

## Monotonie et limiteurs

*UF « Modélisation et calcul scientifique »*  
*Formation ModIA « Modélisation et Intelligence Artificielle »*

Nicolas Bertier (nicolas.bertier@onera.fr)

INSA, 4A

*Version du document : 1.3 (dernière modification le 19/01/2022)*

Sauf exceptions dûment mentionnées, le contenu de ce cours est sous licence **Creative Commons Attribution - Partage dans les Mêmes Conditions** 4.0 International .

Pour accéder à une copie de cette licence, merci de vous rendre à l'adresse suivante : <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

## Plan du cours

- Exemples de simulations numérique récentes en CFD
- Introduction aux méthodes de différences finies
- Le point sur l'intégration temporelle
- Analyse spectrale et équation équivalente
- **Monotonie et limiteurs**
- Introduction aux méthodes de volumes finis
- Vers la résolution des équations de Navier-Stokes

# Monotonie

## Définition de la monotonie pour un schéma numérique

Un schéma est dit **monotone** lorsqu'il ne crée **pas de nouveaux extrema**, autre que ceux déjà présents dans la condition initiale.

## Conséquence de la définition

Pour un schéma monotone, la solution évaluée à l'instant  $n + 1$  ne fait apparaître aucun nouvel extremum par rapport à la solution évaluée à l'instant  $n$ .

## Notations associées au stencil (ou signature) du schéma

- $S$  représente l'ensemble des variations par rapport à  $i$  des indices des points appartenant à la signature du schéma.
- $S^*$  représente l'ensemble des variations par rapport à  $i$  des indices des points appartenant à la signature du schéma, à l'exception de l'élément "0".

## Conséquences de la monotonie pour un schéma numérique

### Ecriture compacte d'un schéma discret

Pour un schéma explicite à un pas et une étape, on peut écrire :

$$u_i^{n+1} = \sum_{j \in \mathcal{S}} b_j u_{i+j}^n$$

### Implication de la consistance sur les coefficients du schéma

- Par définition d'un schéma consistant, une dérivée spatiale discrète doit être **nulle** lorsque la solution est **constante**.
- Afin d'assurer cette propriété, on doit nécessairement avoir :

$$\sum_{j \in \mathcal{S}} b_j = 1$$

## Conséquences de la monotonie pour un schéma numérique

### Théorème

Pour que la condition de **monotonie** d'un schéma de stencil  $\mathcal{S}$  soit satisfaite, tous les coefficients  $b_j, j \in \mathcal{S}$  doivent être **positifs ou nuls**.

### Corollaire

Un schéma à la fois **consistant** et **monotone** doit vérifier :

$$0 \leq b_j \leq 1, \forall j \in \mathcal{S}$$

- Cette condition traduit le fait que le nouvel état  $u_i^{n+1}$  est obtenu par une somme d'états obtenus à l'instant  $n$  pondérés par des coefficients positifs inférieurs à un.
- Si cette condition est vérifiée, il ne sera donc pas possible de faire apparaître à l'instant  $n + 1$  des extremas qui n'auraient pas été présents à l'instant  $n$  et, par récurrence, dans la condition initiale.

# Conséquences de la monotonie pour un schéma numérique

## Explicitation du lien entre coefficients $b_j$ et monotonie

La fait qu'un schéma explicite à un pas et une étape soit monotone ssi  $0 \leq b_j \leq 1, \forall j \in \mathcal{S}$  peut également s'illustrer en écrivant successivement :

$$\begin{aligned}
 \min(u_i^n) &\leq u_{i+j}^n &\leq \max(u_i^n) \\
 b_j \min(u_i^n) &\leq b_j u_{i+j}^n &\leq b_j \max(u_i^n) \\
 \sum_{j \in \mathcal{S}} b_j \min(u_i^n) &\leq \sum_{j \in \mathcal{S}} b_j u_{i+j}^n &\leq \sum_{j \in \mathcal{S}} b_j \max(u_i^n) \\
 \min(u_i^n) &\leq u_i^{n+1} &\leq \max(u_i^n)
 \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité traduit bien le fait que, si cette condition est vérifiée, le nouvel état  $u_i^{n+1}$  sera toujours compris dans l'intervalle des états de l'instant précédent, et, par récurrence, de la condition initiale.

