

INTRODUCTION AUX TELECOMMUNICATIONS - EXERCICES

• Première année Sciences du Numérique
2017 – 2018

I. CALCUL DES DSPS DE SIGNAUX DE TÉLÉCOMMUNICATION

A. Exercice 1 : Signal biphasé

On veut générer un signal de type biphasé dans lequel les bits à 1 seront codés par un front descendant, tandis que les bits à 0 seront codés par un front montant. La période symbole sera notée T_s .

- 1) Donner un mapping et une réponse impulsionale du filtre de mise en forme permettant de générer ce signal.
- 2) Tracer le signal biphasé généré pour transmettre la suite de bits suivante : 0110100.
- 3) Déterminer la densité spectrale de puissance du signal biphasé, en supposant que les symboles émis sont indépendants et équiprobables.
- 4) Le signal généré est-il un signal modulé en "bande de base" ou bien "sur fréquence porteuse" ?
- 5) Comparer le signal biphasé au signal NRZ bipolaire. Identifier quels pourraient être ses avantages et ses inconvénients.

B. Exercice 2 : Signal NRZ unipolaire

On veut générer un signal $x(t)$ de type NRZ unipolaire dans lequel les bits à 1 seront codés par un niveau haut $+V$ de durée T_s , tandis que les bits à 0 seront codés par un niveau nul de durée T_s (modulation OOK : On Off Keying).

- 1) Donner un mapping et une réponse impulsionale du filtre de mise en forme permettant de générer ce signal.
- 2) Tracer le signal NRZ généré pour transmettre la suite de bits suivante : 0110100.
- 3) Déterminer puis tracer la densité spectrale de puissance du signal, en supposant que les symboles émis sont indépendants et équiprobables.
- 4) Le signal généré est-il un signal modulé en "bande de base" ou bien "sur fréquence porteuse" ?
- 5) Comparer le signal généré ici au signal NRZ bipolaire. Identifier quels pourraient être ses avantages et ses inconvénients.

II. CRITÈRE DE NYQUIST, FILTRAGE ADAPTÉ

A. Exercice 1

Soit le système de transmission donné par la figure 1. On place en émission et en réception des filtres de réponses impulsionales $h(t)$ et $h_r(t)$ données par la figure 2. Le bruit $n(t)$ est supposé additif, blanc et gaussien, de densité spectrale de puissance égale à $\frac{N_0}{2}$ quelle que soit la fréquence.

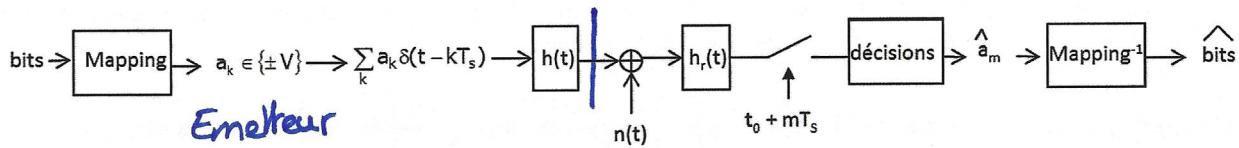


Fig. 1. Chaîne de transmission considérée dans l'exercice 1, section II

- 1) La chaîne de communication vérifie-t-elle le critère de Nyquist ? Justifiez votre réponse.
- 2) Sans bruit, tracer le signal en sortie du filtre de réception $h_r(t)$ pour la suite de bits émise suivante : 0110100. Retrouve-t-on sur ce signal le fait que la chaîne de transmission respecte le critère de Nyquist ?
- 3) Tracer le diagramme de l'oeil avec une base de temps de T_s . Retrouve-t-on sur le diagramme de l'oeil le fait que la chaîne de transmission respecte le critère de Nyquist ?
- 4) Proposer un instant optimal t_0 pour démarrer l'échantillonnage en expliquant votre choix. On échantillonnera alors aux instants optimaux $t_0 + mT_s$, $m = 0, 1, 2, \dots$

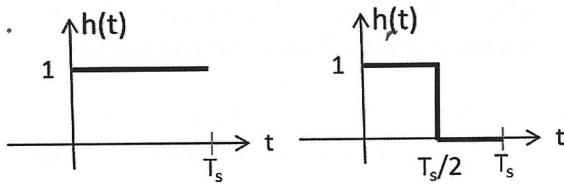
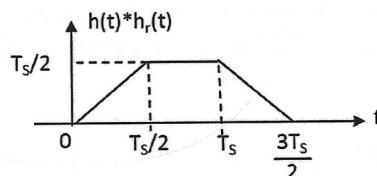


Fig. 2. Réponses impulsionales des filtres d'émission et de réception pour l'exercice 1, section II

- 5) En supposant que l'on échantillonne aux instants optimaux, calculer le rapport signal sur bruit aux instants d'échantillonnage (on admettra que la puissance du bruit échantilloné et filtré est identique à celle du bruit filtré).
- 6) Comparer le rapport signal sur bruit obtenu précédemment à celui que l'on obtiendrait dans le cas où $h(t)$ et $h_r(t)$ sont deux fonctions portes de même durée T_s .
- 7) On choisira d'utiliser un détecteur à seuil. Déterminer le seuil optimal à utiliser en expliquant votre choix.
- 8) En supposant que l'on échantillonne aux instants optimaux et que l'on utilise le seuil optimal de décision, donner le taux d'erreur binaire de la transmission en fonction de V , T_s et σ , σ^2 représentant la puissance du bruit en sortie du filtre de réception $h_r(t)$.
- 9) Calculer la puissance du bruit en sortie du filtre de réception σ^2 en fonction de N_0 et de T_s .
- 10) Calculer l'énergie moyenne des symboles à l'entrée du récepteur E_s en fonction de V et T_s .
- 11) Déduire des questions précédentes l'expression du taux d'erreur binaire en fonction de E_b/N_0 .
- 12) Comparer le taux d'erreur binaire calculé ici à celui qui serait obtenu dans le cas où $h(t)$ et $h_r(t)$ seraient deux fonctions portes de même durée T_s . Pouvait-on s'attendre à ce résultat ?

Remarque : on donne le résultat du produit de convolution nécessaire à cet exercice dans la figure suivante :



B. Exercice 2

Soit le système de transmission donné par la figure 3. On place en émission et en réception deux filtres de même réponse impulsionnelle : $h_r(t) = h(t) = \text{sinc}(\pi t/T_s)$. Le bruit $n(t)$ est supposé additif, blanc et gaussien, de densité spectrale de puissance égale à $\frac{N_0}{2}$ quelle que soit la fréquence.

