



Introduction aux télécommunications

Séquence 2

Département Sciences du Numérique
2020-2021

Table des matières

1 Canal de propagation	4
1.1 Chaine de communication numérique : le canal de propagation	4
1.2 Lien physique entre l'émetteur et le récepteur	4
1.3 Canal de propagation : Standards – recommandations - normes de télécommunications	5
1.4 Canal de propagation : Distorsions et contraintes introduites	6
1.4.1 Distorsions	6
1.4.2 Contraintes	6
1.5 Canal de propagation : Atténuation du signal transmis	6
1.6 Canal de propagation : Transmission en bande de base ou sur porteuse	6
1.7 Canal de propagation partagé : Méthodes de multiplexage	7
1.8 Canal de propagation : Un ou plusieurs trajets entre l'émetteur et le récepteur	8
1.8.1 Seulement la ligne directe entre émetteur et récepteur (un seul trajet)	8
1.8.2 Plusieurs trajets entre émetteur et récepteur (canal «multi-trajets»)	8
1.9 Récap des deux cas	8
1.10 Canal de propagation : Modélisation	9
1.11 Canal de propagation : Canal AWGN (Additive White Gaussian Noise)	9
1.12 Canal de propagation : Canal AWGN à bande passante limitée	10
1.13 Canal de propagation : Introduction d'un bruit	11
1.14 Canal de propagation : Canal sélectif en fréquence	11
1.15 Canal de propagation : Stationnaire ou non stationnaire	12
2 Interférences entre symboles : Quel est le problème	12
2.1 Problème de l'interférence entre symboles : Modulateur bande base - Canal de propagation	12
2.1.1 Exemple 1 : Canal AWGN	13
2.1.2 Exemple 2	16
3 Interférences entre symboles : Critère de Nyquist dans le domaine temporel	19
3.1 Le problème de l'interférence entre symboles : Mise en place du modulateur bande de base	19
3.2 Exemple	20
3.3 Mise en place du démodulateur bande de base	21
4 Interférences entre symboles : Diagramme de l'œil	22
4.1 Exemple	22
5 Interférences entre symboles : Critère de Nyquist dans le domaine temporel	24
5.1 Expression	24
5.2 Exemple	25
5.3 Autre exemple : bande de Nyquist	26
5.4 Filtre en cosinus surélevé	27
5.5 Impact du canal de propagation	28
6 Interférences entre symboles : Impact du canal de propagation dans le critère de Nyquist	30
6.1 Critère de Nyquist en temps et en fréquence	30
6.2 Exemple	30
6.3 Autre exemple : Canal sélectif en fréquences	33

Table des figures

1	Représentation du canal de propagation dans la chaîne de transmission	4
2	Exemples de transmission	5
3	Effet de l'atténuation par absorption, diffusion dues aux gaz atmosphériques, aux nuages, à la pluie (transmission satellite fixe de type DVB-S)	6
4	Transposition de fréquences	7
5	Filtrage du signal émis et ajout du bruit	9
6	Modélisation brève du canal AWGN	10
7	Exemples de distorsions dues au bruit	11
8	Exemples de distorsions introduites par un canal sélectif en fréquences	11
9	Tracé du diagramme de l'oeil	23

1 Canal de propagation

1.1 Chaine de communication numérique : le canal de propagation

Le **canal de propagation**¹ est le point central de la chaîne de transmission.

Nous allons concevoir *l'émetteur* et *le récepteur* en fonction du canal de propagation pour que l'information soit transmise le mieux possible étant donné le canal de propagation à traverser. Nous allons donc dire **quelques mots** du canal de propagation et **la façon de le modéliser** afin de *concevoir la chaîne de transmission*.

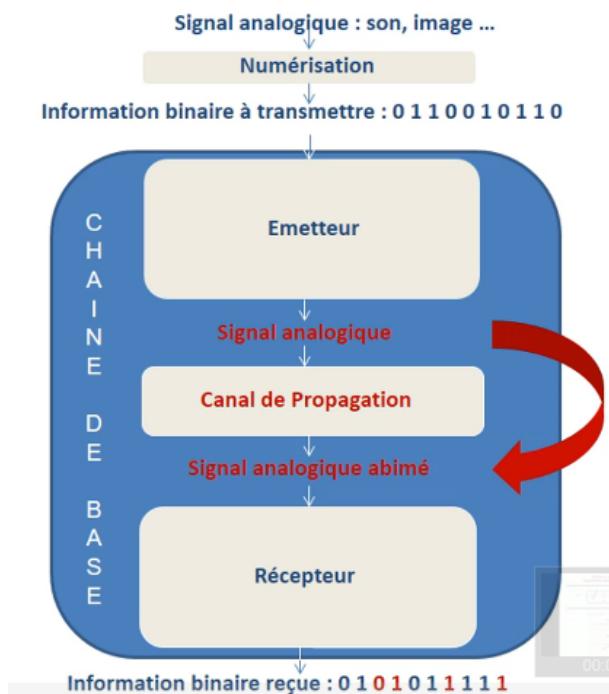


FIGURE 1 – Représentation du canal de propagation dans la chaîne de transmission

1.2 Lien physique entre l'émetteur et le récepteur

Plusieurs types de canaux de propagation peuvent être traversés par le signal généré :

- **l'air** : pour les transmissions sans fil.
- **le cable, le cuivre, ou la fibre** : pour les transmissions filaires.

Ci dessous quelques exemples de transmission avec différents types de canaux de propagation :

1. C'est le lien physique qui se trouve entre l'émetteur et le récepteur.

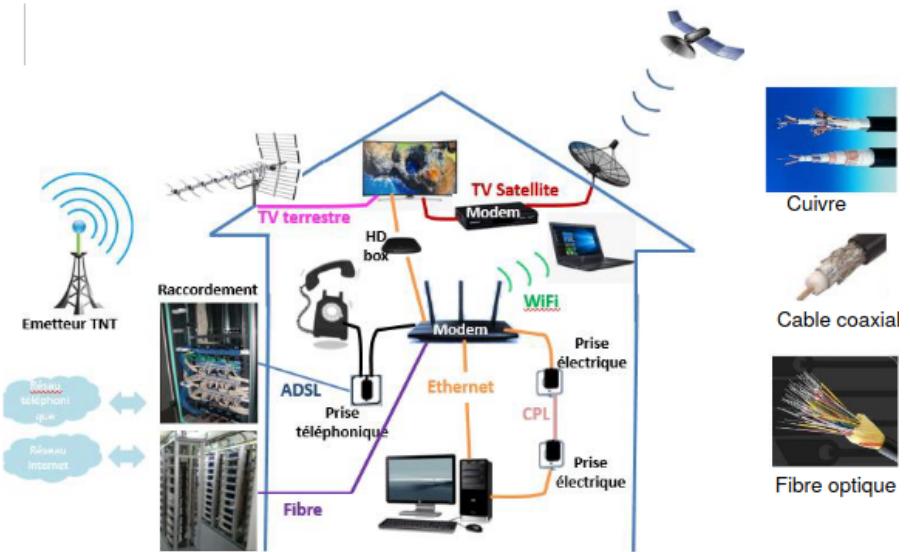


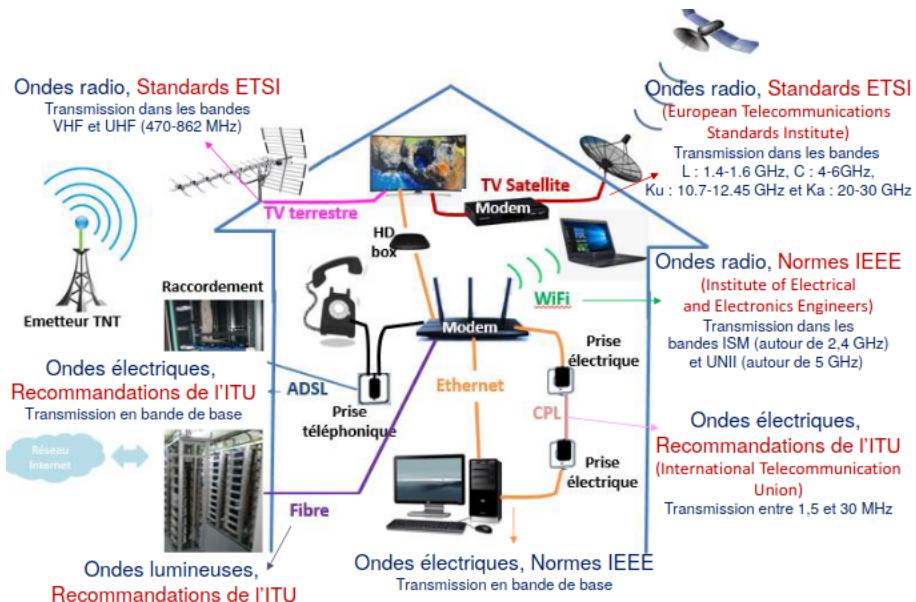
FIGURE 2 – Exemples de transmission

1.3 Canal de propagation : Standards – recommandations - normes de télécommunications

Chaque fois, le signal est de **nature différente**; il peut être :

- une onde radio.
- une onde électrique.
- une onde optique.

La transmission se fait à chaque fois également dans des bandes de fréquence différentes, suivant certaines normes standards, ou recommandations.



1.4 Canal de propagation : Distorsions et contraintes introduites

À chaque fois, le canal de propagation va introduire des distorsions sur le signal généré, et nous imposer certaines contraintes pour la transmission. Ci-dessous un résumé de ces dernières¹ :

1.4.1 Distorsions

- Atténuation du signal transmis.
- Bruit :
 - *Bruit externe* = signaux reçus en plus du signal utile.
 - *Bruit interne* = dispositifs électroniques dans le récepteur.
- Sélectivité en temps et en fréquence : Un ou plusieurs trajets entre l'émetteur et le récepteur => canal non sélectif ou sélectif en fréquence

1.4.2 Contraintes

- Bande passante limitée.
- Transmission bande base ou sur fréquence porteuse.
- Canal de propagation partagé : méthodes de multiplexage, organismes de régulation.
- Transmission fixe ou mobile : canal stationnaire ou non stationnaire

1.5 Canal de propagation : Atténuation du signal transmis

Le signal généré va être *atténué* entre l'émetteur et le récepteur. Ci-dessous un exemple d'atténuation sur une transmission télé par satellite. L'atténuation ici est due à l'absorption et à la diffusion dues aux gaz atmosphériques, aux nuages et à la pluie.



FIGURE 3 – Effet de l'atténuation par absorption, diffusion dues aux gaz atmosphériques, aux nuages, à la pluie (transmission satellite fixe de type DVB-S)

1.6 Canal de propagation : Transmission en bande de base ou sur porteuse

Pour de nombreuses transmissions, le signal généré devra être *transporté dans la bande de fréquences allouée*. Nous devrons alors effectuer une **transposition de fréquences**.

1. Elles sont toutes à passer en revue.

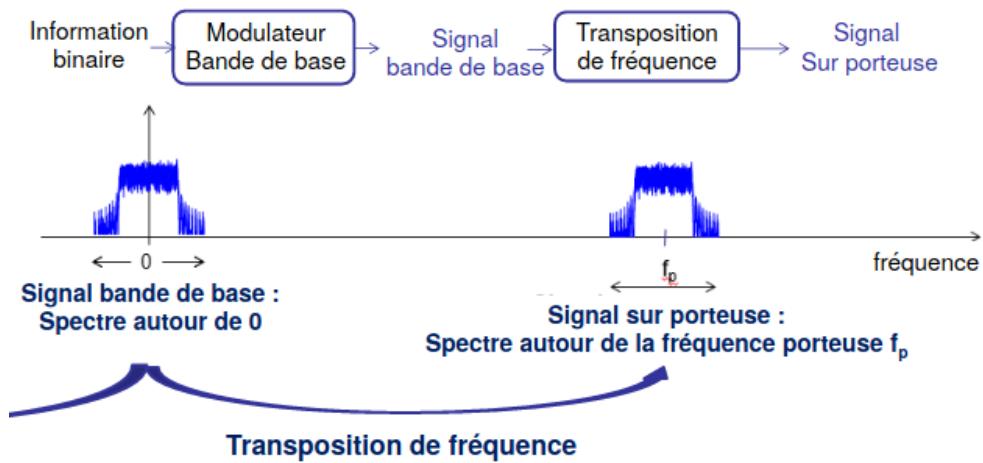


FIGURE 4 – Transposition de fréquences

Les bandes utilisées pour les transmissions de la télévision via un satellite fixe sont : $L : 1.4 - 1.6 \text{ GHz}$, $C : 4 - 6 \text{ GHz}$, $Ku : 10.7 - 12.45 \text{ GHz}^1$ et $Ka : 20 - 30 \text{ GHz}$, selon la région dans laquelle on se trouve.

