

CM2.1 Décomposition en valeurs singulières et applicationsI/ SVD d'une matrice

"SVD" \rightsquigarrow singular value decomposition.

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de rang $\text{rg}(A) = r \geq 1$.

A- Propriétés de $A^T A$

Propriété: i) $A^T A$ est symétrique semi-définie positive

ii) les valeurs propres de $A^T A$ sont dans \mathbb{R}_+ et $A^T A$ est orthodagonale

iii) $\ker A^T A = \ker A$

$\text{Im } A^T A = \text{Im } A^T$

iv) $A^T A$ inversible $\Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$

prouve: iii) $\ker A \subset \ker A^T A$ (clair)

Soit $x \in \ker A^T A$ alors $A^T A x = 0 \Rightarrow x^T A^T A x = 0 = \|Ax\|^2$

D'où $\|Ax\| = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x \in \ker A$. Donc $\ker A^T A = \ker A$.

$\text{Im } A^T A \subset \text{Im } A^T$ (clair)

D'après le théorème du rang $\dim \frac{\ker A^T A}{\ker A} + \text{rg}(A^T A) = n$

D'où $\text{rg}(A^T A) = n - \dim \ker A = \text{rg}(A) = \text{rg}(A^T)$. D'où $\text{Im } A^T A = \text{Im } A^T$

iv) $A^T A$ inversible $\Leftrightarrow \ker A^T A = \{0\}$

$\Rightarrow \ker A = \{0\}$ par iii)

$\Rightarrow \text{rg } A = n$ par thm du rang.

B- Construction de la SVD de A.

$$\begin{aligned} \text{On a } \text{rg}(A^T A) &= \dim \text{Im } A^T A = \dim \text{Im } A^T \\ &= \text{rg}(A^T) = \text{rg}(A) = r. \end{aligned}$$

et $\dim \ker A^T A = n - r$.

Donc 0 est valeur propre de $A^T A$ de multiplicité $n - r$

Notons $(\lambda_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ les vp de $A^T A$ classées par ordre décroissant ($\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n = 0$).

Soit $(v_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ une BON de vp associées $E = (v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$

BON de $\ker(A^T A)^{\perp}$ BON de $\ker(A^T A) \cap \ker A$

Posons $V = [v_1, \dots, v_n] \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ($V^T V = I_n$).

$= (\ker A)^{\perp}$

On pose $U_i \in \{1, \dots, r\}$ $U_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A v_i$

On a $\forall i \in \{1, \dots, r\}$ $(U_i, U_j) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} (A v_i, A v_j)$.

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} (A^T A v_i, v_j).$$

$A v_i$ car (λ_i, v_i) couple propre de $A^T A$.

$$= \sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_j}} (v_i, v_j) \text{ car } (v_i)_{i \in \{1, \dots, r\}} \text{ BON.}$$

$$= \delta_{ij}.$$

$(U_i)_{i \in \{1, \dots, r\}}$ FON de \mathbb{R}^n (famille orthonormée).

De plus, $\text{vect}(U_i)_{i \in \{1, \dots, r\}} \subset \text{Im } A$. et $\text{rg}(U_i) = \text{card}(U_i) = r = \text{rg}(A)$.

$\Rightarrow \text{vect}(U_i)_{i \in \{1, \dots, r\}} \subset \text{Im } A$. et $(U_i)_{i \in \{1, \dots, r\}}$ BON de $\text{Im } A$.

On complète $(U_i)_{i \in \{1, \dots, r\}}$ en une BON de \mathbb{R}^m par (v_{r+1}, \dots, v_m) BON de $(\text{Im } A)^{\perp}$

On pose $F = (v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_m)$

$$V = (U_1, \dots, U_m) \in \mathcal{G}_m(\mathbb{R}) \quad V^T V = I_m$$

BON de $(\text{Im } A)^{\perp}$

$$\forall i \in \{1, r\} \quad AA^T u_i \quad \text{avec } \forall i \in \{1, r\} \quad u_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A v_i$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \underbrace{\sum_{i=1}^N A_i^T A_{Vi}}_{AV_i} = \sqrt{A_i^T A_{Vi}}$$

