Introduction aux télécommunications
Séquence 3

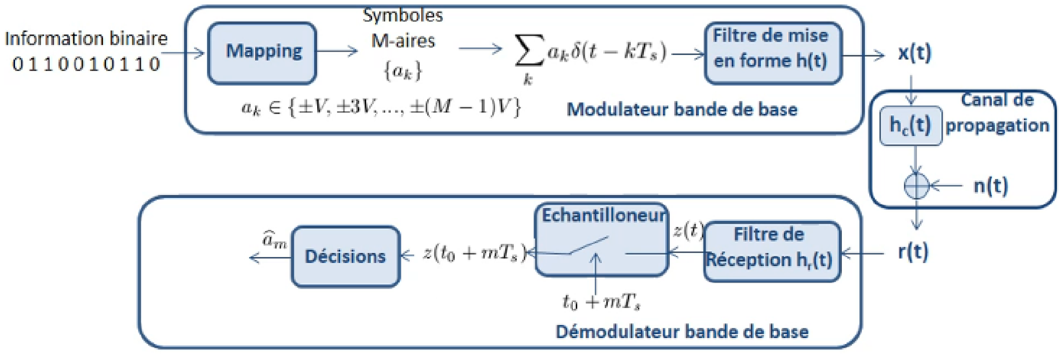
Département Sciences du Numérique
2020-2021

Table des matières

Un autre point important lorsque l'on veut concevoir la couche physique d'une chaîne de transmission numérique est de **respecter les critères de filtrage adapté**, ce qui sera le sujet de cette séquence.

1 Filtrage adapté

Voici le modulateur bande de base et la première partie du démodulateur bande de base, avec les expressions de $z(t)$ à connaître :



$$z(t_0 + mT_s) = \sum_k a_k g(t_0 + (m-k)T_s) + w(t_0 + mT_s)$$

$$z(t_0 + mT_s) = \underbrace{a_m g(t_0)}_{\text{Terme utile}} + \underbrace{\sum_{k \neq m} a_k g(t_0 + (m-k)T_s)}_{\text{ISI (Inter Symbol Interference)}} + \underbrace{w(t_0 + mT_s)}_{\text{Bruit (filtré et échantillonné)}}$$

On a vu précédemment comment *supprimer* des interférences entre symboles, en choisissant une réponse impulsionnelle de toute la chaîne de transmission et des instants d'échantillonage permettant de **vérifier le critère de Nyquist**, ce qui annule la seconde quantité notée **ISI** et donne :

$$z(t_0 + mT_s) = \underbrace{a_m g(t_0)}_{\text{Terme utile}} + \underbrace{w(t_0 + mT_s)}_{\text{Échantillon de bruit filtré, gaussien}}$$

Conséquence : Il est aisni possible de calculer un **rapport signal à bruit :**

$$SNR = \frac{P_{a_m g(t_0)}}{P_w} = \frac{\sigma_a^2 |g(t_0)|^2}{\sigma_w^2}$$

On constate que ce rapport peut être **maximisé** si on **maximise** $\dfrac{|g(t_0)|}{\sigma_w}$.

En développant ce rapport, on obtient :

$$\frac{|g(t_0)|}{\sigma_w} = \frac{\left|\int_R G(f)e^{j2\pi f t_0}df\right|}{\sqrt{\int_R S_w(f)df}} = \frac{\left|\int_R H(f)H_c(f)H_r(f)e^{j2\pi f t_0}df\right|}{\sqrt{\frac{N_0}{2}\int_R |H_r(f)|^2\, df}}$$

et on peut noter qu'il **dépend de tous les filtres de la chaîne de transmission.** [1]
On peut voir alors grâce à *l'inégalité de Cauchy-Schwarz* qu'il peut être **maximisé** :

$$\frac{\left|\int_R H(f)H_c(f)H_r(f)e^{j2\pi f t_0}df\right|}{\sqrt{\frac{N_0}{2}\int_R |H_r(f)|^2\, df}} \leq \frac{\left\{\int_R |H(f)H_c(f)|\, df\right\}^{1/2}\left\{\int_R |H_r(f)|^2\, df\right\}^{1/2}}{\left\{\frac{N_0}{2}\int_R |H_r(f)|^2\, df\right\}^{1/2}}$$

Et grâce à la règle d'obtention d'égalité pour *l'inégalité de Cauchy-Schwartz* :

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} a(f)b^*(f)df\right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} a(f)a^*(f)df \int_{-\infty}^{\infty} b(f)b^*(f)df \text{ , égalité pour } a(f) = \lambda b(f)$$

La valeur max pour le SNR se réalise alors quand :

$$H_r(f) = \lambda H_e^*(f)e^{-j2\pi f t_0} \xrightarrow{TF^{-1}} h_r(t) = \lambda h_e^*(\underbrace{t_0}_{\text{décalée}} \overbrace{-\,t}^{\text{retournée}})$$

avec

$$\begin{cases} \lambda \in \mathbb{R}^* \\ H_e(f) = H(f)H_c(f) \xrightarrow{TF^{-1}} h_e(t) = h(t) * h_c(t)\text{: Forme d'onde reçue} \end{cases}$$

et le filtre $h_r(t)$ trouvé (qui maximise le signal rapport à bruit) est appelé **filtre adapté** car adapté à la forme d'onde reçue. Il conduit donc à une **maximisation du SNR aux instants optimaux d'échantillonage** et par conséquent, à une **minimisation du taux d'erreur symbole.**

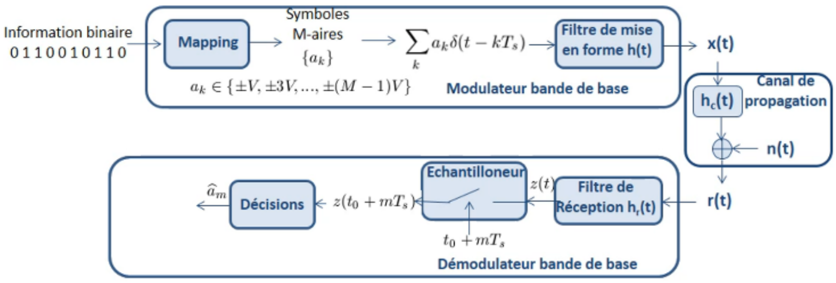
1. Car contient les termes $H(f)$, $H_c(f)$ et $H_r(f)$.

