



Introduction aux télécommunications

Séquence 4

Zougari Belkhatat Hamza

Département Sciences du Numérique
2020-2021

Table des matières

1	Classification des modulations, notion d'enveloppe complexe	4
1.1	Transmissions en bande de base	4
1.2	Transmissions sur fréquence porteuse	4
1.3	Classification des modulations sur fréquence porteuse	6
1.3.1	Première classification	6
1.3.2	Deuxième classification	6
1.3.3	Troisième classification	7
1.3.4	Démodulation de modulation mono-dimensionnelle	7
1.3.5	Démodulation de modulation bi-dimensionnelle	7
1.3.6	Autres classifications des modulations sur fréquence porteuse	8
1.4	Enveloppe complexe associée au signal modulé	9
1.4.1	Modulations linéaires bi-dimensionnelles	9
1.4.2	DSP du signal modulé $x(t)$	10
1.4.3	Chaîne passe-bas équivalente	10
1.4.4	DSP du signal sur porteuse	11
1.4.5	DSP de l'enveloppe complexe correspondante	12
1.4.6	Canal passe-bas équivalent	12
2	Modulations linéaires sur fréquence porteuse : ASK, PSK, QAM et variantes	14
2.1	Modulation mono-dimensionnelle M-ASK	14
2.2	Modulations bi-dimensionnelles	15
2.2.1	Les voies transportant les a_k et b_k sont indépendantes	15
2.2.2	Les voies transportant les a_k et b_k sont liés	15
2.3	Constellation	15
2.3.1	Pour une modulation de type ASK	15
2.3.2	Pour une modulation de type PSK	15
2.3.3	Pour une modulation de type QAM	15
2.3.4	Représentation des symboles d_k possibles dans le plan (a_k, b_k)	16
2.4	Exemples	16
2.4.1	Modulation linéaire mono-dimensionnelle BPSK	16
2.4.2	Modulations linéaires bi-dimensionnelle QPSK	17
2.4.3	Modulations linéaires bi-dimensionnelle : 8-PSK (DVB-S2)	17
2.4.4	Modulations linéaires bi-dimensionnelle : 16-QAM (DVB-C)	18
2.5	Démodulation des modulations ASK, PSK, QAM	19
2.6	Autres exemples	19
2.6.1	Modulations hybrides QAM/PSK : M-APSK (DVB-S2, DVB-SX)	19
2.6.2	Modulations hiérarchiques (DVB-T et T2, DVB-S2)	19
3	Comparaison en termes d'efficacité spectrale	20
3.1	Modulations ASK, PSK, QAM	20
3.2	Comparaison de modulations mono et bi-dimensionnelles	20
3.2.1	Comparaison en termes d'efficacité spectrale (symboles supposés équiprobables et indépendants)	21
3.2.2	Comparaison en termes d'efficacité en puissance (symboles supposés équiprobables et indépendants)	21
3.3	Comparaison des modulations bi-dimensionnelles PSK et QAM pour un ordre $M=16$	22
3.3.1	Comparaison en termes d'efficacité spectrale (symboles supposés équiprobables et indépendants)	23
3.3.2	Comparaison en termes d'efficacité en puissance (symboles supposés équiprobables et indépendants)	23
3.4	Intérêt des modulations de type PSK	24
3.5	Intérêt des modulations de type ASK	24

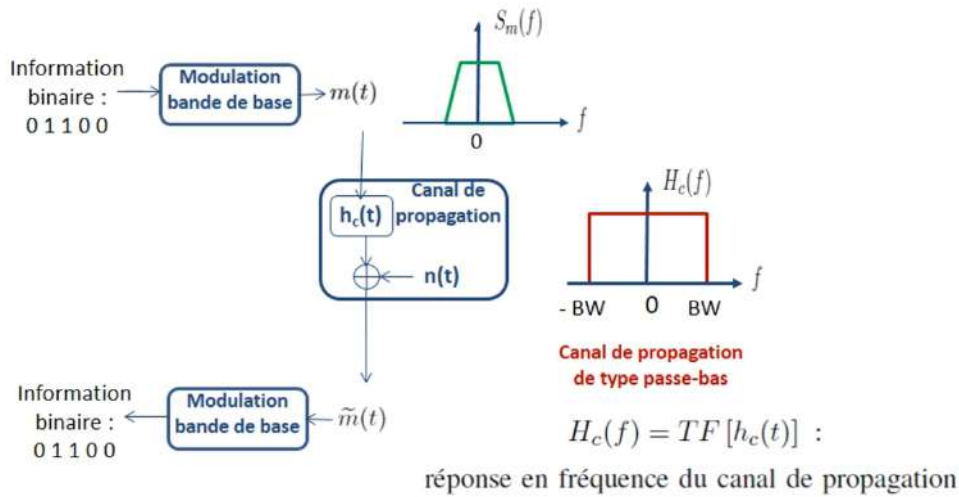
3.6	Intérêt des modulations hiérarchiques	25
3.6.1	Faire de la priorité de flux (dans les normes DVB-T ET DVB-T2)	25
3.6.2	Faire de la rétro-compatibilité entre les standards (dans les normes DVB-S2 ET DVB-SX)	26
4	Performances	26
4.1	Chaîne passe-bas équivalente	27
4.2	Performance des modulations sur porteuse	28
4.2.1	Chaîne passe-bas équivalente à la modulation M-ASK	28
4.2.2	Chaîne passe-bas équivalente à la modulation M-QAM (carrée, $M > 2$)	29
4.2.3	Chaîne passe-bas équivalente à la modulation M-PSK	30
4.2.4	Comparaison PSK/QAM en termes d'efficacité en puissance	31

L'objectif de cette séquence est d'introduire la notion de *transmission numérique sur fréquence porteuse*.

1 Classification des modulations, notion d'enveloppe complexe

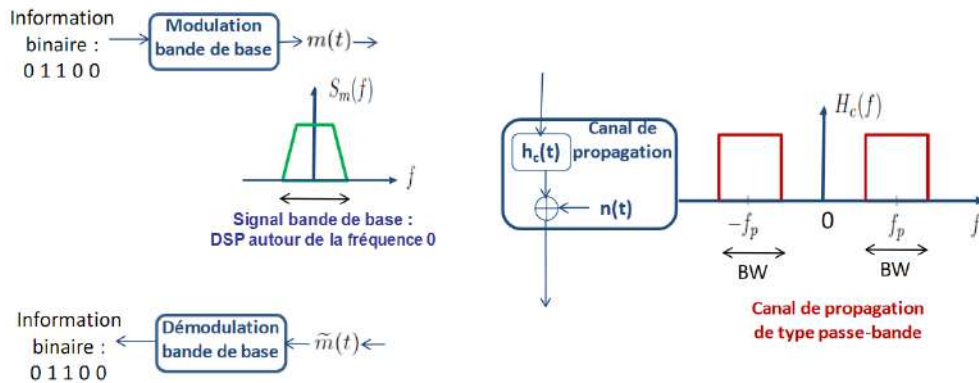
1.1 Transmissions en bande de base

On a étudié précédemment les transmissions en bande de base. Elles se caractérisent par la génération d'un signal contenant l'information binaire à transmettre, avec une densité spectrale de puissance autour de la fréquence 0. On va réaliser une *transmission en bande de base* lorsque le canal de propagation à traverser est de type **passé-bas**, c'est-à-dire qu'il laisse passer les fréquences sur une certaine bande autour de 0. La bande passante du canal de propagation est notée ici BW. Par convention, on donne toujours les bandes occupées côté fréquences positives.



1.2 Transmissions sur fréquence porteuse

Plusieurs raisons peuvent amener à devoir transporter la densité spectrale de puissance du signal sur des fréquences plus élevées, c'est-à-dire sur une bande de fréquence BW autour d'une certaine fréquence f_p et non plus autour de 0.



En voici quelques raisons :

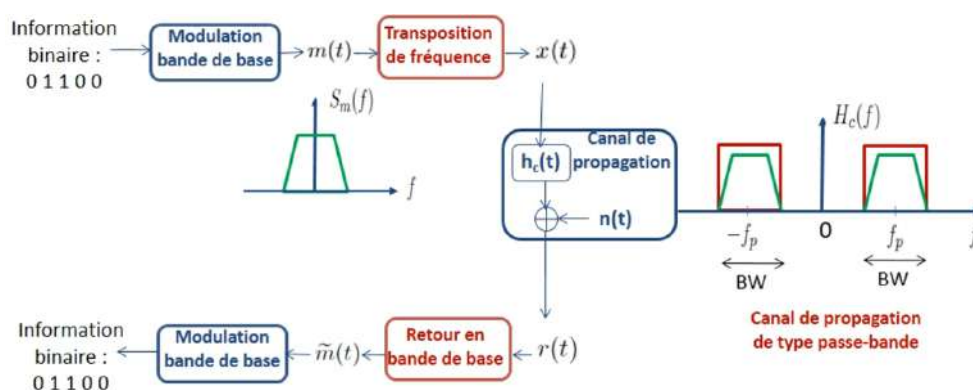
- **la nécessité de diminuer le diamètre des antennes dans le cas d'une transmission hertzienne** : le diamètre des antennes est en effet inversement proportionnel aux fréquences transmises.

Exemple : pour une fréquence de 20 kHz qui représente la fréquence maximale audible et un gain de 10 dB, la transmissions nécessiterait une antenne de 15 km de diamètre.

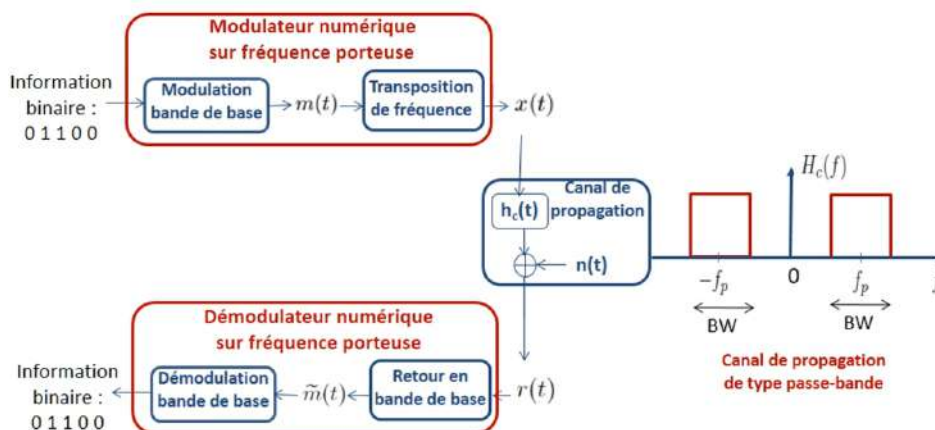
- **la nécessité de partager le canal de transmission entre plusieurs utilisateurs ou plusieurs systèmes** : une des façons de procéder est de faire ce partage en fréquence, en allouant à chaque utilisateur ou à chaque système une certaine bande de fréquences différente de celle des autres.

Exemple (radio FM) : une certaine bande de fréquences entre 87,5 MHz et 108 MHz est allouée à la radio FM, et dans cette bande de fréquences, plusieurs sous-bandes sont allouées aux différentes stations radio. On se positionne sur la bande souhaitée en cherchant la fréquence de milieu de bande. Le canal de propagation est alors de type *pas-se-bande* avec une certaine bande passante BW autour de la fréquence centrale f_p .

Solution : On doit donc amener la densité spectrale de puissance de notre signal généré en bande de base dans cette bande de fréquence. Cette opération est dite **transposition de fréquence**, et l'opération duale en réception est une opération dite de **retour en bande de base**.



En ajoutant ces opérations au modulateur bande de base et au démodulateur bande de base, on a donc un modulateur et un démodulateur numérique sur fréquence porteuse :



1.3 Classification des modulations sur fréquence porteuse

Il existe plusieurs manières de transporter le signal généré en bande de base sur fréquence porteuse, il existe également plusieurs manières de classer les différentes transpositions de fréquence possible.

1.3.1 Première classification

La première classification est issue des **modulations sur fréquence porteuse en analogique**, c'est-à-dire quand nous avons directement un message $m(t)$ analogique à transmettre, sans avoir à le construire à partir d'une information binaire. Dans ce cas le modulateur sur fréquence porteuse se résume sur la partie transposition de fréquence, et cette transposition de fréquence est réalisé en utilisant un cosinus porteur la fréquence f_p , fréquence centrale de la bande allouée à la transmission, et en venant modifier un de ces paramètres au rythme du message à transmettre :

- si c'est l'amplitude du cosinus porteur qui varie linéairement au rythme du message $m(t)$ on parle de **modulation d'amplitude** :

$$\begin{aligned} x(t) &= Am(t) \cos(2\pi f_p t) & : & \text{Modulation d'amplitude sans porteuse} \\ x(t) &= (A + m(t)) \cos(2\pi f_p t) \quad , \quad A \geq |m(t)|_{\max} & : & \text{Modulation d'amplitude avec porteuse} \end{aligned}$$

- si c'est sa phase, on parle de **modulation de phase** :

$$x(t) = A \cos(2\pi f_p t + k_p m(t))$$

- si c'est sa fréquence instantanée, notée $F_i(t)$, on parle de **modulation de fréquence** :

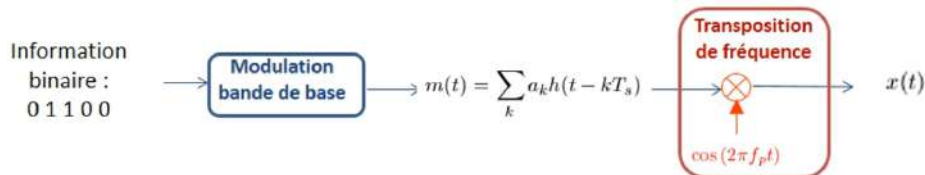
$$F_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi_i(t)}{dt} = f_p + k_f m(t) \quad (\text{fréquence instantanée})$$

$$\text{avec } x(t) = A \cos(\underbrace{2\pi f_p t + 2\pi k_f \int_0^t m(u) du}_{\Phi_i(t)})$$

Le message $m(t)$ est appelé *signal modulant* car il vient moduler le cosinus porteur, et le signal résultant $x(t)$ est appelé *signal modulé*.