AVI Avi

λ = $\lambda_1 \lambda_2$ et $\lambda_1 \sqrt{p}$ de AA' associé à λ

$$U^T A V = U^T A [v_1 \dots v_r \ v_{r+1} \dots v_n]$$

$$= U^T [A_{11} \dots A_{1n} \quad A_{21} \dots A_{2n} \quad \dots \quad A_{m1} \dots A_{mn}]$$

$$= \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_{\text{dim}}^T \end{bmatrix} [\text{P}_{\text{true}}, -\text{P}_{\text{true}}, 0, 0] = \begin{bmatrix} \text{P}_{\text{true}}^T u_1 \\ \vdots \\ \text{P}_{\text{true}}^T u_{\text{dim}} \end{bmatrix}$$

$$\text{Or } \forall (i,j) \in [1,m]^2 \quad (u_i, u_j) = u_i^T u_j$$

$$\text{Đại} \quad U^T A V = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_r} \end{matrix}}^r & \begin{matrix} m-r \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} \end{array} \right) = \Sigma \in \text{Col}_{m,n}(\mathbb{R})$$

$$\text{Finalcent } A = U \Sigma V^T$$

Definition Sei $A \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ mit $\text{rg}(A) = r > 1$

• La relation $A = U\Sigma V^T$, avec $U \in G_m(\mathbb{R})$, $V \in O_n(\mathbb{R})$ et $\Sigma \in \text{diag}_{m,n}(\mathbb{R})$

définies comme précédemment est appelée décomposition en valeurs singulières de A .

Les scalaires $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} > 0$ $\forall i \in [1, r]$ sont appelés les valeurs singulières de A et correspondent aux valeurs propres non nulles de $A^T A$.

Remarque: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$

Propriétés: Autres expressions

$$ii) A = U \Sigma V^T = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} \quad \text{where } U_1 = \{u_1, \dots, u_r\} \in \mathcal{U}_{m,r}(\mathbb{R})$$

$\frac{\text{Eq}}{\Sigma} \frac{U_1^T U_1}{U_1^T U_1} = I_r$

$$\text{avec } \frac{U_1}{\|U_1\|^T} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix} \in \text{Col}_m, r(\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} & \text{Eq } U_1^T U_1 = I_r \\ & \text{Eq } U_2^T U_{r+1}, \dots, U_m \in O_{m, m-r}(\mathbb{R}) \\ & \text{Eq } U_2^T U_2 = I_{m-r}. \end{aligned}$$

avec $\underline{V}_1 = [v_1 \dots v_r] \in \text{Col}_{n,r}(\mathbb{R})$ tq $\underline{V}_1^T \underline{V}_1 = I_r$.
 $\underline{V}_2 = [v_{r+1} \dots v_n] \in \text{Col}_{n,n-r}(\mathbb{R})$ tq $\underline{V}_2^T \underline{V}_2 = I_{n-r}$.

$$\Sigma_r = \text{Diag}(\sigma_1 \dots \sigma_r) \in \text{Col}_r(\mathbb{R})$$

Remarque: $\underline{U}_1 \underline{U}_1^T \in \text{Im}_r$ $\forall i \in \{1, r\}$. \rightarrow projection orthogonale sur le sous-espace engendré par les colonnes de la matrice \underline{U}_1 (v_i)

$$A = [\underline{U}_1 \underline{U}_2] \begin{bmatrix} \Sigma_r V_1^T \\ 0 \end{bmatrix} = \boxed{\underline{U}_1 \Sigma_r V_1^T} \quad \text{"Forme réduite" (F° SVD) Matlab}$$

$$\text{i)} A = \underline{U}_1 \Sigma_r V_1^T = [u_1 \dots u_r] \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_r^T \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T}$$

II / Matrice pseudo-inverse

A - Définitions et propriétés

Définition: Soit $A \in \text{Col}_{n,m}(\mathbb{R})$ tq $\text{rg}(A) \geq 1$.