2 Règle de décision

2.1 Introduction

On a déjà vu avant comment filtrer et échantilloner le signal reçu afin d'éviter l'interférence entre symboles et de maximiser le rapport signal à bruit aux instants d'échantillonage. On verra dans cette section comment prendre des décisions sur les symboles à partir des échantillons collectés.

Voici le modulateur bande de base et une partie du démodulateur :



On va nous concentrer sur **le bloc décisions**.

Quand le critère de Nyquist est respecté, l'échantillon collecté à l'instant $t_0 + mT_s$ vérifie :

$$z_m = z(t_0 + mT_s) = \underbrace{a_m g(t_0)}_{\text{Terme utile}} + \underbrace{w(t_0 + mT_s)}_{\text{Échantillon de bruit filtré, gaussien}}$$

Il sera noté z_m et sera utilisé pour décider de la valeur du symbole transmis a_m.

2.2 Prise de décision

Pour prendre une décision, on va appliquer une règle dite de **Maximum A Posteriori (MAP)** : cela signifie qu'on doit calculer les probabilités d'avoir émis chaque valeur possible pour a_m, connaissant l'échantillon z_m collecté, et on affectera à a_m la valeur conduisant à la probabilité maximale, ce qui se traduit par la relation suivante :

$$\boxed{\hat{a}_m = \underset{\tilde{a}_m}{\operatorname{argmax}} \quad P(\tilde{a}_m | z_m)}$$

avec $\tilde{a}_m$ une valeur test pour a_m, c'est-à-dire qu'il peut prendre toutes les valeurs possibles prises par les symboles transmis a_m, et $\hat{a}_m$ **la valeur décidée** pour a_m.

Grâce à la *règle de Bayes*, pour des *symboles équiprobables*, la règle du **MAP** devient une règle de **Maximum Likelihood (ML)** [1] :

$$\boxed{\hat{a}_m = \underset{\tilde{a}_m}{\operatorname{argmax}} \quad p(z_m | \tilde{a}_m)}$$

On doit alors calculer les probabilités de recevoir z_m connaissant chaque valeur possible pour a_m, et on affectera à cette dernière la valeur conduisant à la **probabilité maximale**.

1. Dite **Maximum de Vraisemblance** en français.

Les probabilités $p(z_m|\tilde{a}_m)$ sont en effet plus faciles à calculer, car lorsque le critère de Nyquist est vérifié, ayant :

$$z_m = z(t_0 + mT_s) = a_m g(t_0) + w_m$$

avec $w_m = w(t_0 + mT_s)$, et ce terme étant gaussien à moyenne nulle, $p(z_m|\tilde{a}_m)$ l'est aussi avec la même variance, mais avec une moyenne $\tilde{a}_m g(t_0)$. Et comme :

$$p(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_w} \exp -\frac{w_m^2}{2\sigma_w^2}$$

alors :

$$\boxed{p(z_m|\tilde{a}_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_w} \exp -\frac{(z_m - \tilde{a}_m g(t_0))^2}{2\sigma_w^2}}$$

2.3 Mise en place du démodulateur bande de base

2.3.1 Exemple du cas binaire avec des symboles équipobables

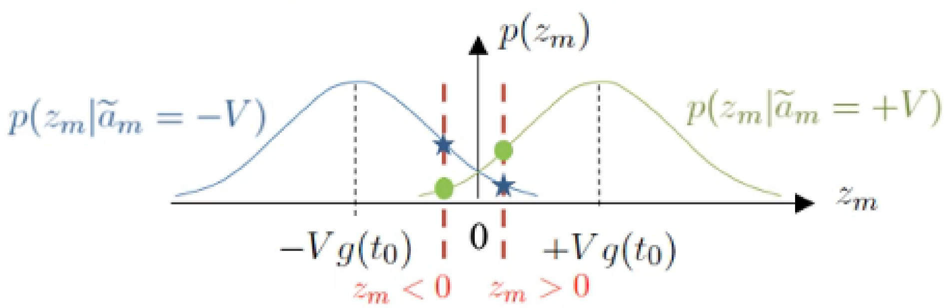
Dans ce cas, on a : $a_k \in \{-V, +V\}$, $P(a_k = -V) = P(a_k = +V) = 1/2$

La densité de probabilité de z_m sera alors un mélange de gaussiennes, avec deux gaussiennes centrées autour de $-Vg(t_0)$ et de $Vg(t_0)$. En effet, d'après la *loi des probabilités totales* :

$$p(z_m) = P(\tilde{a}_m = -V)p(z_m|\tilde{a}_m = -V) + P(\tilde{a}_m = +V)p(z_m|\tilde{a}_m = +V)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{p(z_m) = \frac{1}{2}p(z_m|\tilde{a}_m = -V) + \frac{1}{2}p(z_m|\tilde{a}_m = +V)}$$

Ce qui fournit la présentation de p en fonction de z_m :



On peut alors noter que :