## Conséquences de la monotonie pour un schéma numérique

### Autre illustration du lien entre coefficients $b_j$ et monotonie

Une autre manière d'illustrer le lien entre les conditions posées sur les coefficients  $b_j$  et la monotonie consiste à écrire successivement :

$$\begin{aligned}
 u_i^{n+1} &= \sum_{j \in \mathcal{S}} b_j u_{i+j}^n \\
 &= b_0 u_i^n + \sum_{j \in \mathcal{S}^\star} b_j u_{i+j}^n \\
 &= b_0 u_i^n + \sum_{j \in \mathcal{S}^\star} b_j (u_{i+j}^n - u_i^n) + \sum_{j \in \mathcal{S}^\star} b_j u_i^n \\
 &= \sum_{j \in \mathcal{S}^\star} b_j (u_{i+j}^n - u_i^n) + u_i^n \underbrace{\left( b_0 + \sum_{j \in \mathcal{S}^\star} b_j \right)}_1
 \end{aligned}$$



## Conséquences de la monotonie pour un schéma numérique

### Autre illustration du lien entre coefficients $b_j$ et monotonie

On vient de montrer qu'un schéma explicite à un pas et une étape consistant peut s'écrire :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \sum_{j \in \mathcal{S}^*} b_j (u_{i+j}^n - u_i^n)$$

Par conséquent :

- Si  $u_i^n$  est un **minimum local**, alors  $(u_{i+j}^n - u_i^n) \geq 0$ . Dans le cas où  $b_j \leq 1, \forall j \in \mathcal{S}$ , alors on a nécessairement  $u_i^{n+1} \geq u_i^n$  : ce **minimum local ne peut pas décroître** à l'itération  $n + 1$ .
- Si  $u_i^n$  est un **maximum local**, alors  $(u_{i+j}^n - u_i^n) \leq 0$ . Dans le cas où  $b_j \leq 1, \forall j \in \mathcal{S}$ , alors on a nécessairement  $u_i^{n+1} \leq u_i^n$  : ce **maximum local ne peut croître** à l'itération  $n + 1$ .

On montre encore une fois que vérifier la condition  $0 \leq b_j \leq 1, \forall j \in \mathcal{S}$  implique que le schéma soit **monotone**.

## Etude de la monotonie sur deux schémas types

### Schéma FOU-EE

Pour rappel, le schéma FOU-EE peut s'écrire :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \mathcal{C} (u_i^n - u_{i-1}^n)$$

- Première manière d'étudier la monotonie :

$$u_i^{n+1} = (1 - \mathcal{C})u_i^n + \mathcal{C}u_{i-1}^n$$

On montre donc que lorsque ce schéma est stable ( $\mathcal{C} \leq 1$ ), alors celui-ci est également **monotone**.

- Seconde manière d'étudier la monotonie :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \mathcal{C} (u_{i-1}^n - u_i^n)$$

On voit également que si le schéma est stable, alors il sera monotone.

## Etude de la monotonie sur deux schémas d'ordre deux

### Rappel du schéma de BW

On rappelle que le schéma de BW peut s'écrire :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\mathcal{C}}{2} (3u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n) + \frac{\mathcal{C}^2}{2} (u_i^n - 2u_{i-1}^n + u_{i-2}^n)$$