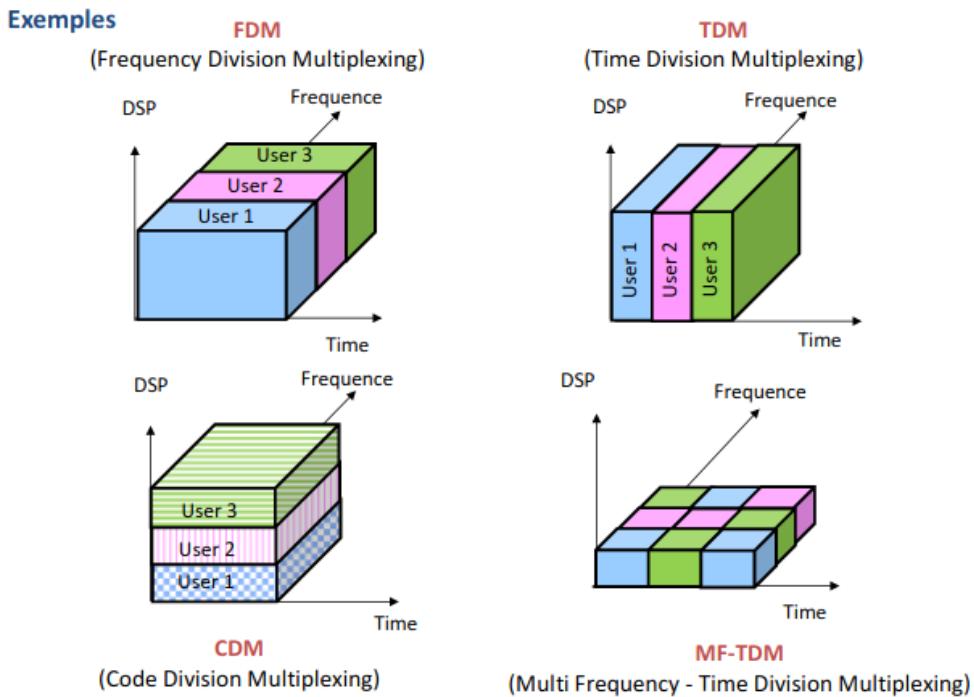
1.7 Canal de propagation partagé : Méthodes de multiplexage

Lorsque le canal de propagation est partagé entre plusieurs utilisateurs, nous devons mettre en place une méthode de *multiplexage* ; on peut dire aux utilisateurs qu'ils peuvent soit :

- parler **tous en même temps mais pas dans la même bande de fréquences** (multiplexage par répartition en fréquence, FDM en anglais)
- transmettre **tous dans la même bande de fréquence mais pas en même temps** (méthode de multiplexage temporel, TDM en anglais)
- émettre **dans la même bande de fréquence et en même temps, mais en utilisant un code spécifique qui est connu du récepteur et qui permettra au récepteur de trouver la bonne information** (multiplexage par répartition/division de code, CDM en anglais).
- **mélanger plusieurs méthodes**, comme le MFTDM, où les utilisateurs partagent le canal à la fois en temps et en fréquence.

Ci-dessous les représentations respectives :

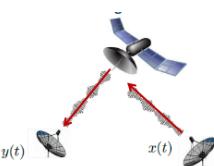
1. La bande Ku est la plus utilisée à l'heure actuelle.



1.8 Canal de propagation : Un ou plusieurs trajets entre l'émetteur et le récepteur

1.8.1 Seulement la ligne de vue directe entre émetteur et récepteur (un seul trajet)

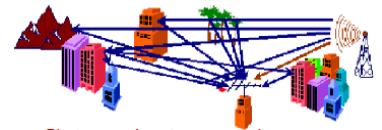
Lorsqu'il n'y a que la ligne de vue directe entre l'émetteur et le récepteur, comme par exemple pour une transmission satellite fixe, le signal reçu est composé du signal transmis qui a été retardé et atténué, plus un bruit qui va représenter tous les signaux reçus qui sont indésirables. Alors, ci-dessous, $x(t)$ représente le *signal émis*, $y(t)$ le *signal reçu*, et $n(t)$ le *bruit*, et α et τ respectivement l'*atténuation* et le *retard* introduit par le canal de propagation.



$$y(t) = \alpha x(t - \tau) + n(t)$$

1.8.2 Plusieurs trajets entre émetteur et récepteur (canal «multi-trajets»)

Dans de nombreux canaux de propagation, nous allons trouver entre l'émetteur et le récepteur *des obstacles*, ce qui va conduire d'avoir en réception plusieurs versions du même signal émis, et qui ont été différemment atténuées et retardées, c'est le cas par exemple pour les transmissions wifi ou pour la télévision numérique terrestre.



1.9 Récap des deux cas

Dans les deux cas, on voit qu'il est possible d'écrire le signal reçu sous la forme d'une **convolution** entre le signal transmis $x(t)$ et quelque chose qui va représenter la réponse impulsionnelle du canal de propagation, qui va agir comme filtre sur le signal transmis. On retrouve bien ici l'expression d'un filtrage avec la convolution entre deux signaux, et bien sûr il y a le bruit qui vient s'ajouter derrière :

Plusieurs atténuations et retards introduits par le canal

$$y(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k x(t-\tau_k) + n(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \delta(t - \tau_k) * x(t) + n(t)$$

1.10 Canal de propagation : Modélisation

On peut donc modéliser le canal de propagation comme un *filtre* avec une certaine réponse impulsionnelle notée $h_c(t)$ par la suite, et puis, un ajout de bruit.

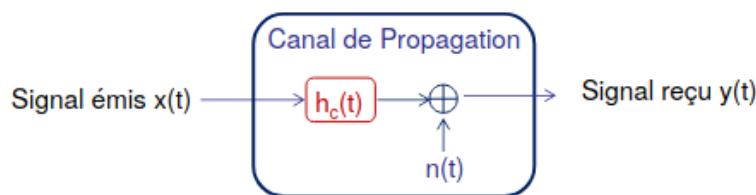


FIGURE 5 – Filtrage du signal émis et ajout du bruit

Le bruit va être supposé **additif**, mais il va être supposé également **blanc**¹, et **gaussien**².

1.11 Canal de propagation : Canal AWGN (Additive White Gaussian Noise)

Lorsqu'il n'y a *qu'une seule ligne de vue directe entre l'émetteur et le récepteur*, c'est comme si le canal de propagation ne faisait **qu'ajouter du bruit au signal transmis**, et qu'il **n'introduisait pas de filtrage**.

Sa *réponse en fréquence* possède un **module constant**, et *une phase* qui sera **linéaire en fréquence** et qui va donc conduire à un temps de propagation de groupe constant³. On va parler de **canal AWGN** pour **canal additif, à bruit blanc et gaussien**⁴.

1. Par analogie avec la **lumière blanche**, un bruit blanc va comporter toutes les fréquences, donc va avoir une densité spectrale de puissance **constante**. Et en général, cette constante est notée $N_0/2$ en télécom.

2. Le fait qu'il soit gaussien reste une propriété temporelle, il va s'agir de la distribution de ses amplitudes.

3. C'est alors le mieux que l'on puisse avoir quand on a un filtre, le module d'une réponse en fréquence constante fait que le canal ne vas abîmer aucune fréquence, il va toutes les laisser passer de la même façon, et le temps de propagation de groupe est constant donc il ne vas pas dégrouper des fréquences.

4. Comme s'il n'y avait pas de filtre.

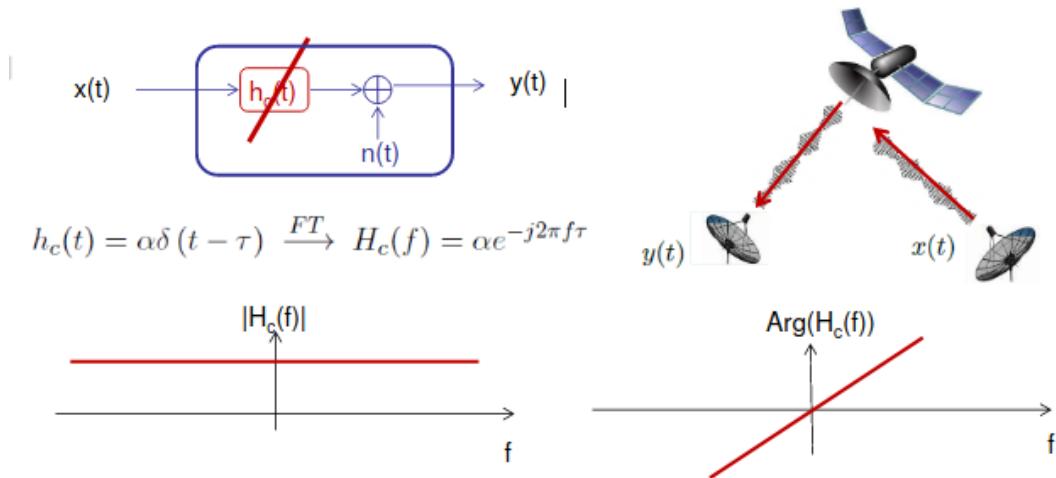
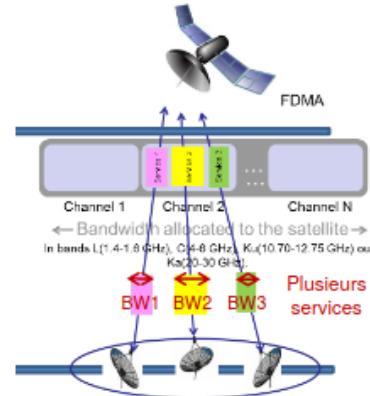


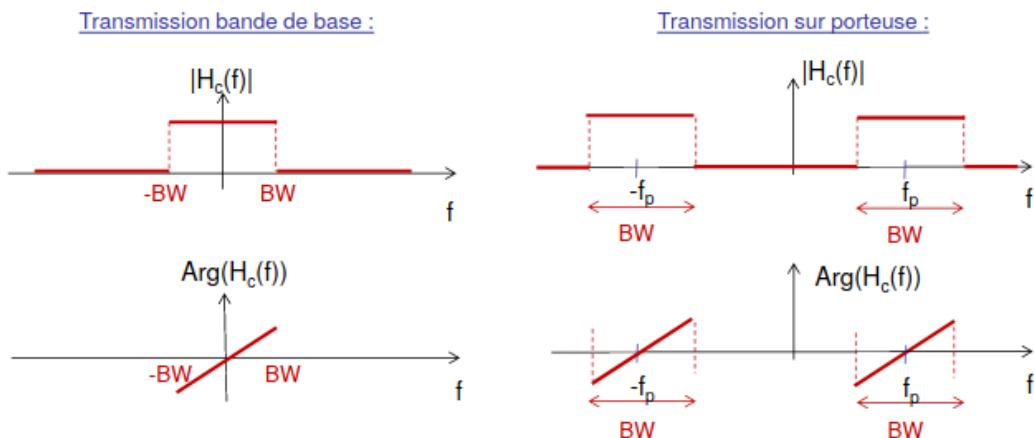
FIGURE 6 – Modélisation brève du canal AWGN

1.12 Canal de propagation : Canal AWGN à bande passante limitée

Généralement, le canal de propagation est AWGN mais sur une bande de fréquence *limitée*, qu'on appelle **la bande passante du canal de propagation**. Le canal agira alors *comme un filtre sur le signal transmis*, dans le sens où il pourra *limiter l'occupation fréquentielle du signal*. Mais sur sa bande passante, le module de sa réponse en fréquence va être plat, et sa phase linéaire va être linéaire en fréquence. À côté un exemple dans le cadre d'une transmission fixe par satellite :



La bande du transporteur va être divisée dans un contexte par exemple de répartition en fréquence FDMA, va être divisé en sous bande, et chaque sous bande sera affectée à un certain service, donc on va avoir une bande passante limitée pour pouvoir réaliser la transmission.



1.13 Canal de propagation : Introduction d'un bruit

Lorsque le canal est AWGN ou AWGN à bande limitée, *si* sa bande passante n'occupe pas le spectre du signal transmis, *alors* la distorsion transmise n'est dûe qu'au bruit, et vient s'ajouter au canal de propagation. Voici quelques exemples de distorsion sur un signal NRZ, mais également sur une image, et ce, pour plusieurs rapports¹ signal à bruit :



FIGURE 7 – Exemples de distorsions dues au bruit

1.14 Canal de propagation : Canal sélectif en fréquence

Lorsque le module de la réponse en fréquence du canal *n'est pas plat sur la bande nécessaire à la transmission*, alors nous allons parler d'un **canal de propagation sélectif en fréquence**. C'est alors le cas lorsque le signal émis se propage sur plusieurs trajets entre l'émetteur et le récepteur, comme dans le cadre d'un lien WI-FI ou d'un lien TNT, mais c'est également vrai pour les transmissions électriques, par exemple pour les liens ADSL.