— Pour $z_m \geq 0$: $p(z_m|\tilde{a}_m = +V) \geq p(z_m|\tilde{a}_m = -V)$

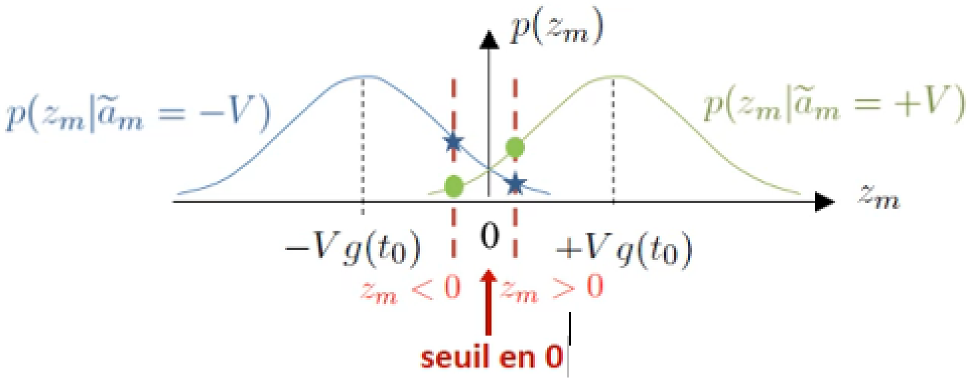
— Pour $z_m < 0$: $p(z_m|\tilde{a}_m = -V) > p(z_m|\tilde{a}_m = +V)$

Ce qui conduit donc à la règle suivante :

— Si $z_m \geq 0$: on décidera que $+V$ a été transmis pour a_m ($\hat{a}_m = +V$)

— Si $z_m < 0$: on décidera que $-V$ a été transmis pour a_m ($\hat{a}_m = -V$)

Cela signifie qu'on met un **seuil en 0** :



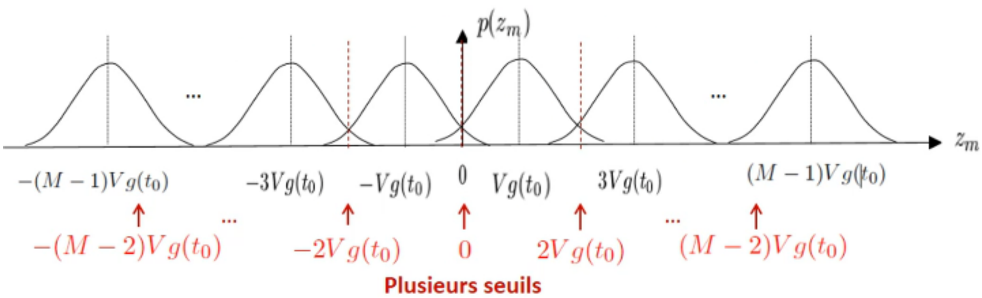
Cette règle est assez *"intuitive"*, mais on voit qu'elle provient d'une **détection par Maximum de Vraisemblance (ML)**. Le **bloc de décisions** est alors appelé **Détecteur à seuil (threshold detector/slicer)**, voici sa représentation ci-contre :

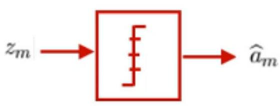
2.3.2 Exemple du cas M-aire pour des symboles équiprobables

Dans ce cas, on a :

$$a_k \in \{\pm V, \pm 3V, \ldots, \pm(M-1)V\} \quad , \quad P(a_k = \pm V) = \cdots = P(a_k = \pm(M-1)V) = 1/M$$

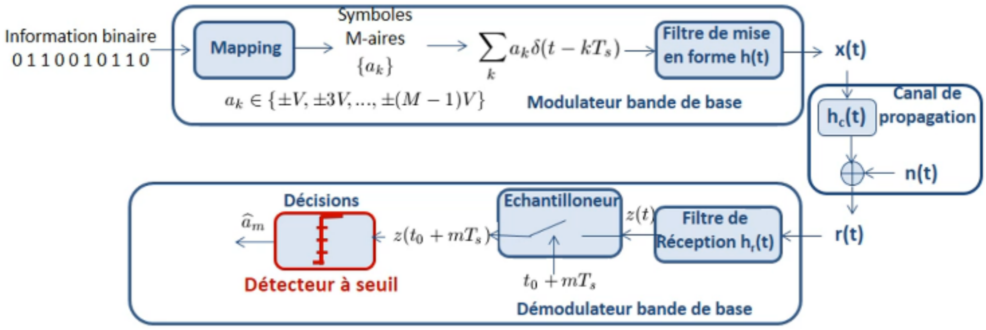
Le principe de la décision reste le même, mais il conduira à **plusieurs seuils**.





2.3.3 Conclusion

Voici donc le modulateur et le modulateur bande de base, auquel on ajoute un autre bloc : **le bloc décisions sur les symboles transmis**.



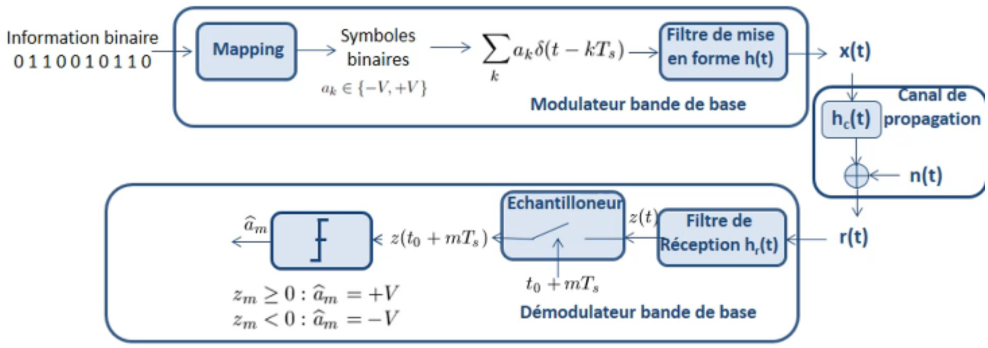
On est donc maintenant en mesure de **calculer le taux d'erreur symbole** en comparant les symboles après décision avec ceux transmis.