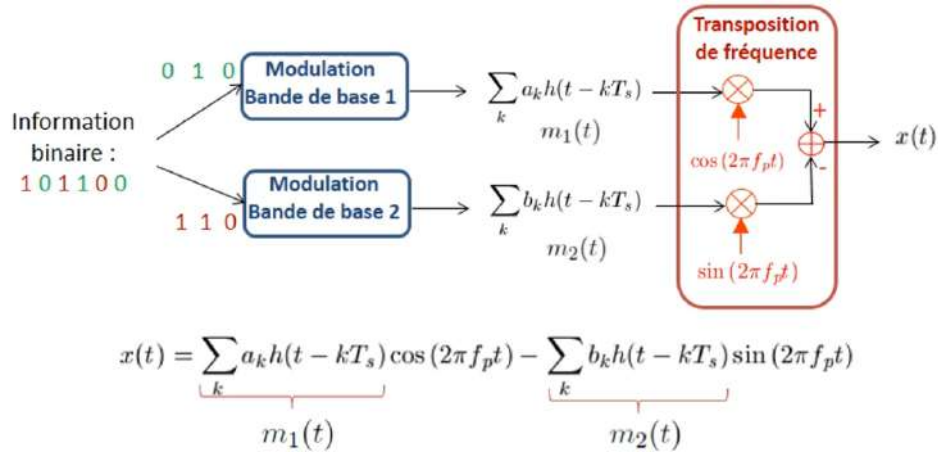
1.3.2 Deuxième classification

En numérique, on classe plutôt les modulations en deux grandes catégories : **modulation mono-dimensionnelle** ou **bi-dimensionnelle**. Une modulation mono-dimensionnelle est finalement une modulation d'amplitude, puisque le message à transmettre $m(t)$ est dans l'amplitude du cosinus porteur. La spécificité du numérique est qu'on a une information binaire, et qu'on doit donc dans un premier temps en faire un signal grâce à un modulateur bande de base avant de réaliser la transposition de fréquence.



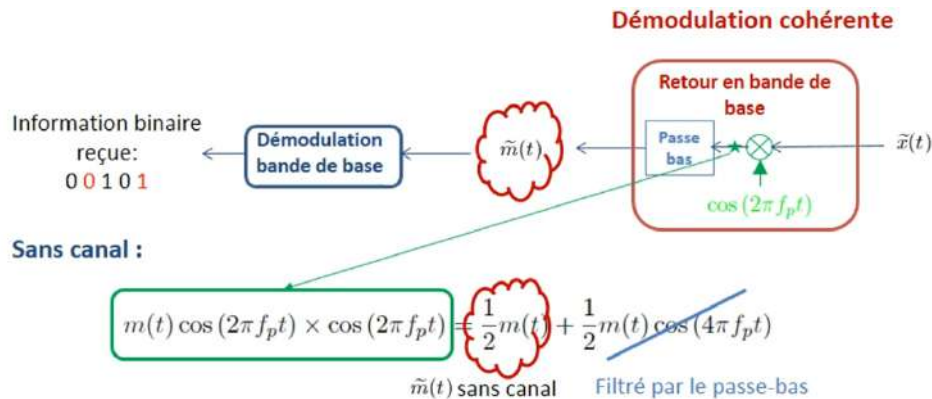
1.3.3 Troisième classification

Dans une modulation bi-dimensionnel, on va transporter l'information sur 2 voies, l'une utilisant un cosinus porteur, l'autre utilisant un sinus porteur, tous deux à la même fréquence f_p . On verra prochainement l'utilité de ces deux voies.



1.3.4 Démodulation de modulation mono-dimensionnelle

La démodulation d'une modulation numérique sur porteuse va être composée d'un **retour en bande** suivie d'un **démodulateur bande de base**. Pour une modulation mono-dimensionnelle, le retour en bande de base est réalisé avec **le même cosinus que celui ayant servi à transporter sur porteuse**, suivi d'un **filtrage passe-bas** pour supprimer les composantes haute fréquence générées par cette remultiplication par le cosinus, et ne conserver que le message retrouvé. On parle de **modulation et démodulation cohérente**. On suppose ainsi une parfaite synchronisation entre les cosinus d'émission et de réception, ce qui n'est jamais le cas parfaitement comme évoqué dans la présentation générale de la chaîne de transmission.

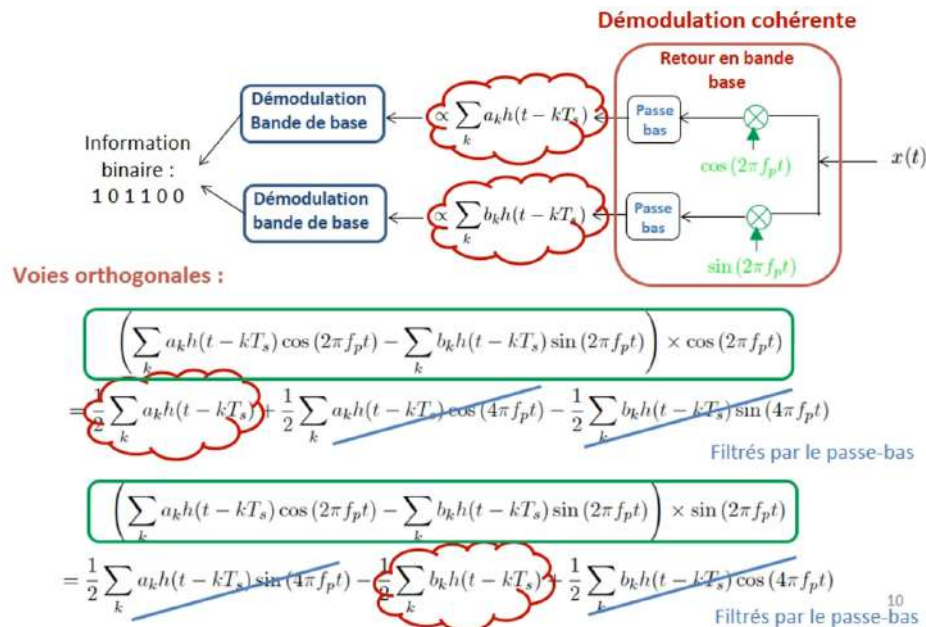


1.3.5 Démodulation de modulation bi-dimensionnelle

Le principe est le même en modulation bi-dimensionnelle, mais il va falloir multiplier le signal reçu par le même cosinus et par le même sinus ayant servi à transposer en fréquence.

Le cosinus et le sinus étant orthogonaux, on retrouvera, si la synchronisation est parfaite, les messages transportés sur chaque voie et contenant chacun une partie de l'information binaire. À

noter qu'un défaut de synchronisation va être plus critique qu'en mono-dimensionnelle, parce qu'il va conduire à faire apparaître de l'interférence entre les voies.



1.3.6 Autres classifications des modulations sur fréquence porteuse

On peut parler aussi de **modulation linéaire** ou **non linéaire**, selon que le message contenant l'information à transmettre apparaît de manière linéaire ou non, dans l'enveloppe complexe associée au message modulé sur fréquence porteuse :

Modulation linéaires

$$x(t) = \underbrace{\sum_k a_k h(t - kT_s)}_{m_1(t)} \cos(2\pi f_p t) - \underbrace{\sum_k b_k h(t - kT_s)}_{m_2(t)} \sin(2\pi f_p t)$$

$$x(t) = \Re \left[(m_1(t) + jm_2(t)) e^{j2\pi f_p t} \right]$$

L'enveloppe complexe associée au signal modulé sur porteuse
dépend linéairement de l'information à transmettre

ou non linéaires (modulations de fréquence)

$$x(t) = A \cos \left(2\pi f_p t + 2\pi k_f \int_0^t m(u) du \right)$$

$$x(t) = \Re \left[A e^{j2\pi k_f \int_0^t m(u) du} e^{j2\pi f_p t} \right]$$

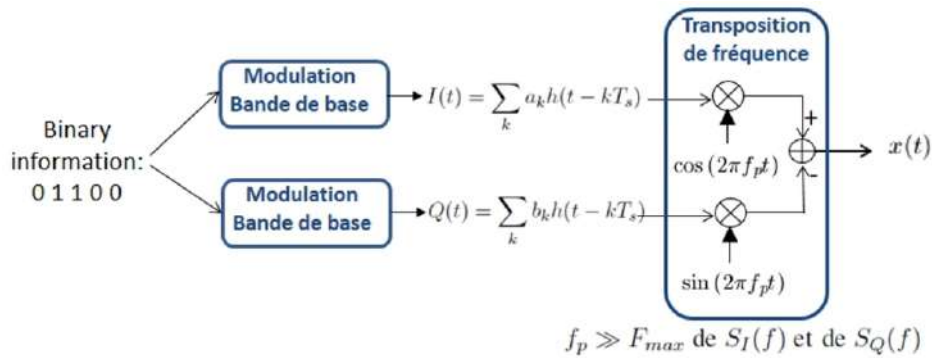
Ce n'est pas le cas ici

1.4 Enveloppe complexe associée au signal modulé

Cette partie a pour objectif d'introduire la notion d'enveloppe complexe associée à un signal modulé sur fréquence porteuse. On verra également que l'on peut *associer* une chaîne passe-bas équivalente à une chaîne de transmission sur fréquence porteuse, ce qui aura pour intérêt de pouvoir réutiliser les résultats obtenus en bande de base, et de réaliser des simulations plus rapides avec des fréquences d'échantillonnage plus faibles.

1.4.1 Modulations linéaires bi-dimensionnelles

On s'intéressera uniquement aux modulations linéaires. Voici donc le schéma d'une modulation sur fréquence porteuse bi-dimensionnelle :



L'information binaire à transmettre est **aiguillée sur 2 voies, pour générer 2 messages, notés ici $I(t)$ et $Q(t)$, chacun transportant une partie de l'information.** Le message $I(t)$ sera transporté sur fréquence porteuse en utilisant un cosinus porteur, tandis que le message $Q(t)$ sera transporté fréquence porteuse en utilisant un sinus porteur.

Le signal transmis $x(t)$ aura alors la forme suivante :

$$x(t) = \underbrace{\sum_k a_k h(t - kT_s)}_{\text{Composante en phase : } I(t)} \cos(2\pi f_p t) - \underbrace{\sum_k b_k h(t - kT_s)}_{\text{Composante en quadrature : } Q(t)} \sin(2\pi f_p t)$$

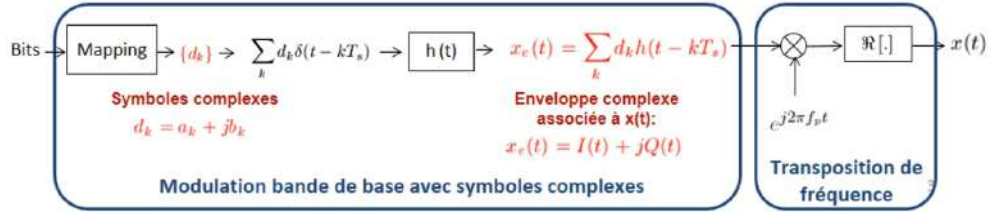
On dit que $I(t)$ est la **voie en phase**, et $Q(t)$ la **voie en quadrature**, car portée par un sinus qui est déphasé de 2π sur 2 par rapport au cosinus. Cosinus et sinus étant orthogonaux comme vu précédemment cela permettra en réception de retrouver les messages $I(t)$ et $Q(t)$, et donc, **l'information contenue dans chacun de ces 2 signaux.**

Conséquence : Le signal généré sur fréquence porteuse $x(t)$ peut également s'écrire ainsi :

$$x(t) = \Re[(I(t) + jQ(t)) \exp(j2\pi f_p t)]$$

Dans cette écriture, $I(t) + jQ(t)$, notée par la suite $x_e(t)$, définit ce qui est appelé **enveloppe convexe associée au signal $x(t)$ (signal modulé sur fréquence porteuse).**

Cette écriture du signal modulé sur porteuse permet de dissocier la **partie contenant l'information $I(t) + jQ(t)$** de la **transposition de fréquence** (multiplication par l'exponentielle et prise de la partie réelle), ce qui permet de retrouver un modulateur bande de base, comme étudié précédemment, mais avec **des symboles complexes $d_k = a_k + jb_k$ suivis d'une transposition de fréquence**, ce qui se résume dans la figure qui suit :



