## MODULE OPTIMISATION NON LISSE POUR LE MACHINE LEARNING Pas de document autorisé

Sujet d'examen sous-différentiel : 11 février 2020

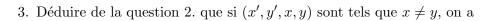
Nom:

Prénom:

## Problème : Sous-gradient d'un inf et d'une distance

Soit la fonction norme Euclidienne  $\nu: x \mapsto \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$  et  $\mu: (x,y) \mapsto \|x-y\|_2$ . 1. Calculer  $\partial \nu(x)$  en  $x \neq 0$ . Même question en x = 0. Réponse :

2. Calculer, en utilisant la question 1.,  $\partial \mu(x,y)$  en  $x\neq y.$  Même question en x=y. Réponse :



$$\mu(x', y') \ge \mu(x, y) + \frac{1}{\|x - y\|_2} (x - y)^T (x' - x) + \frac{1}{\|x - y\|_2} (y - x)^T (y' - y).$$

Réponse :

Supposons que C est un convexe fermé. On note  $P_C(x)$  la projection de x sur C [on rappelle que  $\forall y \in C, (x - P_C(x))^T (y - P_C(x)) \leq 0$ ]. Soit  $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \inf_{y \in C} \|x - y\|_2$ .

4. Soit  $\hat{x} \notin C$ . En appliquant la question 3. à  $(x', y', \hat{x}, P_C(\hat{x}))$ , montrer que  $\frac{\hat{x} - P_C(\hat{x})}{\|\hat{x} - P_C(\hat{x})\|_2} \in \partial f(\hat{x})$ . Réponse :

5. Soit  $\hat{x} \in C$ . Trouver un élément de  $\partial f(\hat{x})$ . Réponse :