3 Taux d'Erreur Symbole (TES)

On le calcule généralement en comparant les symboles **décidés** avec ceux **transmis**.
On fera d'abord ce calcul dans le cas binaire avant de généraliser au cas M-aire.

3.1 Exemple dans le cas binaire (modulation 2-PAM)

Voici un modulateur bande de base pour une transmission binaire, et le démodulateur bande de base avec un détecteur de seuil avec seuil en 0, et on suppose aussi que le critère de Nyquist est vérifié, d'où le schéma suivant :



et la relation avec respect du critère de Nyquist : $z_m = z(t_0 + mT_s) = a_m g(t_0) + w(t_0 + mT_s)$

Première définition : $TES = \sum_{\text{tous les } a_m \text{ possibles}} P[\hat{a}_m \neq a_m]$

Pour des symboles binaires $\pm V$, on va prendre une mauvaise décision dans deux cas :

— lorsqu'on a transmis $-V$ et on décide $+V$.

— lorsqu'on a transmis $+V$ et on décide $-V$.

Ce qui fournit, d'après la définition du TES :

$$TES = P(a_m = -V)p(\underbrace{\hat{a}_m = +V}_{\text{on décide}} | \underbrace{a_m = -V}_{\text{a été transmis}}) \underbrace{+}_{\text{ou}} P(a_m = +V)p(\underbrace{\hat{a}_m = -V}_{\text{on décide}} | \underbrace{a_m = +V}_{\text{a été transmis}})$$

et d'après la conclusion faite en partie **2.3.1**, l'égalité devient :

$$TES = P(a_m = -V)p(\underbrace{z_m \geq 0}_{\text{on décide}} | \underbrace{a_m = -V}_{\text{a été transmis}}) \underbrace{+}_{\text{ou}} P(a_m = +V)p(\underbrace{z_m < 0}_{\text{on décide}} | \underbrace{a_m = +V}_{\text{a été transmis}})$$

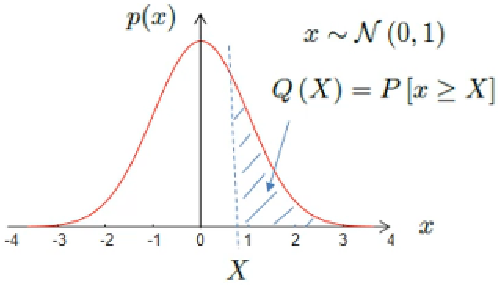
puis on remplace z_m par sa valeur :

$$TES = P(a_m = -V)p(-Vg(t_0) + w_m \geq 0) \quad + \quad P(a_m = +V)p(+Vg(t_0) + w_m < 0)$$

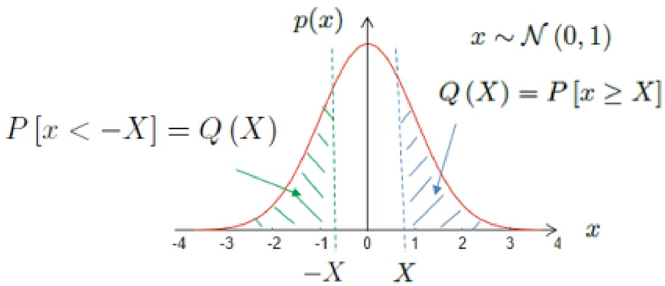
3.1.1 Si les symboles sont équiprobables

$$\boxed{TES = \frac{1}{2}p(w_m \geq Vg(t_0)) \quad + \quad \frac{1}{2}p(w_m < -Vg(t_0))}$$

La probabilité qu'une variable aléatoire gaussienne x de moyenne nulle et de variance 1 soit supérieur à une valeur fixée X est bien connue et est donnée par la fonction $Q(X)$ dans le schéma ci-dessous :



Notons aussi que : $\quad Q(X) = P[x \geq X] = P[x < -X]$



Afin de pouvoir utiliser la fonction $Q(X)$, il nous faut une variable aléatoire gaussienne, avec une moyenne nulle et une variance 1. Pour cela, on va diviser w_m par σ_w car w_m est une variable aléatoire gaussienne à moyenne nulle et variance σ_w^2, ce qui donne :

$$TES = \frac{1}{2}\, p\left(\underbrace{\frac{w_m}{\sigma_w}}_{\sim\mathcal{N}(0,1)} \geq \frac{Vg(t_0)}{\sigma_w}\right) + \frac{1}{2}\, p\left(\underbrace{\frac{w_m}{\sigma_w}}_{\sim\mathcal{N}(0,1)} < \frac{-Vg(t_0)}{\sigma_w}\right)$$

