Réduction en forme de Jordan d'une matrice

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dim $< +\infty$

Notons $n = \dim E$

I / Rappels et notations

A. Sous Espace stable

Déf : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

Soit F un sev de E

F est u-stable si $u(F) \subset F$

Remarque : On peut alors définir $u_{|F}^{|F}$ car $u(F) \subset F$. On pose $u_F = u_{|F}^{|F}$

On a $u_F \in \mathcal{L}(F)$ et est appelé endomorphisme induit par u sur F.

B - Polynôme annulateur

Déf : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

$\varphi_u : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ P = \sum_{k=0}^{q} a_k X^k \longrightarrow P(u) = \sum_{k=0}^{q} a_k u^k \end{cases}$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbre

i) $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad (P+Q)(u) = P(u) + Q(u)$

ii) $\forall (\lambda, P) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X] \quad (\lambda P)(u) = \lambda P(u)$

iii) $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$

iv) $1(u) = id_E$

Déf : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

On appelle polynôme annulateur de u tout élément de

$\ker \chi_u \setminus \{0\}$.

Théorème : Tout endomorphisme admet un polynôme annulateur en dimension finie.

Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ $(\dim(E) < +\infty)$
Il existe un unique polynôme unitaire (coeff de degré maximum vaut 1) annulateur de u, de degré minimal.
Il est appelé polynome minimal noté m_u.

Prop : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
L'ensemble des polynômes annulateurs de u est $m_u \mathbb{K}^*[X]$.

Prop : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$
L'ensemble des valeurs propres de u est l'ensemble des racines de m_u.

Corr : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ annulateur de u.
Soit λ vp de u alors $P(\lambda) = 0$.

Théorème : Cayley - Hamilton.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$
Le polynôme caractéristique de u, noté P_u, est annulateur de u $P_u(u) = 0$.

Théorème : Décomposition des noyaux
Soient $P_1, \dots, P_k$ polynômes premiers entre eux 2 à 2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Alors $\ker\left(\prod_{i=1}^{k} P_i(u)\right) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker P_i(u)$.

C- Endomorphisme nilpotent

Déf : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$
u est nilpotent si $\exists q \in \mathbb{N}^*$ tq $u^q = 0$
Auquel cas $p = \min\{q \in \mathbb{N}^* \text{ tq } u^q = 0\}$ est appelé indice de nilpotence de u.

Prop : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice p, $\forall x \in E \setminus \ker u^{p-1}$
$(x, u(x), \dots u^{p-1}(x))$ est libre

Remarque : $E \setminus \ker u^{p-1} \neq \emptyset$ car $u^{p-1} \neq 0$ (u nilpotent d'indice p

Corr : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice p
$p \leq n = \dim E$.

Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, u est nilpotent d'indice $p \iff m_u = X^p$

II / Réduction de Jordan d'une matrice

A- Cas des endomorphismes nilpotents

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice p
On pose $\forall i \in \mathbb{N}$ $W_i = \ker u^i$
On a $\begin{cases} W_1 = \ker u \\ W_p = \ker u^p = E \end{cases}$

Objectif : Trouver une base de E tq la matrice représentative de u soit diagonale par blocs, avec des blocs avec une surdiagonale de 1.

Prop: $\{0\} \subsetneq W_1 \subsetneq W_2 \subsetneq \dots \subsetneq W_{p-1} \subsetneq W_p = E$

$W_{p-1} \subsetneq E \quad \exists (s_1^p \dots s_{g_p}^p)$ libre dans $W_p = E$