L'enveloppe complexe associée au signal modulé sur porteuse s'écrit alors :

$$x_e(t) = I(t) + jQ(t) = \sum_k d_k h(t - kT_s)$$

1.4.2 DSP du signal modulé $x(t)$

On a l'expression de l'enveloppe complexe : $x_e(t) = \sum_k d_k h(t - kT_s)$
et on calcule la DSP de cette dernière :

$$S_{x_e}(f) = \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 + 2 \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \Re[R_d(k) \exp(j2\pi f k T_s)] + \frac{|m_d|^2}{T_s^2} \sum_k \left| H\left(\frac{k}{T_s}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

et puisque $x(t) = \Re[x_e(t) \exp(j2\pi f_p t)]$ alors $R_x(\tau) = \frac{1}{2} \Re[R_{x_e}(\tau) \exp(j2\pi f_p \tau)]$
ainsi, une TF fournit :

$$S_x(f) = \frac{1}{4} (S_{x_e}(f - f_p) + S_{x_e}(-f - f_p))$$

1.4.3 Chaîne passe-bas équivalente

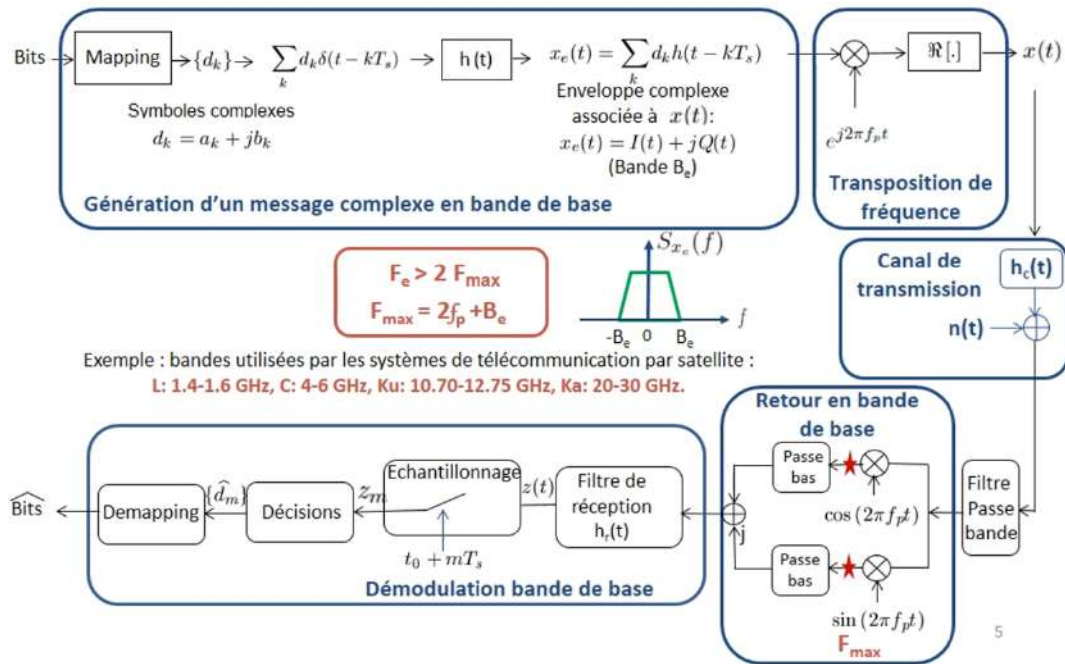
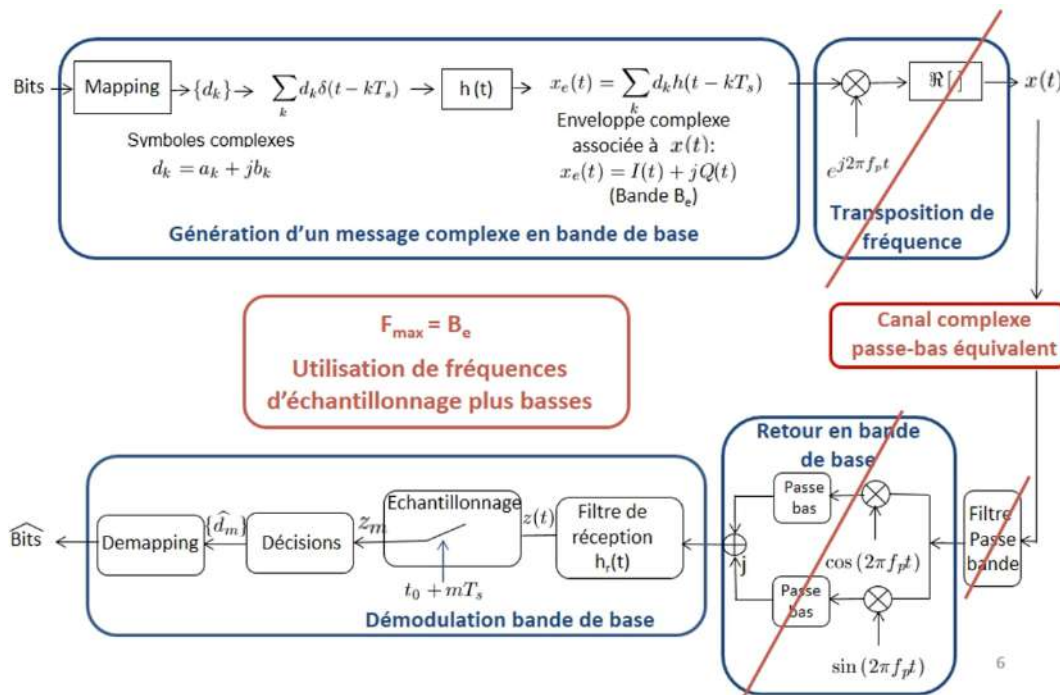


FIGURE 1 – Représentation équivalente de la chaîne passe-bas

Lorsqu'on veut implanter en numérique une chaîne de transmission sur fréquence porteuse, notamment pour estimer les TEB obtenus, on va devoir utiliser une **fréquence d'échantillonnage égale à 2 fois la fréquence max des signaux présents sur la chaîne de transmission**, c'est le fameux **théorème d'échantillonnage de Shannon**.

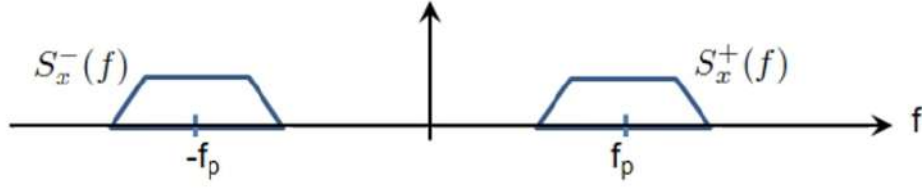
La fréquence max est obtenue sur cette chaîne de transmission en sortie des cosinus et sinus de réception, et on a des termes qui sont positionnés à deux fois la fréquence porteuse, et qui seront filtrés par la suite par le filtre passe-bas pour ne conserver que les termes à basse fréquences. Il faudra donc une fréquence d'échantillonnage supérieur à environ 4 fois la fréquence porteuse f_p en négligeant la bande de l'enveloppe complexe devant f_p . Or **les fréquences porteuses peuvent être très élevées**. On a ci-dessus l'exemple des bandes allouées aux transmissions satellite ; il est absolument impossible de numériser des signaux à quatre fois ces fréquences. On va donc définir une chaîne passe-bas *équivalente* à la chaîne de transmission sur fréquence porteuse. Elle permettra de réaliser des implantations avec des fréquences d'échantillonnage *réalistes*, mais également de réutiliser les résultats obtenus en terme de TEB avec les chaînes en bande de base.

Pour cela on va **supprimer la transposition de fréquence**, et donc **le retour en bande de base**. La fréquence max de la chaîne de transmission sera alors **égale à la fréquence max de l'enveloppe complexe associée au signal modulé**. On aura donc en sortie de l'émetteur *un signal complexe représentant le signal réel*, et on va alors définir un canal de propagation complexe basse fréquences, représentant ou équivalent au canal de propagation réel qui est de type passe-bande avec un bruit réel :



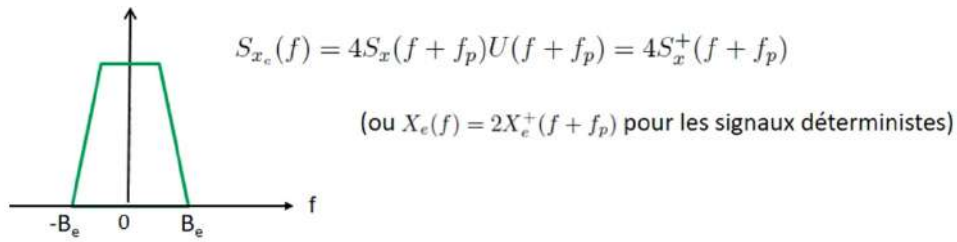
1.4.4 DSP du signal sur porteuse

On rappelle que la DSP du signal modulé sur porteuse est donnée par la DSP de l'enveloppe complexe associée, déplacée sur la fréquence porteuse f_p et sur $-f_p$, et affectée d'un facteur $1/4$. On notera $S_x^-(f) = \frac{1}{4}S_{x_e}(-f - f_p)$ et $S_x^+(f) = \frac{1}{4}S_{x_e}(f - f_p)$:



1.4.5 DSP de l'enveloppe complexe correspondante

On peut donc à l'inverse donner la DSP de l'enveloppe complexe associée au signal modulé, en fonction de celle du signal modulé, en prenant 4 fois sa partie positive et en la ramenant autour de 0 :



1.4.6 Canal passe-bas équivalent

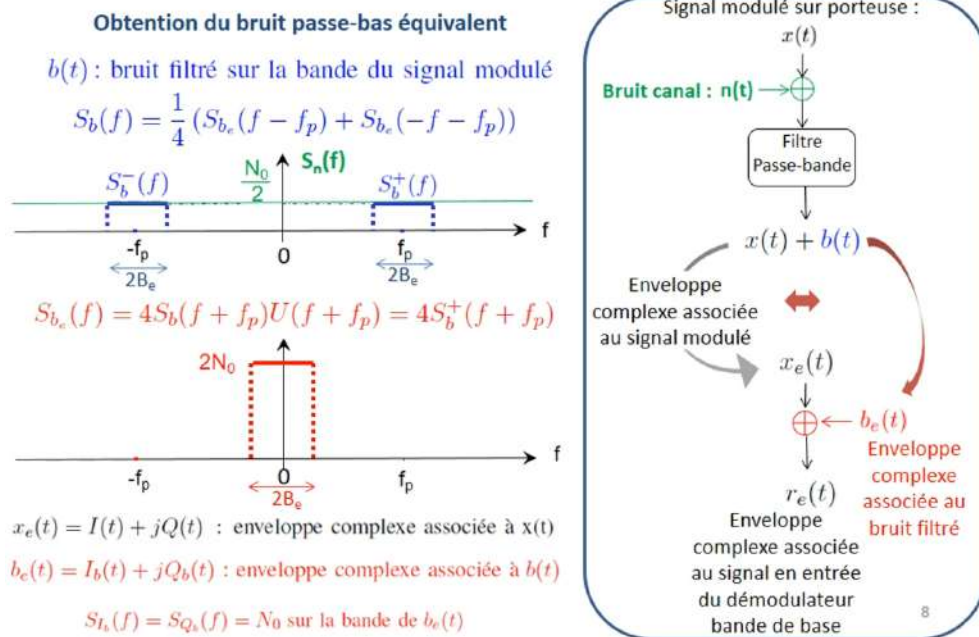
On va utiliser ce procédé pour définir un bruit complexe passe-bas équivalent au bruit filtré sur la bande du signal autour de f_p et de $-f_p$. En prenant 4 fois la partie positive de la DSP du bruit filtré sur la bande du signal modulé et en la translatant autour de 0, on obtient la DSP du bruit complexe $b_e(t)$ associé au bruit filtré sur la bande du signal modulé $b(t)$:

$$S_b(f) = \frac{1}{4}(S_{b_e}(f - f_p) + S_{b_e}(-f - f_p))$$

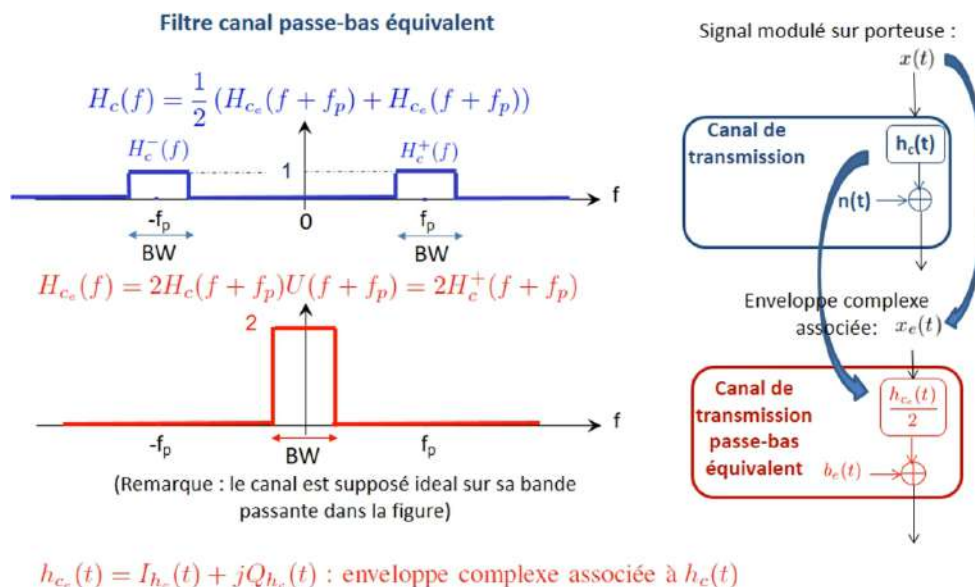
Elle vaudra $4N_0/2$, soit $2N_0$ sur la bande de l'enveloppe complexe associée au signal modulé. Le canal de propagation complexe passe-bas équivalent au vrai canal de propagation va donc **introduire un bruit complexe** noté ici $b_e(t)$ avec :

$$b_e(t) = I_b(t) + jQ_b(t)$$

$I_b(t)$ viendra s'ajouter sur la voie en phase $I(t)$ du signal modulé sur porteuse, qui correspond à la partie réelle de l'enveloppe complexe associée au signal modulé, et $Q_b(t)$ viendra s'ajouter sur la voie en quadrature $Q(t)$ du signal modulé sur porteuse, qui correspond à la partie imaginaire de l'enveloppe complexe associée au signal modulé sur porteuse. Ainsi, $b_e(t)$ aura une DSP égale à $2N_0$, soit N_0 pour la voie $I_b(t)$ et N_0 pour la voie $Q_b(t)$. Tout cela se résume ci-dessous :