On appelle matrice pseudo-inverse de A (ou inverse généralisée) la matrice, notée A^+ , suivante:

$$A^+ = V \Sigma^+ U^T \in \text{Col}_{m,n}(\mathbb{R}) \quad \text{avec } A = U \Sigma V^T \text{ la SVD de } A.$$

$\Sigma^+ = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r & & 0 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \sigma_{n-r} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \in \text{Col}_{n,m}(\mathbb{R}). = \begin{bmatrix} \Sigma^{-1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \Sigma^{-1} & & 0 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \in \text{Col}_{n,n}$

Théorème. Caractérisation de Moore-Penrose

Soit $A \in \text{Col}_{n,m}(\mathbb{R})$ de $\text{rg}(A) = r \geq 1$.

La matrice A^+ , pseudo-inverse de A , est l'unique solution $X \in \text{Col}_{n,m}(\mathbb{R})$ du système:

$$(HP) = \begin{cases} AXA = A & (1) \\ XAX = X & (2) \\ (AX)^T = AX & (3) \\ (XA)^T = XA & (4) \end{cases}$$

prouve: A^+ est solution. est solution de (HP)

$$\textcircled{1} \quad AA^+A = A \underbrace{U \Sigma V^T}_{\text{Im}_r} \underbrace{V \Sigma^+ U^T}_{\text{Im}_m} U \Sigma V^T = A \Sigma \Sigma^+ \Sigma V^T = A$$

$$\text{or } \Sigma \Sigma^+ \Sigma = \Sigma$$

$$AA^+A = U \Sigma V^T = A$$

On vérifie que A^+ est solution de (2), (3), (4) de la même manière.

Unicité de la solution de (HP)

Savoir $(X_1, X_2) \in \text{cl}_{n,m}(\mathbb{R})^2$ s.t. (HP)

On a $AX_2 = (AX_2)^T = X_2^T A^T = X_2^T (AX_2 A)^T$
par \circledcirc app à X_2 par \circledcirc app à X_2

$$\begin{aligned} AX_1 &= X_1^T A^T X_2^T A^T \\ &= (AX_2)^T (A X_2)^T \\ &= AX_1 A X_2 = A \quad \text{③ app à } X_2 \text{ et } X_2 \\ &= A X_2 \text{ par } \textcircled{②} \text{ app à } X_2 \end{aligned}$$

On montrera donc que $X_2 A = X_2 A$.

$$AX_2 = A X_2 \Rightarrow X_2 A X_1 = X_2 A X_2.$$

$$X_2 = \cancel{X_2} \text{ par } \textcircled{②} \text{ app à } X_2$$

$$\text{D'où } X_2 = X_2 A X_2 = X_2 A X_2 = X_2 \text{ par } \textcircled{②} \text{ app à } X_2.$$

Donc (HP) admet au plus une solution. Finalement A^+ est l'unique sol de (HP) . \rightarrow Permet de montrer qu'un candidat est la pseudo-inv.

Théorème: 2nd caractérisation.

Savoir $A \in \text{cl}_{m,n}(\mathbb{R})$ de $\text{rg}(A) = r \geq 1$.

$\forall b \in \mathbb{R}^m$, $A^+ b$ est la solution de norme minimale du problème : $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2$

$$\text{preuve: } \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \nabla f(x) = A^T (Ax - b)$$

$$\nabla^2 f(x) = A^T A. \text{ semi-def pos} \Rightarrow f \text{ convexe sur } \mathbb{R}^n \text{ conv.}$$

D'où toute solution de $\nabla f(x) = 0$ est un minimum global de f .

$$\nabla f(A^+ b) = A^T (A A^+ b - b) = (A^T A A^+ - A^T) b$$

$$\text{or } A^T A A^+ = V \Sigma^+ U^T U \Sigma V^T V \Sigma^+ U^T = V \Sigma^T \Sigma^+ \Sigma^+ U^T = V \Sigma^T U^T = A^T$$

$$\text{et } \nabla f(A^+ b) = (A^T - A^T) b = 0.$$

D'où $A^+ b$ est un minimum global de f .

