Corrigé du TD 2

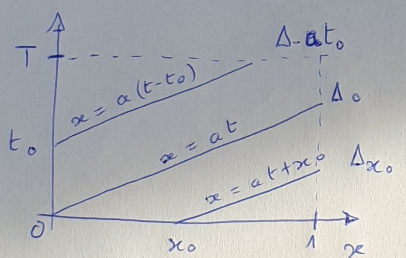
Exercice n°1

1) $$\frac{d\tilde{u}_\alpha(t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t}(t, x_\alpha(t)) + \frac{\partial u}{\partial x}(t, x_\alpha(t))\,\frac{dx_\alpha}{dt}(t)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t}(t, x_\alpha(t)) + a\,\frac{\partial u}{\partial x}(t, x_\alpha(t))$$

$$= 0 \quad \text{pour } u \text{ solution de l'edp.}$$

On en déduit que $\forall t \in [0,T]$, $\tilde{u}_\alpha(t) = \text{cste}$

2) 

$u(t, at+\alpha) = \text{cste}$ d'après la question 1)

Pour $\alpha \in [0,1]$, les droites (courbes caractéristiques de l'edp) balayent l'ensemble $E^+ = \{(t,x) \in [0,T]\times[0,1]$ tel que $x \geq at\}$ et pour $\alpha \in [-aT, 0]$ elles balayent l'ensemble $E^- = \{(t,x) \in [0,T]\times[0,1] \,/\, x \leq at\}$.

Pour calculer la solution du problème (1)-(2)-(3) il faut donc distinguer deux cas :

<u>1er cas</u> $x \geq at$ (càd $(t,x) \in E^+$).

Soit $x_0 = x - at$. Par construction $x_0 \in [0,1]$, et d'après 1) on a :

$$u(t,x) = u(t, x_0+at) = u(0,x_0) = u_0(x_0)$$

d'où $\boxed{u(t,x) = u_0(x-at)}$

<u>2ème cas</u> $x \leq at$ (càd $(t,x) \in E^-$)

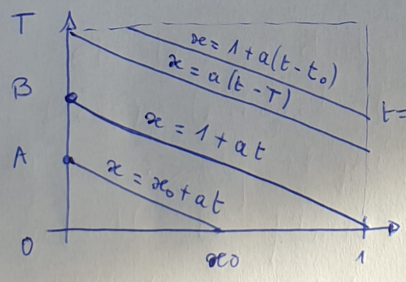
Soit $t_0 = t - \frac{x}{a}$. Par construction $t \in [0,T]$

D'après 1) on sait que

$$u(t,x) = u(t, a(t-t_0)) = \text{cste} = u(t_0, 0) = u_1(t_0)$$

d'où $\boxed{u(t,x) = u_1\left(t - \frac{x}{a}\right)}$

3) Si $a<0$, les courbes caractéristiques ont l'allure typique représentée sur le graphe ci-dessous :



Aux points A et B on a <u>deux conditions contradictoires</u> :

$u(A) = u_1(t_A)$

$u(B) = u_1(t_B)$

et $u(A) = u_0(x_0)$

$u(B) = u_0(1)$

$u(t,x)$ est constante sur les droites d'équation

$$x = at + \alpha$$

Pour tous les points (t,x) situés "au dessus" de la droite $x = a(t-T)$ (càd tels que $x > a(t-T)$), la solution est indéterminée → infinité de solutions possibles.

<u>Conclusion</u> si $a < 0$, le pb (1)-(2)-(3) est <u>mal posé</u>

4) Pour que la solution soit continue il faut et il suffit que

$$u_0(x-at) = u_1\left(t-\frac{x}{a}\right)$$

le long du segment de droite $x = at$, $t \in [0,T]$.

Une CNS est donc : $\boxed{u_0(0) = u_1(0)}$

Pour que la solution soit $\mathcal{C}^1$, il faut aussi avoir continuité de $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial u}{\partial x}$ sur la droite $x = at$ pour tout $t \in [0,T]$.

pour $x \geq at$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = -a\,u_0'(x-at)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = u_0'(x-at)$$

pour $x \leq at$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = u_1'\left(t-\frac{x}{a}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = -\frac{1}{a}u_1'\left(t-\frac{x}{a}\right)$$

Une CNS pour que u soit $\mathcal{C}^1$ est donc :

$$\begin{cases} -a\,u_0'(0) = u_1'(0) \\ u_0'(0) = -\frac{1}{a}u_1'(0) \end{cases} \quad \text{et} \quad u_0(0) = u_1(0)$$

càd $\boxed{u_1'(0) = a\,u_0'(0)}$ et $\boxed{u_0(0) = u_1(0)}$

Exercice n°2

$$(S) \iff \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(u+v) + a\frac{\partial}{\partial x}(u+v) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(u-v) - a\frac{\partial}{\partial x}(u-v) = 0 \end{cases}$$

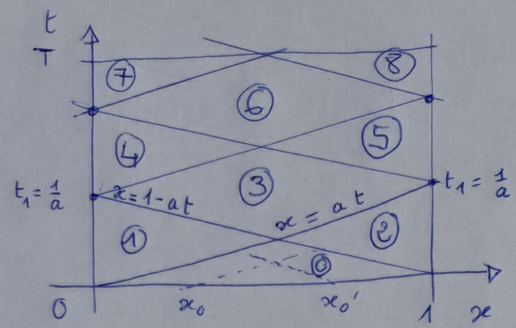
d'où $$\boxed{(S')\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + a\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial t} - a\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \end{cases}}$$

$$\begin{cases} w = u+v \\ z = u-v \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} u = \frac{1}{2}(w+z) \\ v = \frac{1}{2}(w-z) \end{cases}}$$

Les CL pour (S') sont donc $$\boxed{\begin{cases} w(t,0) + z(t,0) = 2\,u_g(t) \\ w(t,1) - z(t,1) = 2\,v_d(t) \end{cases}}$$

Les CI pour (S') s'écrivent : $$\boxed{\begin{cases} w(0,x) = u_0(x) + v_0(x) \\ z(0,x) = u_0(x) - v_0(x) \end{cases}}$$

2) D'après l'exercice 1 on sait que w est constante sur les droites $\mathcal{C}^+_\alpha$ et que z est cste sur les droites $\mathcal{C}^-_\alpha$.