On a ci-après des exemples de distorsion qui sont dues à la sélectivité en fréquence du canal :

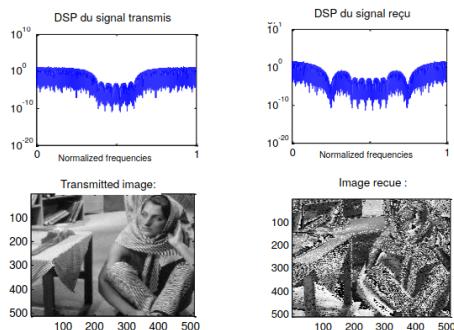


FIGURE 8 – Exemples de distorsions introduites par un canal sélectif en fréquences

1. Lorsque ce rapport **diminue**, les distorsions **augmentent**.

Donc on voit que le spectre du signal transmis a été *déformé* par le canal de propagation, donc là le spectre (voir traitement du signal), il est donné en fréquences normalisées, donc vous avez la partie positive entre 0 et 0.5 et la partie négative entre 0.5 et 1. Pendant tous les cas, on remarque que le spectre a été perturbé, et que l'image est reçue de manière perturbée également. On a ici que du bruit, et la **distorsion n'est dûe qu'à la sélectivité en fréquence du canal**.

1.15 Canal de propagation : Stationnaire ou non stationnaire

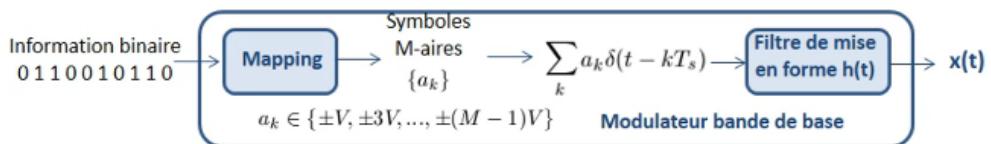
Le canal peut également être *non stationnaire*, ce qui signifie que ses paramètres peuvent changer avec le temps. Cela peut être le cas lorsque **l'émetteur et/ou le récepteur sont mobiles**, mais aussi **s'il y a des obstacles mobiles entre les deux**. On pourrait donc dire encore beaucoup de choses sur la modélisation des canaux de propagation. Cela fera d'ailleurs l'objet d'un cours complet en deuxième année du parcours "télécom et réseaux". Or, pour cette année, on considère un modèle simple affirmant que : **le canal de propagation est un filtre stationnaire avec une réponse impulsionnelle donnée qui sera notée $h_c(t)$ et qui lui a ajouté du bruit blanc ou gaussien au signal transmis.**

2 Interférences entre symboles : Quel est le problème

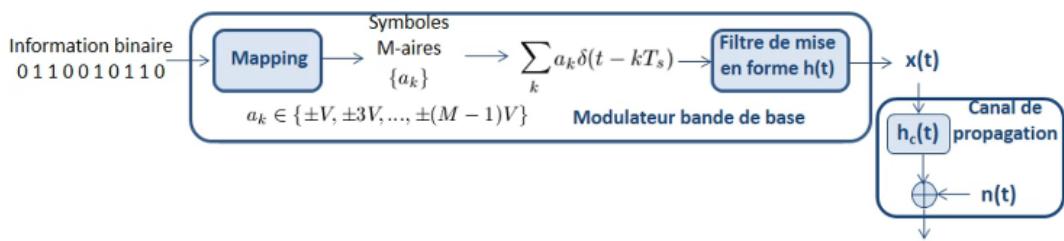
On verra que dans une chaîne de transmission numérique, les interférences entre symboles peuvent être générées et venir gêner la bonne récupération de l'information binaire transmise au niveau du récepteur.

2.1 Problème de l'interférence entre symboles : Modulateur bande base - Canal de propagation

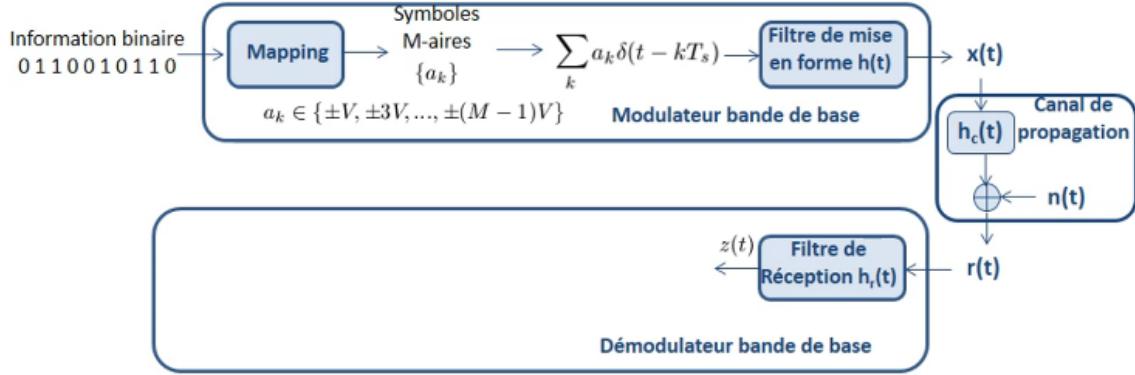
Voici le modulateur bande de base :



Nous avons vu précédemment que le canal pouvait être modélisé comme un filtre et un ajout de bruit :



Le signal transmit ayant une bande de fréquences limitée et le bruit étant blanc, donc large bande, nous allons introduire un filtre passe-bas à l'entrée du récepteur afin de couper le bruit en dehors de la bande utile, c'est-à-dire en dehors de la bande du signal :



Le signal à la sortie du filtre de réception va être donc donné par la somme des diracs pondérés par les symboles, qui a traversé trois filtres : le **filtre de mise en forme** avec une réponse impulsionnelle $h(t)$, le **filtre canal** avec une réponse impulsionnelle $h_c(t)$, et le **filtre de réception** avec une réponse impulsionnelle $h_r(t)$, plus **du bruit qui a été filtré par $h_r(t)$** . Donc si nous appelons $g(t)$ la convolution entre h , h_c et h_r , ce qui va représenter du coup la réponse impulsionnelle globale de toute la chaîne de transmission de l'ensemble des filtres de la chaîne de transmission, et bien la somme des diracs pondérés par les symboles est donc convoluée par $g(t)$, ce qui va en fait conduire à translater $g(t)$ sur chacun des diracs, et à venir le pondérer par les symboles a_k :

$$z(t) = \sum_k a_k \delta(t - kT_s) * \underbrace{h(t) * h_c(t) * h_r(t)}_{g(t)} + \underbrace{n(t) * h_r(t)}_{w(t)}$$

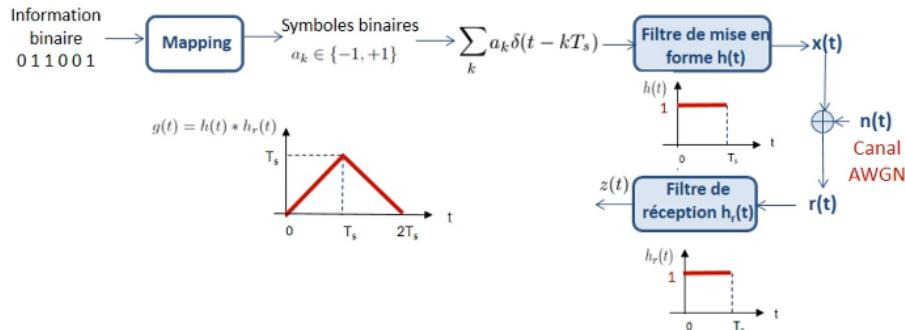
Pour ainsi avoir :

$$z(t) = \sum_k a_k g(t - kT_s) + w(t)$$

Nous allons prendre quelques exemples :

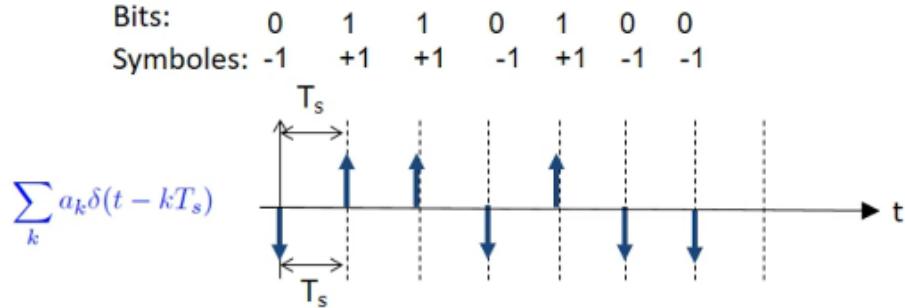
2.1.1 Exemple 1 : Canal AWGN

Il ne filtre pas le signal transmis et ne fait qu'y rajouter du bruit, les réponses impulsionnelles des filtres d'émission et de réception doivent être considérés comme rectangulaires de longueur T_s , et donc la longueur entre h , h_c , et h_r , que l'on appelle $g(t)$, va être un triangle de longueur $2T_s$, et donc atteint le pic en T_s .



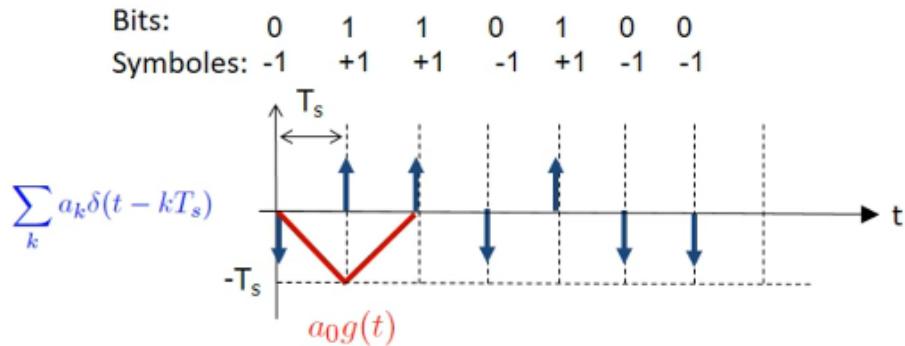
On va supposer que nous voulons transmettre une information binaire (précisée ci-dessous), et que

le mapping choisi également binaire à moyenne nulle. Ce qui va conduire à la somme des diracs pondérés présentée ici :

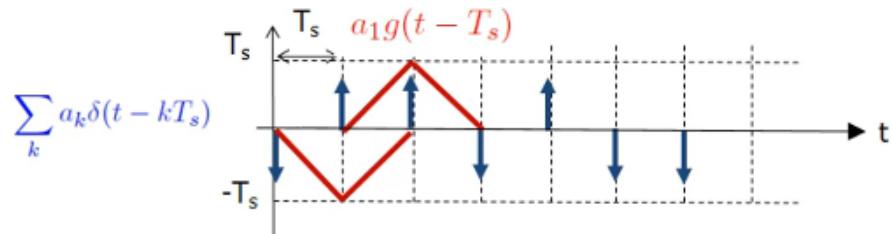


On a trouvé juste avant l'expression du signal à la sortie du filtre de réception, et seule la partie utile $g(t)$ sera considérée, **on s'occupera du bruit plus tard.**

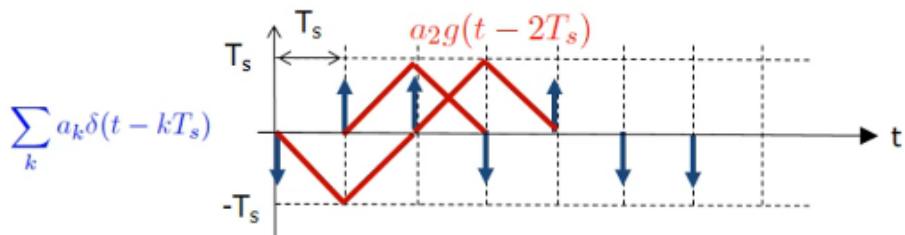
Le triangle qui représente $g(t)$ va donc être **translaté** sur chacun des diracs, et on a dans la figure suivante le premier terme de la somme qui va être $a_0 g(t)$:



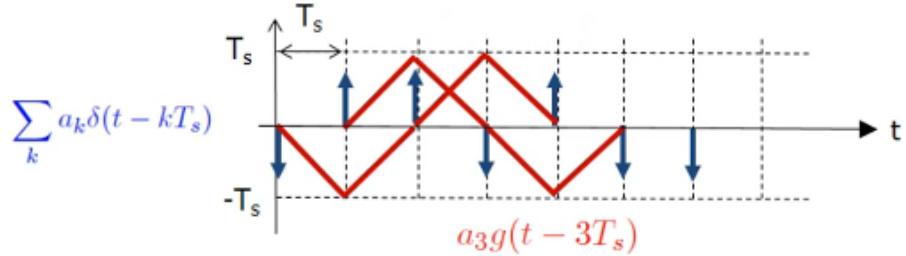
puis on a $a_1 g(t - T_s)$, le triangle qui est translaté en T_s est pondéré par le symbole a_1 :