• Savoir $x \in \mathbb{R}^n$ mini global de f . On a $\mathbb{R}^n = \text{ker } A \oplus (\text{ker } A)^\perp$

$$\exists! (x_0, x_1) \in \text{ker } A \times (\text{ker } A)^\perp \text{ tq } x = x_0 + x_1$$

$$A^T A x = A^T A x_1 \text{ car } x_0 \in \text{ker } A$$

$$= A^T b \text{ car } \nabla f(x) = 0 = A^T (A A^+ b) \text{ car } \nabla f(A^+ b) = 0$$

$$\Rightarrow A^T A (\underline{x}_\perp - A^+ b) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{x}_\perp - A^+ b \in \ker A^T A = \ker A.$$

$$\text{et } \underline{x}_\perp - A^+ b \in \ker A$$

$$\text{or } A^+ b = V \Sigma^+ U^T b = [v_1 v_2] (\Sigma^{-1} 0) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}^T b.$$

$$= V_1 \Sigma^{-1} U_1^T b, \quad \text{et } \text{Im } V_1 = \text{Vect}(v_1, \dots, v_r).$$

car (v_1, \dots, v_r) BON de $(\ker A)^\perp$

$A^+ b \in (\ker A)^\perp$ or $\underline{x}_\perp \in (\ker A)^\perp$ et donc $\underline{x}_\perp - A^+ b \in (\ker A)^\perp$.

D'où $\underline{x}_\perp - A^+ b \in \ker A \wedge (\ker A)^\perp = \{0\}$.

$$\text{D'où } \underline{x}_\perp = A^+ b$$

$$\text{D'où } \underline{x} = A^+ b + \underline{x}_0. \quad \|b\|^2 = \|A^+ b\|^2 + \|\underline{x}_0\|^2 \text{ par pythagore}$$

$$\|b\|^2 \geq \|A^+ b\|^2 \text{ et } \underline{x} \in \mathbb{R}^n \text{ mini global de } f.$$

D'où $A^+ b$ est la solution de norme minimale de (P)

Corollaire : Équations normales

$$\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \text{ tq } \text{rg}(A) = r \geq 1.$$

$$\forall b \in \mathbb{R}^m. \quad (A^T A) A^+ b = A^T b.$$

Propriété : $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \text{ tq } \text{rg}(A) = r \geq 1$

$$\text{On a } (A^T)^+ = (A^+)^T$$

preuve : on vérifie (3P)

$$\textcircled{1} \quad A^T (A^+)^T A^T = \underbrace{(A A^+ A)^+}_{=A^T} = A^T \text{ par } \textcircled{2} \text{ app à } A.$$

$$\textcircled{2} \quad (A^+)^T A^T (A^+)^T = (A^T A A^+)^T = A^+ = (A^T)^T$$

$$\textcircled{3} \quad (A^T (A^+)^T)^T = ((A^+ A)^T)^T = A^+ A = A^T (A^+)^T. \quad \textcircled{3} \text{ app à }$$

$$\textcircled{4} \quad ((A^+)^T A^+)^T = ((A^+ A)^T)^T = (A^+)^T A^+ \quad \textcircled{3} \text{ app à }$$

D'où $(A^+)^T$ est s° de (3P) associé à A^T : c'est la pseudoinverse

$$\text{de } A^T \quad (A^+)^T = (A^T)^+$$

Propriété: Soit $A \in \text{Col}_{m,n}(\mathbb{R})$ Cas particuliers.

Soit $A \in \text{Col}_{m,n}(\mathbb{R})$ tq $\text{rg}(A) = r \geq 1$

- i) Si $r=n=m$, $A^+ = A^{-1}$
- ii) Si $r=n$ ($m > n$) $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$
- iii) Si $r=m$ $A^+ = A^T (A A^T)^{-1}$.

preuve i) $A^+ = V \Sigma^+ U^T$ avec $\Sigma^+ = \begin{pmatrix} \text{diag}_r & 0 \\ 0 & 0 \cdot \text{diag}_{m-r} \end{pmatrix}$

$$= V \Sigma^{-1} U^T$$

$$= A^{-1}$$

ii) Si $r=m$ alors $A^T A$ est inversible
De plus, d'après les équations normales: $\forall b \in \mathbb{R}^m$
 $(A^T A) A^+ b = A^T b$

D'où $A^+ b = (A^T A)^{-1} A^T b$
 $\Rightarrow A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$.

iii) Si $\text{rg}(A) < m$.