tq $W_{p-1} \oplus \mathrm{Vect}(s_1^p \dots s_{g_p}^p) = E$

Notation: vecteur s_i^k

k renvoie au plus petit $\ell \in \mathbb{N}$ tq $s_i^k \in W_\ell$

$s_i^k \in W_k \subset W_{k+1} \subset \dots$

Prop:
- $\exists (s_1^p \dots s_{g_p}^p)$ libre dans W_p tq $W_{p-1} \oplus \mathrm{vect}(s_1^p \dots s_{g_p}^p) = E$
- Soit $\exists (s_1^{p-1} \dots s_{g_{p-1}}^{p-1})$ libre dans W_{p-1}, soit $g_{p-1} = 0$ auquel cas $\mathrm{vect}(s_1^{p-1} \dots s_{g_{p-1}}^{p-1}) = \{0\}$, tq $W_{p-2} \oplus \mathrm{vect}(u(s_1^p) \dots u(s_{g_p}^p)) \oplus \mathrm{vect}(s_1^{p-1}, \dots s_{g_{p-1}}^{p-1}) = W_{p-1}$.
- Soit $\exists (s_1^{p-2}, \dots s_{g_{p-2}}^{p-2})$ libre dans W_{p-2} soit $g_{p-2} = 0$ tq. $W_{p-3} \oplus \mathrm{vect}(u^2(s_1^p), \dots u^2(s_{g_p}^p)) \oplus \mathrm{vect}(u(s_1^{p-1}), \dots u(s_{g_{p-1}}^{p-1})) \oplus \mathrm{vect} \dots \oplus \mathrm{vect}(s_1^{p-2}, \dots, s_{g_{p-2}}^{p-2}) = W_{p-2}$.
- ...
- Soit $\exists (s_1^2 \dots s_{g_2}^2)$ libre ds W_2, soit $g_2 = 0$, tq. $W_1 \oplus \mathrm{vect}(u^{p-2}(s_1^p), \dots u^{p-2}(s_{g_p}^p)) \dots \oplus \mathrm{vect}(s_1^2, \dots s_{g_2}^2) = W_2$
- Soit $\exists (s_1^1 \dots s_{g_1}^1)$ libre ds W_1, soit $g_1 = 0$, tq. $\mathrm{vect}(u^{p-1}(s_1^p) \dots u^{p-1}(s_{g_p}^p)) \oplus \dots \mathrm{vect}(s_1^1 \dots s_{g_1}^1) = W_1 = \ker u$.

preuve. elle se base sur le lemme suivant

si $\exists i \in \mathbb{N}$ tq $W_i \oplus \mathrm{Vect}(s_1^{i+1}, s_k^{i+1}) = W_{i+1}$ avec $(s_1^{i+1}, \dots s_k^{i+1})$ libre ds W_i Alors

$W_{i-1} \oplus \mathrm{vect}(u(s_1^{i+1}), \dots u(s_k^{i+1})) \subset W_i$ et $(u(s_1^{i+1}) \dots)$ libre ds W_i

Prop: i $E = \bigoplus_{\ell=1}^{p} \bigoplus_{i=1}^{g_\ell} \mathrm{Vect}(u^{\ell-1}(s_i^\ell), \dots)$.

ii La matrice représentative de u dans la base $b = (u^{\ell-1}_{(i,\ell)} \dots s_i^\ell)$ est diagonale par blocs.

$$[u] = \mathrm{diag}(\underbrace{J_1 \dots J_1}_{g_1} \; \underbrace{J_2 \dots J_2}_{g_2} \; \dots \; \underbrace{J_p \dots J_p}_{g_p}).$$

avec $J_\ell = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \updownarrow \ell.$

$$[u]_b = \begin{bmatrix} \boxed{J_1} & & & & & & & \\ & \boxed{J_1} & & & & & (0) & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \boxed{J_1} & & & & \\ & & & & \boxed{J_2} & & & \\ & (0 & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \boxed{J_\ell} & \\ & & & & & & & \boxed{J_p} \end{bmatrix}$$

On a de plus : $\boxed{n = \sum_{j=1}^{p} j g_j \quad \text{et } g_p \geq 1}$

iii $\dim W_1 = \sum_{j=1}^{p} g_j$ ($= \dim \ker u$).

$\dim W_{p-k} - \dim W_{p-k-1} = \dim W_{p-k+1} - \dim W_{p-k} + g_{p-k}$

preuve : i) Soit $\ell \in [\![1, p]\!]$, Soit $i \in [\![1, g_\ell]\!]$

on pose $V_{\ell i} = \mathrm{vect}(u^{\ell-1}(s_i^\ell), \dots, s_i^\ell)$

$V_{\ell i}$ est u-stable car $s_i^\ell \in W_\ell$

et $[u_{V_{\ell i}}]_{(u^{\ell-1}(s_i^\ell), \dots, s_i^\ell)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$

exemple : E un $\mathbb{R}$-ev de dimension 7
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tq $m_u = X^3$
Quelles st les formes de Jordan possibles ?

$m_u = X^3$ u est nilpotent d'indice 3, le plus gros bloc de

Jordan est de taille 3.

De plus, $n = 7 = \sum_{j=1}^{3} j g_j$.