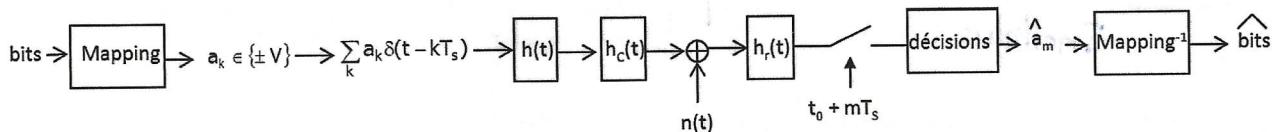
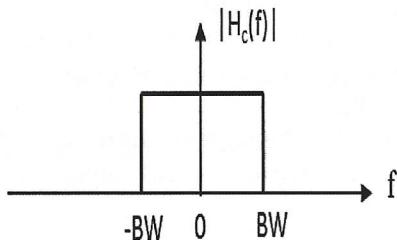


Fig. 3. Chaîne de transmission considérée dans l'exercice 2, section II-B

- 1) En considérant que $h_c(t) = \delta(t)$ (canal AWGN) :
 - a) Vérifier dans le domaine fréquentiel que la chaîne de transmission peut vérifier le critère de Nyquist.
 - b) Vérifier dans le domaine temporel que la chaîne de transmission peut vérifier le critère de Nyquist.
 - c) En supposant que l'on échantillonne aux instants optimaux, calculer le rapport signal sur bruit aux instants de décision. Le comparer à celui obtenu dans le cas où $h(t)$ et $h_r(t)$ sont deux fonctions portes de même durée T_s .

- d) Sans le calculer, déterminez le taux d'erreur binaire de cette transmission. Expliquez votre réponse.
- 2) On suppose maintenant que le canal de transmission introduit un filtrage et que le module de sa réponse en fréquence $H_c(f) = TF[h_c(t)]$ est donné par la figure suivante. Peut-on, en présence de ce canal, continuer à respecter le critère de Nyquist ? Si oui, à quelle condition ?



C. Exercice 3

Soit un signal émis $x(t)$ qui se compose de symboles équiprobables et indépendants appartenant à l'alphabet $\{\pm 1\}$ mis en forme par un filtre en racine de cosinus surélevé de roll off égal à 0,2. On transmet ce signal en bande de base dans un canal de transmission idéal de bande 1200 Hz. Le filtre de réception est identique au filtre de mise en forme.

- 1) Le critère de Nyquist peut-il être respecté pour cette transmission ? Si oui à quelle condition ?
- 2) En déduire le débit symbole R_s maximal pour une transmission sans apparition d'interférence entre les symboles aux instants optimaux d'échantillonnage.

III. ETUDE DU MAPPING

On transmet une suite de bits équiprobables et indépendants à travers un canal de transmission à bruit $n(t)$ additif, blanc et gaussien de densité spectrale de puissance $S_n(f) = N_0/2 \forall f \in \mathbb{R}$. Le modulateur utilisé est de type NRZ à 4 niveaux et utilise le mapping suivant : 00 : $-3V$, 01 : $-V$, 11 : $+V$, 10 : $+3V$. Le filtre de réception est adapté à la forme d'onde reçue et on suppose que l'on échantillonnera aux instants optimaux.

- 1) Calculer la probabilité de détecter (en sortie du bloc décision) le symbole $-V$ alors que l'on a émis $-3V$.
- 2) Calculer la probabilité de détecter (en sortie du bloc décision) le symbole $+V$ alors que l'on a émis $-3V$.
- 3) Calculer la probabilité de détecter (en sortie du bloc décision) le symbole $+3V$ alors que l'on a émis $-3V$.
- 4) AN : $V = 1$, $N_0 = 10^{-3}V^2/Hz$, $R_b = 1$ kbps
- 5) La règle de codage choisie vous paraît-elle intéressante ? Si oui, quel est son intérêt ?

La fonction $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ est donnée par la figure 8 en fin d'énoncé.

IV. ETUDE DE L'EFFET D'UNE ERREUR DE SYNCHRONISATION : GIGUE SUR L'INSTANT D'ÉCHANTILLONNAGE

Soit la chaîne de transmission donnée par la figure 4, dans laquelle la réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre d'émission est une fonction porte de largeur $T_s/2$.

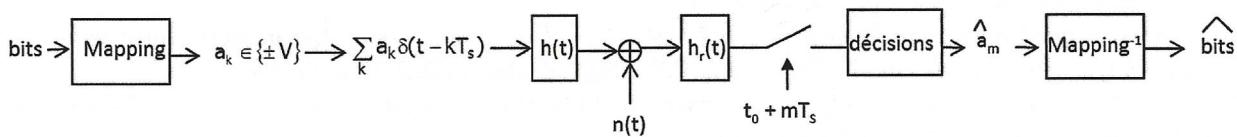


Fig. 4. Chaîne de transmission considérée dans l'exercice

- 1) Déterminer $h_r(t)$ tel que ce soit le filtre adapté à $h(t)$ et qu'il soit causal.
- 2) Déterminer la réponse impulsionnelle globale $g(t)$ de la chaîne de transmission.

- 3) Tracer le signal $r(t)$ obtenu sans bruit en sortie de $h_r(t)$ pour la suite binaire suivante : 011001.
- 4) Tracer le diagramme de l'oeil en sortie du filtre adapté sans bruit.
- 5) On prend les décisions à $t_0 + mT_s$ avec $t_0 = T_s/2$, a-t-on de l'interférence entre symboles ?
- 6) On prend les décisions à $t_0 + mT_s$ avec $t_0 = T_s/2 + T_s/8$, a-t-on de l'interférence entre symboles ?
- 7) Donner le TEB de la liaison en fonction de la variance σ^2 du bruit en sortie de $h_r(t)$, de V et de T_s dans le cas où on échantillonne à $t_0 + mT_s$ avec $t_0 = T_s/2$.
- 8) On suppose maintenant que les instants de prise de décision sont affectés d'une gigue de phase. Les instants de décision sont égaux à $t_0 + mT_s$ avec $t_0 = T_s/2 + g$, g étant une variable aléatoire qui prend ses valeurs parmi 0, $T_s/8$, $-T_s/8$ avec les probabilités respectives $1/3$, $1/3$, $1/3$. Calculer le TEB de la liaison avec gigue de phase, en fonction de la variance σ^2 du bruit en sortie de $h_r(t)$, de V et de T_s .
- 9) En prenant de manière arbitraire $\frac{VT_s}{2\sigma} = 1$, comparer le TEB obtenu avec gigue au TEB "idéal" (synchronisation parfaite, sans gigue).

V. ETUDE DE L'EFFET D'UN CANAL NON AWGN : CANAL MULTITRAJETS

Soit le système de transmission donné par la figure 5. On place en émission et en réception deux filtres de même réponse impulsionnelle égale à une fonction porte de largeur $T_s/2$. Le bruit $n(t)$ est supposé additif, blanc et gaussien, de densité spectrale de puissance égale à $\frac{N_0}{2}$ quelle que soit la fréquence.