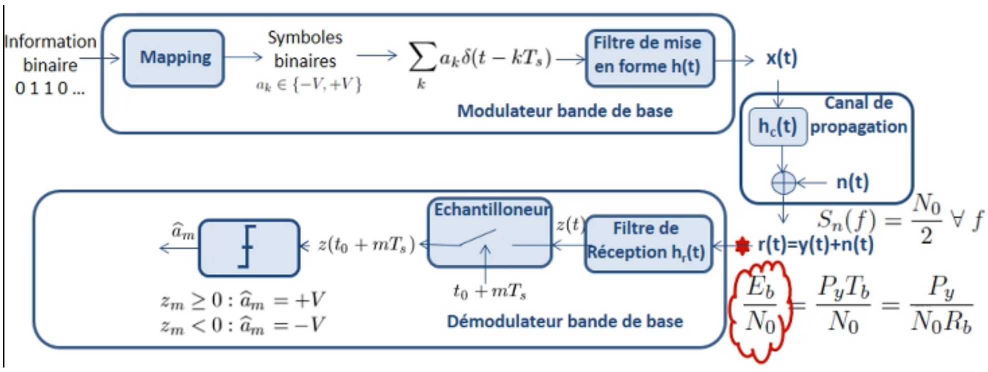
$$\Longrightarrow \qquad \boxed{TES = Q\left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma_w}\right)}$$

Le problème de cette expression est qu'elle dépend de la conception de la chaîne de transmission, puisque g est composé de tous les filtres de la chaîne, et que σ_w dépend du filtre de réception [1].

Pour pouvoir comparer plusieurs chaînes de transmission en terme de TES, il va **falloir écrire ce dernier en fonction d'une référence commune appelée** $\frac{E_b}{N_0}$, elle représente **le rapport SNR par bit calculée à l'entrée du récepteur,** avec :

— E_b : l'énergie d'un bit à l'entrée du récepteur, elle va être donnée par la puissance de la partie signal du signal reçu, P_y ici, multipliée par la durée du bit notée T_b.
— N_0 : est liée au bruit introduit par le canal de propagation, qui est blanc avec une densité spectrale de puissance égale à $\frac{N_0}{2}$ pour toutes les fréquences.

On résume le tout encore une fois dans ce qui suit :



Pour obtenir P_y, on doit *intégrer* sa DSP. D'autre part, y va être donné par :

$$y(t) = \sum_k a_k h_e(t - kT_s) \qquad \text{avec} \qquad h_e(t) = h(t) * h_c(t)$$

À partir de là, pour des symboles **indépendants, équiprobables à moyenne nulle**, on obtient la DSP de y en conservant le premier terme dans l'expression générale de la DSP, et en l'adaptant pour le filtre H_e et les symboles a_k :

$$S_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{T_s}|H_e(f)|^2$$

1. Parce que σ_w^2 représente la puissance du bruit filtré.

On en déduit :

$$E_b = P_y T_b = \int_R S_y(f)\mathrm{d}f \times T_b = \frac{\sigma_a^2}{log_2(M)} \int_R |H_e(f)|^2 \mathrm{d}f$$

Comme $M = 2$ et $\sigma_a^2 = V^2$, l'égalité devient :

$$\boxed{E_b = V^2 \int_R |H_e(f)|^2 \mathrm{d}f}$$

Jusqu'à présent, ona juste fait l'hypothèse que le critère de Nyquist est vérifié par notre chaîne de transmission. Si on ajoute l'hypothèse que **le filtre de réception h_r est un filtre adapté** [1], alors :

$$G(f) = H(f)H_c(f)H_r(f) = H_e(f)H_r(f) = |H_e(f)|^2 e^{-j2\pi f t_0} = |H_r(f)|^2 e^{-j2\pi f t_0}$$

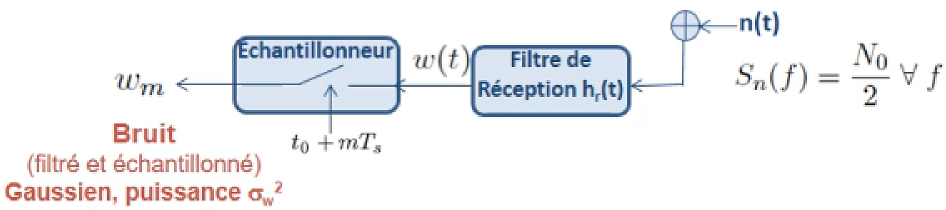
Si h_r est le filtre adapté

(en prenant λ=1 pour simplifier)

$$H_r(f) = H_e^*(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{E_b = V^2 \int_R G(f) \exp{(j2\pi f t_0)}\mathrm{d}f = V^2 g(t_0)}$$

On considère maintenant la partie **bruit** :



$$\sigma_w^2 = \int_R S_w(f)df = \frac{N_0}{2} \int_R |H_r(f)|^2 \, df$$

Pour obtenir la puissance du bruit filtré σ_w^2, on doit intégrer sa DSP, et cette DSP est obtenue à partir de celle du bruit dans le canal de propagation $N_0/2$ en utilisant *la relation de Wiener Lee* :

$$S_w(f) = S_n(f)|H_r(f)|^2$$

Si, comme précédemment, on considère **le filtre de réception h_r comme un filtre adapté** [2], en prenant $\lambda = 1$ por simplifier, alors :

$$\sigma_w^2 = \frac{N_0}{2} \int_R G(f) \exp{(j2\pi f t_0)}\mathrm{d}f = \frac{N_0}{2} g(t_0)$$

1. Sinon, on devrait faire le calcul direct de l'intégrale.
2. Sinon, encore une fois, il faudrait faire le calcul direct du module de $H_r(f)$ au carré, qui n'est plus égal à $g(t_0)$.