__1^e cas__ $g_3 = 2 \Rightarrow \sum_{j=1}^{2} j g_j = 1 \Rightarrow g_2 = 0, g_1 = 1$.

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \begin{matrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{matrix} & \\ & & \begin{matrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \quad rg(u) = n - \dim \ker u = 7 - \sum_{j=1}^{3} g_j = 4.$$

2^e cas $g_3 = 1$. De $\sum_{j=1}^{2} j g_j = 4$.

a) $g_2 = 2 \Rightarrow g_1 = 0$.

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{matrix} & & \\ & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \\ & & \begin{matrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ 0 & & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \quad rg(u) = 7 - 3 = 4.$$

b) $g_2 = 1 \Rightarrow g_2 = 2$.

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \\ & & & \begin{matrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \quad rg(u) = 7 - 4 = 3.$$

c) $g_2 = 0 \Rightarrow g_1 = 4$.

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \begin{matrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \quad rg(u) = 2.$$

B - Endomorphismes quelconques

On suppose $\mathbb{K}$ algébriquement clos.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, m_u est scindé et s'écrit $m_u = \prod_{i=1}^{q} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$
avec (λ_i) distincts.

Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec les notations précédentes

i) $E = \bigoplus_{i=1}^{q} \ker(u - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{\alpha_i}$

ii) $\forall i \in [\![1,q]\!]$ on pose $N_i = \ker(u - \lambda_i \mathrm{id}_E)$
Alors $\forall i \in [\![1,q]\!]$ N_i est u-stable et $\dim N_i = \beta_i$, avec β_i la multiplicité de λ_i comme racine de P_u

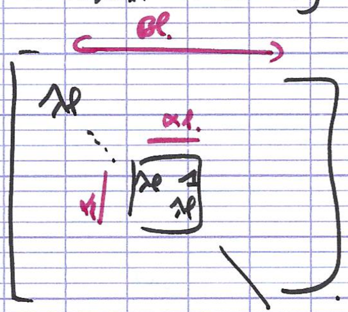
iii) $\forall i \in [\![1,q]\!]$, on pose $\nu_i = u_{N_i} - \lambda_i \mathrm{id}_{N_i} \in \mathcal{L}(N_i)$
avec u_{N_i} endomorphisme induit par u en N_i.
On a ν_i est nilpotent d'indice α_i

Prop : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$
La forme de Jordan réduite de u s'écrit :

$$J(u) = \begin{pmatrix} J(u_{N_1}) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & J(u_{N_q}) \end{pmatrix}$$ avec u_{N_ℓ}

avec $u_{N_\ell} = \nu_{N_\ell} + \lambda_\ell \mathrm{id}_{N_\ell}$
et $J(u_{N_\ell}) = \lambda_\ell I_{\beta_\ell} + J(\nu_{N_\ell})$
et $J(\nu_{N_1}) = \mathrm{diag}(J_1 \dots J_1 \dots J_{\alpha_\ell})$.

$J(u_{N_\ell}) =$



Théorème : Décomposition de Dunford.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$
$\exists !\, (\nu, d) \in \mathcal{L}(E)^2$, ν nilpotent, d diagonalisable
tq $u = \nu + d$ et ν et d commutent.

Remarque : vrai si P_u scindé.

C - Applications.

ex1 : Puissance de matrice.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit $p \in \mathbb{N}^*$ calcul de A^p ?

$\exists Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible tq.

$$A = Q \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J(\lambda_g) \end{pmatrix} Q^{-1}$$

$$A^p = Q \begin{pmatrix} J(\lambda_1)^p & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_g)^p \end{pmatrix} Q^{-1}$$

$\Rightarrow$ on s'interesse à $J_m(\lambda)^p$ avec

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \Big\updownarrow m.$$

On a $J_m(\lambda) = \lambda I_m + V$
avec $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

On a V nilpotente d'indice m.
$V^m = 0$ et $\forall j \in [\![1, m-1]\!]$

$$V^j = \begin{pmatrix} & & 1_{j+1} & & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & 0 & & & \end{pmatrix}$$

On a $J_m(\lambda)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k \lambda^{p-k} V^k$ avec $C_p^k = \binom{p}{k}$

$$J_m(\lambda)^p = \sum_{k=0}^{\min(m-1,p)} C_p^k \lambda^{p-k} V^k.$$

$\underset{p \geq m}{=}$ $\lambda^p \, p\lambda^{p-1}$