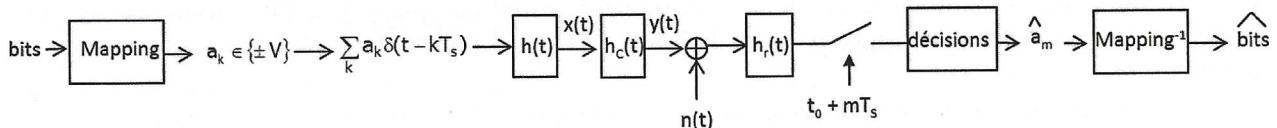


Fig. 5. Chaine de transmission considérée dans l'exercice

Le canal de réponse impulsionnelle $h_c(t)$ est donné par la figure 6 :

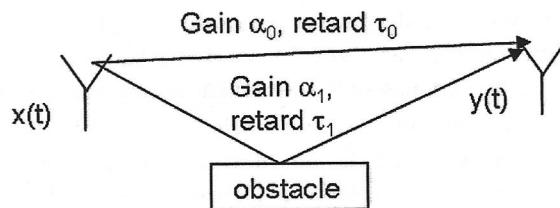


Fig. 6. Canal multi trajets

- 1) Ecrire $y(t)$ en fonction de $x(t)$ et des paramètres du canal.
- 2) En déduire la réponse impulsionnelle $h_c(t)$ du canal.
- 3) On prend $\tau_0 = 0$, $\tau_1 = \tau_0 + T_s$, $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_1 = 0,6$. Sans bruit, tracer le signal en sortie du filtre de réception $h_r(t)$ pour la séquence binaire transmise suivante 011001.
- 4) Tracer le diagramme de l'oeil. A-t-on de l'interférence entre symboles ?
- 5) Le critère de Nyquist peut-il être respecté ?
- 6) En supposant que l'on échantillonne à $t_0 + mT_s$ avec $t_0 = T_s/2$ et que l'on utilise un détecteur à seuil avec un seuil à 0 (chaîne de transmission pour canal AWGN), calculer le TEB de la liaison.
- 7) En prenant de manière arbitraire $\frac{VT_s}{2\sigma} = 1$, comparer le TEB obtenu sur canal multitrajet avec le TEB obtenu sur canal idéal sans erreurs de synchronisation.

La fonction $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv$ est donnée par la figure 8 en fin d'énoncé.

VI. CHOIX D'UN SYSTÈME DE TRANSMISSION

On considère les trois systèmes de transmission définis dans le tableau suivant ("SRRCF" signifie "Square Root Raised Cosine Filter" ou filtre en racine de cosinus surélevé en français) :

Modulation :	16-QAM	16-PSK	16-ASK
Filtre d'émission :	SRRCF, $\alpha = 0,5$	SRRCF, $\alpha = 0,5$	SRRCF, $\alpha = 0,5$
Filtre de réception :	SRRCF, $\alpha = 0,5$	SRRCF, $\alpha = 0,5$	SRRCF, $\alpha = 0,5$
Débit binaire :	32 kbps	32 kbps	32 kbps
TEB :	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}

- 1) Dans les trois systèmes de transmission proposés la transmission se fait-elle en bande de base ou sur fréquence porteuse ?
- 2) Donner le schéma des modulateurs pour les trois systèmes de transmission considérés.
- 3) Tracer les constellations des trois modulations considérées.
- 4) Déterminer le débit symbole (R_s) dans les trois cas.
- 5) Calculer les efficacités spectrales des trois systèmes de transmission proposés. Pouvait-on s'attendre à un tel résultat ?
- 6) Quel est la borne maximale en termes d'efficacité spectrale pour les trois systèmes de transmission proposés ?
- 7) Le canal de propagation à traverser est supposé AWGN de bande 10 kHz.
 - a) Tracez la fonction de transfert du canal de propagation.
 - b) Sera-t-il possible de réaliser chaque transmission en trouvant, au niveau du récepteur, un instant optimal d'échantillonnage sans interférence entre symboles ? Expliquez votre réponse.
- 8) La figure 7 donne les courbes de TEB obtenus en fonction du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur (E_b/N_0) en dB pour les trois modulations considérées. En déduire les E_b/N_0 nécessaires pour satisfaire à la spécification du TEB ? Quel est le système le plus efficace en terme de puissance ? Justifiez votre réponse.
- 9) Qu'est ce qui pourrait justifier l'utilisation de la modulation 16-PSK comparée à la modulation 16-QAM ?

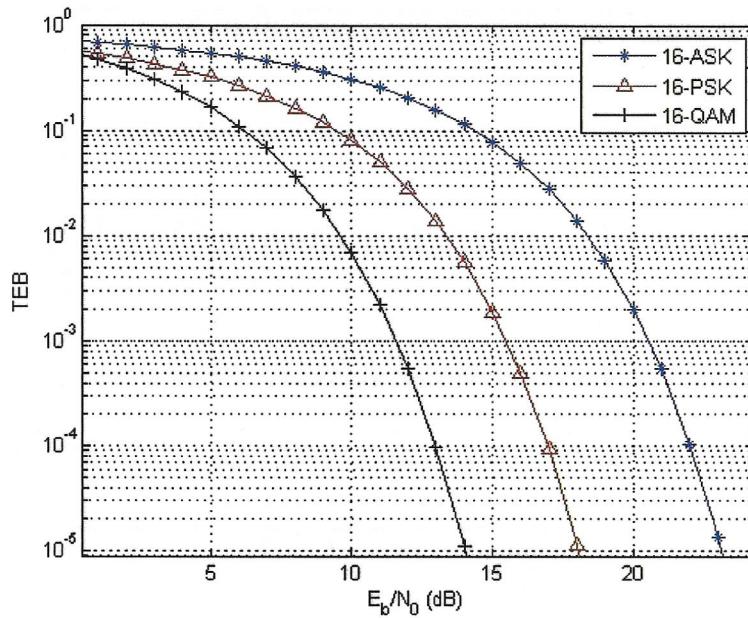


Fig. 7. Comparaison des TEB pour les modulations ASK, PSK et QAM dans le cas où $M = 16$

VII. PERFORMANCE D'UNE MODULATION BPSK

Soit un signal émis modulé en BPSK (Binary Phase Shift Keying). Ce signal est affecté par un bruit blanc gaussien de densité spectrale de puissance $N_0/2 \forall f \in \mathbb{R}$. On appelle $H(f)$ et $H_r(f)$ les fonctions de transfert des filtres

d'émission et de réception. On suppose que la fonction de transfert du canal $C(f)$ est telle que $C(f) = 1 \forall f \in \mathbb{R}$.

- 1) Donner le schéma de l'émetteur permettant de générer un signal modulé en BPSK. Tracer la constellation de la modulation.
- 2) Donner l'expression du signal modulé ainsi que celle de son enveloppe complexe.
- 3) A partir du schéma de la chaîne passe-bas équivalente à la chaîne de transmission BPSK,
 - a) Dans le cas où $G(f) = H(f)H_r(f)$ est donné par :

$$G(f) = \begin{cases} T_s \cos^2(\pi f \frac{T_s}{2}) & \text{pour } |f| \leq \frac{1}{T_s} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (1)$$

- i) Montrez que $G(f)$ satisfait le critère de Nyquist.
- ii) Quel est le choix optimal de $H(f)$ et $H_r(f)$ qui minimise le taux d'erreur symbole (TES) ?
- iii) En considérant que le choix optimal a été effectué pour $H(f)$ et $H_r(f)$, exprimez le TEB de cette chaîne de transmission en fonction de E_b/N_0 . On supposera les symboles émis équiprobables et indépendants.