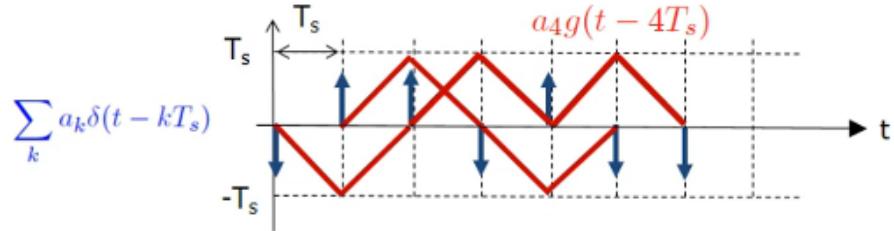
$a_2 g(t - 2T_s)$:



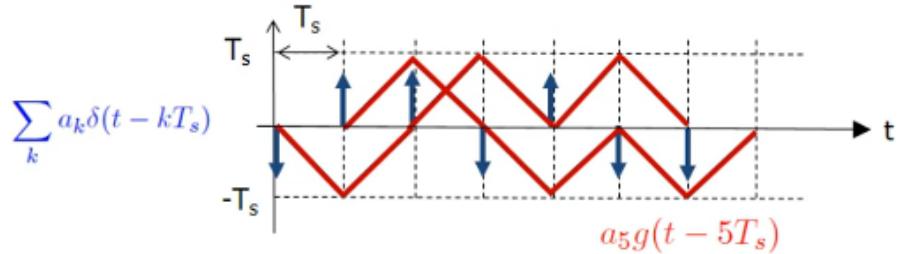
$a_3g(t - 3T_s)$:



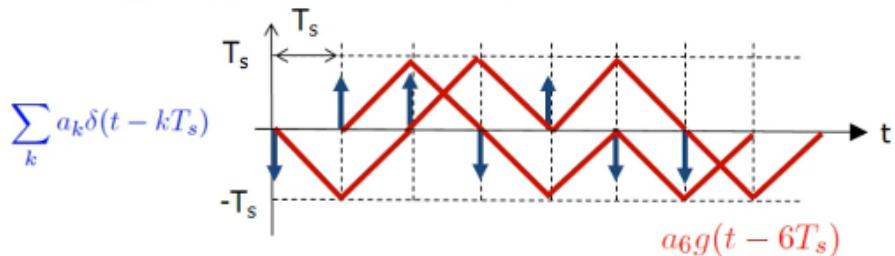
$a_4g(t - 4T_s)$:



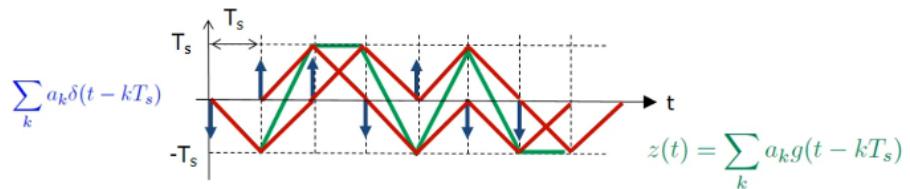
$a_5g(t - 5T_s)$:



et finalement $a_6g(t - 6T_s)$:

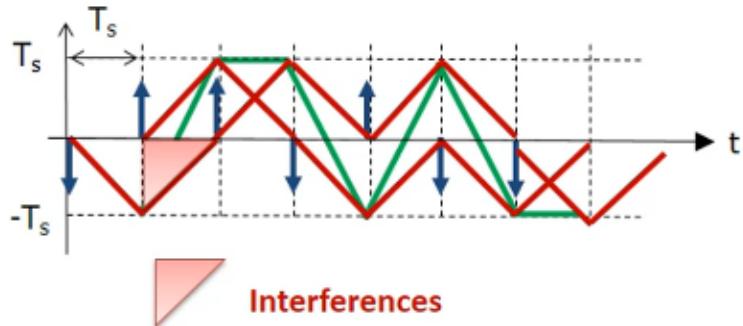


Pour obtenir le signal en sortie du filtre de réception sans bruit, nous devons ajouter toutes ses translations (réaliser la somme sur k), ce qui va conduire ici au signal en vert :

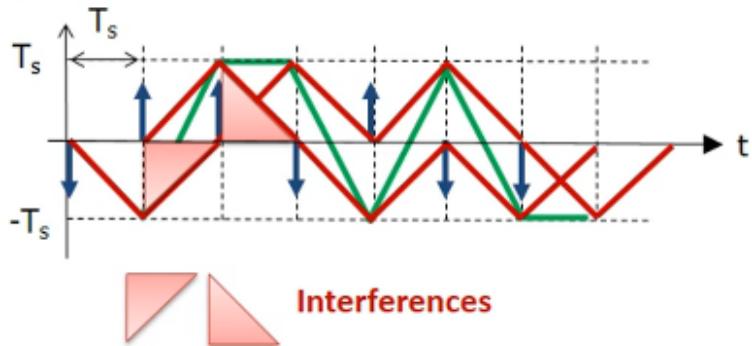


On peut noter que les éléments physiques représentant les symboles transmis à la sortie du filtre

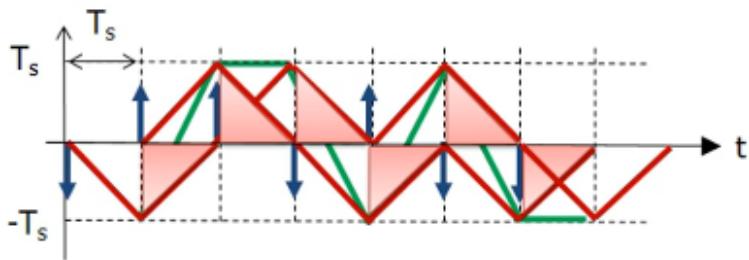
de réception se chevauchent, car chacun va avoir une durée de $2T_s$ alors que les symboles sont transmis tous les T_s . Cela conduit à ce que l'on appelle les interférences entre symboles, donc ici en rouge, est représenté l'interférence dûe au premier sur le second :



Voici ici l'interférence dûe au deuxième symbole sur le troisième :



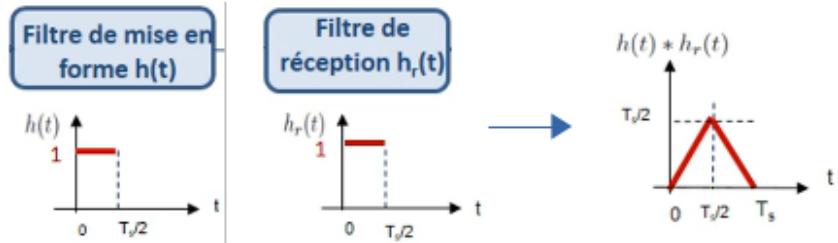
Et ainsi de suite :



Conclusion : On a à chaque fois un symbole : l'élément physique correspondant à un symbole qui va venir générer de l'interférence sur le symbole suivant.

2.1.2 Exemple 2

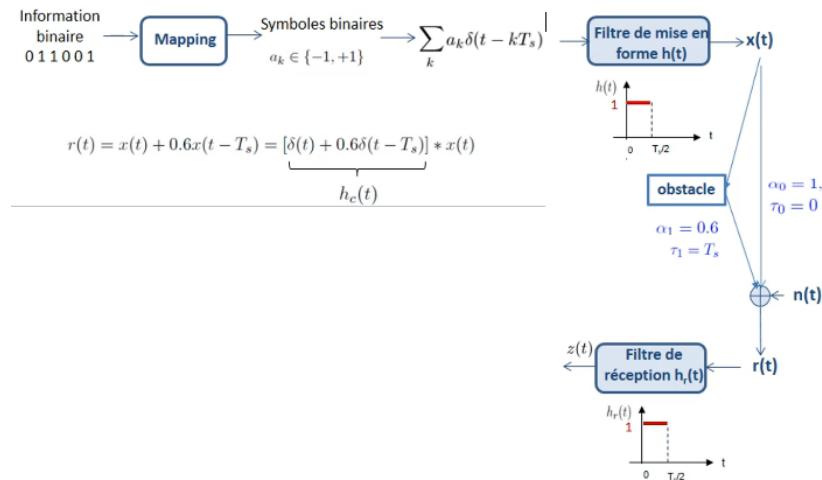
Les filtres d'émission et de réception dans cet exemple auront tous deux des réponses impulsionales qui sont des fonctions rectangulaires de durée $T_s/2$. Leur convolution va donc conduire à un triangle de durée T_s avec une hauteur $T_s/2$ au niveau du pic :



Ainsi, si on n'a pas de filtre lié au canal de propagation, on n'aura pas d'interférence à la sortie du filtre de réception, puisque l'élément physique correspondant à à chaque dirac est d'une durée T_s , et que chacun des diracs est transmis tous les T_s . Mais on va considérer un canal de propagation qui introduit d'autres trajets¹ entre l'émetteur et le récepteur :

- **une ligne de vue directe** : où on ne va pas considérer de retard ($\tau_0 = 0$), et on se fixera une atténuation de 1 ($\alpha_0 = 0$)
- **un trajet réfléchi** : où on va considérer un retard de T_s , et une atténuation de 0.6.

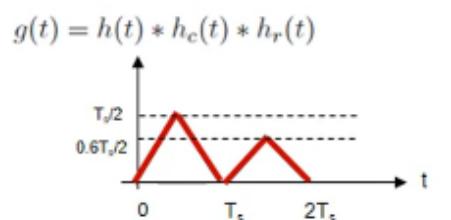
Par suite, la réponse impulsionnelle du canal de propagation sera donnée par $\delta(t) + 0.6\delta(t - T_s)$, et donc la somme des diracs pondérés va passer **dans le filtre de mise en forme, dans le filtre lié au canal**², et va passer également **dans le filtre de réception** :



On peut alors dire que la somme des diracs pondérés, c'est comme si elle passait dans le filtre de mise en forme convolué avec le filtre de réception, le tout convolué par la réponse impulsionnelle du canal de propagation :

$$g(t) = (h(t) * h_r(t)) * h_c(t) = (h(t) * h_r(t)) * (\delta(t) + 0.6\delta(t - T_s))$$

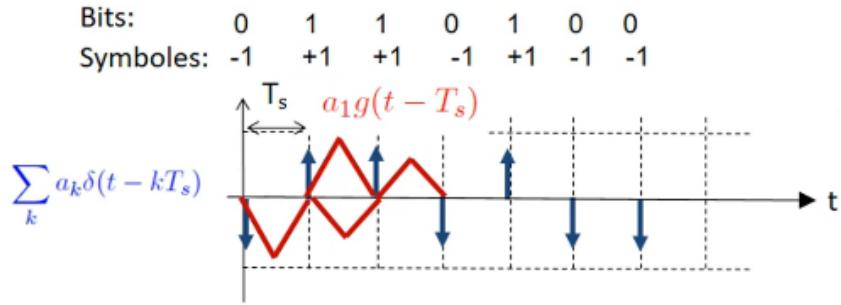
ce qui va donner pour $g(t)$ un triangle représentant $h(t) * h_r(t) * \delta(t)$, donc la ligne de vue directe au niveau du canal, et un deuxième triangle représentant $h(t) * h_r(t)$ qui a été décalé de T_s et atténue de 0.6. On aura donc une forme $g(t)$ qui est composée de deux triangles, et donc qui est **d'une durée de $2T_s$** :



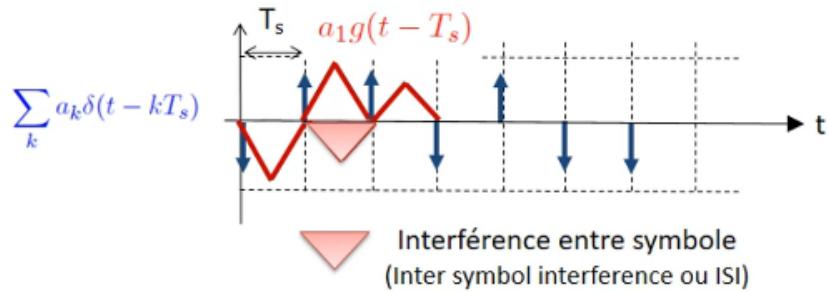
1. En négligeant toutefois l'expression du bruit encore une fois, tout en le représentant pour avoir une idée complète du canal.

