrix}$$

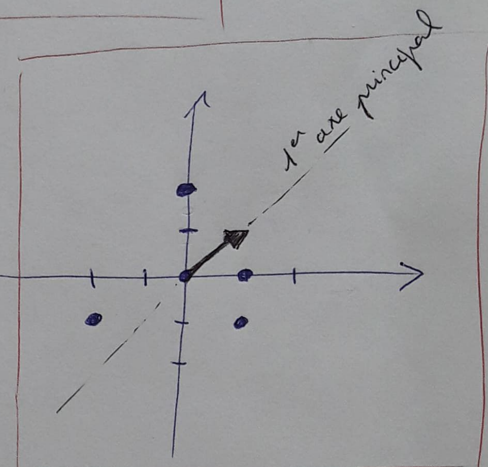
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{x_1-\alpha}{\sigma^2} & \frac{x_2-\alpha}{\sigma^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1-\alpha \\ x_2-\alpha \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \frac{x_1+\alpha}{\sigma^2} & \frac{x_2+\alpha}{\sigma^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1+\alpha \\ x_2+\alpha \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x_1-\alpha)^2 + (x_2-\alpha)^2}{\cancel{\sigma^2}} \leq \frac{(x_1+\alpha)^2 + (x_2+\alpha)^2}{\cancel{\sigma^2}}$$

$$\Leftrightarrow (x_1-\alpha)^2 + (x_2-\alpha)^2 \leq (x_1+\alpha)^2 + (x_2+\alpha)^2$$

$\Leftrightarrow$ $d(x, \mu_1) \leq d(x, \mu_2)$ (d : dist euclid)
$\hookrightarrow$ demi-plan hachuré en rouge : ω_1
sinon ω_2.

2) Analyse en composante principale



$$X = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \\ 6 & 5 \\ 5 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \mu = [5 \ 5] \Rightarrow X_c = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \frac{1}{n} X_c^T X_c = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{6}{5}-\lambda & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{6}{5}-\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{6}{5}-\lambda\right)^2 - \frac{1}{25} = \frac{36}{25} - \frac{12}{5}\lambda + \lambda^2 - \frac{1}{25}$$

$$= \lambda^2 - \frac{12}{5}\lambda + \frac{7}{5} = \frac{1}{5}(5\lambda^2 - 12\lambda + 7) = \frac{1}{5}(\lambda-1)(5\lambda-7)$$

1 est racine évidente $= (\lambda-1)\left(\lambda - \frac{7}{5}\right)$

valeurs propres : 1 et $\frac{7}{5}$

vecteur propre associé à la plus grande valeur propre : $\begin{bmatrix} \frac{6}{5}-\frac{7}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{6}{5}-\frac{7}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$

$\longrightarrow$ vecteur propre $[1 ; 1]$ (ou $\left[\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$)
$\rightarrow$ et 2ème axe, $\perp$ au 1er : $[1 ; -1]$

si on projette les données sur le 1er axe principal : $X_c \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \sum \cdot^2 = 14$

et sur le 2ème axe : $X_c [-1 \ 1] = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \sum \cdot^2 = 10$

CCL : Données assez faiblement corrélées sinon le 1er axe capturerait bcp + d'informations, or là le 1er axe capture $\frac{7/5}{1+\frac{7}{5}} = \frac{14}{10+14} = \frac{7}{12} \approx 58\%$ de l'info

3) Modélisation paramétriques de données

f : taux (en %) d'élèves décontractés
↳ $\in [0;1]$

$f(-1) = 0$ $\quad\quad$ $g(-1) = -a + b - c + d$

$f(0) = 0{,}5$ $\quad\quad$ $g(0) = d$

$f(-1) = 0{,}4$ $\quad\quad$ $g(1) = a + b + c + d$

$f(2) = 0{,}3$ $\quad\quad$ $g(2) = 8a + 4b + 2c + d$

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 0{,}4 \\ 0{,}3 \end{bmatrix}}$$

• <u>Résolution non demandée :</u>

... mais au cas où : $\hat{\beta}_{OLS} = A^{*}B = (A^TA)^{-1}A^TB$

$$A^TA = \begin{bmatrix} 66 & 32 & 18 & 8 \\ 32 & 18 & 8 & 6 \\ 18 & 8 & 6 & 2 \\ 8 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad\quad A^TB = \begin{bmatrix} 2{,}8 \\ 1{,}6 \\ 1 \\ 1{,}2 \end{bmatrix}$$

$$(A^TA)^{-1} = \frac{1}{\det(A^TA)} \begin{bmatrix} \text{... flemme} \\ \text{finalement} \end{bmatrix}$$