- b) Dans le cas où on utilise les filtres d'émission $H(f)$ et de réception $H_r(f)$ donnés par :

$$H(f) = \begin{cases} T_s \cos^2(\pi f \frac{T_s}{2}) & \text{pour } |f| \leq \frac{1}{T_s} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (2)$$

$$H_r(f) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |f| \leq \frac{1}{T_s} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (3)$$

- i) Montrez que $G(f) = H(f)H_r(f)$ satisfait le critère de Nyquist.
- ii) Expliquez pourquoi le taux d'erreur binaire doit être supérieur à $Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right)$.
- iii) Calculer le TEB de cette nouvelle chaîne de transmission en fonction de E_b/N_0 .

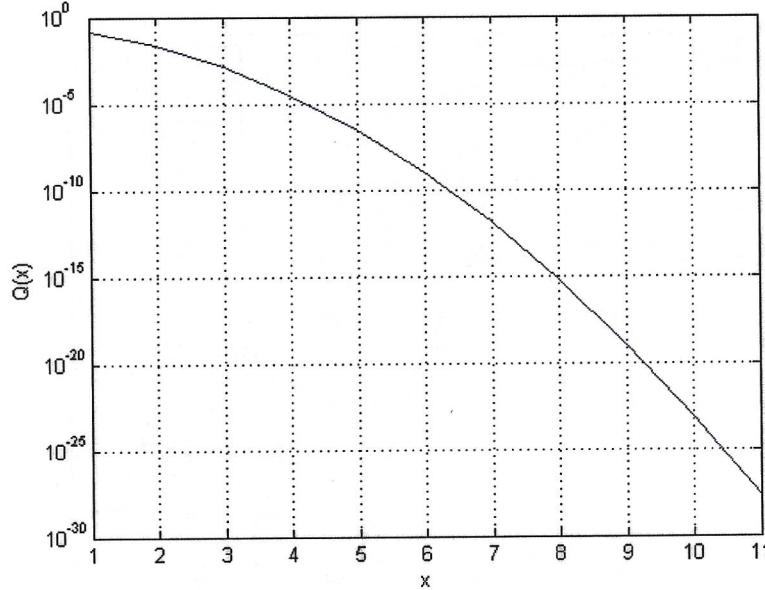


Fig. 8. Fonction $Q(x)$

TD

Telecom 9

Télécommunications

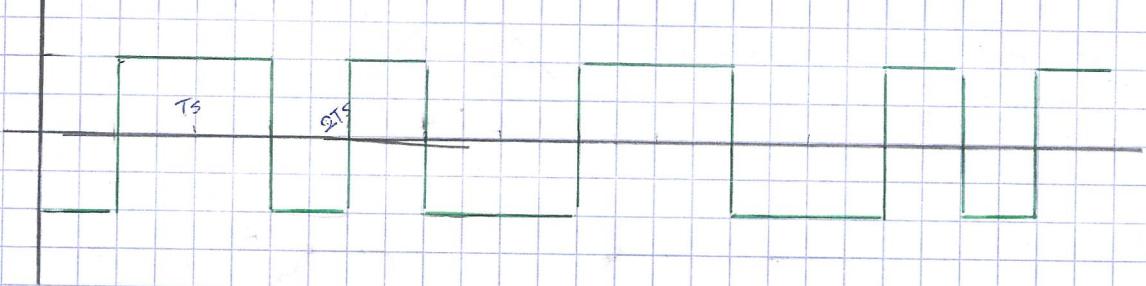
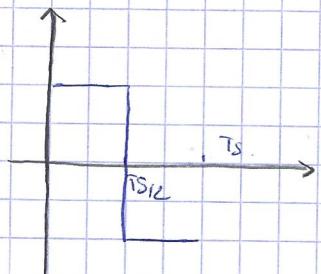
→ Calcul des DPS de Signaux de Télécommunications

Exercice 1: Signal biphase.

1/ Signal biphase. $h(t) = \sum_k a_k h(t - kT_s)$

bits
0 - V
1 + V

2/



$$3/ h(t) = \Pi_{T_s/2} (t - \frac{T_s}{4}) - \Pi_{T_s/2} (t - \frac{3T_s}{4})$$

$$ma = E(a_k) = P(a_k = V) \times V + P(a_k = -V) \times (-V) = 0 \text{ car équiprobabilité}$$

$$\sigma a^2 = E[(a_k - ma)^2] = E(a_k^2) = \frac{1}{2} V^2 + \frac{1}{2} V^2 = V^2.$$

$$H(f) = \frac{T_s}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{2} T_s f\right)^2 - \frac{T_s}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{2} T_s f\right) e^{-j \frac{3\pi}{2} T_s f}.$$

$$H(f) = \frac{T_s}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi}{2} T_s f\right) \left(e^{-j \frac{\pi}{2} T_s f} - e^{-j \frac{3\pi}{2} T_s f} \right) \\ = \frac{T_s}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi}{2} T_s f\right) e^{-j \frac{\pi}{2} T_s f} \left(e^{j \frac{\pi}{2} T_s f} + e^{-j \frac{\pi}{2} T_s f} \right) = \frac{T_s}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi}{2} T_s f\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{2} T_s f\right)$$

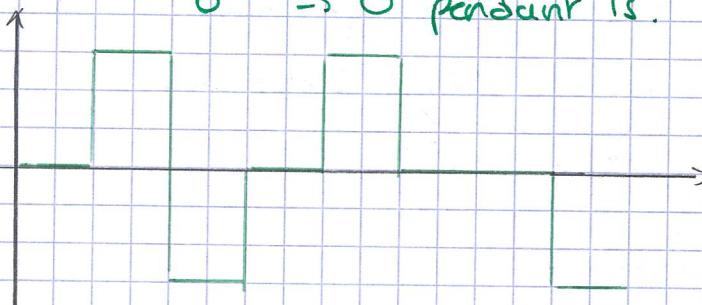
$$Sx(f) = V^2 \times T_s \times \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi}{2} T_s f\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{2} T_s f\right)$$

$$Sx(0) = \frac{\pi}{2} T_s f = K\pi \Rightarrow f = \frac{2K}{T_s} \Rightarrow B = \frac{2}{T_s}.$$

4/ Bande de Base: Spectre centré sur 0 en face.

5/ Bipolaire: "1" $\Rightarrow +V$ ou $-V$ alternativement pendant T_s .

"0" $\Rightarrow 0$ pendant T_s .



01101001

Bipolaire: meilleure largeur de bande

Biphase: plus de transitions donc meilleure synchronisation.