Conséquence :

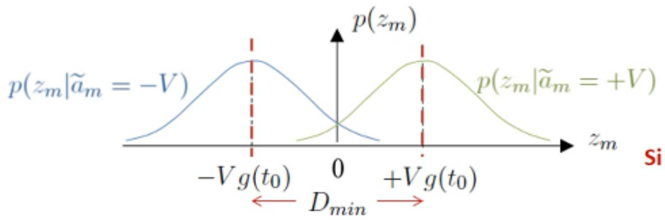
$$\boxed{TES = Q\left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma_w}\right)}$$ **Si le critère de Nyquist est vérifié**

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_w^2 = \dfrac{N_0}{2}g(t_0) \\ E_b = V^2 g(t_0) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{TES = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)}$$

Si critère de Nyquist vérifié
ET
Filtrage adapté en réception

=> Valeur minimum pour le TES d'une modulation de type 2-PAM
Avec des symboles binaires à moyenne nulle, indépendants et équiprobables

Remarque : Quand le critère de Nyquist est vérifié, le TES peut aussi s'écrire en fonction de **la distance minimale entre les symboles reçus, après échantillonage aux instants optimaux.** Dans l'exemple ci-dessous, cette distance va être $D_{\min} = 2Vg(t_0)$:

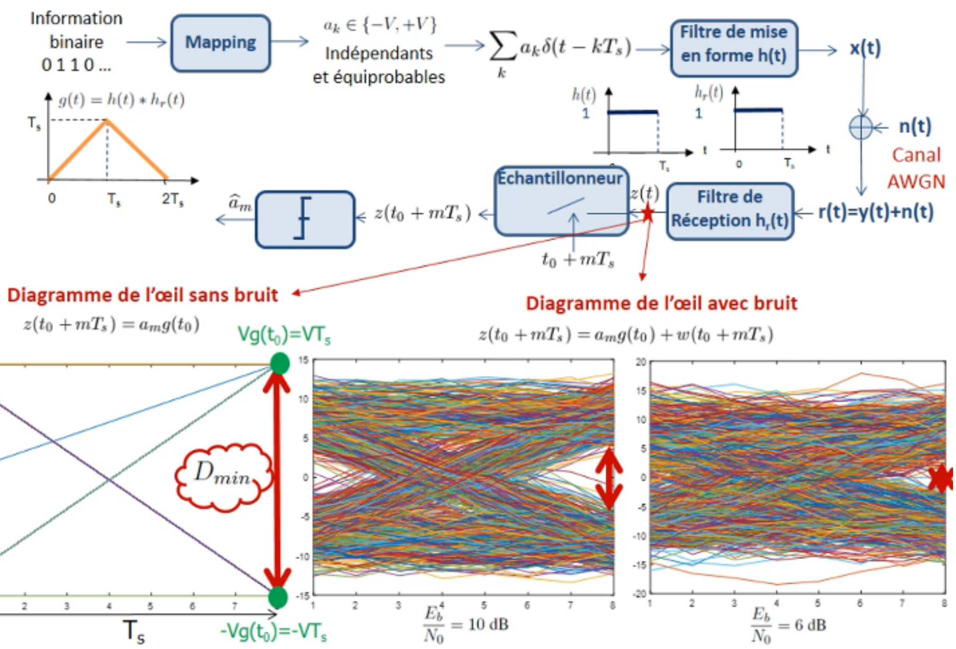


$$\boxed{TES = Q\left(\frac{D_{min}}{2\sigma_w}\right)}$$

Si le critère de Nyquist est vérifié

Cette distance minimale va en effet donner **la robustesse vis-à-vis du bruit** : $D_{\min}$ est représenté par *l'ouverture verticale de l'oeil* lorsqu'on trace un **diagramme de l'oeil sans bruit** en sortie du filtre de réception, et elle est donnée aux instants d'échantillonage optimaux.

On a ici l'exemple classique avec deux filtres rectangulaires de même durée T_s pour l'émetteur et le récepteur, et un canal AWGN :



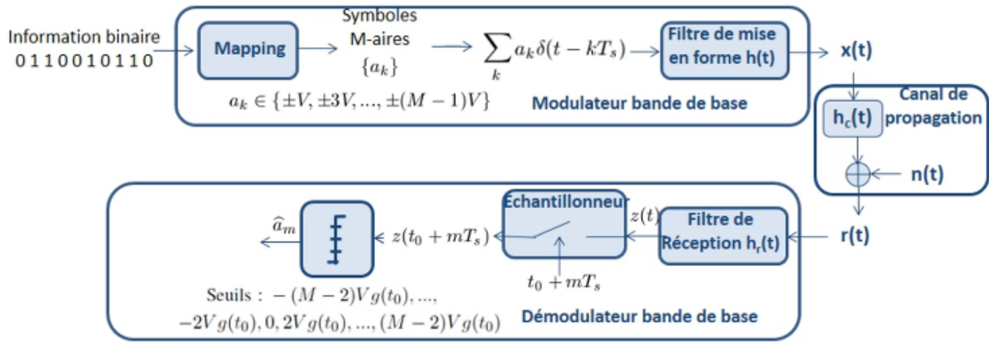
— À gauche est représenté le diagramme de l'oeil **sans bruit** : ici $D_{\min} = 2Vg(t_0) = 2VT_s$ puisque $g(t_0) = T_s$ si on échantillone aux instants optimaux $T_s + mT_s$.

— À droite est représenté le diagramme de l'oeil **avec bruit** : ici on peut constater que la distance entre les échantillons reçus est réduite, et ce d'autant plus que le SNR diminue $D_{\min}$.

Conclusion : Plus $D_{\min}$ sans bruit sera grande, plus la robustesse au bruit sera élevée dans la chaîne de transmission.