2. Il existe cette fois-ci, puisque la réponse impulsionnelle liée au canal est $\delta(t) + 0.6\delta(t - T_s)$.

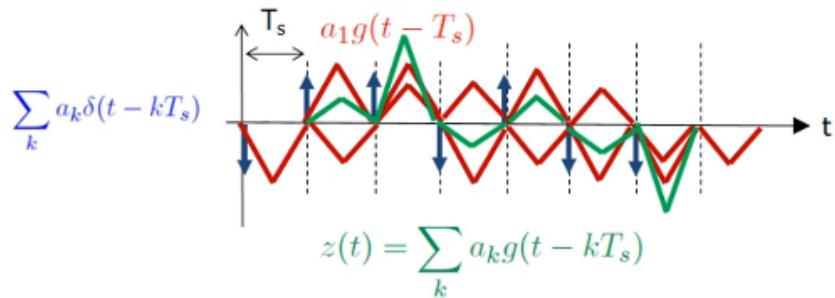
De la même façon que tout à l'heure, on va prendre cette fonction $g(t)$ qui représente l'ensemble des filtres de la chaîne de transmission, et *la translater sur chacun des diracs*. Donc on a ici $a_0g(t)$, puis $a_1g(t - T_s)$, et on peut aisément compléter la suite :



et on voit bien ici qu'il y a de l'interférence entre symboles : l'élément physique correspondant au premier symbole va déborder sur l'élément physique qui correspond au deuxième symbole :



ce qui va mener au signal en vert pour le signal en sortie du filtre de réception sans bruit :



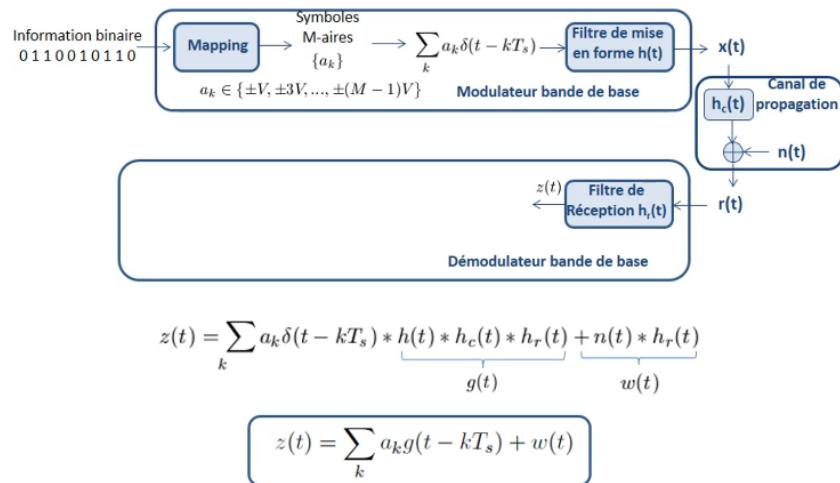
Remarque : les interférences ici sont dûes au canal de propagation, alors qu'avant elles étaient dûes au filtre d'émission et de réception. Et bien sûr il est possible d'avoir les deux dans la même chaîne de transmission.

3 Interférences entre symboles : Critère de Nyquist dans le domaine temporel

On verra dans cette partie comment prendre de bonnes décisions sur les symboles transmis même avec apparition d'interférences au niveau du récepteur comme vu précédemment.

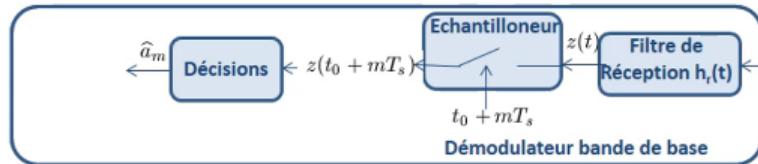
3.1 Le problème de l'interférence entre symboles : Mise en place du modulateur bande de base

On a vu que le signal à la sortie du filtre de réception pouvait être écrit comme une somme de $a_k g(t - kT_s)$, où g est composé de $h(t) * h_c(t) * h_r(t)$ plus un terme de bruit qui a été filtré par le filtre de réception :



Objectif : À partir de ce signal $z(t)$, on doit *décider quels sont les symboles transmis a_k* .

Pour ce faire, nous allons *échantillonner* le signal chaque T_s , et *utiliser ces échantillons* pour prendre des décisions :



Voici alors l'expression du signal échantilloné chaque T_s à partir d'un instant t_0 :

$$z(t) = \sum_k a_k g(t_0 + (m - kT_s)) + w(t_0 + mT_s)$$

De la somme, il est possible d'extraire le terme **utile** à l'instant $t_0 + mT_s$, qui est le terme à m : $a_m g(t_0)$, et ajouté à ce terme utile, restera une somme sur tous les autres symboles transmis, qui va représenter l'interférence entre symboles :

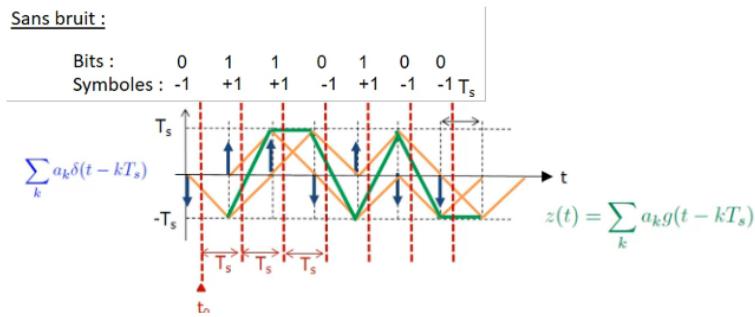
$$z(t_0 + mT_s) = a_m g(t_0) + \sum_{k \neq m} a_k g(t_0 + (m-k)T_s) + w(t_0 + mT_s)$$

Terme utile ISI
(Inter Symbol Interference) Bruit
(filtré et échantillonné)

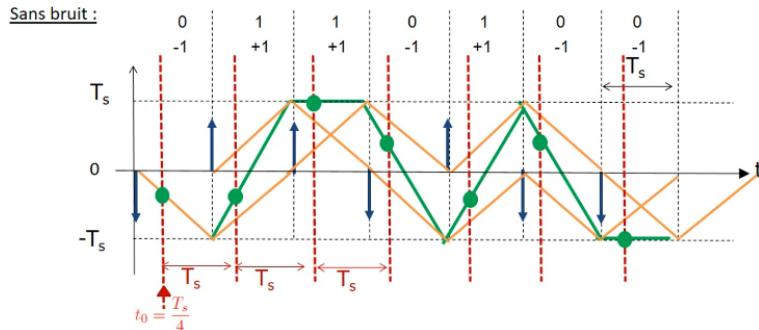
Bien sûr, le bruit est toujours présent, mais on en reparlera plus tard. On se focalise ici sur le côté interférence.

3.2 Exemple

Prenons l'exemple étudié avant. En vert est tracé le signal à la sortie du filtre de réception, et nous allons échantillonner ce signal chaque T_s à partir d'un t_0 donné :



Dans ce qui suit, on a supposé $t_0 = T_s/4$. Les ronds verts vont représenter les échantillons de signal collectés, à partir desquelles nous devons prendre des décisions sur les symboles transmis :



Pour prendre des décisions, il est assez intuitif de se dire que nous allons utiliser un seuil en 0, et que nous allons décider que nous avons transmis +1 si l'échantillon que l'on collecte est positif, et que nous avons transmis -1 si l'échantillon que l'on collecte est négatif.

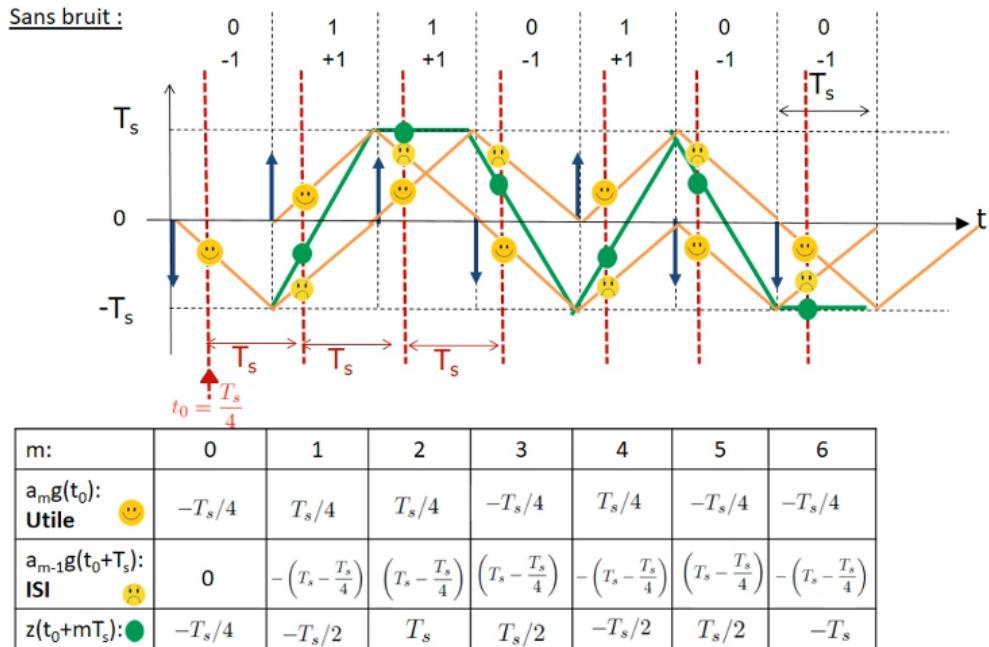
Application :

* Avec cette règle, donc, pour la première période, nous voyons que ce qui va être prélevé vaut $-T_s/4$, il n'y a pas encore d'interférence sur cette première période puisque nous n'avons pas de symbole précédent, donc quand je vais ajouter le terme utile et le terme d'interférence j'obtiens $-T_s/4$, cette quantité étant *négative*, je vais décider que **-1 a été transmis**, et **je prends une bonne décision puisque effectivement -1 a bien été transmis**.

* On regarde maintenant la deuxième période, donc le terme utile qui est toujours représenté par le smiley qui sourit, va être égal à $T_s/4$, et le terme d'interférence qui provient du symbole précédent, représenté par le smiley qui ne sourit pas, vaut $-(T_s - T_s/4)$, quand on combine les

deux, on va obtenir $-T_s/2$, qui représente l'échantillon collecté, qui représenté sur le signal par un rond vert. En collectant $-T_s/2$, on voit que c'est quelque chose de négatif, donc on va décider que -1 a été transmis, et je vais prendre une nouvelle décision puisque pendant cette période là, c'est +1 qui avai été transmis.

* Si on regarde la période suivante, c'est toujours pareil, terme utile : petit smiley qui sourit, vaut $T_s/4$. Le terme provenant du symbole précédent dont le terme d'interférence, le petit smiley triste, vaut $(T_s - T_s/4)$, et quand j'ajoute les deux, j'ai l'échantillon collecté qui est le rond vert et qui vaut ici T_s . Donc je vois que T_s est positif, je vais donc décider que +1 a été transmis. Et ici je prends une bonne décision puisque effectivement +1 avait été transmis durant cette période là. Et ainsi de suite, comme récapitulé ci-dessous :



3.3 Mise en place du démodulateur bande de base

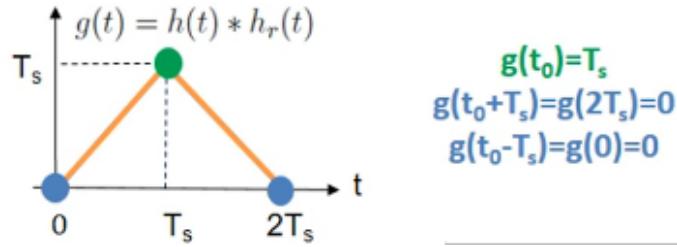
Maintenant, si on regarde à nouveau l'écriture du signal échantilloné, on peut noter qu'il existe un moyen simple d'**d'annuler le terme d'interférence** : on doit trouver une fonction g et un premier instant d'échantillonage t_0 tel que :

$$|ISI| = 0 \iff \begin{cases} g(t_0) \neq 0 \\ g(t_0 + pT_s) = 0 \text{ for } p \in \mathbb{Z}^* \end{cases}$$

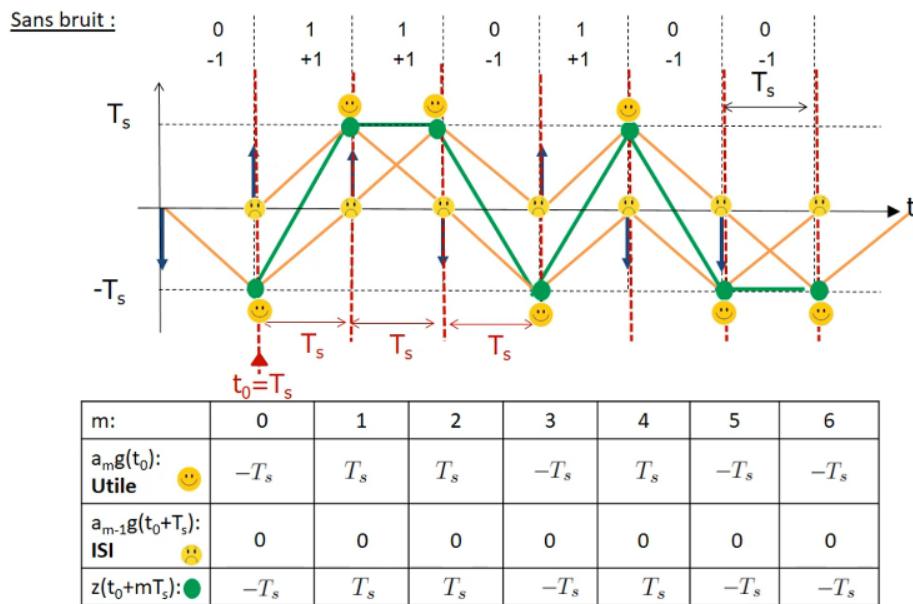
qui est connu sous le nom de **Critère de Nyquist** : c'est un critère **d'absence d'interférence entre symboles aux instants de décision dans une chaîne de transmission**¹.