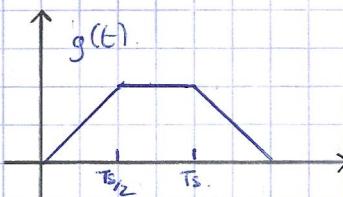
→ Critère de Nyquist, Filtrage adapté

Exercice 1:

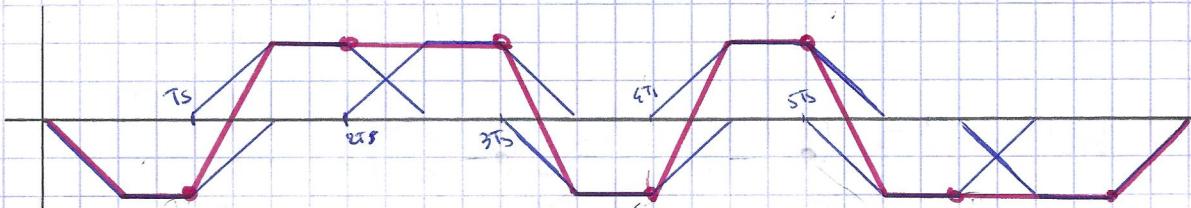
$$1/h(t) = \prod_{k=1}^K (t - t_{S_k}) \quad h_r(t) = \prod_{k=1}^K (t - t_{S_k})$$

$$g(t) = h(t) * h_r(t)$$

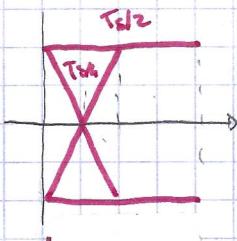
Critère de Nyquist respecté pour tout $t_0 \in [T_{S_2}, T_S]$



2/



3/



$$t_0 \in [T_{S_2}, T_S]$$

IP vaut mieux échantillonner au milieu de l'intervalle.

→ En terme d'efficacité en puissance, il vaut mieux $t_0 = T_S$.

4/ $t_0 = \frac{3T_S}{4}$ pas au bord de l'int à cause des effets de bord, pour éviter les int. entre symboles.

$$5/ \text{SNR} = 10 \log \frac{P_{\text{sig. filtre}}}{P_{\text{bruit}}}$$

Sortie du filtre adapté $y(t) = \sum_k a_k g(t - kT_S) + n(t)$

Pour estimer a_n , on échantillonne à $t_0 + nT_S$.

$$y(t_0 + nT_S) = \underbrace{a_n g(t_0)}_{y_n} + \underbrace{n'(t_0 + nT_S)}_{n'}$$

$$\boxed{\text{SNR} = \frac{E[|y_n|^2]}{E[|n'|^2]}}$$

$$\mathbb{E}(y_n) = \mathbb{E}[\alpha n^2 g^2(r_0)] = g^2(r_0) \mathbb{E}[|\alpha n|^2] = g^2(r_0) V^2 \\ = \frac{Ts^2}{2} V^2$$

!

$$n'(t) = h_r(t) * n(t).$$

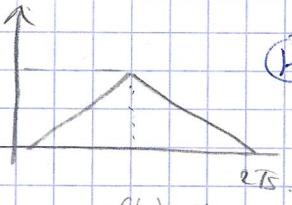
$$S_{n'}(f) = S_n(f) \times |H_r(f)|^2$$

$$\int_{\mathbb{R}} S_{n'}(f) df = \int_{\mathbb{R}} S_n(f) \times |H_r(f)|^2 df \\ = \frac{N_0}{2} \int_{\mathbb{R}} |h_r(t)|^2 dt \quad (\text{Parseval - Plancherel}) \\ = \frac{N_0 Ts}{2}$$

$$\boxed{\text{SNR}_{e_c + nTs} = \frac{V^2 Ts}{N_0}}$$

$$6/ \quad h(n) - \Pi_{Ts}(t) \quad \rightarrow \quad g(n) - \Pi_{Ts}(t)$$

$$\text{SNR}_{HF} = \frac{V^2 Ts^2}{\frac{N_0 Ts}{2}}$$



$$(1) \quad t_0 = Ts.$$

Done $\text{SNR}_{HF} < \text{SNR}_{e_c + nTs}$. Normal car on minimize.

$$7/ \quad \text{Seuil optimal en } 0 \quad \sigma^2 = \mathbb{E}[|y|^2]$$

$$\text{SNR}_{HF} = \frac{N_0 Ts}{2}$$

$$8/ \quad P_b = P[\hat{a}_m = +v] P[\hat{a}_m^* = -v | \hat{a}_m = +v] \\ + P[\hat{a}_m = -v] P[\hat{a}_m^* = +v | \hat{a}_m = -v].$$

$$+ \frac{P[\hat{a}_m = -v]}{P[\hat{a}_m = +v]} P[\hat{a}_m^* = +v | \hat{a}_m = -v].$$

$$\propto (t_0 + mTs) = a_m g(t_0) + n_0 \quad n_0 \sim \mathcal{N}(0, \frac{N_0 Ts}{2}).$$

$$P[y(t_0 + mTs) < 0 | \hat{a}_m = +v] = P[y_g(t_0) + n_0 < 0].$$

$$= P(n_0 < -y_g(t_0)) = P(n_0 > y_g(t_0)).$$

$$= \int_{-\infty}^{y_g(t_0)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{y_g(t_0)}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \propto v\sigma.$$

$$= Q\left(\frac{y_g(t_0)}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{N_0 Ts}}{\sigma}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{V^2 Ts}{N_0}}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{Ts}}{25}\right).$$

par symétrie. $P[\hat{a_m} = +v \mid a_m = v] = Q\left(\frac{\sqrt{Ts}}{2\sigma}\right)$

$$P_b = \frac{1}{2} Q\left(\frac{\sqrt{Ts}}{2\sigma}\right) + \frac{1}{2} Q\left(-\frac{\sqrt{Ts}}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{Ts}}{2\sigma}\right)$$

$$g) \sigma^2 = E[(y_s)^2] - \frac{N_0 Ts}{2}$$

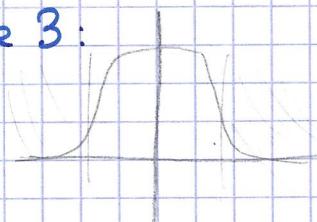
$$\begin{aligned} 10) Ts &= E \left[\int |h(n)|^2 dt \right] \\ &= E[|h(n)|^2] \int_{Ts} \frac{|h(n)|^2 dt}{Ts} \\ &= V^2 Ts \end{aligned}$$

$$11) Ts = \log_2(M) E_b \text{ où } M = 2 \text{ donc } \log_2(2) = 1 \quad \epsilon^2 s = E_b$$

$$P_b = Q\left(\frac{\sqrt{Ts}}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{V^2 Ts}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$$12) P_b^{(IF)} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) < Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) = P_b^{(RF)}$$

Exercice 3:

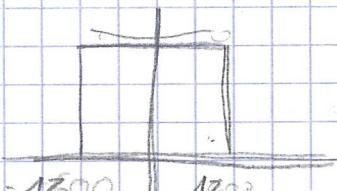
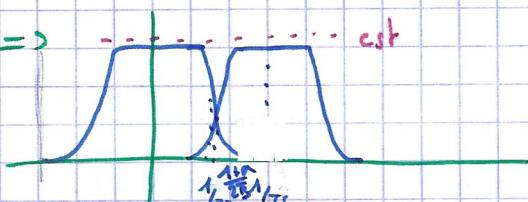


$$G(F) = H(F) \times H_r(F) \times H_c(F),$$

$$= \cos R \times \Pi_{7200}$$

$$G(F) = H(F) \times H_r(F) \times H_c(F).$$

$$\sum_{k=0}^{(n)} G\left(E \frac{k}{Ts}\right) \Leftrightarrow \text{--- --- --- --- cst}$$



$$H_c(F) = \Pi_{7200}(F)$$

$$\frac{1+\alpha}{2Ts} < 1200$$

$$\frac{1+\alpha}{2900} < Ts.$$

Pour que le critère soit respecté :

$$T_S > \frac{1+\alpha}{2400} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

2/ Donc $R_s = 2000 \text{ Hz}$. aux instants opti d'éch.

VI Choix d'un système de transmission.

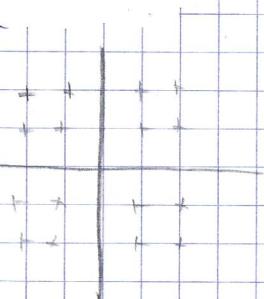
1/ Sur onde porteuse

2/ $d_k = a_k + j b_k$ avec $a_k, b_k \in \{-V, \pm V\}$. 16-QAM.

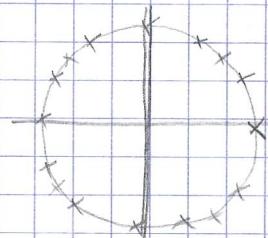
$d_k \in \left\{ e^{j\left(\frac{2\pi}{16}l\pi + \frac{\pi}{8}\right)} \right\} l \in \{0, 15\}$. 16-PSK.

$d_k \in \{-V, \pm V, \dots, \pm 8V\}$. 16-ASK.

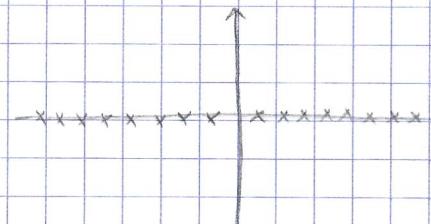
3/



16-QAM



16-PSK



16-ASK

$$4/ R_s = \frac{R_b}{\log_2(16)} = \frac{32 \cdot 10^3}{\log_2(16)} = \frac{32 \cdot 10^3}{4} = 8000 \text{ symbols/s.}$$

$$5/ \eta = \frac{R_b}{B}$$

$$\beta = \frac{1+\alpha}{T_S}$$

$$\frac{R_b}{\frac{1+\alpha}{T_S}} = \frac{R_b T_S}{1+\alpha} = \frac{R_b \log_2(16)}{R_b (1+\alpha)} = \frac{4}{1.5} = 2.67.$$

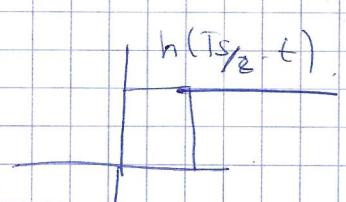
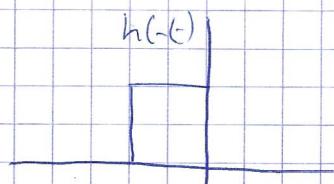
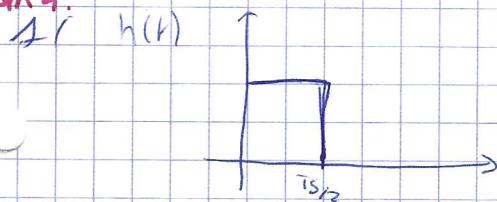
debit passable en 1 Hz.

6/ ζ .



$$f_p = 1.85 \cdot 10^{-4}$$

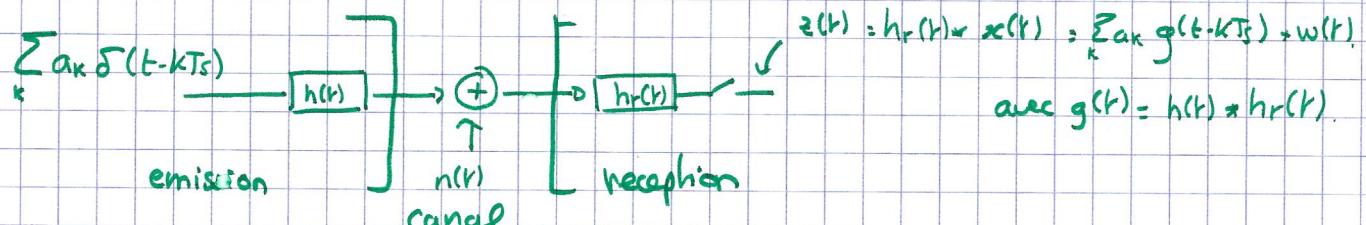
$$f_s = 8000 \text{ Hz.}$$



Filtre adapté : soit $h(t)$ le filtre de mise en forme .

Soit $t_0 + mT_s$ l'instant d'échantillonage choisi pour estimer a_m symb. am . Le filtre adapté $h_r(t)$ s'exprime sous la forme.

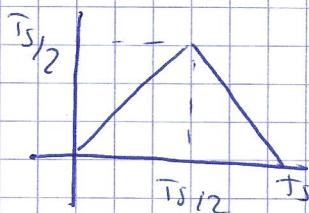
$$h_r(t) = \Delta h^*(t_0 - t) \text{ si } h(t) \text{ réel, on a } h_r(t) = h(t_0 - t)$$



On échantillonne $z(t)$ à $t_0 + mT_s$ pour estimer a_m .

$$z(t_0 + mT_s) = \underbrace{a_m g(t_0 + mT_s)}_{g(t_0)} + \underbrace{\sum_{k \neq m} a_k g[t_0 + (m-k)T_s]}_{ISI} + w(t_0 + mT_s).$$

$$z/g(t) = h(t) * h_r(t) = \Delta T_s.$$

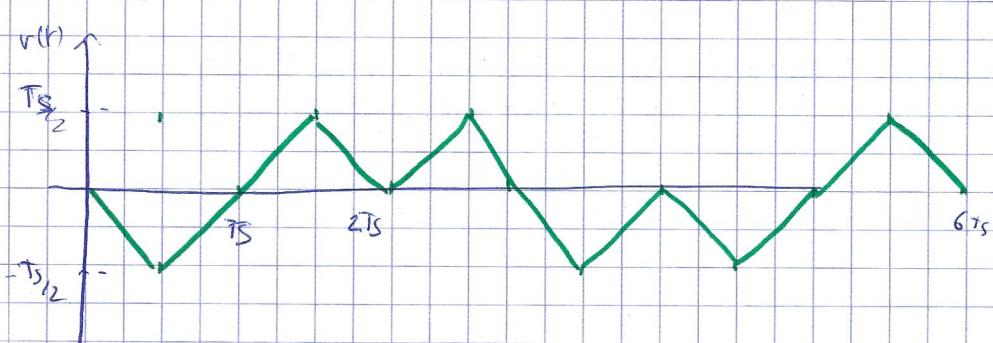


Pour aller plus loin : Si $h_r(t)$ est adapté à $h(t)$ pour un instant d'échantillonage à t_0 , alors