3.2 Généralisation au cas M-aire (modulation M-PAM)

Voici la généralisation du calcul de TES pour une modulation bande de base avec des symboles M-aire. Là aussi, les symboles sont considérés **indépendants, équiprobables et à moyenne nulle :**

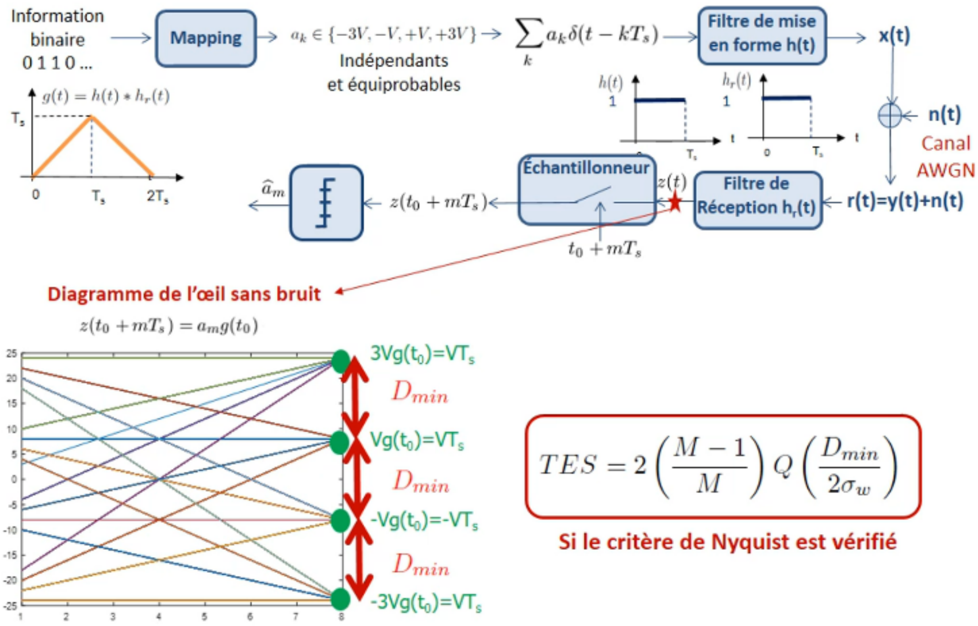


$$\boxed{TES = \underbrace{2\left(\frac{M-1}{M}\right)Q\left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma_w}\right)}_{\text{Si critère de Nyquist vérifié}} = \underbrace{2\left(\frac{M-1}{M}\right)Q\left(\sqrt{\frac{6log_2(M)}{M^2-1}\frac{E_b}{N_0}}\right)}_{\text{Si critère de Nyquist vérifié ET Filtrage adapté en réception}}}$$

$\Rightarrow$ Valeur Minimum du TES pour une modulation M-PAM
Avec des symboles M-aires, de moyenne nulle, indépendants et équiprobables

3.3 Exemple dans le cas 4-aire (modulation 4-PAM)

Comme précédemment dans le cas binaire, le TES peut également être écrit en fonction de $D_{\min}$:



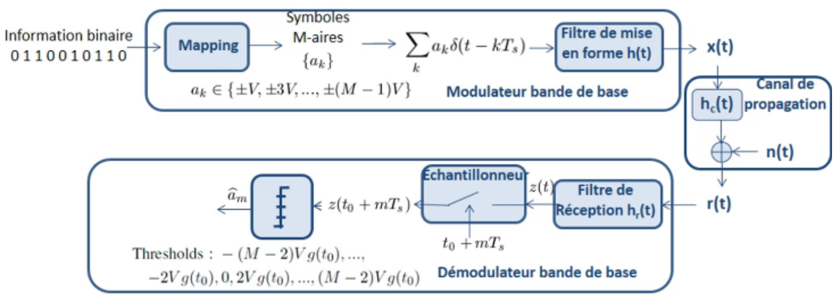
Pour conclure la conception du démodulateur bande de base, il reste plus qu'à mettre en place le *démapping*, et on peut ensuite **calculer le TEB.**

4 Taux d'Erreur Binaire (TEB)

Le dernier élément à ajouter pour terminer la conception du démodulateur bande de base est le **démapping**. On pourra ensuite comparer des informations binaires **récupérées** avec celles **transmises** pour **calculer le TEB**.

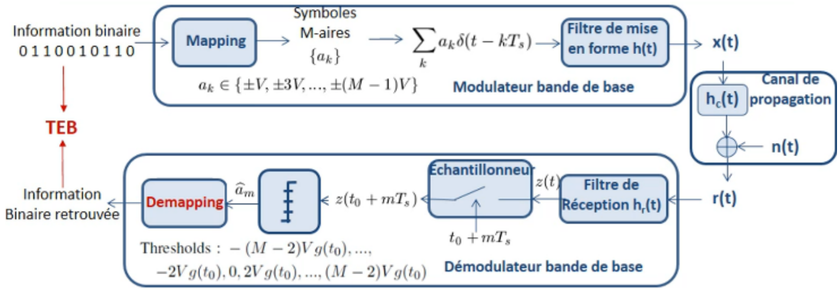
4.1 Modulation M-PAM

Voici le modulateur bande de base et le démodulateur bande de base jusqu'au bloc *décisions*. À ce stade, on a calculé précédemment le **TES** :



$$TES = 2\left(\frac{M-1}{M}\right) Q\left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma_w}\right) = 2\left(\frac{M-1}{M}\right) Q\left(\sqrt{\frac{6\log_2(M)}{M^2-1}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

On va maintenant ajouter le **démapping** afin de **pouvoir calculer le TEB**.



Le mapping peut se faire de différentes manières, voici un exemple pour générer des symboles 4-aire (M=4) avec :

— à gauche : les groupes de deux bits sont codés en utilisant le **codage bianire Naturel**.

— à droite : les groupes de deux bits sont codés en utilisant le **codage de Gray**.