Si on reprend l'exemple précédent, on voit bien que le critère de Nyquist est **satisfait si on prend $t_0 = T_s$** , puisque :

1. C'est un des critères importants lorsqu'on conçoit une chaîne de transmission numérique.



On peut remarquer aussi l'absence d'interférence pour le même exemple avec la prise de décisions :

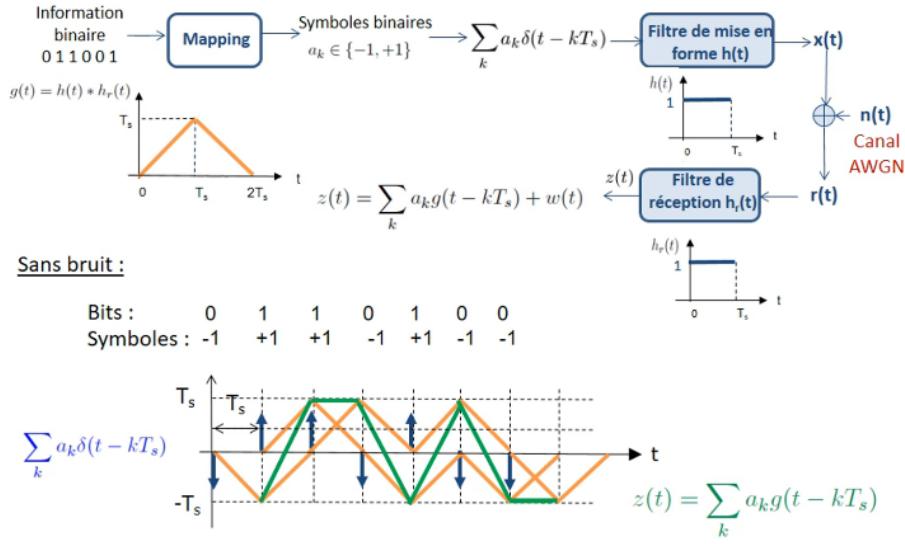


4 Interférences entre symboles : Diagramme de l'œil

Le diagramme de l'œil est un outil utile permettant de visualiser toute l'interférence intersymbole apparaissant dans un signal sur une certaine durée. Son tracé va consister à représenter sur un même diagramme tout ce qui peut se produire sur le signal considéré pendant cette durée. On va le tracer dans la chaîne de transmission sur le signal en sortie du filtre de réception et sur la durée T_s , afin de choisir les instants d'échantillonage sans interférence entre symboles.

4.1 Exemple

On prend le même exemple précédent :



et on va tracer le diagramme de l'oeil sans bruit (sur le signal apparaissant en vert) sur la durée T_s en utilisant le signal à la sortie du filtre de réception, puisque c'est ce signal qui doit être échantilloné tous les T_s , et que l'objectif du diagramme de l'oeil est de nous aider à trouver les instants d'échantillonage sans interférence inter-symboles.

On va donc superposer sur le même diagramme tout ce qui peut se produire sur le signal vert pendant la période T_s . On ne vas pas considérer la première période qui ne contient pas d'interférence. Pendant la deuxième période, le signal est une droite qui va de $-T_s$ à $+T_s$, et on positionne cette droite sur le diagramme de l'oeil. Pendant la troisième période, le signal reste constant au niveau T_s . Pendant la quatrième période, le signal est une droite allant de T_s à $-T_s$. La période 5 est la même que la 2. La période 6 est la même que la 4. Et enfin, pendant la dernière période, le signal reste constant au niveau $-T_s$. On ce stade, on a passé en revue tous ce qui peut se produire sans bruit sur le signal en sortie du filtre de réception, pendant une période symbole T_s . On a donc tracé le diagramme de l'oeil sur ce signal, sur une durée T_s :

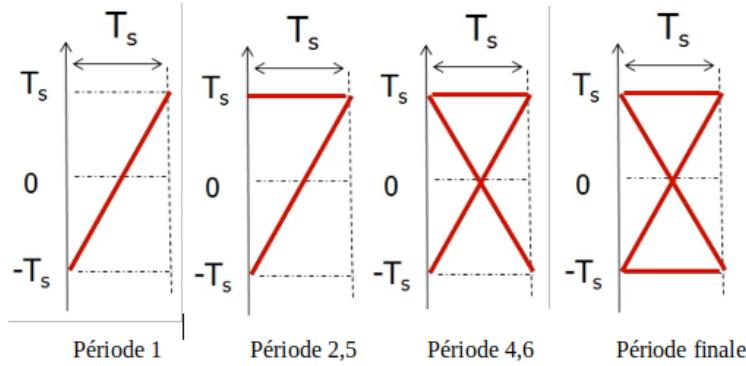
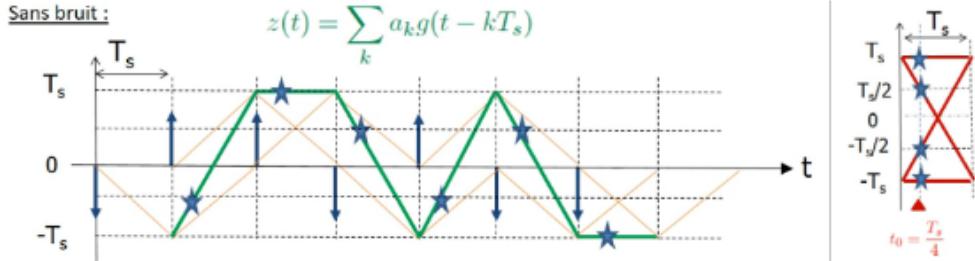


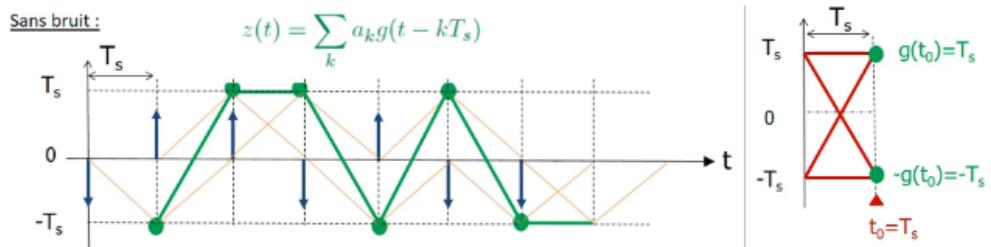
FIGURE 9 – Tracé du diagramme de l'oeil

Grâce au diagramme de l'oeil, si on échantillonne en partant de $t_0 = T_s/4$ puis tous les T_s , selon les périodes, on va prélever les échantillons valant $-T_s$, $-T_s/2$, $T_s/2$ ou T_s , alors qu'on n'a émis que de valeurs possibles pour les symboles. Ces 4 valeurs possibles en réception sont dues à l'interférence

entre symboles, qui apparaît à ces instants d'échantillonage. Et on voit bien les 4 valeurs apparaître sur le diagramme de l'oeil pour $t_0 = T_s/4$:



Si on échantillonne en partant de $t_0 = T_s$ tous les T_s , quelque soit la période, on ne prélevera que des échantillons valant $-T_s$ ou $+T_s$, ce qui représente sans bruit les symboles a_k transmis multipliés par $g(t_0)$ qui ici vaut T_s . Ainsi, **on n'a pas d'interférence entre symboles à ces instants**, et on arrive bien, sur le diagramme de l'oeil, à la même conclusions que celle en regardant le signal en sortie du filtre de réception :



5 Interférences entre symboles : Critère de Nyquist dans le domaine temporel

On va voir dans cette partie que le critère de Nyquist a également une expression dans le domaine fréquentiel. Elle va être essentiellement utile pour *analyser l'impact du canal de propagation en ce qui concerne l'interférence entre symboles*.

5.1 Expression

Par application de la transformée de Fourier au critère temporel :

$$|SI| = 0 \iff \begin{cases} g(t_0) \neq 0 \\ g(t_0 + pT_s) = 0 \text{ for } p \in \mathbb{Z}^* \end{cases}$$

Critère de Nyquist (domaine temporel)



$$\sum_k G^{(t_0)} \left(f - \frac{k}{T_s} \right) = cte \quad \text{with} \quad G^{t_0}(f) = FT \left[\frac{g(t+t_0)}{g(t_0)} \right]$$

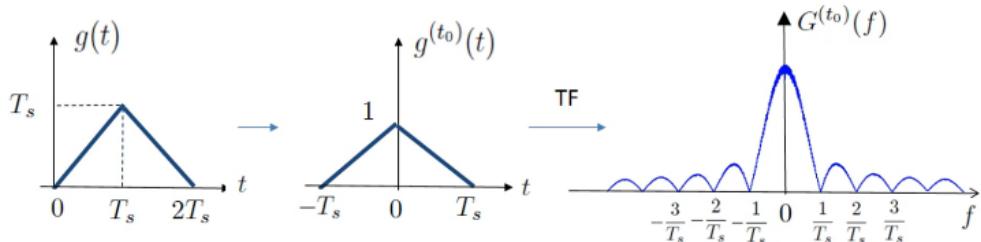
Critère de Nyquist (domaine fréquentiel)

où $g(t)$ a été **centré** et **normalisé**.

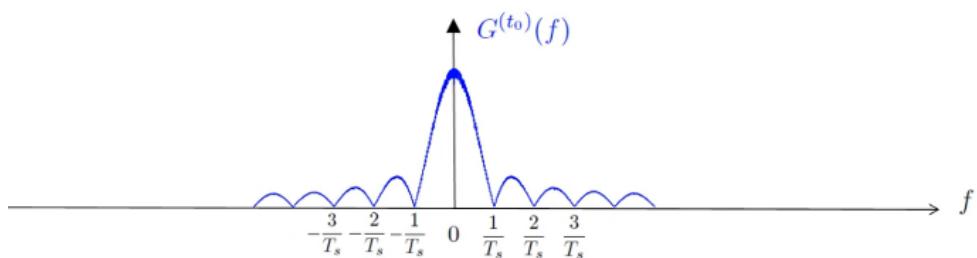
5.2 Exemple

Le domaine de Nyquist peut-il être vérifié dans le domaine **fréquentiel** ?