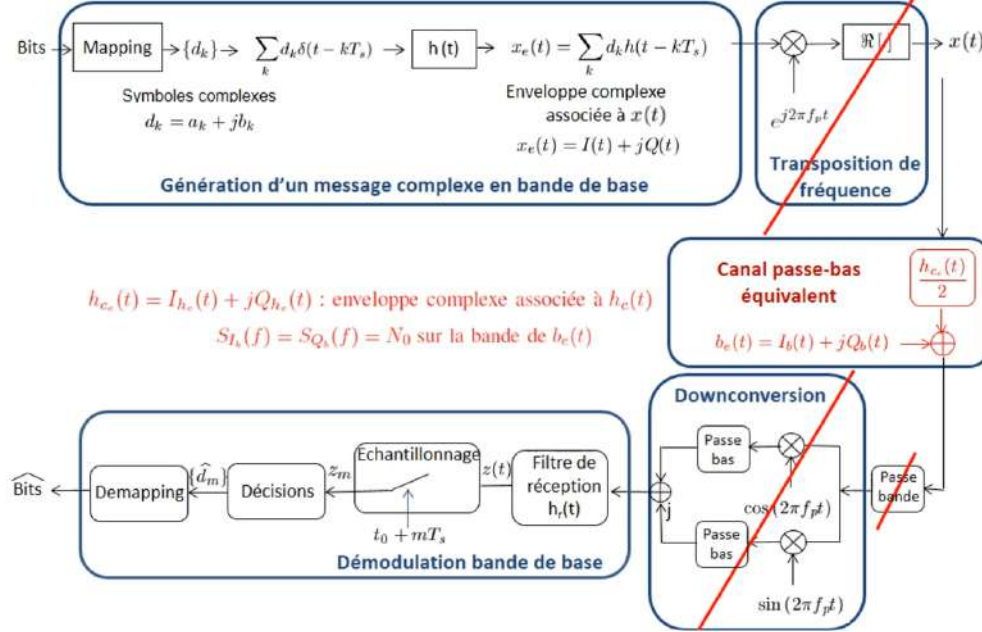


Concernant la **réponse impulsionnelle** à passe-bas équivalente à la réponse impulsionnelle du vrai canal de propagation qui, lui, est de type passe-bande, on va procéder de la même manière, à la différence que la réponse impulsionnelle du canal de propagation est **déterministe**, contrairement au bruit qui, lui, est considéré comme **aléatoire**. Pour un signal déterministe de type passe-bande, la transformée de Fourier de l'enveloppe complexe associée est définie comme étant égale à deux fois la partie positive de la TF du signal passe-bande, ramenée autour de 0, et non quatre fois comme avec les DSP pour les signaux aléatoires, d'où le facteur 2 qui apparaît. On procède ainsi de manière similaire au bruit :



Finalement, en remplaçant le signal modulé par son enveloppe complexe associée et le canal de propagation par un canal équivalent passe-bas complexe, on arrive à ce qui est appelé **la chaîne passe-bas équivalente à la chaîne de transmission sur fréquence porteuse**. Elle est *entièrement basse fréquences*, et ressemble à la chaîne bande de base étudiée précédemment à

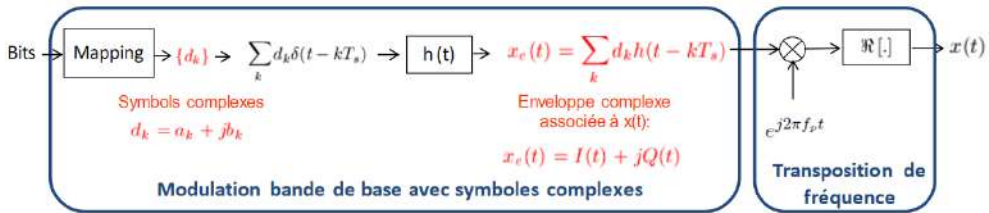
la différence que les signaux manipulés sont complexes :



On peut alors reprendre les notions de **critère de Nyquist** et de **filtrage adapté** sur cette chaîne passe-bas équivalente, et on verra par la suite qu'il est également possible de réutiliser les calculs de TEB.

2 Modulations linéaires sur fréquence porteuse : ASK, PSK, QAM et variantes

Cette section sera dédiée à la présentation des modulations numériques sur fréquence porteuse linéaires les plus classiques. Le schéma du modulateur sur fréquence porteuse est rappelé ici :



$$x(t) = \underbrace{\sum_k a_k h(t - kT_s) \cos(2\pi f_p t)}_{\text{Voie en phase : } I(t)} - \underbrace{\sum_k b_k h(t - kT_s) \sin(2\pi f_p t)}_{\text{Voie en quadrature : } Q(t)}$$

La fonction de mapping étant réalisée, on aura différents types de modulation :

2.1 Modulation mono-dimensionnelle M-ASK

Si les symboles issus du mapping sont *réels*, cela revient à **annuler la voie en quadrature** dans le signal modulé sur porteuse, et on a donc simplement **un cosinus modulé en amplitude**. Cette modulation porte le nom de **ASK (Amplitude Shift Keying)** en numérique. On parle d'une **M-ASK** ou **modulation ASK d'ordre M** lorsque les symboles a_k issus du mapping peuvent prendre M valeurs : $a_k, b_k \in \{\pm 1, \dots, \pm(M-1)\}$.

2.2 Modulations bi-dimensionnelles

Si les symboles issus du mapping sont *complexes*, il y a deux possibilités :

2.2.1 Les voies transportant les a_k et b_k sont indépendantes

On parle alors de **modulation d'amplitude en quadrature QAM (Quadrature Amplitude Modulation)** car on alors *deux signaux en quadrature* ; le cosinus et le sinus, qui sont tous les deux modulés en amplitude. L'ordre M de la modulation représente le **nombre de symboles complexes d_k possibles**. Pour une modulation QAM carrée d'ordre M , a_k et b_k peuvent donc prendre \sqrt{M} valeurs pour donner M symboles complexes d_k ¹.

2.2.2 Les voies transportant les a_k et b_k sont liés

Ceci est réalisé de telle manière que les symboles complexes d_k soient positionnés sur un cercle. On parle alors de **modulation de phase PSK (Phase Shift Keying)**, puisqu'alors les symboles seront différenciés par leur position sur le cercle, donc par leur phase. L'ordre M de la modulation représente toujours le nombre de symboles d_k possibles².

2.3 Constellation

On appelle constellation de la modulation **la représentation des symboles d_k dans le plan (a_k, b_k)** .

2.3.1 Pour une modulation de type ASK

La constellation liée à une modulation de type ASK n'a donc que des symboles dans l'axe des réels, axe des a_k . Par exemple, on a placé 8 symboles sur l'axe des a_k représentés par les ronds bleus. On a donc représenté les symboles d'une 8-ASK. Les symboles a_k peuvent prendre ici leurs valeurs parmi $\{\pm V, \pm 3V, \pm 5V, \pm 7V\}$. On remarque qu'ils sont régulièrement espacés pour une même distance minimale entre eux, et qu'ils sont répartis autour de 0 pour que leur moyenne soit nul et donc la partie du spectre contenant des diracs ou spectre de raies soit **annulés**.

2.3.2 Pour une modulation de type PSK

Dans la constellation liée à une modulation de type PSK, les symboles sont répartis sur un cercle. Les voies a_k et b_k ne sont donc pas indépendantes, et c'est bien **la phase qui est différente d'un symbole à l'autre qui va coder l'information**, puisque le module reste identique pour tous les symboles. Dans l'exemple, on a placé 8 symboles sur le cercle. On a donc représenté les symboles d'une 8-PSK, et on remarque ici aussi qu'ils sont régulièrement espacés et que leur moyenne est nulle.

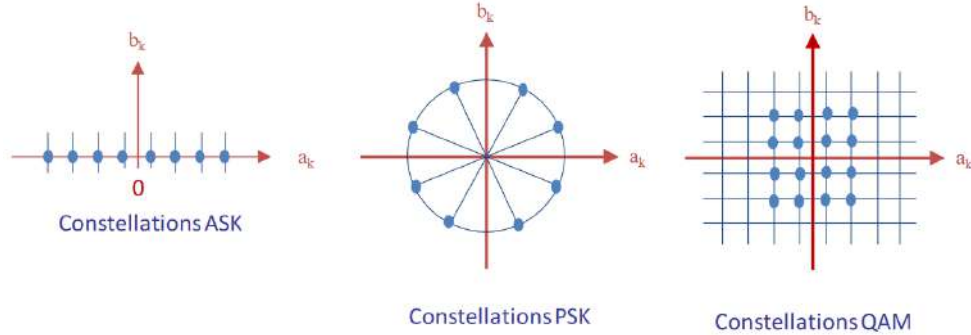
2.3.3 Pour une modulation de type QAM

Pour une modulation de type QAM, les symboles sont positionnés sur une grille. Ils diffèrent de par leur module et leur phase, ce qui donnera un signal sur porteuse modulé en phase et en amplitude. Et là aussi, les symboles sont régulièrement espacés et leur moyenne est nulle.

1. Dans ce cas, a_k et b_k sont des symboles \sqrt{M} -aires indépendants $\in \{\pm V, \pm 3V, \dots, \pm(\sqrt{M}-1)V\}$

2. Cette fois-ci, $d_k \in \left\{ e^{j\left(\frac{2\pi}{M}l + \frac{\pi}{M}\right)} \mid l = 0, \dots, M-1 \right\}$

2.3.4 Représentation des symboles d_k possibles dans le plan (a_k, b_k)

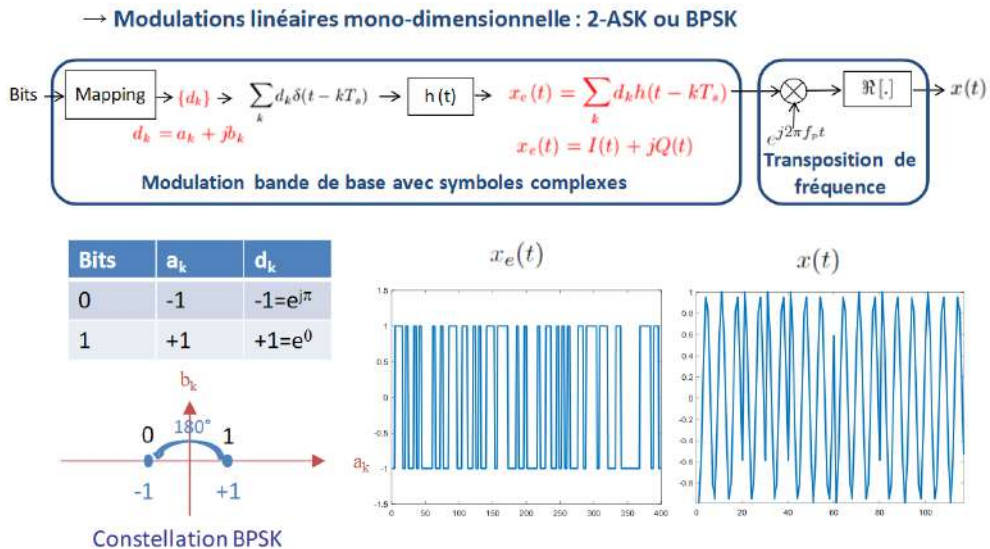


2.4 Exemples

Deux modulations peuvent être vues de différentes manières :

2.4.1 Modulation linéaire mono-dimensionnelle BPSK

la première que nous avons ici et la modulation dit BPSK, avec "B" pour binaire. Elle peut être vue comme une modulation **mono-dimensionnelle** ou **modulation d'amplitude 2-ASK** puisqu'on a des symboles réels valant ± 1 , donc des symboles $a_k \in \{\pm 1\}$. Mais, elle peut également être vue comme une **modulation de phase à deux états** avec deux symboles complexes de module égal à 1, l'un avec une phase nulle représentant le bit 1 et l'autre avec une phase 180° représentant le bit 0¹. Les signaux donnés ici sont tracés avec une mise en forme rectangulaire. On a donc un signal NRZ binaire qui est transporté sur fréquence porteuse. Le signal sur porteuse $x_e(t)$ présente bien des discontinuités de phase tous les T_s , cette dernière étant la *durée symbole*. Avec cette mise en forme rectangulaire, à la phase à l'origine du cosinus porteur tous les T_s va être de 0° ou de 180° degré selon que l'on soit codé à 0 ou à 1, ce qui revient aussi à multiplier le cosinus porteur par ± 1 tous les T_s si on voit ça comme modulation d'amplitude.