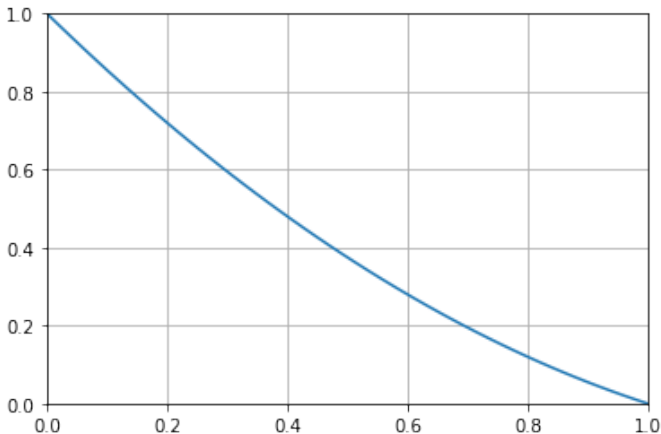
### Etude de la monotonie du schéma de BW

Ce schéma peut se reformuler en :

$$u_i^{n+1} = \left( \frac{\mathcal{C}^2}{2} - \frac{3\mathcal{C}}{2} + 1 \right) u_i + (2\mathcal{C} - \mathcal{C}^2) u_{i-1} + \frac{1}{2} (\mathcal{C}^2 - \mathcal{C}) u_{i-2}$$

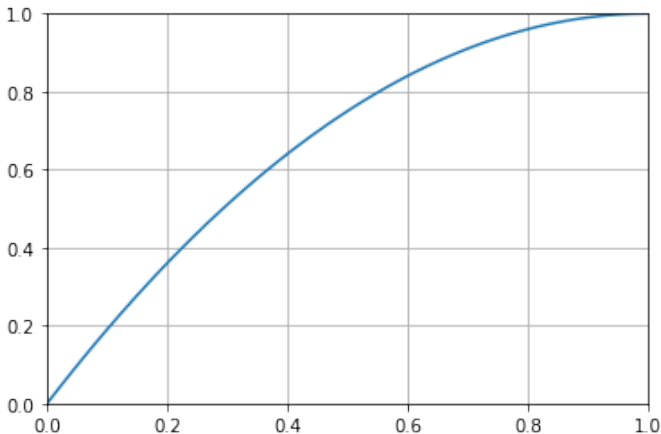
Tous les coefficients devant les états discrets  $u_i, i \in \mathcal{S}$  n'étant pas forcément compris entre 0 et 1, ce schéma n'est **pas monotone**.

## Evolution du terme $(2\mathcal{C} - \mathcal{C}^2)$ en fonction de $\mathcal{C}$



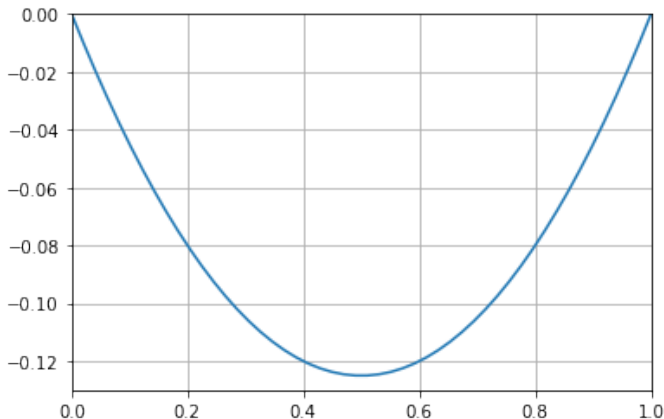
⇒ Ce coefficient répond au critère de monotonie sur la plage de stabilité du schéma

## Evolution du terme $(2\mathcal{C} - \mathcal{C}^2)$ en fonction de $\mathcal{C}$



⇒ Ce coefficient répond au critère de monotonie sur la plage de stabilité du schéma

## Evolution du terme $\frac{1}{2} (\mathcal{C}^2 - \mathcal{C})$ en fonction de $\mathcal{C}$



- ⇒ Ce coefficient **ne répond pas** au critère de monotonie sur la plage de stabilité du schéma
- ⇒ On vérifie ainsi que le schéma de BW n'est **pas monotone**

## Etude de la monotonie sur deux schémas d'ordre deux

### Rappel du schéma de LW

On rappelle que le schéma de LW peut s'écrire :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\mathcal{C}}{2} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{\mathcal{C}^2}{2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

### Etude de la monotonie du schéma de LW

Ce schéma peut se reformuler en :

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2} (\mathcal{C}^2 - \mathcal{C}) u_{i+1} + (1 - \mathcal{C}^2) u_i + \left( \frac{\mathcal{C}^2}{2} + \frac{\mathcal{C}}{2} \right) u_{i-1}$$

Tous les coefficients devant les états discrets  $u_i, i \in \mathcal{S}$  n'étant pas forcément compris entre 0 et 1, ce schéma n'est **pas monotone**.

