

Examen de Calcul Scientifique
1ère Année Science du Numérique
Session 1, 2017-2018
(1h30, cours et notes de cours/TD/TP autorisés)



Vous rendrez les exercices sur des copies séparées. Le barème est indicatif.

1 Calcul de l'inverse d'une matrice (8pts)

On suppose que A est une matrice carrée de taille n inversible pour laquelle existe une factorisation LU sans pivotage de la matrice A :

$$A = LU$$

1. Montrer que l'on peut utiliser l'expression suivante $AA^{-1} = I$ et la décomposition $A = LU$ pour calculer A^{-1} .
On détaillera les étapes du calcul de A^{-1} .
2. Calculer la complexité en terme de nombre d'opération flottantes du calcul de A^{-1} de la question précédente. On prendra en compte aussi le nombre d'opérations pour la factorisation LU de A .
3. Soit x la solution du système $Lx = e_j$, avec e_j le $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique (vecteur possédant un seul élément non nul égal à 1 en position j). Montrer que les $(j-1)$ premières composantes du vecteur x sont nulles : $\forall i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq j-1, x_i = 0$.
4. En déduire le nombre d'opérations pour calculer $Lx = e_j$, où e_j est le $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique.
5. En déduire le coût de calcul de $LX = I$. On pourra noter que $X = L^{-1}$. On rappelle que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
6. En déduire le coût réel du calcul complet de $AA^{-1} = I$

2 Factorisation QR (8pts + bonus (2pts))

Les questions 1, 2 et 3 (bonus) sont indépendantes. Il est aussi possible d'effectuer la question 2.b sans avoir fait la question 2.a. Il est aussi possible de faire la question 1.b en admettant le résultat de la question 1.a. Il est aussi possible de faire la question 3.b en admettant le résultat de la question 3.a.

1. On suppose que l'on applique l'algorithme de la factorisation QR de Householder présenté en cours à une matrice A carrée de taille n qui possède deux colonnes j_1 et j_2 ($j_1 < j_2$) colinéaires.

- (a) Montrer qu'à chaque étape k de l'algorithme QR , les colonnes j_1 et j_2 de la matrice mise à jour $H_k \dots H_1 A$ restent colinéaires.
- (b) On s'intéresse à l'étape j_1 de la factorisation QR . Que se passe-t-il pour la colonne j_2 ? On précisera les éléments non nuls de cette colonne.
- (c) En déduire une modification de l'algorithme de la factorisation QR qui permette de détecter un ensemble de vecteurs colonnes colinéaires aux précédents et donc la dimension du noyau (espace des vecteurs v tels que $Av = 0$) de la matrice carrée A . Indiquer comment la dimension du noyau est calculée en fin de la factorisation QR .

2. Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. On suppose de plus qu'il existe une matrice de permutation P des colonnes de A telle qu'après k étapes de la factorisation QR de A on obtient la décomposition suivante:

$$AP = QR = (Q_1 \quad Q_2) \begin{pmatrix} R_{11} & R_{21} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (Q_1 \quad Q_2) \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $Q_1 \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ telle que $Q_1^T Q_1 = I_k$, $Q_2 \in M_{n,n-k}(\mathbb{R})$ telle que $Q_2^T Q_2 = I_{n-k}$, $R_{11} \in M_{k,k}(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire inversible, $R_{21} \in M_{k,n-k}(\mathbb{R})$ et $R_1 \in M_{k,n}(\mathbb{R})$

- (a) Soit A' la matrice permutée $A' = AP$, montrer que les colonnes de Q_1 forment une base de l'espace engendré par les colonnes de A' et en déduire le rang de A' (dimension de l'espace engendré par les colonnes de A'). (On notera que P étant une matrice de permutation on peut en déduire que les espaces engendrés par les colonnes de A' et de A sont identiques).
 - (b) Montrer que $(AP)^T \times Q_2 = 0$ (i.e. Q_2 est orthogonal à l'espace engendré par les colonnes de AP).
3. **Bonus:** Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. On suppose qu'à l'issue d'une factorisation QR on obtient la décomposition suivante:

$$A = QR = (Q_1 \quad Q_2) \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$$

avec $Q_1 \in M_{n,k}(\mathbb{R})$, $Q_2 \in M_{n,n-k}(\mathbb{R})$, $R_1 \in M_{k,n}$ et $R_2 \in M_{n-k,n}$

On suppose de plus que $\|R_2\| \leq \epsilon \|A\|$

- (a) Montrer que $\|A - Q_1 R_1\| \leq \epsilon \|A\|$
- (b) On suppose que la matrice A est approximée par la matrice $Q_1 R_1$. Pour quelles valeurs de k cette approximation permet-elle de réduire l'espace mémoire nécessaire pour stocker la matrice A par un facteur 10 ?