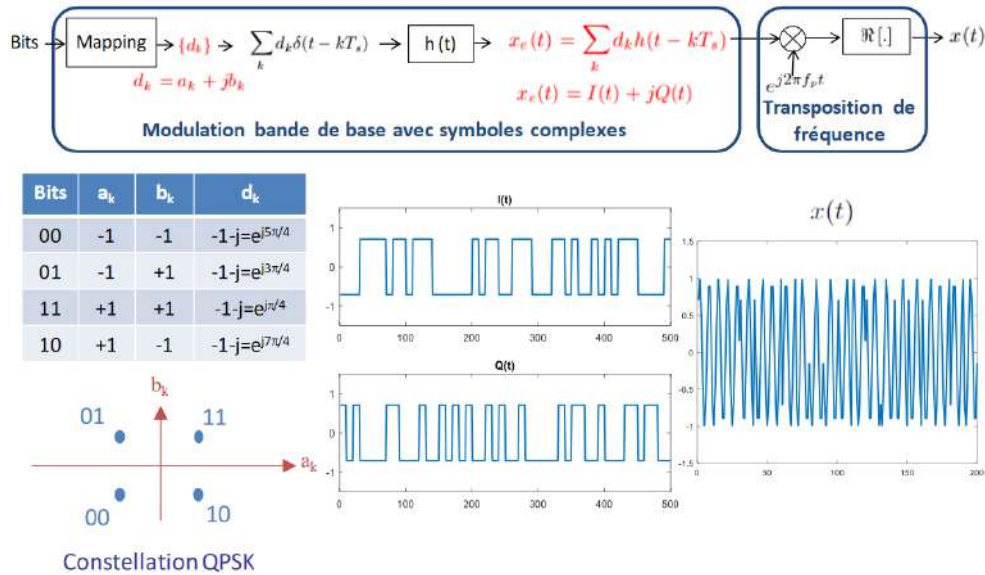


1. On lui donne généralement le nom de BPSK mais donc on peut aussi l'appeler 2-ASK.

2.4.2 Modulations linéaires bi-dimensionnelle QPSK

Cette modulation peut être vue comme une modulation de phase à 4 états, mais également comme une modulation QAM avec 4 symboles, puisque les symboles sont à la fois sur le cercle et sur une grille. On lui donne le nom de **QPSK** mais on peut aussi l'appeler **4-QAM**. On va coder ici chaque groupe de 2 bits par un symbole complexe avec une phase différente, ou de manière équivalente par un couple (a_k, b_k) différents.

Les signaux ont été tracés ici avec une mise en forme **rectangulaire**, on voit donc que l'on a deux signaux de type NRZ binaire sur les voies I et Q , puisque les symboles a_k et b_k prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\{\pm 1\}$. Et après transposition de fréquence, on a bien un signal $x(t)$ avec une enveloppe constante, pas de modulation d'amplitude, mais avec des discontinuités de phase tous les T_s , ce qui représente avec cette mise en forme rectangulaire une phase à l'origine du cosinus tous les T_s , qui peut prendre les valeurs $\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$, selon que l'on veut coder un 11, 01, 10 ou 00. Cette modulation est par exemple utilisée dans la norme DVB-S¹ pour transmettre du contenu multimédia en utilisant le satellite.

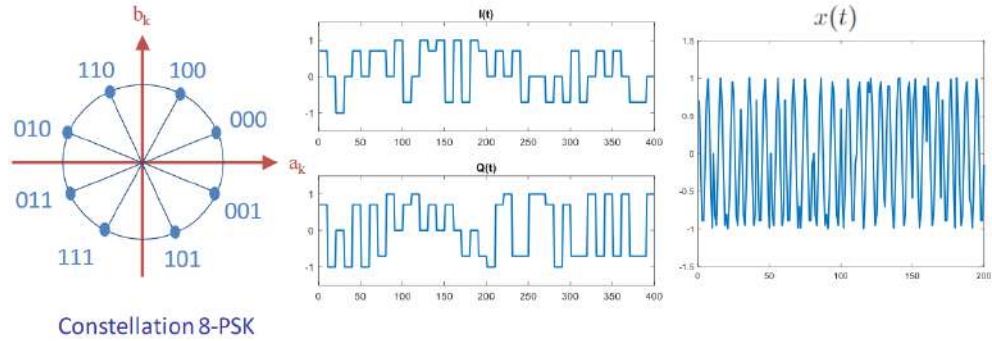
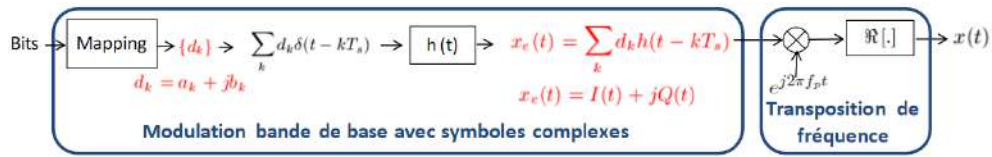


2.4.3 Modulations linéaires bi-dimensionnelle : 8-PSK (DVB-S2)

On a ici une modulation de type 8-PSK, toujours avec une mise en forme **rectangulaire**. On va donc coder chaque groupe de 3 bits par un symbole complexe, avec une phase différente, le module restant le même pour tous. Ainsi, le fait de coder des groupes de 3 bits va générer 2^3 , c'est-à-dire 8 symboles possibles.

Le signal modulé résultant est à enveloppe constante. On n'a pas de modulation d'amplitude, mais ici aussi on peut voir les discontinuités de phase tous les T_s . Cette modulation est par exemple utilisée par la norme DVB-S2², pour transmettre du contenu multimédia en utilisant le satellite.

1. DVB pour Digital Video Broadcasting.
2. Apparue après le DVB-S.

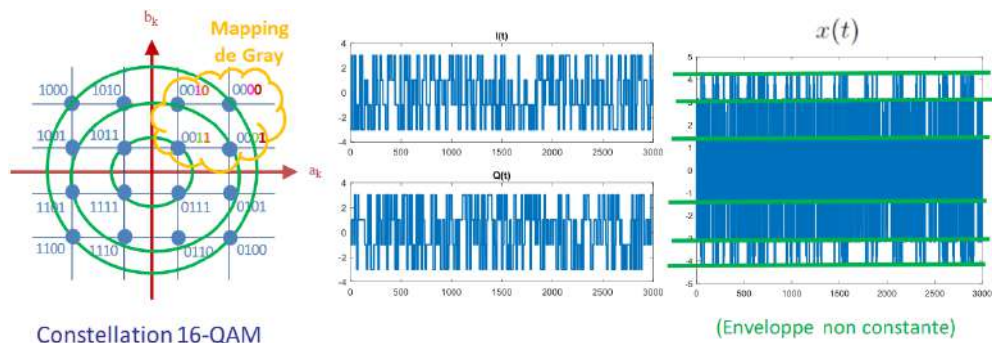


2.4.4 Modulations linéaires bi-dimensionnelle : 16-QAM (DVB-C)

Un dernier exemple : la modulation 16-QAM. On va grouper ici les bits à transmettre par blocs de 4 pour former 2^4 , c'est-à-dire 16 symboles. Et on va associer à chaque groupe un symbole complexe avec un certain module et une certaine phase, ou bien, de manière équivalente, un certain couple de valeurs (a_k, b_k) .

On as donc 4 valeurs possibles pour a_k , 4 valeurs possibles pour b_k , ce qui donne des signaux NRZ à quatre niveaux sur chaque voie I et Q , en considérant ici une mise en forme **rectangulaire**. Le signal modulé sur fréquence porteuse est modulé cette fois en amplitude et en phase. On peut voir les trois niveaux d'amplitude différents sur le signal modulé sur porteuse, qui correspondent aux 3 cercles de la constellation, ou aux trois valeurs possibles pour le module des symboles complexes. Et en ce moment, on verra également les discontinuités de phase tous les T_s , avec cette mise en forme rectangulaire. Ce que l'on peut noter également ici mais c'était vrai pour le cas des constellations précédentes, c'est qu'on utilise toujours **un mapping de Grey**, c'est-à-dire que des symboles qui sont à distance minimale vont être codés de telle manière qu'un seul bit change entre eux. Cela permet comme vu précédemment de **minimiser le TEB pour un TES donné**.

Cette modulation 16-QAM est par exemple utilisée dans la norme DVB-C pour transmettre toujours du contenu multimédia, mais cette fois-ci, en utilisant le câble.



2.5 Démodulation des modulations ASK, PSK, QAM

On a vu la partie émission des modulations linéaires sur fréquence porteuse, avec les différents mapping qui permettent d'obtenir différents types de modulations. En réception, suite au retour en bande de base, on trouve le démodulateur bande de base. Ce qui va changer dans le démodulateur bande de base, selon la modulation considérée, en dehors du démapping qui doit bien sûr être adapté au mapping, c'est le bloc "Décisions" :

- Un détecteur à seuil va être utilisé sur la voie *réelle* pour les modulations mono-dimensionnelles ou ASK.
- Deux détecteurs à seuil, un sur la voie *réelle*, un sur la voie *imaginaires* des symboles reçus, va être utilisé pour les modulations bi-dimensionnelles de type QAM.
- Et enfin, un détecteur à seuil qui va porter sur la phase des symboles reçus va être utilisé pour les modulations PSK.

2.6 Autres exemples

Il existe également d'autres types de modulation :

2.6.1 Modulations hybrides QAM/PSK : M-APSK (DVB-S2, DVB-SX)

Il s'agit d'un compromis entre une modulation QAM et une modulation PSK. Pour $M = 16$, par exemple, au lieu de positionner les 16 symboles possibles sur 3 cercles, on va les positionner sur 2 cercles uniquement. On parlera de 16-APSK ou bien de 4-12 APSK, pour dire 4 points sur le premier cercle et 12 points sur le deuxième. Ces modulations de type APSK sont présentes dans les nouveaux standards satellite telle que le DVB-S2, ou DVB-SX.

2.6.2 Modulations hiérarchiques (DVB-T et T2, DVB-S2)

Existe aussi des modulations dites **hiérarchiques** pour lesquelles on va éloigner les 4 cadrans. On a donc ici l'exemple d'une modulation 16-QAM hiérarchique, et ses modulations sont présentes dans les standards de télévision numérique terrestre DVB-T et T2, mais également dans le DVB-S2.

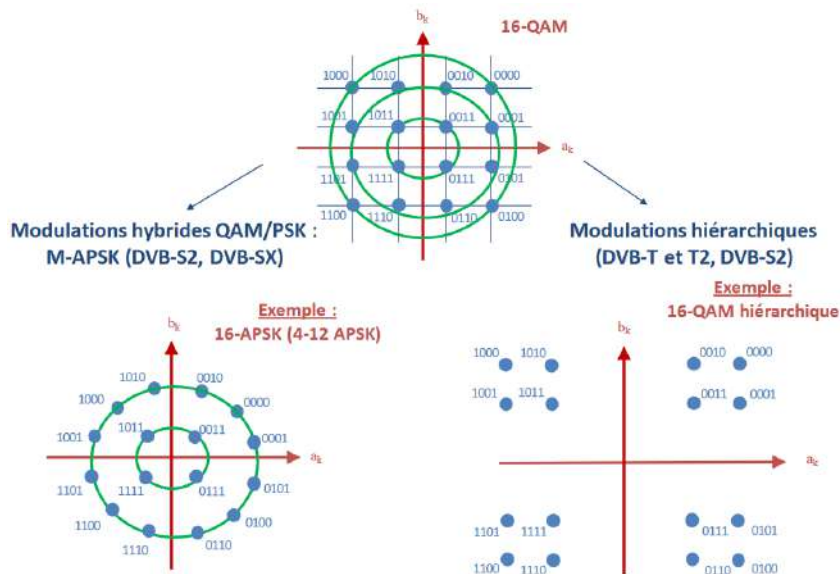


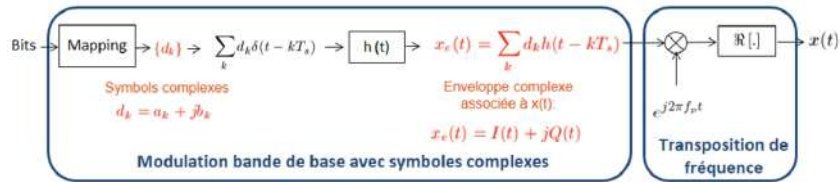
FIGURE 2 – Schéma représentatif

On a jusqu'ici présenté les modulations linéaire sur fréquence porteuse classiques et puis hybrides ou hiérarchiques. L'objectif de la prochaine partie va être de les comparer afin d'être capable de sélectionner la mieux adaptée au système de transmission à mettre en place. Nous allons voir les avantages et les inconvénients de chacune de ces modulations.

3 Comparaison en termes d'efficacité spectrale

Il s'agit dans cette section de comparer les différents types de modulation linéaire sur fréquence porteuse afin d'identifier les avantages et les inconvénients de chacune, pour être capable de choisir celle qui convient le mieux à la transmission à la réaliser. Les deux critères de comparaison principaux seront, comme évoqué précédemment, **l'efficacité spectral** et **l'efficacité en puissance**. On ajoutera un qui est **la robustesse** ou **non linéarité**.

3.1 Modulations ASK, PSK, QAM



Vous avez ici les deux grandes catégories de modulation linéaire sur fréquence porteuse :

- **modulations mono et bi-dimensionnelles** : qu'on va **comparer**.