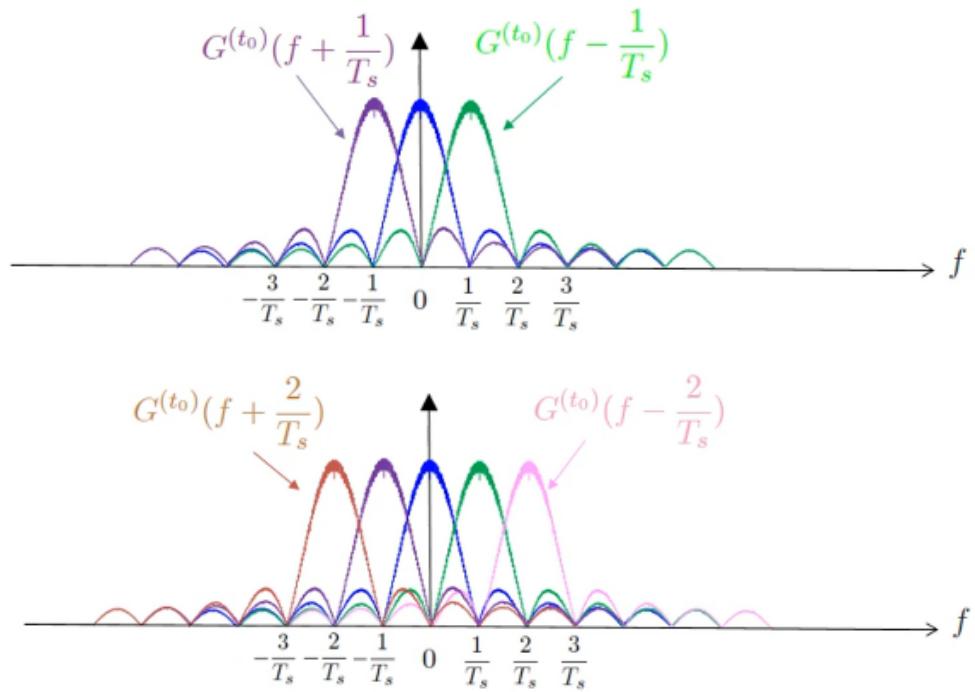
Toujours suivant le même exemple précédent, on va dans un premier temps **centrer** et **normaliser** g , ce qui va donner $g^{(t_0)}(t)$, et ensuite prendre la TF de cette dernière pour obtenir $G^{(t_0)}(f)$, c'est un **sinus cardinal au carré passant par 0 tous les $1/T_s$** , ce qui se résume dans le schéma ci-dessous :



Reste à voir si la somme de toutes les translations sur $1/T_s$ de $G^{(t_0)}(f)$ est **constante**. On a obtenu juste avant la fonction autour de 0 :



Voici les translations autour de $1/T_s$ et $-1/T_s$ puis autour de $2/T_s$ et $-2/T_s$:

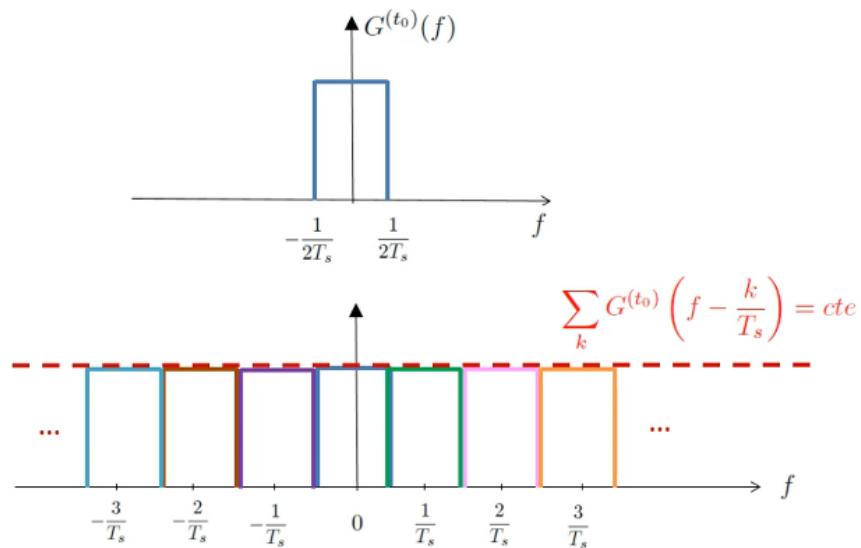


Et ainsi de suite. Il faut considérer toutes les translations possibles, et on les **ajoutant**, on obtient effectivement **quelque chose de constant**¹.

Conclusion : La chaîne de transmission ayant telle réponse impulsionnelle peut vérifier le critère de Nyquist.

5.3 Autre exemple : bande de Nyquist

Soit la forme rectangulaire suivante, qui respecte le critère de Nyquist fréquentiel :



1. C'est une propriété connue pour les sinus cardianux au carré.

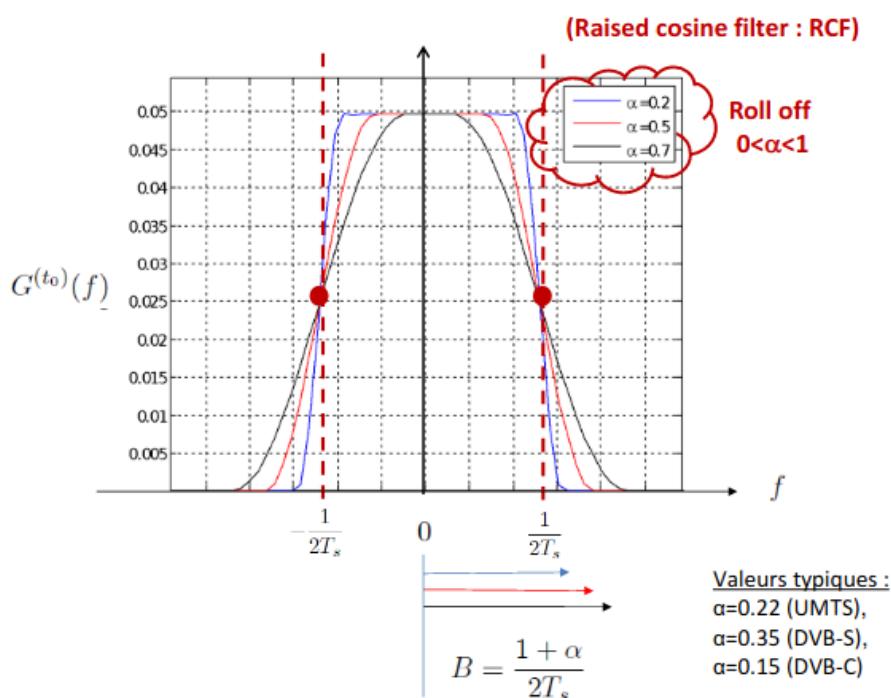
Cette forme rectangulaire sur $-1/2T_s$ et $1/2T_s$ est la forme fréquentielle qui permet de vérifier le critère de Nyquist avec **la bande de fréquences la plus étroite**, appelée **bande de Nyquist** :

$$B_N = \frac{1}{2T_s} = \frac{R_s}{2}$$

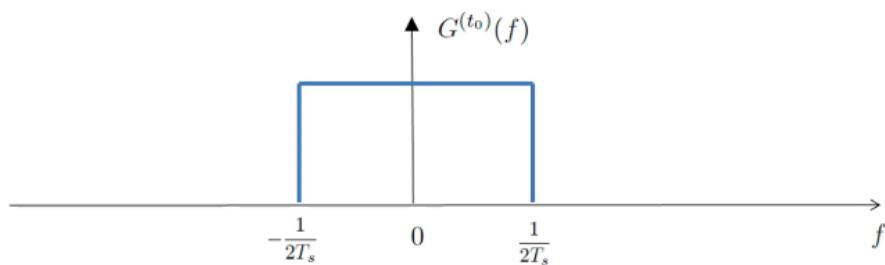
Malheureusement, concevoir cette chaîne de transmission avec cette forme rectangulaire comme réponse en fréquence globale **n'est pas possible**, car *ça va correspondre à un filtre passe-bas idéal*. Il faut donc **trouver des réponses en fréquence que l'on soit capable d'implémenter avec des largeurs de bande de fréquence raisonnables**.

5.4 Filtre en cosinus surélevé

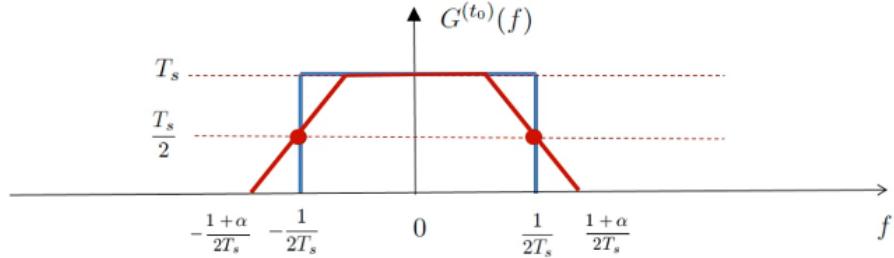
Il s'agit une des formes les plus connues et largement utilisées en Télécom. Elle est conçue en prenant un point de symétrie en $1/2T_s$ et $-1/2T_s$, qui permettent de remplir le critère de Nyquist, comme on verra juste après. Un paramètre α appelé **roll off** compris entre 0 et 1, permet de *fixer la bande de fréquences occupée* :



Voici la forme rectangulaire simplifiée pour G , qui de $-1/2T_s$ à $1/2T_s$:

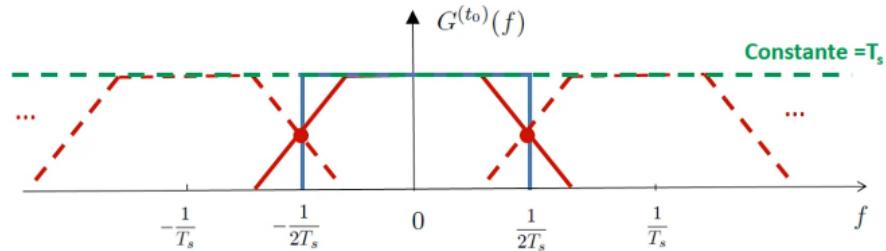


Et voici une forme *simplifiée* pour le filtre en cosinus surélevé :

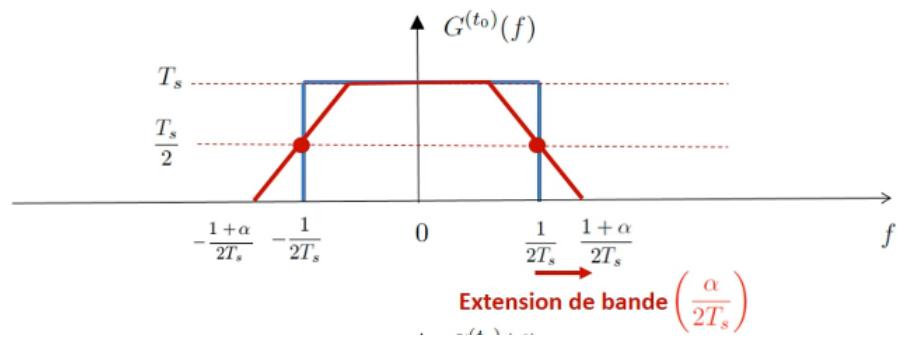


Donc normalement ce ne sont pas des droites sur les bornes mais des demi-périodes de cosinus qui ont été surélevés, c'est-à-dire qu'ils ne sont plus centrés autour de 0 mais sur $T_s/2$.

Grâce aux points de symétrie en $1/2T_s$, si nous ajoutons des versions translatées de G chaque $1/T_s$, on vérifie qu'on obtient **constante**, pour ainsi vérifier le critère de Nyquist :



Cependant, le prix à payer pour implanter la chaîne de transmission est une **extension de bande de fréquence par rapport à la bande de Nyquist, de valeur $\frac{\alpha}{2T_s}$** . Cette dernière est liée au Roll-off¹ :

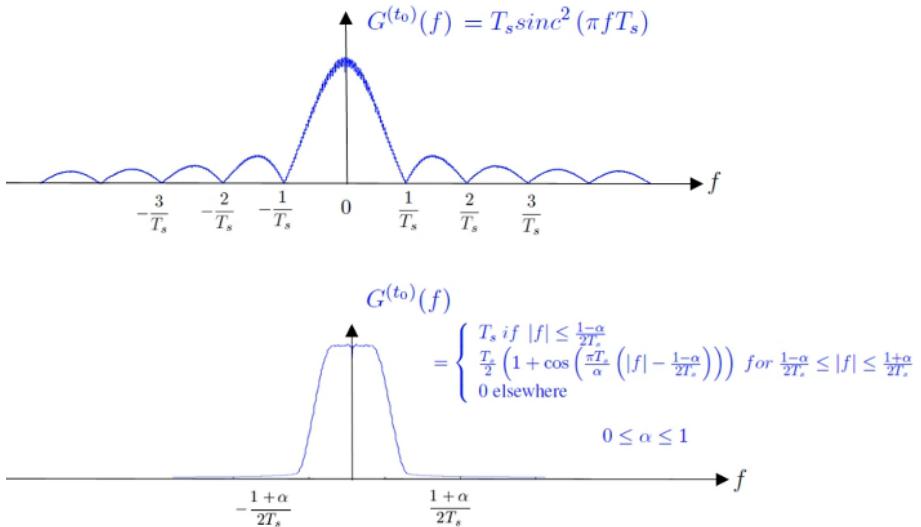


5.5 Impact du canal de propagation

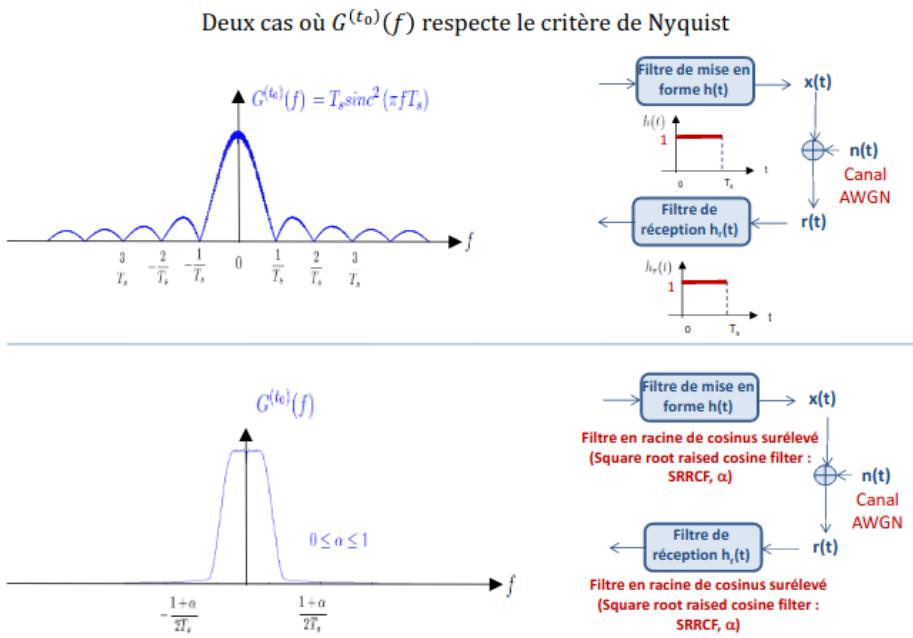
Malgré cette extension de bande par rapport à la bande de Nyquist, cette forme en cosinus surélevé reste bien localisée en fréquence, notamment par rapport au sinus cardinal au carré, obtenu avec une fonction triangulaire :