On pose $B = A^T \in \text{Col}_{n,m}(\mathbb{R})$ avec $\text{rg}(B) = m$.

D'où B vérifie ii)

$$B^+ = (B^T B)^{-1} B^T \Leftrightarrow (A^T)^+ = (A A^T)^{-1} A$$

or $(A A^T)^+ = (A^+)^T$

Il vient $A^+ = A^T (A A^T)^{-1}$.

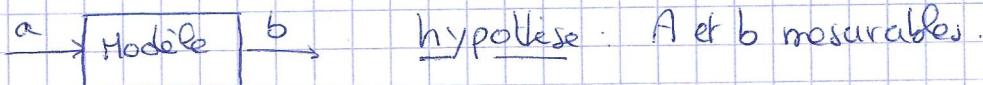
Propriété: Soit $A \in \text{Col}_{m,n}(\mathbb{R})$ tq $\text{rg}(A) = r \geq 1$

on a $A A^+ = \overline{\text{Im } A}$ (projection orthogonale sur $\text{Im } A$).

$A^+ A = \overline{\text{Ker } A}^\perp$ (proj^o ⊥ sur $(\text{Ker } A)^\perp$ à $\text{Ker } A$)

B - Applications

exercice 1: Estimation linéaire par moindres carrés.



$b = f(a, x)$ avec f connue, a, b : scalaires, valeurs, matrices.
 x : paramètres inconnus.

objectif: Estimer x ayant à notre disposition des mesures de a et b .

Cas particulier: moindres carrés linéaires.

$$a \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R} \quad \text{avec } b = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

EY 2.4 On a à notre disposition m mesures:

$$m \text{ mesures de } a \in \mathbb{R}^n. \forall k \in [1, m] \quad b_k = \sum_{i=1}^m a_i x_i;$$

$$\Leftrightarrow Ax = b \text{ avec } A = [a_i] \in \mathcal{C}^{m,n}(\mathbb{R})$$

En pratique, $m \gg n$ et le système peut être incompatible ($b \notin \text{Im } A$), auquel cas le système n'admet pas de solution au sens classique.

L'événement ($b \notin \text{Im } A$) étant très probable en pratique, on cherche plutôt à trouver $x \in \mathbb{R}^n$ qui minimise la norme du résidu $\|Ax - b\|$.

$$(P): \min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2 = \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2$$

$x = A^+b$ est la solution de norme minimale de (P)

exercice 2: Résolution de systèmes linéaires. (cf feuille).

III / Meilleure approximation d'une matrice par une matrice de rang fixé.

Soit $A \in \mathcal{C}^{m,n}(\mathbb{R})$ tq $\text{rg}(A) = r \geq 2$

On pose $\forall k \in [1, r-1]$

$$\mathcal{C}^{m,n}^k(\mathbb{R}) = \{X \in \mathcal{C}^{m,n}(\mathbb{R}) \text{ tq } \text{rg}(X) = k\}.$$

Remarque: La somme de 2 matrices de rang k n'est pas nécessairement de rang k .

$$\Rightarrow \mathcal{C}^{m,n}^k(\mathbb{R}) \text{ n'est pas un svr de } \mathcal{C}^{m,n}(\mathbb{R}).$$

• On cherche à résoudre le problème suivant: existence de $A_k \in \mathcal{C}^{m,n}^k(\mathbb{R})$ tq $\|A - A_k\| = \inf_{X \in \mathcal{C}^{m,n}^k(\mathbb{R})} \|A - X\|$ avec $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{C}^{m,n}(\mathbb{R})$

Propriété: Soit $A \in \mathcal{C}^{m,n}(\mathbb{R})$ tq $\text{rg}(A) = r \geq 2$.

$$\text{On note } A = \sum_{i=1}^n \sigma_i u_i v_i^T \text{ la SVD de } A \text{ avec } \sigma_1 > \dots > \sigma_r > 0$$

La matrice $A_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^T$ avec $k \in [1, r-1]$ est une solution

du problème (P_2) :

$$(P_2): \inf_{X \in \mathcal{C}^{m,n}^k(\mathbb{R})} \|A - X\|_2 \quad \text{On a de plus } \|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}$$



Preuve: Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tq $\text{rg}(A) = r \geq 2$.