Modulations mono-dimensionnelle

$$d_k = a_k \in \{\pm 1, \dots, \pm(M-1)\} \quad \text{M-ASK (Amplitude Shift Keying)}$$

Modulations bi-dimensionnelles

M-QAM (Quadrature Amplitude Modulation) carrée

$$a_k, b_k \text{ symboles } \sqrt{M}\text{-aires indépendants} \in \{\pm V, \pm 3V, \dots, \pm(\sqrt{M}-1)V\}$$

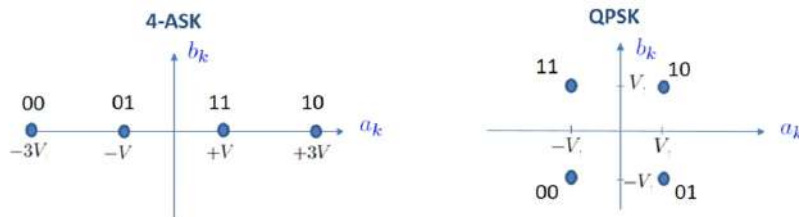
M-PSK (Phase Shift Keying)

$$d_k \in \{e^{j(\frac{2\pi}{M}l + \frac{\pi}{M})}\}, l = 0, \dots, M-1$$

- **modulations hybrides et hiérarchiques** (APSK, PSK, ou QAM hiérarchiques) : dont on va citer les avantages et les inconvénients.

3.2 Comparaison de modulations mono et bi-dimensionnelles

On va prendre pour un exemple avec un ordre de modulation $M = 4$, et comparer une **modulation 4-ASK** à une **modulation QPSK** (ou **4-QAM**) :



3.2.1 Comparaison en termes d'efficacité spectrale (symboles supposés équiprobables et indépendants)

L'efficacité spectrale est donnée par le débit binaire à transmettre *divisé* par la bande de fréquence nécessaire (ici bande de fréquence du signal modulé sur porteuse x) :

$$\eta = \frac{R_b}{B_x}$$

On va dire qu'une transmission est **plus efficace spectralement qu'une autre** si la bande dont on a besoin pour transmettre un certain débit est **plus petite**.

On rappelle également que la DSP du signal modulé sur porteuse est donnée par la DSP de son enveloppe complexe associée transportée autour de f_p et de $-f_p$, avec un facteur 1/4 :

$$S_x(f) = \frac{1}{4}(S_{x_e}(f - f_p) + S_{x_e}(-f - f_p))$$

La bande occupée par le signal modulé sur porteuse B_x sera donc égale à 2 fois la bande de l'enveloppe complexe associée B_{x_e} :

$$B_x = 2B_{x_e}$$

En supposant des symboles indépendants équiprobables, la DSP de l'enveloppe complexe est donnée par :

$$S_{x_e}(f) = \underbrace{\frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 + 2 \frac{\sigma_d^2}{T_s} |H(f)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \Re[R_d(k) \exp(j2\pi f k T_s)]}_{=0 \text{ car symboles indépendants}} + \underbrace{\frac{|m_d|^2}{T_s^2} \sum_k \left| H\left(\frac{k}{T_s}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right)}_{=0 \text{ car symboles à moyenne nulle}}$$

où σ_d^2 représente la variance des symboles b_k et $H(f)$ la réponse en fréquence du filtre de mise en forme.

Conséquence : Les modulations mono-dimensionnelle aurons donc une **efficacité spectral identique pour un même ordre M et un même filtre de mise en forme**.

Vous avez ici un exemple de calculs avec un filtre de mise en forme à racine de cosinus surélevé :

$$B_x = 2B_{x_e} = \frac{1 + \alpha}{T_s} = \frac{1 + \alpha}{\log_2(M) T_b} = \frac{1 + \alpha}{\log_2(M)} R_b$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{R_b}{B_x} = \frac{\log_2(M)}{1 + \alpha}$$

on voit bien comme on l'avait dit précédemment que l'efficacité spectral ne dépend que du nombre de symboles généré par le mapping et du filtre mise en forme. Donc pour un même nombre de symboles et un même filtre de mise en forme, **une modulation mono-dimensionnelle M-ASK et une modulation bi-dimensionnelle M-QAM auront la même efficacité spectrale**.

3.2.2 Comparaison en termes d'efficacité en puissance (symboles supposés équiprobables et indépendants)

Pour une même efficacité spectrale, c'est-à-dire un même nombre de symboles et un même filtre de mise en forme pour transmettre un débit R_b donné, la puissance du signal transmis en 4-ASK ou en Q-PSK va dépendre de la variance des symboles d_k notée σ_d^2 :

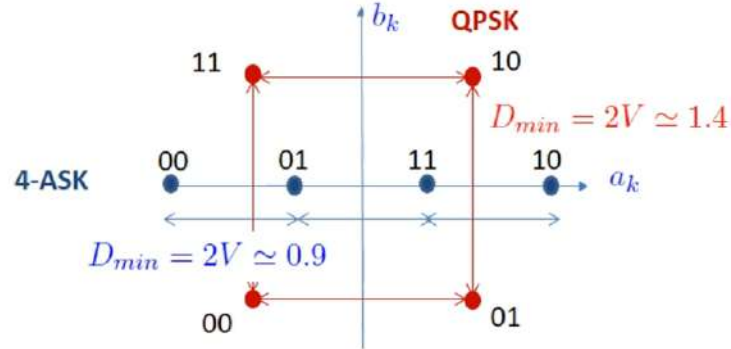
$$P_x = \frac{P_{x_e}}{2} = \frac{1}{2} \int_R S_{x_e}(f) df = \frac{\sigma_d^2}{2T_s} \int_R |H(f)|^2 df = \frac{\sigma_d^2 R_b}{2 \log_2(M)} \int_R |H(f)|^2 df$$

Cette variance des symboles vaut :

$$\sigma_d^2 = E[|d_k - m_d|^2] = \begin{cases} 5V^2 & (\text{quand on est en 4-ASK}) \\ 2V^2 & (\text{quand on est en QPSK}) \end{cases}$$

Supposons que l'on prenne le même σ_d^2 pour obtenir la même puissance d'émission. On va avoir ici une distance D_{\min} entre symboles qui sera plus faible en 4-ASK qu'en QPSK.

Voici un exemple où l'on suppose $\sigma_d^2 = E[|d_k|^2] = 1$ dans les deux cas¹ :

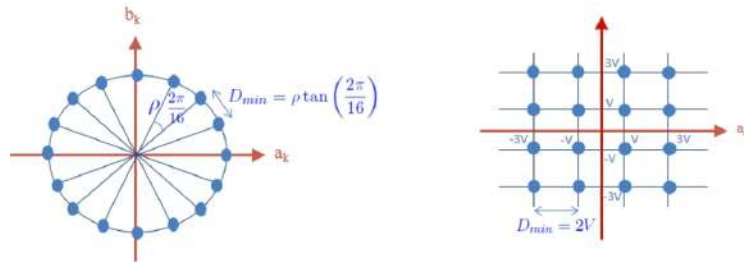


On voit bien dans cet exemple que **la sensibilité au bruit sera plus grande en 4-ASK pour une même puissance d'émission** et donc **le TEB sera moins bon**. Ainsi, pour une même efficacité spectrale, la 4-ASK sera donc moins efficace en puissance que la QPSK.

À partir de cet exemple, on peut déjà identifier un avantage des modulations bi-dimensionnelles, qu'on verra plus précisément par la suite :

Comparées aux modulations mono-dimensionnelles, les modulations bi-dimensionnelles permettent de gagner en efficacité en puissance pour une même efficacité spectrale

3.3 Comparaison des modulations bi-dimensionnelles PSK et QAM pour un ordre M=16



1. On aura alors $V \simeq \begin{cases} 0.45 & (\text{en 4-ASK}) \\ 0.7 & (\text{en QPSK}) \end{cases}$

3.3.1 Comparaison en termes d'efficacité spectrale (symboles supposés équiprobables et indépendants)

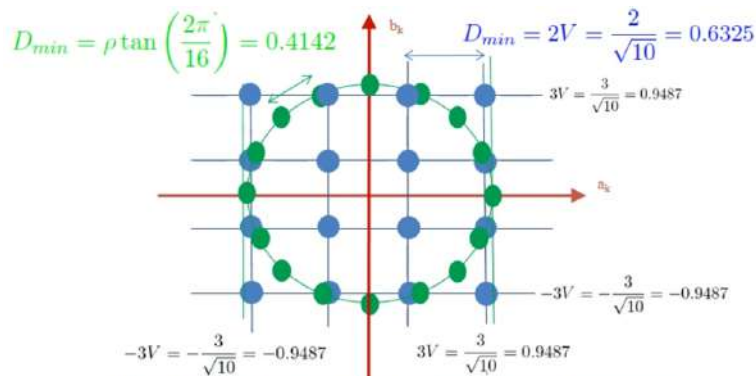
On retrouve ici ce que l'on a vu précédemment, l'efficacité spectral ne dépendant que du filtre de mise en forme et du nombre de symboles, **les deux modulations 16-PSK et 16-QAM auront la même efficacité spectrale pour un même filtre de mise en forme**, et on obtient aussi les mêmes résultats de calculs (sauf M ici qui vaut 16) pour une **mise en forme en racine de cosinus surélevé**.¹

3.3.2 Comparaison en termes d'efficacité en puissance (symboles supposés équiprobables et indépendants)

Pour une même efficacité spectral, c'est-à-dire même nombre de symboles et même filtre de mise en forme pour transmettre avec débit donné, la puissance du signal transmis dans les deux cas ne change pas par rapport à l'exemple précédent (toujours à part la valeur de M), donc elle dépend de la variance des symboles d_k notée encore σ_d^2 , et qui vaut :

$$\sigma_d^2 = E[|d_k - m_d|^2] = \begin{cases} \rho^2 & \text{(quand on est en 16-PSK)} \\ 10V^2 & \text{(quand on est en 16-QAM)} \end{cases}$$

avec ρ le rayon du cercle sur lequel sont positionnés les 16 symboles et les symboles en 16-QAM distants de $2V$. Supposons encore une fois que σ_d^2 pour obtenir la même puissance d'émission. On va avoir ici une distance D_{\min} entre symboles qui sera plus faible en 16-PSK qu'en 16-QAM. En effet, en forçant les symboles à se trouver sur un cercle, on les espace moins, en les distribuant sur **une grille** pour un même espace à remplir qui va représenter une même puissance d'émission. Voici un exemple où l'on suppose $\sigma_d^2 = E[|d_k|^2] = 1$ dans les deux cas² :



Même filtre de mise en forme, Même nombre de symboles
=> Même efficacité spectrale entre 16-PSK et 16-QAM
mais la 16-QAM sera plus efficace en puissance

On voit bien dans cet exemple que **la sensibilité au bruit sera plus grande en 16-PSK pour une même puissance d'émission** et donc **le TEB sera moins bon**. Ainsi, pour une même efficacité spectrale, la 16-PSK sera donc moins efficace en puissance que la 16-QAM.

À partir de cet exemple, on peut déjà identifier un avantage qu'on verra plus précisément par la suite :

Pour une même efficacité spectrale, les modulations M-QAM sont plus efficaces en puissance que les modulations M-PSK.

1. Selon la valeur de α , on aura une efficacité spectrale plus ou moins élevée.
2. On aura alors $\rho = 1$ en 16-PSK et $V = 0.3161$ en 16-QAM.

3.4 Intérêt des modulations de type PSK

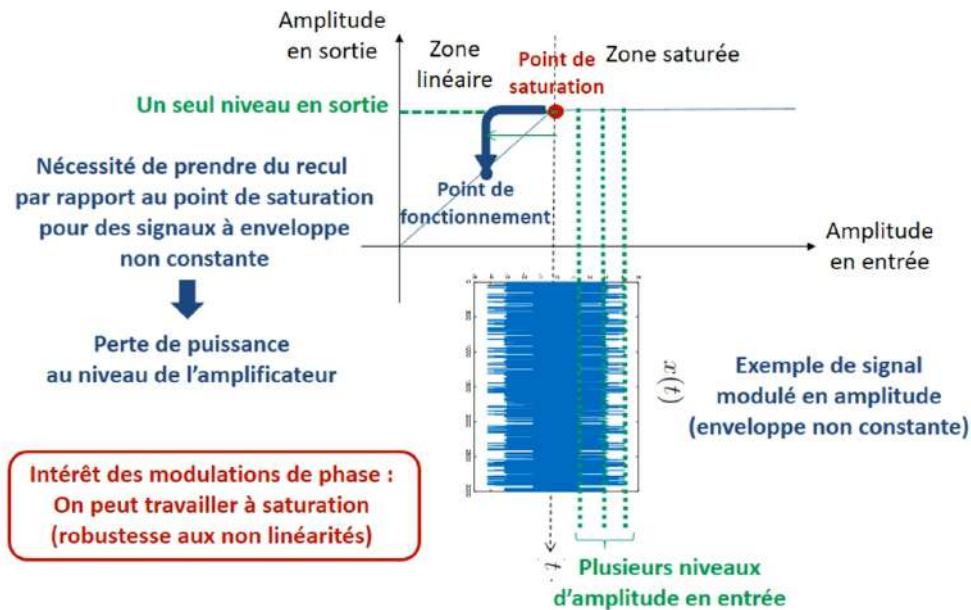
Du coup, on peut se poser la question de savoir à quoi servent les modulations PSK, puisqu'elles sont, pour un même ordre, aussi efficaces spectralement que les QAM mais moins efficaces en puissance. Mais en fait, **les modulations PSK vont être plus robustes** aux non linéarités.

