



TD 3 – Quelques sous-problèmes de régions de confiance

- ▷ **Exercice 1.** Soient g un vecteur non nul de \mathbb{R}^n et c et δ deux constantes strictement positives. On considère le problème d'optimisation suivant

$$(P) \begin{cases} \min f(s) = g^\top s + c \\ \|s\|^2 \leq \delta. \end{cases}$$

1.1. Représenter l'ensemble des contraintes et donner graphiquement la solution.

1.2. Résoudre le problème (P) .

- ▷ **Exercice 2.** Le but de cet exercice est de démontrer le théorème

Théorème 1. s^* est solution du problème

$$(P^c) \begin{cases} \min q(s) = f + g^\top s + \frac{1}{2} s^\top H s \\ \|s\|^2 \leq \delta, \end{cases}$$

si et seulement si $\|s^*\|^2 \leq \delta$ et il existe $\mu^* \geq 0$ tel que

1. $(H + 2\mu^* I)s^* = -g$;
2. $\mu^*(\|s^*\|^2 - \delta) = 0$;
3. $H + 2\mu^* I$ est semi-définie positive.

2.1. Démontrer le lemme

Lemme 1. Soit q la forme quadratique $q(s) = g^\top s + \frac{1}{2} s^\top H s$, H symétrique, alors les assertions suivantes sont vraies :

1. q atteint un minimum si et seulement si H est semi-définie positive et $g \in \text{Im } H$ et dans ce cas tout point solution de $Hs = -g$ est un minimum global de q .
2. q a un unique minimum si et seulement si H est définie positive.

2.2. Démontrer le théorème.

- ▷ **Exercice 3.** On considère le problème d'optimisation

$$(P^{(k)}) \begin{cases} \min f(s) = \frac{1}{2} \|r(\beta^{(k)}) + J(\beta^{(k)})s\|^2 \\ \|s\|^2 \leq \delta^{(k)} \\ s \in \mathbb{R}^p, \end{cases}$$

où $J(\beta^{(k)})$ est une matrice (n, p) de rang p .

Démontrez que la solution de $(P^{(k)})$ s'écrit

$$s^{(k+1)} = -(J(\beta^{(k)})^\top J(\beta^{(k)}) + \mu^{(k+1)} I)^{-1} J(\beta^{(k)})^\top r(\beta^{(k)})$$

avec

$$\mu^{(k+1)} = \begin{cases} 0 & \text{si } \|s^{GN}\|^2 = \|(J(\beta^{(k)})^\top J(\beta^{(k)}))^{-1} J(\beta^{(k)})^\top r(\beta^{(k)})\|^2 \leq \delta^{(k)} \\ \mu^{(k+1)} > 0 & \text{unique tel que } \|s(\mu^{(k+1)})\|^2 = \delta^{(k)}. \end{cases}$$