Soit $k \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$

On pose $A_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^T$ avec $A = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T$ et $\sigma_1 > \dots > \sigma_r$

$$\bullet \text{ Mg. } \|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1} \quad A - A_k = \sum_{i=k+2}^r \sigma_i u_i v_i^T$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad (A - A_k)x = \sum_{i=k+2}^r \sigma_i u_i v_i^T x$$

Or (utilisant BON de \mathbb{R}^n) $\exists! (\alpha_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathbb{R}^n$ tq $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$

$$\text{et } \forall i \in \llbracket k+1, r \rrbracket. \quad v_i^T x = \sum_{j=1}^n \alpha_j \sigma_i v_i^T v_j = \alpha_i \|\sigma_i v_i\|_2^2 = \alpha_i.$$

$$\text{D'où } (A - A_k)x = \sum_{i=k+2}^r \sigma_i \alpha_i u_i.$$

$$\text{et } \|(A - A_k)x\|_2^2 = \left\| \sum_{i=k+2}^r \alpha_i \sigma_i u_i \right\|_2^2 = \sum_{i=k+2}^r \alpha_i^2 \sigma_i^2 \|v_i\|_2^2 \quad (\text{Pythagén})$$

$$\begin{aligned} & \leq \sigma_{k+2}^2 \underbrace{\sum_{i=k+2}^r \alpha_i^2}_{\leq n} \quad (\text{car } (\alpha_i) \text{ ordonnée descendante}) \\ & \leq \sum_{i=1}^r \alpha_i^2 \cdot \|x\|_2^2 \\ & \leq \sigma_{k+2}^2 \|x\|_2^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \frac{\|(A - A_k)x\|_2}{\|x\|_2} \leq \sigma_{k+2}$$

$$\Rightarrow \|A - A_k\|_2 \leq \sigma_{k+2} \quad (\|B\|_2 = \sup \frac{\|Bx\|_2}{\|x\|_2})$$

$$\text{Or } (A - A_k)v_{k+2} = \sum_{i=k+2}^n \sigma_i u_i v_i^T v_{k+2} = \sigma_{k+2} u_{k+2}.$$

$$\text{Et } \|A - A_k v_{k+2}\|_2 = \sigma_{k+2} \|u_{k+2}\|_2 = \sigma_{k+2}$$

$$\Rightarrow \|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+2}, \quad \text{erreur d'approximation}$$

$$\bullet \text{ Supposons } \exists B \in \mathcal{M}_{m,n}^k(\mathbb{R}) \text{ tq } \|A - B\|_2 < \sigma_{k+1}$$

$$B \in \mathcal{M}_{m,n}^k(\mathbb{R}) \Rightarrow \text{rg}(B) = k \Rightarrow \dim \ker B = n-k$$

$$\text{D'où } \ker B \cap \text{Vect}(v_1, \dots, v_{k+1}) \neq \{0\}.$$

$$\text{En effet, sinon } \ker B \oplus \text{Vect}(v_1, \dots, v_{k+1}) \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{et } \dim \ker B + \text{rg}(v_1, \dots, v_{k+1}) \leq n.$$

$$\Leftrightarrow n-k+k+1 \leq n. \quad (v_1, \dots, v_{k+1} \text{ FON}).$$

$$\Leftrightarrow n+1 \leq n \quad (\text{contradiction})$$

$$\exists z \in \ker B \cap \text{Vect}(v_1, \dots, v_{k+1}) \text{ tq } \|z\|_2 = 1,$$

$$\text{D'où } \|(A - B)z\|_2 = \|Az\|_2 \text{ car } z \in \ker B. \quad \Rightarrow \left\| \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^T z \right\|_2^2$$