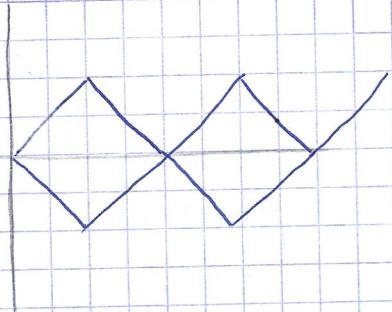
$$g(t) = R_{hh}(t - t_0) \quad g(t_0)$$

$$g(t_0) = R_{hh}(0) = E_h = \int_{-T_s/2}^{T_s/2} |h(t)|^2 dt$$

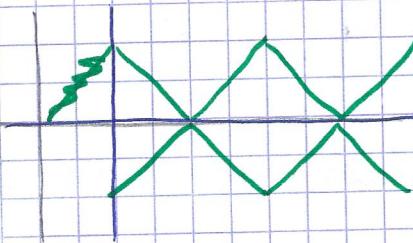
2/ $r(h) =$



5/ Diagramme de l'œil.



ou



5/ Prise de décision à $t_0 + mT_s$ avec $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$.

Pas d'ISI car $g(t)$ respecte Nyquist à $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$.

6/ Avec $\omega_0 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ pas d'ISI car $g(t)$ respecte Nyquist
à $\omega_0 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$.

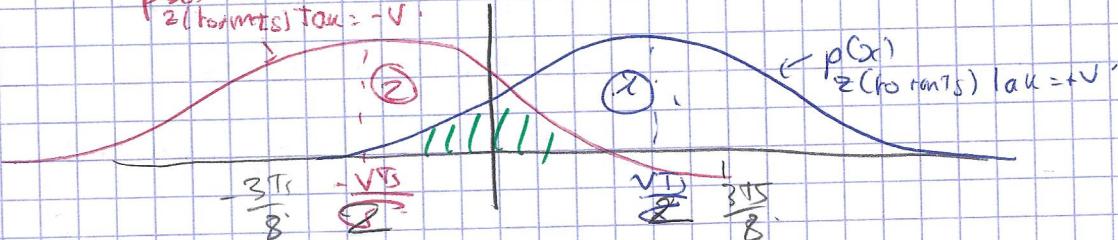
7/ TEB. Calcul de P_b pour $\omega_0 = \frac{\pi}{2} + m\pi$.

$$P_b = P\{a_k = v\} P\{\hat{a}_k = -v | a_k = v\} + P\{a_k = -v\} P\{\hat{a}_k = v | a_k = -v\}$$

Dans un cas binaire et un instant d'échantillonnage aléatoire.

$$P_b = Q\left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{T_s}}{2\sigma}\right).$$

$\text{P}(z)$
 $\frac{1}{2}(t_0 + mT_s) \tan^{-1} z = -v$



A savoir faire:

$$\begin{aligned} P\{z(t_0 + mT_s) > 0 | a_k = -v\} &= P[-Vg(t_0) + \omega(t_0 + mT_s) > 0] \\ &= P[\omega(t_0 + mT_s) > Vg(t_0)] \\ &= \int_{Vg(t_0)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \int_{\frac{Vg(t_0)}{\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = Q\left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

$$8/ P_b = \frac{1}{3} P_b^{(g=0)} + \frac{1}{3} P_b^{(g=\frac{\pi}{8})} + \frac{1}{3} P_b^{(g=\frac{-\pi}{8})} = \frac{1}{3} Q\left(\frac{\sqrt{T_s}}{2\sigma}\right) \cdot 2Q\left(\frac{\sqrt{3}T_s}{8\sigma}\right)$$

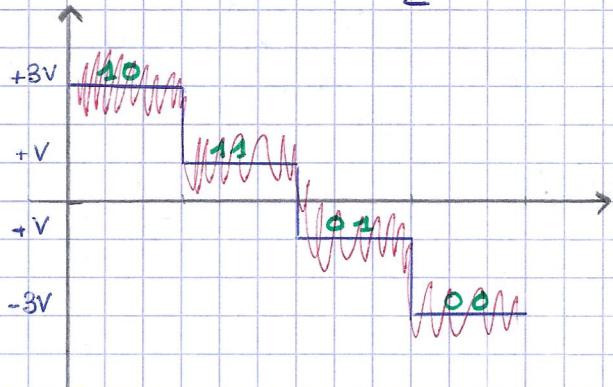
9/ AN 1^{er} cas: TEB = 0,75

2nd cas $\approx 0,20$ (ajuste giga donc incertain).

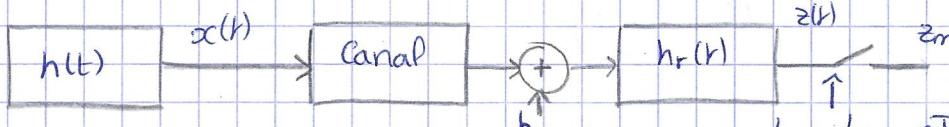
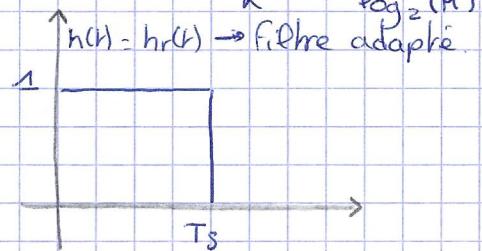
III / Etude du mapping