On peut décomposer l'ensemble $D = [0, T] \times [0, 1]$ en zones notée 0, 1, 2, 3, ...

La zone 0 est délimitée par les "courbes" $\mathcal{C}^+_0$ et $\mathcal{C}^-_1$ càd par $x = 1 - at$ et $x = at$. Dans cette zone tout point $M = (t, x)$ est à l'intersection d'une $\mathcal{C}^+_{x_0}$ et d'une $\mathcal{C}^-_{x_0'}$ passant par un point de l'axe $t = 0$ pour $x \in [0, 1]$.

Pour tout $M \in 0$, on a donc

$$(1) \begin{cases} w(t,x) = w_0(x_0) = w_0(\underbrace{x - at}_{\geq 0 \text{ et } \leq 1}) \\ z(t,x) = z_0(x_0) = z_0(\underbrace{x + at}_{\leq 1 \text{ et } \geq 0}) \end{cases}$$

w_0 et z_0 étant connus, on peut calculer w et z dans la zone 0

Dans la zone ①, tout point est situé à l'intersection d'une $\mathcal{C}_\alpha^+$ passant par un point de coordonnées $x=0$ et $t \in [0, \frac{1}{a}]$ et d'une $\mathcal{C}_\alpha^-$ issue d'un point de coordonnées $t=0$ et $x \in [0,1]$. On a donc

$$(2) \quad \boxed{\begin{cases} w(t,x) = w_g\left(t - \dfrac{x}{a}\right) \\ z(t,x) = z_0(x+at) \end{cases}}$$

Comme $w_g(t)$ n'est pas connu (on ne connaît que $u_g(t)$) il faut d'abord le calculer.

Soit $M_0 = (t,0)$ avec $t \in [0, \frac{1}{a}]$ un point situé sur la frontière gauche du domaine de calcul.

on a : $z(M_0) \overset{def}{=} z(t,0) = z_0(at)$

puisque z est cste le long de $\mathcal{C}_{at}^-$

et $u(M_0) = u_g(t)$

d'où le système $\begin{cases} u(M_0) = u_g(t) \\ u(M_0) - v(M_0) = z_0(at) \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} v(M_0) = u_g(t) - z_0(at) \\ u(M_0) = u_g(t) \end{cases}}$$

On en déduit que $w_g(t) = 2u_g(t) - z_0(at)$

c.à.d : $\boxed{w_g(t) = 2u_g(t) - u_0(at) + v_0(at)}$

une fois déterminé $w_g(t)$, on peut utiliser (2) pour calculer w et z dans la zone 1. u et v s'en déduisent immédiatement.

Dans la zone 2, tout point est situé à l'intersection d'une $\mathcal{C}^+_\alpha$ issue d'un point de coordonnées $x \in [0,1)$ et $t=0$ et d'une $\mathcal{C}^-_\alpha$ issue d'un point de coordonnées $x=0$ et $t \in [0, \frac{1}{a}]$.

On procède de même que pour la zone 1 si ce n'est que cette fois c'est $z_d(t)$ qu'il faut déterminer alors que seul $v_d(t)$ est connu.

On obtient :

$$\boxed{(3)\begin{cases} w(t,x) = w_0(x-at) \\ \\ z(t,x) = z_d\left(t - \frac{(1-x)}{a}\right) \end{cases}}$$

et pour M_0 un point de coordonnées $(t,1)$ avec $t \in [0,\frac{1}{a}]$

$$\begin{cases} v(M_0) = v_d(t) \\ \\ w(M_0) = u(M_0) + v(M_0) = w_0(1-at) \end{cases}$$

ce qui donne $u_d(t) = u_0(1-at) + v_0(1-at) - v_d(t)$

et $\boxed{z_d(t) = u_d(t) - v_d(t) = u_0(1-at) + v_0(1-at) - 2v_d(t)}$

Dans la zone 3, tout point est à l'intersection d'une C_α^+ et d'une C_α^- issues respectivement d'un point situé en $x=0$, $t \in [0, \frac{1}{a}]$ et en $x=1$, $t \in [0, \frac{1}{a}]$ où on connaît respectivement w et z. On peut donc facilement calculer w et z en tout point de cette zone et en déduire u et v.

On est ensuite ramené au cas précédent pour les zones suivantes, la condition "initiale" étant maintenant connue en $t = \frac{1}{a}$ et $x \in [0,1]$.

3) Non car dans la zone 1 le problème de de détermination de $w_g(t)$ serait sur-déterminé et celui la détermination de $z_d(t)$ dans la zone 2 serait sous-déterminé

4) Non car ces conditions aux limites seraient incompatibles (ou redondantes) avec la conservation de w, respectivement z, le long des courbes caractéristiques.