En présence de non linéarités (exemple : amplificateur)

Une non linéarité typique est celle introduite par un **amplificateur** lorsqu'on veut le faire travailler à saturation, dans le cas où il est embarqué par exemple. Si on veut travailler à saturation, il n'est pas possible d'utiliser des signaux modulés en amplitude, car alors, pour plusieurs amplitudes en entrée de l'amplificateur, on se retrouvera avec une seule amplitude en sortie, telle que c'est représenté dans le schéma ci-dessous en vert.

Si l'information était dans la différence d'altitude, alors **en sortie de l'amplificateur, l'information est perdue**, et donc dans ce cas il faut prendre du recul par rapport à la saturation et travailler avec un point de fonctionnement qui se trouve en **zone linéaire** de l'amplificateur, donc il n'est pas le point de saturation, et l'inconvénient, c'est qu'on utilise pas alors l'amplificateur au maximum de ses capacités. Par contre, si on utilise une modulation de phase, étant donné que l'information ne se trouve pas dans l'amplitude, il est alors possible de travailler proche du point de saturation. C'est l'avantage principal des modulations PSK et c'est ce qui fait qu'elles sont utilisées dans le domaine des transmissions par satellite même si elles sont moins efficaces en puissance que les QAM.

On résume tout ce qui a été expliqué dans le schéma suivant :



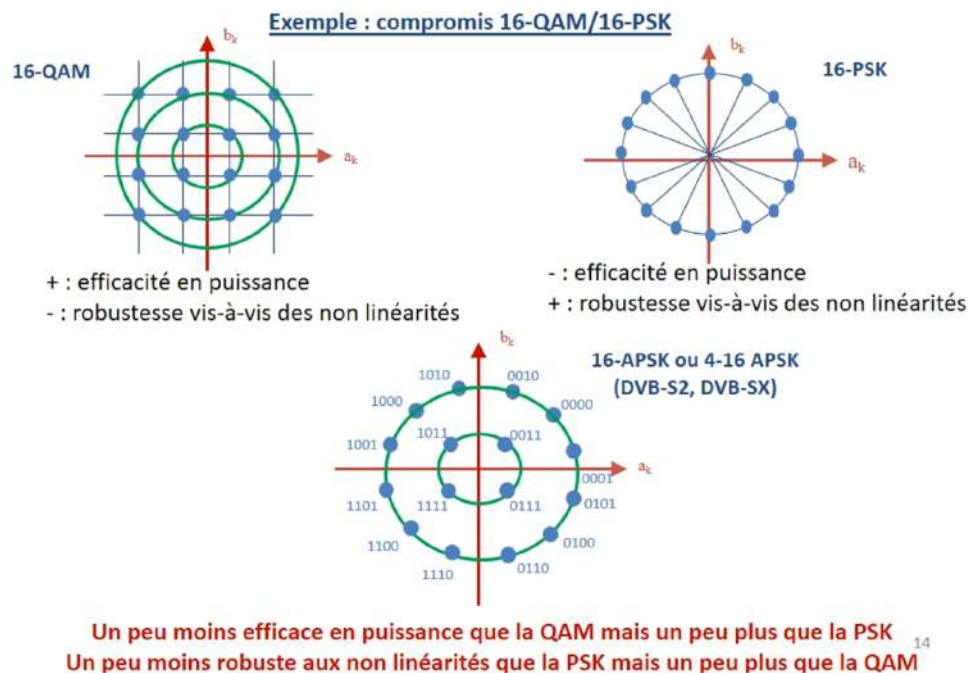
3.5 Intérêt des modulations de type ASK

En termes d'utilisation des modulations PSK, en pratique, on ne peut guère aller au-delà de la 8-PSK. On trouve uniquement de la QPSK dans le DVB-S, et de 8-PSK dans le DVB-S2. En effet, au-delà de 8 points sur le cercle, il faudrait des puissances d'émission beaucoup trop grandes pour assurer une distance minimale conduisant au niveau de TEB souhaité.

Pour pouvoir augmenter l'efficacité spectrale en diminuant les problèmes liés aux non linéarités, on a imaginé un autre type de modulation qui va être une **hybridation** entre la QAM et la PSK. C'est la **modulation A-PSK**.

Voici un exemple représenté par le schéma ci-dessous :

- La modulation 16-QAM à gauche va donner un signal modulé avec trois niveaux d'amplitude différents.
- La modulation 16-PSK à droite va positionner 16 symboles sur un seul niveau d'amplitude.
- La modulation 16-APSK va être construite en repositionnant les 16 symboles sur 2 cercles au lieu de 3 comparé à 16-QAM. L'efficacité spectrale sera donc là même que pour la 16-QAM pour un filtre de mise en forme donné, puisque le nombre de symboles est le même. L'efficacité en puissance sera un peu moins bonne que la 16-QAM puisque les symboles seront plus proches pour une même puissance d'émission, mais on n'aura que 2 niveaux d'amplitude au lieu de 3, et donc, on pourra prendre moins de recul par rapport aux points de saturation et on gagnera ainsi de l'efficacité en puissance.



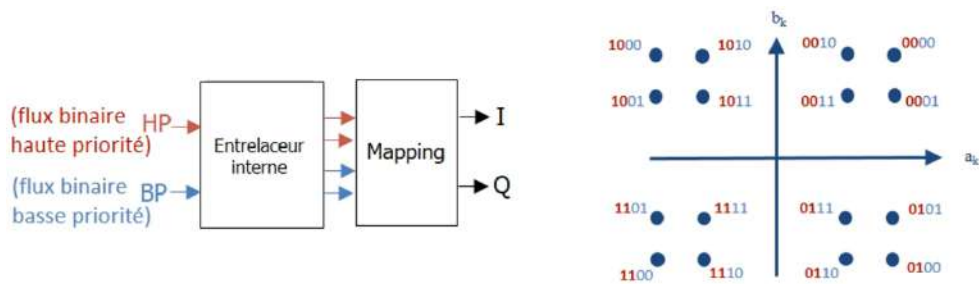
3.6 Intérêt des modulations hiérarchiques

Ces modulations sont essentiellement utilisées pour deux raisons :

3.6.1 Faire de la priorité de flux (dans les normes DVB-T ET DVB-T2)

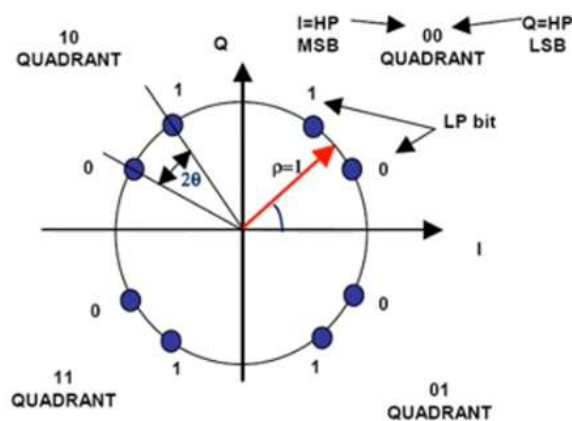
On peut en effet constater que dans une modulation hiérarchique, les cadrans sont **éloignés** dans la constellation, et que les **deux premiers bits codent le cadran**. Ces deux premiers bits seront donc *moins sensibles* aux bruits introduits par le canal de propagation et on pourra y placer des informations prioritaires, et on aura deux flux :

- **un flux haute priorité HP** : il sera codé sur les deux premiers bits, les bits de **poids fort**.
- **un flux basse priorité BP** : il sera codé sur les bits **poids faible**.



On peut imaginer par exemple mettre l'image sur les 2 bits de poids fort et les sous-titres sur les 2 bits de poids faible, pour s'assurer que l'image passe même si les conditions dans le canal ne sont pas très bonnes, et que si on a de bonnes conditions, les sous-titres vont passer, mais si les conditions sont pas exceptionnelles, les sous-titres seront perdus.

3.6.2 Faire de la rétro-compatibilité entre les standards (dans les normes DVB-S2 ET DVB-SX)



En effet, la norme DVB-S, qui était **la première norme de diffusion multimédia et de contenus multimédias par satellite**, utilise **une modulation QPSK**, et elle représente la norme de télévision par satellite la plus répandue dans les décodeurs actuels.

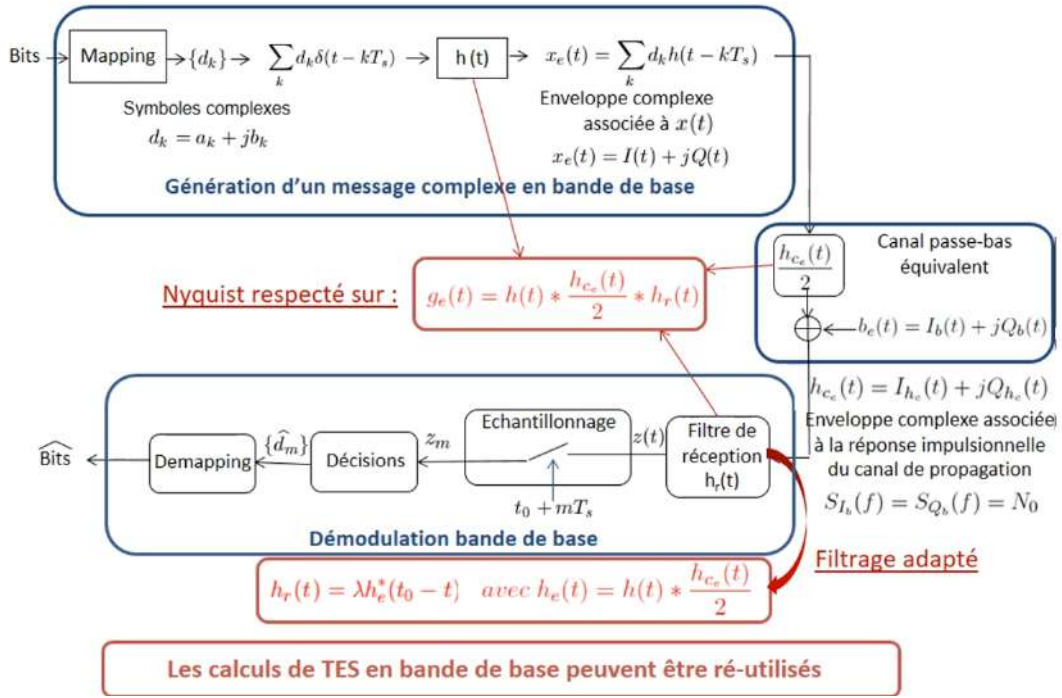
La norme DVB-S2, donc nouvelle génération, prévoit d'utiliser une constellation 8-PSK, et donc de transmettre des débits plus élevés. Cependant, tous les utilisateurs ne vont pas du jour au lendemain changer leur télévision pour pouvoir recevoir du DVB-S2. Ainsi, grâce à cette modulation **8-PSK hiérarchique**, les récepteur DVB-S verront **une QPSK**, sans pouvoir dissocier les symboles de même cadran qui ont été rapprochés, et les récepteurs DVB-S2 pourront, eux, voir une 8-PSK.

4 Performances

En ce qui concerne la comparaison en terme d'efficacité en puissance, on s'était basé sur la comparaison de la distance minimum obtenue entre les symboles pour une même puissance d'émission, afin d'évaluer la plus ou moins grande résistance des différentes modulations vis-à-vis du bruit, et donc, le TEB plus ou moins élevé obtenu. On va voir ici quels sont les TEB des modulation sur fréquence porteuse afin de conforter les comparaisons précédemment réalisées.

4.1 Chaîne passe-bas équivalente

Pour calculer le TEB d'une modulation sur fréquence porteuse, on va utiliser la chaîne passe bas équivalente associée. Elle est rappelée ci-dessous et permettra (c'est un de ses avantages) de **réutiliser les calculs effectués en bande de base**. Le signal modulé sur porteuse est remplacé par son enveloppe complexe associée. Le canal de propagation est lui, remplacé par un canal complexe passe-bas équivalent avec un bruit complexe de DSP égale à N_0 pour ses voies **réelle** et **imaginaire**, si la densité spectrale de puissance du bruit introduit par le canal est $N_0/2$. On a supposé que **le critère de Nyquist est respecté** et que **le filtrage de réception est adapté** à la forme d'onde reçue :

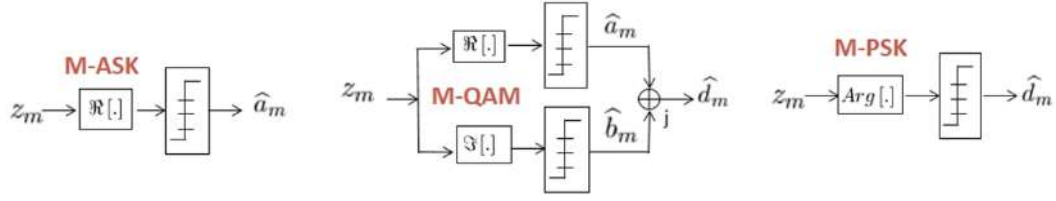


Ce qui va changer d'une modulation sur porteuse à l'autre va être :

- **le mapping** qui sera *réel* pour une modulation M-ASK ($d_k = a_k \in \{\pm V, \pm 3V, \dots, \pm(M-1)V\}$) *complexe* avec des voies réelles et imaginaires **indépendantes** pour une modulation M-QAM ($a_k, b_k \in \{\pm V, \pm 3V, \dots, \pm(\sqrt{M}-1)V\}$), et *complexe* avec des voies réelles et imaginaires **liées** pour une modulation M-PSK¹.
- **le démapping** : qui devra être **adapté** au mapping utilisé.
- **le bloc décisions** : qui devra être **adapté** à la modulation considérée.

