Module optimisation non lisse pour le machine learning
Pas de document autorisé

Sujet d'examen sous-différentiel : 11 février 2020

Nom :

Prénom :

Problème : Sous-gradient d'un inf et d'une distance

Soit la fonction norme Euclidienne $\nu : \ x \mapsto \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ et $\mu : \ (x, y) \mapsto \|x - y\|_2$.

1. Calculer $\partial\nu(x)$ en $x \neq 0$. Même question en $x = 0$. Réponse :

2. Calculer, en utilisant la question 1., $\partial\mu(x, y)$ en $x \neq y$. Même question en $x = y$. Réponse :

3. Déduire de la question 2. que si (x', y', x, y) sont tels que $x \neq y$, on a

$$\mu(x', y') \geq \mu(x, y) + \frac{1}{\|x-y\|_2}(x-y)^T(x'-x) + \frac{1}{\|x-y\|_2}(y-x)^T(y'-y).$$

Réponse :

Supposons que C est un convexe fermé. On note $P_C(x)$ la projection de x sur C [on rappelle que $\forall y \in C, (x - P_C(x))^T(y - P_C(x)) \leq 0$]. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \inf_{y \in C} \|x - y\|_2$.

4. Soit $\hat{x} \notin C$. En appliquant la question 3. à $(x', y', \hat{x}, P_C(\hat{x}))$, montrer que $\frac{\hat{x} - P_C(\hat{x})}{\|\hat{x} - P_C(\hat{x})\|_2} \in \partial f(\hat{x})$. Réponse :

5. Soit $\hat{x} \in C$. Trouver un élément de $\partial f(\hat{x})$. Réponse :