- └ Détermination du caractère monotone d'un schéma à partir de l'analyse de ses coefficients
- └ Théorème de Godunov

## Théorème Godunov sur la monotonie

### Théorème de Godunov

Tous les schémas **monotones linéaires** pour l'équation d'advection ont nécessairement une précision en espace d'**ordre un**.

### Implications du théorème de Godunov

- Tous les schémas linéaires d'**ordre deux en espace** que l'on peut construire par DF pour l'équation d'advection seront **non-monotone**.
- Cela ne signifie pas pour autant que tous les schéma d'ordre un en espace sont monotone (mais on a montré au moins que le schéma décentré FOU l'était).
- Le théorème de Godunov suggère que des schémas **non-linéaires** pourraient potentiellement être **à la fois d'ordre supérieur à un en espace et monotones**.



## Etude de la monotonie du schéma semi-discret

### Ecriture générique du schéma semi-discret

Dans le cas d'un schéma dont la discrétisation spatiale et l'intégration temporelle peuvent être étudiées de manière séparée, on peut écrire :

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_{j \in \mathcal{S}} \beta_j u_{i+j}$$

### Conditions sur $\beta$

- Pour une solution constante en espace, sa variation temporelle doit être nulle  $\Rightarrow \sum_j \beta_j = 0$
- On peut montrer que pour qu'un schéma soit **monotone**, il doit vérifier  $\forall j \in \mathcal{S}, \beta_j \geq 0$

## Réécriture du schéma semi-discret

On peut écrire successivement :

$$\begin{aligned}\frac{du_i}{dt} &= \beta_0 u_i + \sum_{j \in S^\star} \beta_j u_{i+j} \\ &= \beta_0 u_i + \sum_{j \in S^\star} \beta_j (u_{i+j} - u_i) + \sum_{j \in S^\star} \beta_j u_i \\ &= \sum_{j \in S^\star} \beta_j (u_{i+j} - u_i) + u_i \underbrace{\left( \beta_0 + \sum_{j \in S^\star} \beta_j \right)}_0\end{aligned}$$

Soit :

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_{j \in S^\star} \beta_j (u_{i+j} - u_i)$$

## Comment rendre un schéma monotone

### Reformulation du schéma semi-discret SOC

On rappelle que le schéma semi-discret SOC peut s'écrire :

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{a}{2\Delta x} (u_{i+1} - u_{i-1})$$

Ce qui peut se réécrire sous la forme :

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{a}{2\Delta x} [(u_{i-1} - u_i) - (u_{i+1} - u_i)]$$

Le coefficient du second terme étant **négatif**, le schéma n'est donc **pas monotone**.

## Comment rendre un schéma monotone ?

### Exemple : le schéma semi-discret SOC

Afin de comprendre comment agir sur ce schéma afin de le rendre monotone, on peut le réécrire :

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{a}{2\Delta x} \left[ 1 - \frac{u_{i+1} - u_i}{u_{i-1} - u_i} \right] (u_{i-1} - u_i)$$

### Condition de monotonie pour le schéma

Pour que ce schéma soit monotone, il faudrait toujours vérifier que :

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{u_{i-1} - u_i} \leq 1$$

Méthodologie :

- Multiplication de ce terme par une **fonction non-linéaire de rapports de pentes** entre gradients successifs, notée  $\Psi$
- Si  $\Psi$  est bien choisi, le schéma **peut devenir monotone**.