Remarque : Selon la modulation considérée pour le bloc **décisions**, on aura : 1 détecteur à seuil à voie *réelle* pour une modulation ASK, 2 détecteurs à seuil sur les voies *réelle* et *imaginaire* pour une modulation QAM, et 1 détecteur à seuil portant sur l'argument des symboles reçus pour la modulation PSK, qui peuvent se schématiser comme suit :

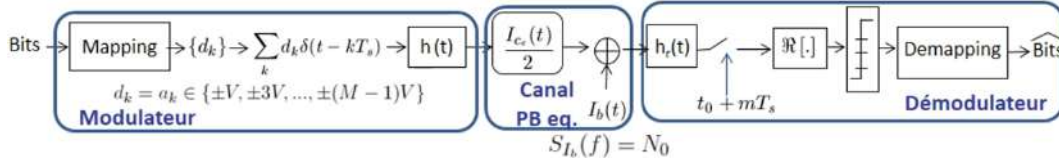
1. Dans ce cas, $d_k \in \left\{ \rho e^{j \left(\frac{2\pi}{M} l + \frac{\pi}{M} \right)} / l = 0, \dots, M-1 \right\}$



4.2 Performance des modulations sur porteuse

4.2.1 Chaîne passe-bas équivalente à la modulation M-ASK

Voici la chaîne passe-bas équivalente associée, avec une seule voie puisque les symboles a_k sont réels :



On a donc le **TES qui se résume au TES sur la voie I** noté TES_I , et on va reprendre ce qui a été vu en bande de base pour le calcul du TEB en l'adaptant à cette chaîne passe-bas équivalente. Ainsi, en supposant dans un premier temps que **le critère de Nyquist est respecté**, TES_I va donc s'écrire :

$$TES = TES_I = 2 \left(1 - \frac{1}{M} \right) Q \left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma_w} \right)$$

où σ_w^2 représente la **puissance du bruit filtré par le filtre de réception de réponse impulsionnelle** $h_r(t)$.

On va maintenant écrire ce TES en fonction de E_b/N_0 , rapport signal sur bruit par bit à l'entrée du récepteur et référence commune pour comparer les chaînes de transmission. Pour cela, on va commencer par écrire σ_w^2 qui est donnée par l'intégrale de la DSP du bruit en sortie du filtre de réception de réponse $h_r(t)$:

$$\sigma_w^2 = N_0 \int_R |H_r(f)|^2 df$$

Cette DSP est obtenu en multipliant la DSP du bruit en entrée du filtre N_0 par le module de la réponse en fréquence du filtre au carré $H_r(f)$. C'est une des relations de Wiener-Lee vue en traitement du signal.

Si le filtre de réception est **adapté à la forme d'onde reçu**, alors :

$$\int_R |H_r(f)|^2 df = g(t_0)$$

et on a donc :

$$\sigma_w^2 = N_0 g(t_0)$$

Calcul de l'énergie¹ d'un bit à l'entrée du récepteur :

Elle est donnée par la puissance du signal reçu, c'est-à-dire du signal modulé sur porteuse x

1. Attention, cette énergie est un paramètre physique qui représente l'énergie véritablement reçue à l'entrée du récepteur pour un bit.

multiplié par la durée d'un bit :

$$E_b = P_x T_b$$

la puissance du signal modulé sur porteuse est égale à la puissance de son enveloppe complexe associée divisée par 2 :

$$E_b = \frac{P_{x_e}}{2} T_b$$

la puissance de l'enveloppe complexe associée au signal modulé sur porteuse est donnée par l'intégrale de sa DSP, en supposant que **les symboles émis sont indépendants et équiprobables à moyenne nulle** :

$$E_b = \frac{1}{2} \frac{\sigma_d^2}{T_s} \int_R |H_e(f)|^2 df \times T_b$$

sachant que $H_e(f)$ représente la TF de la forme d'onde reçue, et que $\sigma_d^2 = \sigma_a^2$ puisque les symboles sont réels.

Si l'on suppose à nouveau que le filtre de réception est **adapté à la forme d'onde reçue**, l'intégrale du module de $H_e(f)$ au carré vaut $g(t_0)$, et en écrivant également $T_s = \log_2(M) T_b$, on arrive à une énergie binaire à l'entrée du récepteur qui vaut :

$$E_b = \frac{\sigma_a^2}{2 \log_2(M)} g(t_0)$$

d'autre part :

$$\sigma_a^2 = E[|a_k - m_a|^2] = 2 \times \frac{V^2}{M} \times \{1^2 + 3^2 + \dots + (M-1)^2\} = 2 \times \frac{V^2}{M} \frac{M(M^2-1)}{6} = \frac{V^2(M^2-1)}{3}$$

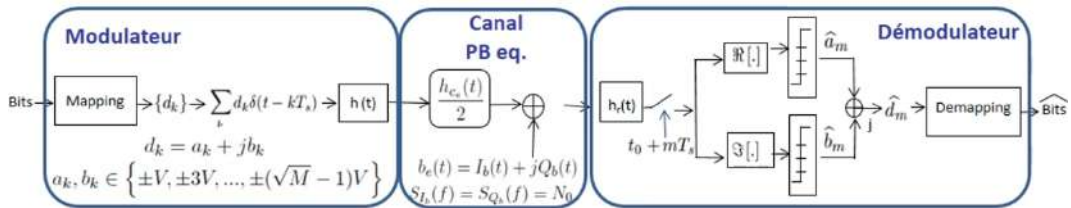
On arrive ainsi à une expression finale du TES^a pour une modulation à l'ordre M avec **des symboles indépendants équiprobables et de moyenne nulle**, lorsque le **critère de Nyquist est respecté** et que le **filtre de réception est adapté à la forme d'onde reçue** :

$$TES = TES_I = 2 \left(1 - \frac{1}{M}\right) Q \left(\sqrt{\frac{6 \log_2(M)}{M^2-1}} \frac{E_b}{N_0} \right)$$

^a. Pour obtenir le TEB, il suffira de **diviser par \log_2** dans le cas d'un **mapping de Gray**.

4.2.2 Chaîne passe-bas équivalente à la modulation M-QAM (carrée, M>2)

Voici la chaîne passe équivalente associée, avec deux voies indépendantes I et Q , $I(t)$ transportant les symboles a_k , $Q(t)$ transportant les symboles b_k :



On va commettre une erreur sur un symbole d_k en réception lorsqu'on se trompe sur la voie I ou sur la voie Q . Les TES global est donc donné par la probabilité d'erreur sur la voie I plus la probabilité d'erreur sur la voie Q moins la probabilité de l'intersection, qui peut s'écrire comme le produit des deux TES étant donné que les deux voies sont indépendantes :

$$TES = TES_I + TES_Q + TES_I TES_Q$$

en négligeant le terme du second ordre $TES_I TES_Q$, on arrive donc à un TES égal à environ 2 fois le TES obtenu sur la voie I , ou 2 fois le TES obtenu sur la voie Q , que nous savons écrire si **le critère de Nyquist est respecté** :

$$TES \simeq 2TES_I = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma_{w_I}}\right)$$

la seule chose qui change dans le calcul de σ_w^2 et de l'énergie par bit à l'entrée du récepteur par rapport à ce que l'on vient de voir est le calcul de σ_d^2 , qui ici égal à $2\sigma_a^2$ ou $2\sigma_b^2$. Ce qui change dans les calculs de σ_a^2 , c'est le fait que les symboles a_k appartiennent ici à un ensemble comprenant \sqrt{M} valeurs et non plus M valeurs comme précédemment. On refait alors les calculs avec les mêmes hypothèses (**filtrage adapté et symboles indépendants et équiprobables**) :

$$\sigma_{w_I}^2 = N_0 \int_R |H_r(f)|^2 df = N_0 g(t_0)$$

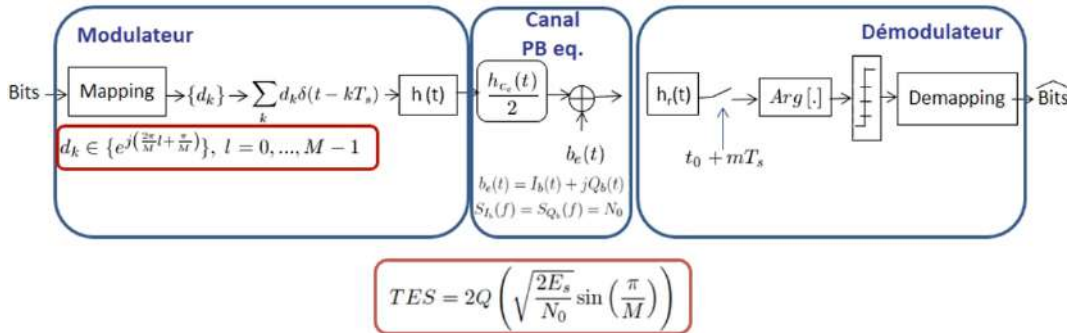
$$E_b = P_x T_b = \frac{P_{x_e}}{2} T_b = \frac{1}{2} \frac{\sigma_d^2}{T_s} \int_R |H_e(f)|^2 df \times T_b = \frac{\sigma_a^2}{\log_2(M)} g(t_0)$$

On arrive ainsi à une expression finale du TES ^a pour une modulation QAM carrée à l'ordre M avec **des symboles indépendants équiprobables et de moyenne nulle**, lorsque **le critère de Nyquist est respecté** et que **le filtre de réception est adapté à la forme d'onde reçue** :

$$TES \simeq 2TES_I = 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3}{M-1}} \frac{E_s}{N_0}\right) = 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3 \log_2(M)}{M-1}} \frac{E_b}{N_0}\right)$$

^a. Pour obtenir le TEB ici aussi, il suffira de **diviser par \log_2** dans le cas d'un **mapping de Gray**.

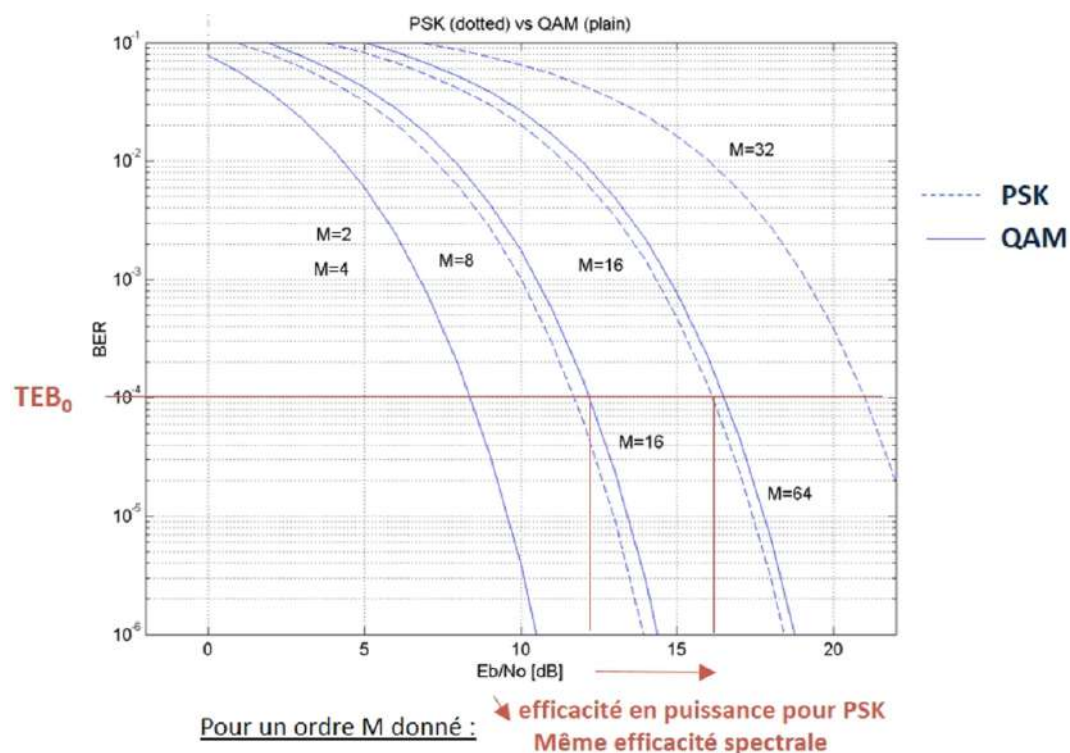
4.2.3 Chaîne passe-bas équivalente à la modulation M-PSK



Le calcul ici est un peu compliqué, du fait de la prise de l'argument dans le bloc **décisions** avant de rentrer dans les détecteurs à seuil. On admettra donc ce résultat, qui est donné là aussi pour **des symboles indépendants équiprobables et de moyenne nulle**, lorsque **le critère de Nyquist est respecté** et que **le filtre de réception est adapté à la forme d'onde reçue** :

$$TES = 2Q \left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right) \right)$$

4.2.4 Comparaison PSK/QAM en termes d'efficacité en puissance



Cela confirme bien ce qu'on a supposé en regardant **les distance minimales** entre symboles dans les deux cas pour une puissance d'émission donnée.

Si on fixe ici un TEB à atteindre, on constate en effet que pour un même ordre M , l'utilisation d'une modulation PSK nécessitera une valeur plus élevée du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur, ce qu'on a appelé $\frac{E_b}{N_0}$. La modulation PSK sera donc **moins efficace** que la modulation QAM en puissance, alors que pour un même ordre, elle présente à **la même efficacité spectrale**. Mais comme dit précédemment, il peut être intéressant d'utiliser des modulations PSK en présence de **non linéarité**.