1. Qui est parfois appelé **facteur de débordement** en français.

Comparaison entre le cosinus surélevé et la sinus cardinal au carré :



Ces deux fonctions sont les plus utilisées en télécom pour **respecter le critère de Nyquist**. Voici un bref schéma récapitulatif :



6 Interférences entre symboles : Impact du canal de propagation dans le critère de Nyquist

Le critère de Nyquist porte sur tous les filtres de la chaîne de transmission. Il est possible de trouver des filtres de mise en forme et de réception avec des réponses impulsionales permettant de vérifier le critère de Nyquist. On remarque d'après ce qui précède que le critère de Nyquist sera alors vérifié par l'ensemble de la chaîne de transmission si le **canal de propagation est AWGN**, car nous n'avons alors pas de réponse impulsionnelle associée au canal à prendre en compte. On va voir dans ce qui suit ce qui passe dans d'autres cas (c'est-à-dire quand le canal de propagation introduit un filtrage sur le signal transmis).

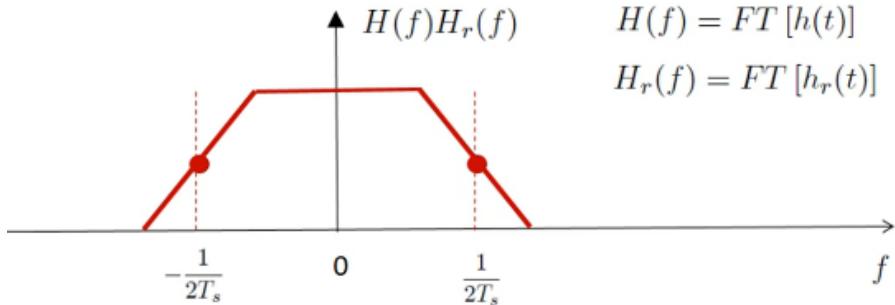
6.1 Critère de Nyquist en temps et en fréquence

On voit bien que ce critère porte sur l'ensemble des filtres de la chaîne de transmission rassemblés dans g :

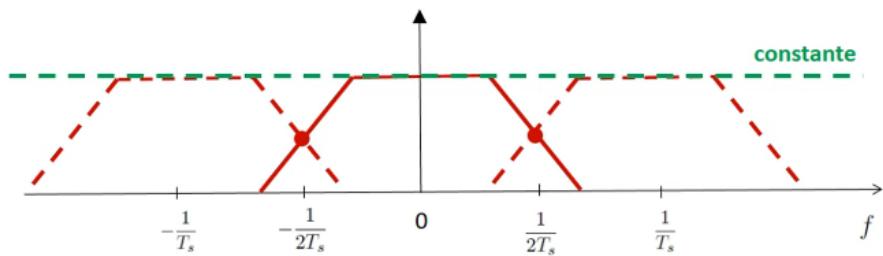
$$g(t) = h(t) * h_c(t) * h_r(t)$$

6.2 Exemple

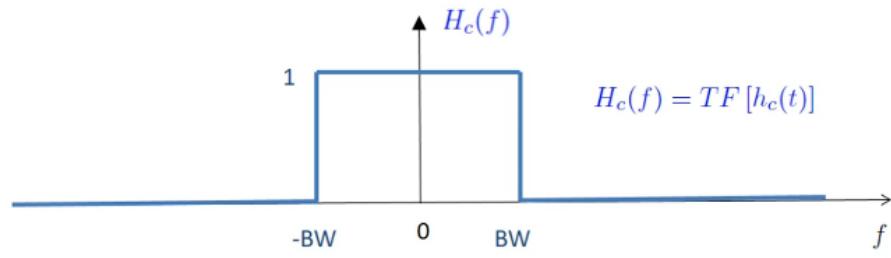
Supposons la forme suivante :



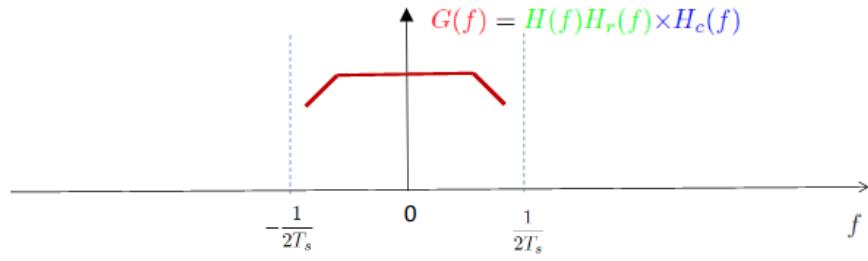
qui permet de vérifier le critère de Nyquist :



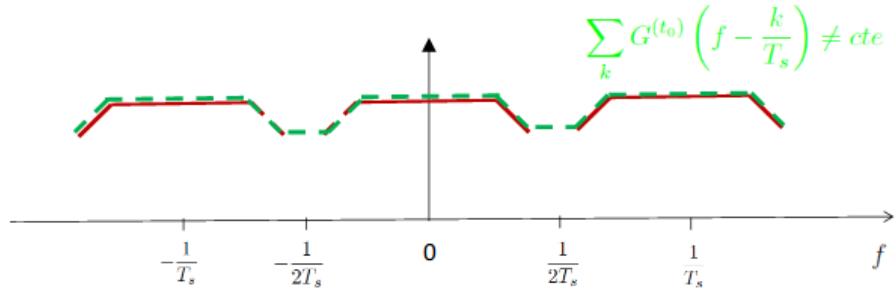
Et soit un canal AWGN à bande passante limitée, notée BW, pour lequel on représente la réponse impulsionnelle en fréquence :



Si la bande passante du canal est **plus étroite** que celle formée par la forme représentée par $H(f)H_r(f)$, le canal va **couper** la forme qui permettait de vérifier le critère de Nyquist, et on inclut la réponse en fréquence du canal $H_c(f)$ pour obtenir $G(f)$ globale de toute la chaîne :

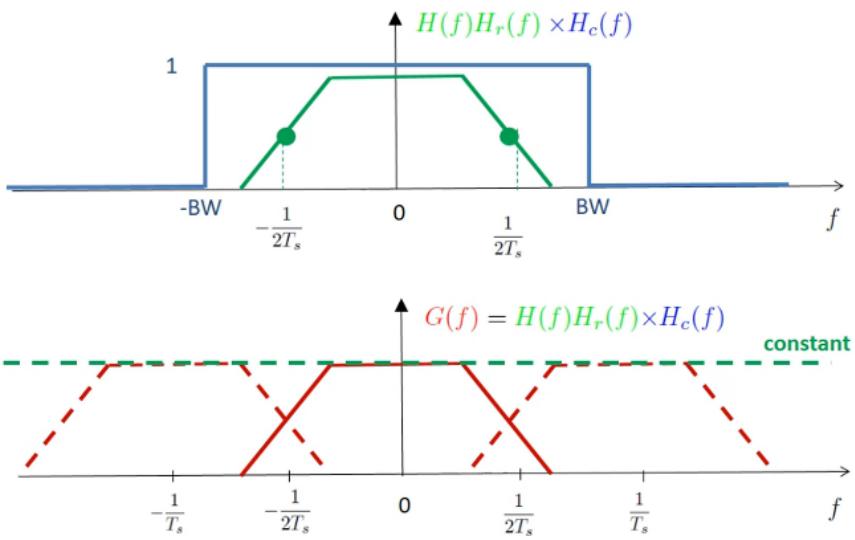


et on la translate tous les $1/T_s$ pour voir si le critère de Nyquist est respecté

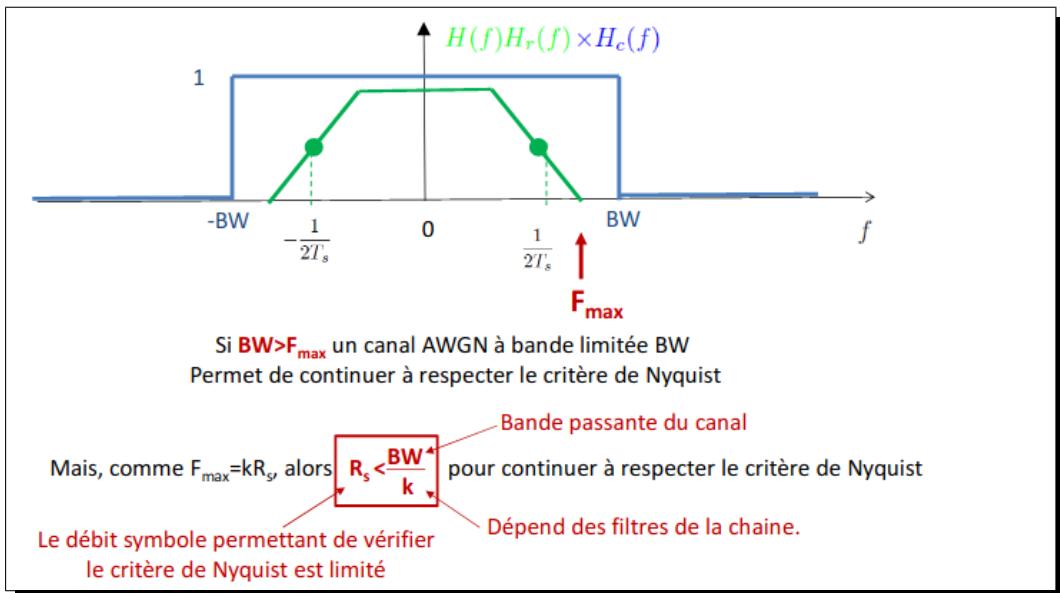


Le critère de Nyquist **n'est pas vérifié**.

Par contre, si la bande passante du canal est plus grande, alors la forme respectant le critère de Nyquist est **conservée** pour $G(f)$, ce qui se résume ci dessous :

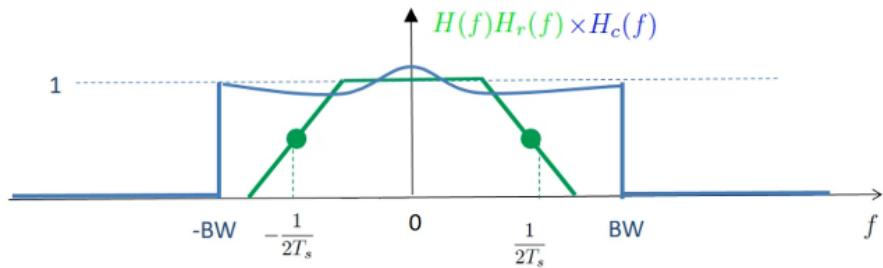


Pour conclure :



6.3 Autre exemple : Canal sélectif en fréquences

Il s'agit d'un canal de propagation qui n'est pas AWGN sur sa bande passante, ainsi, il ne sera plus possible de respecter le critère de Nyquist :



Le canal de propagation va donc introduire des interférences entre symboles, et une autre méthode devra être utilisée pour corriger les distorsions introduites, qui seront vues en deuxième année dans le parcours "télécom et réseaux".