Application de la S.V.D. à la résolution des systèmes linéaires :

(S. Gratton)

$$Ax = b, \quad A \in M_{m,n}(\mathbb{R}), \quad x \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \quad b \in M_{m,1}(\mathbb{R})$$

$$A = U \Sigma V^T \quad \text{SVD de } A$$

CSAD
CH 2.5

| ordre (m, n) du système. | rang du système: $r = \text{rg}(A)$ | Compatibility' du système: $C = \text{cptble}$ $NC = \text{non cptble}$ | Pseudo-Inverse A^+ | Ensemble S_c des solutions famiques: $S_c = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b\} = A^{-1}\{b\}$ | Ensemble S_{mc} des sol. au sens des moindres carrés: $S_{mc} = \{x \in \mathbb{R}^n / A^T A x = A^T b\}$ $= A^{-1}\{b_{\text{Im } A}\}$ | Résidu: $\ P(x)\ _{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)}$ |
|-------------------------------|--|--|--------------------------------|--|--|--|
| $m = n$ | $r = m: A \text{ bijectif}$ $\text{Im } A = \mathbb{R}^n$ | C S.L de CRAMER | $A^+ = A^{-1}$ | $S_c = \{A^{-1} \cdot b\}$ | $S_{mc} = S_c$ | 0 |
| | $r < m: A \text{ non injectif}$ $(\text{Im } A \subsetneq \mathbb{R}^n)$ | C ($b \in \text{Im } A$) | $A^+ = V \Sigma^+ U^T$ | $S_c \infty$ desol | $S_{mc} = S_c$ $A^+ b$ de norme min. | 0 |
| | NC ($b \notin \text{Im } A$) | | $A^+ = V \Sigma^+ U^T$ | $S_c = \emptyset$ | $S_{mc} \infty$ $A^+ b$ de n.m | > 0 |
| $n < m$ | $r = n: A \text{ injectif}$ $A \text{ non surj.}$ $(\text{Im } A \subsetneq \mathbb{R}^n)$ | C ($b \in \text{Im } A$) | $A^+ = (A^T A)^{-1} \cdot A^T$ | $S_c = \{A^+ b\}$ | $S_{mc} = S_c$ | 0 |
| | NC ($b \notin \text{Im } A$) | | $A^+ = (A^T A)^{-1} \cdot A^T$ | $S_c = \emptyset$ | $S_{mc} = \{A^+ b\}$ | > 0 |
| | $A \text{ non injectif}$ $r < n: A \text{ non surj.}$ $(\text{Im } A \subsetneq \mathbb{R}^n)$ | C ($b \in \text{Im } A$) | $A^+ = V \Sigma^+ U^T$ | $S_c \infty$ | $S_{mc} = S_c$ $A^+ b$ de n.m | 0 |
| | NC ($b \notin \text{Im } A$) | | $A^+ = V \Sigma^+ U^T$ | $S_c = \emptyset$ | $S_{mc} \infty$ $A^+ b$ de n.m | > 0 |
| $m < n$ | $A \text{ non injectif}$ $r = m: A \text{ surj.}$ $(\text{Im } A = \mathbb{R}^m)$ | C | $A^+ = A^T (A A^T)^{-1}$ | $S_c \infty$ | $S_{mc} = S_c$ $A^+ b$ de n.m | 0 |
| | $A \text{ non inj.}$ $r < m: A \text{ non surj.}$ $(\text{Im } A \subsetneq \mathbb{R}^m)$ | C ($b \in \text{Im } A$) | $A^+ = V \Sigma^+ U^T$ | $S_c \infty$ | $S_{mc} = S_c$ $A^+ b$ de n.m | 0 |
| | NC ($b \notin \text{Im } A$) | | $A^+ = V \Sigma^+ U^T$ | $S_c = \emptyset$ | $S_{mc} \infty$ $A^+ b$ de n.m | > 0 |