Canal gaussien

$$\text{Bruit} \Rightarrow \text{DSP} = \frac{N_0}{2} \text{ nF.}$$

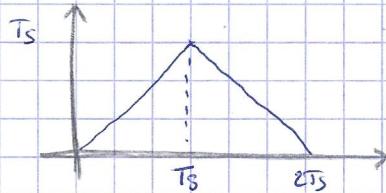


$$\text{On a TEB a } \frac{\text{TES}}{K} = \frac{\text{TEB}}{\log_2(M)}$$



$$z_m = a_m g(t_0) + b_n$$

$$g(r) = h(r) * h_r(r)$$



$$\begin{aligned} z_m \in [-2Vt_s, 0] &\Rightarrow \hat{a}_m = -V \Rightarrow 01 \\ z_m \in [0, 2Vt_s] &\Rightarrow \hat{a}_m = +V \Rightarrow 11 \\ z_m > 2Vt_s &\Rightarrow \hat{a}_m = +3V \Rightarrow 10 \\ z_m \leq -2Vt_s &\Rightarrow \hat{a}_m = -3V \Rightarrow 00. \end{aligned}$$

$$1) P(\hat{a}_m = -V | a_m = -3V)$$

$$P(z_m \in [-2Vt_s, 0] | a_m = -3V)$$

$$P(-2Vt_s \leq a_m g(t_0) + b_n \leq 0 | a_m = -3V)$$

$$P(-2Vt_s - a_m g(t_0) - b_n \leq -a_m g(t_0) | a_m = -3V)$$

$$P(-2Vt_s - 3g(t_0) \leq b_n \leq -3g(t_0) | b_n \sim N(0, \frac{N_0}{2}))$$

$$\text{DSP}_{\text{lin}} = \frac{N_0}{2} \rightarrow \text{DSP}_{\text{part}} = |h_r|^2 \frac{N_0}{2}$$

$$P_{bn} = \int \text{DSP}_{\text{part}} = \frac{N_0}{2} \int_0^{T_s} |h_r|^2 dt = \frac{T_s \times N_0}{2} = \frac{N_0 T_s}{2}$$

$$P((-2Vt_s - 3g(t_0)) \leq b_n \leq (-3g(t_0)) | \text{Noise}) \sim N(0, \frac{N_0 T_s}{2})$$

$$R Q(\frac{3Vt_s - 12g(t_0)}{N_0 T_s}) = Q\left(\frac{-12g(t_0)}{N_0 T_s}\right).$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) P(A)}{P(B)}$$

$$= Q(a) + P(X \geq b)$$

$$= Q(a) - Q(b)$$

Calculons la puissance du bruit

$$S_b(f) = S_n(f) |H_r(f)|^2 \quad (\text{Wiener-Lee})$$

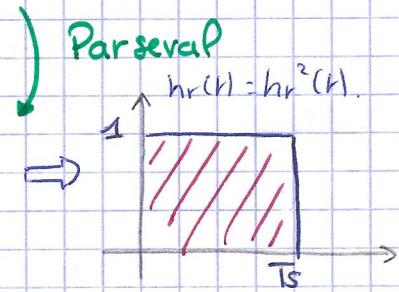
$$\sigma^2 = \int_{\text{IR}} S_b(f) df = \int_{\text{IR}} S_n(f) |H_r(f)|^2 df$$

$$= \frac{N_0}{2} \int_{\text{IR}} |H_r(f)|^2 df$$

$$= \frac{N_0}{2} \int_{\text{IR}} |h_r(t)|^2 dt$$

$$= \frac{N_0}{2} \int_{\text{IR}} |h_r(t)| dt$$

$$= \frac{N_0 T_s}{2}$$



$$\text{Donc } b_m \sim \mathcal{CN}\left(0, \frac{N_0 T_s}{2}\right)$$

$$1 | P_1 = P[\hat{a_m} = -V | a_m = -3V]$$

$$= P[-2V T_s \leq z_m \leq 0 | a_m = -3V] \quad \text{car } g(t_0) = g(T_s) = T_s.$$

$$= P[-2V T_s \leq -3V T_s + b_m \leq 0]$$

$$= P[V T_s \leq b_m \leq 3V T_s]$$

$$= P\left[\frac{V T_s}{\sqrt{\frac{N_0 T_s}{2}}} \leq \frac{b_m}{\sqrt{\frac{N_0 T_s}{2}}} \leq \frac{3V T_s}{\sqrt{\frac{N_0 T_s}{2}}} \mid \frac{b_m}{\sqrt{\frac{N_0 T_s}{2}}} \sim \mathcal{CN}(0, 1)\right]$$

$$= F\left(3 \sqrt{\frac{2V^2 T_s}{N_0}}\right) - F\left(\sqrt{\frac{2V^2 T_s}{N_0}}\right)$$

avec F : fonction de répartition de $\mathcal{CN}(0, 1)$ $F = 1 - Q$.

$$P_1 = Q\left(\sqrt{\frac{2V^2 T_s}{N_0}}\right) - Q\left(3 \sqrt{\frac{2V^2 T_s}{N_0}}\right)$$

$$\text{Or } \frac{V^2 T_s}{N_0} = \frac{E_b}{N_0}$$

$$P_1 = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) - Q\left(3 \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right).$$

$$2 | P_2 = P[\hat{a_m} = +V | a_m = -3V]$$

$$= P[0 \leq z_m \leq 2V T_s | a_m = -3V]$$

$$= P[0 \leq -3V T_s + b_m \leq 2V T_s]$$

$$= P\left[\frac{3V T_s}{\sqrt{\frac{N_0 T_s}{2}}} \leq \frac{b_m}{\sqrt{\frac{N_0 T_s}{2}}} \leq \frac{5V T_s}{\sqrt{\frac{N_0 T_s}{2}}}\right]$$

$$\begin{aligned}
 P_2 &= F\left(5\sqrt{\frac{2V^2TS}{N_0}}\right) - F\left(3\sqrt{\frac{2V^2TS}{N_0}}\right) \\
 &= Q\left(3\sqrt{\frac{2V^2TS}{N_0}}\right) - Q\left(5\sqrt{\frac{2V^2TS}{N_0}}\right) \\
 &= Q\left(3\sqrt{\frac{2Eb}{N_0}}\right) \cdot Q\left(5\sqrt{\frac{2Eb}{N_0}}\right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3/ P_3 &= P[\hat{m} = +3V | m = -3V] \\
 &= P[2m \geq 2VTS | m = -3V] \\
 &= P\left[\frac{bm}{\sqrt{\frac{N_0 TS}{2}}} \geq \frac{5VTS}{\sqrt{\frac{N_0 TS}{2}}}\right] \\
 &= Q\left(5\sqrt{\frac{2V^2TS}{N_0}}\right) = Q\left(5\sqrt{\frac{2Eb}{N_0}}\right).
 \end{aligned}$$

Ainsi: $P_{00} = P_1 + P_2 + P_3$

$$= Q\left(\sqrt{\frac{2Eb}{N_0}}\right) - Q\left(3\sqrt{\frac{2Eb}{N_0}}\right) + Q\left(3\sqrt{\frac{2Eb}{N_0}}\right) - Q\left(5\sqrt{\frac{2Eb}{N_0}}\right) \rightarrow Q\left(5\sqrt{\frac{2Eb}{N_0}}\right)$$

$$4/ R_b = 1 \text{ kbps} \Rightarrow R_s = 500 \text{ sym/s} \Rightarrow TS = \frac{1}{500}$$

AN: ...

On a $P_1 \gg P_2, P_3$.

5/ Lorsqu'on comet une erreur, on va confondre deux niveaux c'est à dire

$$TEB \approx \frac{TES}{4}.$$