Mapping en binaire « Naturel »

Bits	Symboles
00	-3V
01	-V
10	+V
11	+3V

Mapping de « Gray »

Bits	Symboles
00	-3V
01	-V
11	+V
10	+3V

Si on regarde les échantillons reçus **sans bruit**, on peut noter que, pour le mapping de **Gray**, un seul bit change entre deux symboles situés à distance minimale, ce qui n'est pas le cas pour le mapping binaire **Naturel**.

Mapping en binaire « Naturel »

Bits	Symboles	z_m sans bruit
00	-3V	-3Vg(t_0)
01	-V	-Vg(t_0)
10	+V	+Vg(t_0)
11	+3V	+3Vg(t_0)

D_{min} D_{min} D_{min}

Mapping de « Gray »

Bits	Symboles	z_m sans bruit
00	-3V	-3Vg(t_0)
01	-V	-Vg(t_0)
11	+V	+Vg(t_0)
10	+3V	+3Vg(t_0)

D_{min} D_{min} D_{min}

Il est intéressant d'avoir **un seul bit qui change entre deux symboles à distance minimale**, car, pour un symbole **transmis** de données, lorsqu'on commet une erreur, la plupart du temps, on le confond avec un symbole situé à distance minimale. On a ci-dessous, pour un exemple donné, les probabilités d'erreur obtenues lorsque $-3V$ a été transmis. On constate que la probabilité de se tromper en décidant $-V$ est très élevée par rapport aux probabilités de se tromper en décidant $+V$ ou $+3V$, qui peuvent être négilgés.

Un exemple en 4-PAM avec V=1, N_0=10^{-3} V^2/Hz, R_b=1kbps :

$$P\left(\widehat{a}_k = -V / a_k = -3V\right) = Q(2) - Q(6) = 0.0228$$
$$P\left(\widehat{a}_k = +V / a_k = -3V\right) = Q(6) - Q(10) = 9.87\ 10^{-10}$$
$$P\left(\widehat{a}_k = +3V / a_k = -3V\right) = Q(10) = 7.62\ 10^{-24}$$

Ainsi, en utilisant un mapping de Gray, si on commet une erreur sur un symbole codant N-bits, on va commettre une erreur sur seulement 1 bit parmi N. C'est-à-dire qu'un symbole erroné conduira à un seul bit erroné, quelque soit le nombre de bits codés par symbole. Cela va donner un TEB qui est **à peu près égal au TES divisé par le nombre de bits codé dans un symbole** car on néglige les probabilités de commettre des erreurs entre des symboles qui ne sont pas à distance minimale.

Avec un mapping de Gray :

$$\text{TEB} = \frac{\text{Nombre de bits erronnés}}{\text{Nombre de bits transmis}} \approx \frac{\text{Nombre de bits erronés}}{\text{Nombre de symboles transmis x Nombre de bits par symbole}}$$
$$\approx \frac{\text{TES}}{\text{Nombre de bits par symbole}}$$

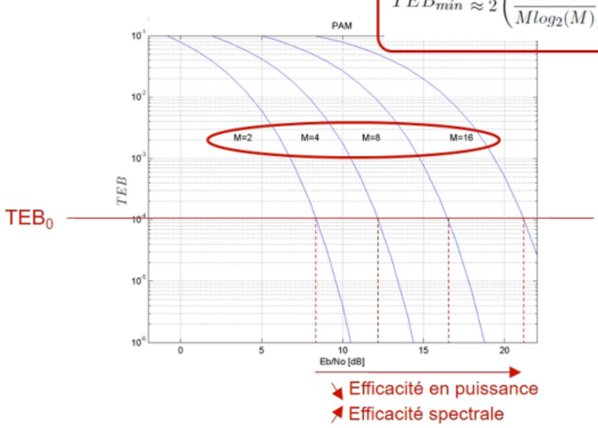
Mapping de GRAY ➡ $TEB \simeq \dfrac{TES}{log_2(M)}$

4.2 Comparaison de modulations M-PAM en terme d'efficacité en puissance

Est tracé le taux d'erreur minimum en fonction de $\dfrac{E_b}{N_0}$ pour les modulation M-PAM avec différents ordres M. Cela permet de **les comparer en terme d'efficacité en puissance.** Si on fixe un taux d'erreur binaire à atteindre pour la transmission, c'est pour nous permettre de savoir quel est le rapport SNR **minimum** nécessaire à la rentrée du récepteur. Par exemple, pour atteindre un TEB de 10^{-4}, il faudra environ 8 dB pour une modulation d'ordre 2, environ 12 dB pour une modulation d'ordre 4, environ 17 dB pour une modulation d'ordre 8 et environ 21 dB pour une modulation d'ordre 16.

TEBs pour des transmissions bande de base avec symboles M-aires (M-PAM) à moyenne nulle, indépendants et équiprobables, critère de Nyquist respecté, filtrage adapté et mapping de Gray

$$TEB_{min} \approx 2\left(\frac{M-1}{Mlog_2(M)}\right) Q\left(\sqrt{\frac{6log_2(M)}{M^2-1}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$



On constate que lorsque **M augmente**, **l'efficacité en puissance diminue**, car il faudra alors un SNR à l'entrée du récepteur **plus élevée**, donc **une puissance d'émission plus élevée** pour un bruit donné dans le canal pour atteindre le même TEB. Cela va donc coûter plus chère en terme de puissance d'émission, pour atteindre le même TEB.

Par contre, on a vu qu'en **augmentant l'ordre M de la modulation, on diminue la bande occupée pour un débit binaire à transmettre et un filtre de mise en forme donné**.

Augmenter M va donc diminuer **l'efficacité en puissance**, mais **augmenter l'efficacité spectrale**. Et bien souvent, **un compromis doit être trouvé entre les deux**.