## Limitations pour le schéma de BW

### Reformulation du schéma de BW

On rappelle que le schéma de BW peut s'écrire :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\mathcal{C}}{2} (3u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n) + \frac{\mathcal{C}^2}{2} (u_i^n - 2u_{i-1}^n + u_{i-2}^n)$$

Réécriture de ce schéma comme la somme du schéma FOU (monotone) et de gradients pouvant conduire à un comportement non-monotone :

$$\begin{aligned}
 u_i^{n+1} &= \underbrace{u_i^n - \mathcal{C} (u_i^n - u_{i-1}^n)}_{\text{FOU (monotone)}} \\
 &\quad - \underbrace{\frac{\mathcal{C}}{2} (1 - \mathcal{C}) (u_i^n - u_{i-1}^n) + \frac{\mathcal{C}}{2} (1 - \mathcal{C}) (u_{i-1}^n - u_{i-2}^n)}_{\text{Partie non monotone}}
 \end{aligned}$$

Il reste à déterminer les limitations nécessaires pour rendre l'ensemble du schéma monotone !

## Limitations pour le schéma de BW

### Conditions à appliquer aux limiteurs

Chaque gradient au point courant de la partie non-monotone est pondéré par une fonction de limitation  $\Psi$  dépendant du rapport entre :

- le gradient considéré (évalué en  $i$ )
- ce même gradient évalué en un point adjacent

On effectue donc les corrections suivantes :

$$u_i - u_{i-1} \Rightarrow \Psi(r_i) (u_i - u_{i-1}) \text{ avec } r_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{u_i - u_{i-1}}$$

$$u_{i-1} - u_{i-2} \Rightarrow \Psi(r_{i-1}) (u_{i-1} - u_{i-2}) \text{ avec } r_{i-1} = \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i-1} - u_{i-2}}$$

## Limitations pour le schéma de BW

### Ecriture du schéma de BW limité

Le schéma de BW limité s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 u_i^{n+1} = & \underbrace{u_i^n - \mathcal{C} (u_i^n - u_{i-1}^n)}_{\text{FOU (monotone)}} \\
 & \underbrace{- \frac{\mathcal{C}}{2} (1 - \mathcal{C}) \Psi(r_i) (u_i^n - u_{i-1}^n) + \frac{\mathcal{C}}{2} (1 - \mathcal{C}) \Psi(r_{i-1}) (u_{i-1}^n - u_{i-2}^n)}_{\text{Partie non monotone}}
 \end{aligned}$$

Il reste maintenant à déterminer **les expressions possibles pour le limiteur**  $\Psi$  permettant d'assurer la monotonie de ce schéma.

## Comment construire $\Psi$ pour assurer la monotonie de BW ?

Le schéma de BM limité peut se réécrire sous la forme :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \mathcal{C} \left\{ 1 + \frac{1}{2} (1 - \mathcal{C}) \left[ \Psi(r_i) - \frac{\Psi(r_{i-1})}{r_{i-1}} \right] \right\} (u_{i-1}^n - u_i^n)$$

Pour être monotone, ce schéma doit être tel que :

$$\mathcal{C} \left\{ 1 + \frac{1}{2} (1 - \mathcal{C}) \left[ \Psi(r_i) - \frac{\Psi(r_{i-1})}{r_{i-1}} \right] \right\} \geq 0$$

Ce qui implique la contrainte suivante pour le limiteur  $\Psi$  :

$$\frac{1}{2} (1 - \mathcal{C}) \left[ \Psi(r_i) - \frac{\Psi(r_{i-1})}{r_{i-1}} \right] \geq -1 \Rightarrow \Psi(r_i) - \frac{\Psi(r_{i-1})}{r_{i-1}} \geq -\frac{2}{1 - \mathcal{C}}$$

Soit finalement :

$$\frac{\Psi(r_{i-1})}{r_{i-1}} - \Psi(r_i) \leq \frac{2}{1 - \mathcal{C}}$$



## Limitations pour le schéma de LW

### Reformulation du schéma de LW

On rappelle que le schéma de LW peut s'écrire :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\mathcal{C}}{2} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{\mathcal{C}^2}{2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