Or $z \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_{k+1})$

$$\exists (x_j)_{j \in \{1, k+1\}} \in \mathbb{R}^{k+1} \text{ tq } z = \sum_{j=1}^{k+1} x_j v_j^T v_j.$$

$$\forall i \in \{1, r\} \quad v_i^T z = \sum_{j=1}^{k+1} x_j v_i^T v_j$$

$$v_i^T z = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } i \in \{1, k+1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \|A - B\|_2^2 &= \left\| \sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i u_i v_i^T v_i \right\|_2^2 = \sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i^2 \|v_i\|_2^2 \quad (\text{Pythagore}) \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i^2 \alpha_i^2 \\ &\geq \sigma_{k+2}^2 \sum_{i=1}^r \alpha_i^2 \quad (\text{car } \alpha_1^2 \dots \geq \sigma_{k+2}^2) \\ &\geq \sigma_{k+2}^2 \end{aligned}$$

$$\|A - B\|_2 \geq \sigma_{k+2} \text{ par déf.}$$

Or $\|A - B\| \leq \sigma_{k+2}$ per hyp (Contradiction)D'où $\forall B \in \text{Colm}_n(\mathbb{R})$, $\|A - B\|_2 \geq \sigma_{k+2} = \|A - A_k\|_2$

$$\Rightarrow \|A - A_k\|_2 = \inf_{X \in \text{Colm}_n(\mathbb{R})} \|A - X\|_2. \quad \text{et } (A_k) \text{ sol de P}_2$$

Propriété: Soit $A \in \text{Colm}_{m,n}(\mathbb{R})$ tq $\text{rg}(A) = r \geq 2$ Soit $A \in \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^T$ la SVD de A avec $\sigma_1 > \dots > \sigma_m \geq 0$.

$\forall k \in \{1, r-1\}$, la matrice $A_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^T$ est une solution du problème (P_k): $\inf_{X \in \text{Colm}_{m,n}(\mathbb{R})} \|A - X\|_F$

$$\text{On a de plus } \|A - A_k\|_F^2 = \sum_{i=k+1}^r \sigma_i^2$$

preuve: admis

$$\begin{aligned} \text{Remarque: } A \in \text{Colm}_{m,n}(\mathbb{R}), \|A\|_F &= \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|^2} = \sqrt{\text{tr}(A^* A)} \\ (\text{P}_k), \|A\|_F &= \sqrt{\sum_{i=k+1}^r \sigma_i^2} = \sqrt{\text{tr}(A^* A)} \end{aligned}$$

 A^* : conjuguée transposée.Exemple: $A \in \text{Colm}_{m,n}(\mathbb{R})$ matrice de "données". Colonnes de A correspondent à des images (stockées vectoriellement), des s^e d'ERP -

$$A = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T \text{ avec } r = \text{rg}(A)$$

On veut "compresser" le stockage de A sans perdre "trop" d'info \Rightarrow meilleure approximation de A de rang k

$$\bullet \text{ choix de } k: k \text{ tq } \frac{\|A - A_k\|_2^2}{\|A\|_2^2} \leq \text{tol.}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=k+1}^r \sigma_i^2 \leq \text{tol}$$

• Stockage k vecteurs $(u_i)_{i \in \{1, \dots, k\}}$, $(v_i)_{i \in \{1, \dots, k\}}$ et k scalaires $(\alpha_i)_{i \in \{1, \dots, k\}}$
 $\Rightarrow k(m+n+1)$ réels.

⚠ Intérêt si $k(m+n+1) \leq mn$ (dimensions de A).

\Rightarrow Dépends de tol. et des valeurs singulières $(\sigma_i)_{i \in \{1, \dots, k\}}$.

exercice 1: Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de rang $r_A \geq 1$.

Soit $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang $r_B \geq 1$.

A-t-on $(AB)^+ = B^+A^+$? Non sauf si A, B inversible.

exercice 2: Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tq $\text{rg}(A) \geq 1$.

On pose $B = \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2m,n}(\mathbb{R})$

Mq $B^+ = \alpha [A^+ A^\dagger] \in \mathcal{M}_{n,2m}(\mathbb{R})$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ à déterm.

↳ Mq avec Penrose