Réécriture de ce schéma comme la somme d'une contribution monotone et de gradients pouvant conduire à un comportement non-monotone :

$$\begin{aligned}
 u_i^{n+1} &= \underbrace{u_i^n - \mathcal{C} (u_i^n - u_{i-1}^n)}_{\text{FOU (monotone)}} \\
 &\quad - \underbrace{\frac{\mathcal{C}}{2} (1 - \mathcal{C}) (u_{i+1}^n - u_i^n) + \frac{\mathcal{C}}{2} (1 - \mathcal{C}) (u_i^n - u_{i-1}^n)}_{\text{Partie non monotone}}
 \end{aligned}$$

## Limitations pour le schéma de LW

### Ecriture du schéma de LW limité

Le schéma de LW limité s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 u_i^{n+1} = & \underbrace{u_i^n - \mathcal{C} (u_i^n - u_{i-1}^n)}_{\text{FOU (monotone)}} \\
 & \underbrace{- \frac{\mathcal{C}}{2} (1 - \mathcal{C}) \Psi(R_i) (u_{i+1}^n - u_i^n) + \frac{\mathcal{C}}{2} (1 - \mathcal{C}) \Psi(R_{i-1}) (u_i^n - u_{i-1}^n)}_{\text{Partie non monotone}}
 \end{aligned}$$

avec :

$$R_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_i} = \frac{1}{r_i} \text{ et } R_{i-1} = \frac{u_{i-1} - u_{i-2}}{u_i - u_{i-1}} = \frac{1}{r_{i-1}}$$

## Comment construire $\Psi$ pour assurer la monotonie de LW ?

Le schéma de LW limité peut se réécrire sous la forme :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \mathcal{C} \left\{ 1 + \frac{1}{2} (1 - \mathcal{C}) \left[ \frac{\Psi(R_i)}{R_i} - \Psi(R_{i-1}) \right] \right\} (u_{i-1}^n - u_i^n)$$

Pour être monotone, ce schéma doit être tel que :

$$\mathcal{C} \left\{ 1 + \frac{1}{2} (1 - \mathcal{C}) \left[ \frac{\Psi(R_i)}{R_i} - \Psi(R_{i-1}) \right] \right\} \geq 0$$

Ce qui implique la contrainte suivante pour le limiteur  $\Psi$  :

$$\frac{1}{2} (1 - \mathcal{C}) \left[ \frac{\Psi(R_i)}{R_i} - \Psi(R_{i-1}) \right] \geq -1 \Rightarrow \frac{\Psi(R_i)}{R_i} - \Psi(R_{i-1}) \geq -\frac{2}{1 - \mathcal{C}}$$

Soit finalement :

$$\frac{\Psi(R_i)}{R_i} - \Psi(R_{i-1}) \leq \frac{2}{1 - \mathcal{C}}$$

# Propriétés générales des fonctions de limitations

## Principales propriétés

On pourra montrer (cf. cours VF) que, de manière générale, les fonctions de limitation non-linéaires ("limiteurs") doivent vérifier les inégalités :

$$0 \leq \Psi(r) \leq \min \left( \frac{2r}{c}, \frac{2}{1-c} \right)$$

Remarques :

- Pour  $\Psi(r) = 1$ , le schéma est non limité (et donc non monotone)
- Pour  $\Psi(r) = 0$ , le schéma se réduit au schéma FOU (monotone mais d'ordre un)

## Fonctions de limitations classiques

### Min-Mod

Limite inférieure du domaine TVD :

$$\Psi(r) = \begin{cases} \min(r, 1) & \text{si } r \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce limiteur est très dissipatif.

### Superbee

Limiteur, excellent pour les discontinuités mais très compressif (à tendance à "raidifier" fortement les solutions) :

$$\Psi(r) = \max[0, \min(2r, 1), \min(r, 2)]$$

## Fonctions de limitations classiques

### Van-Leer

Limiteur qui a été extrêmement utilisé, bon compromis, défini comme :

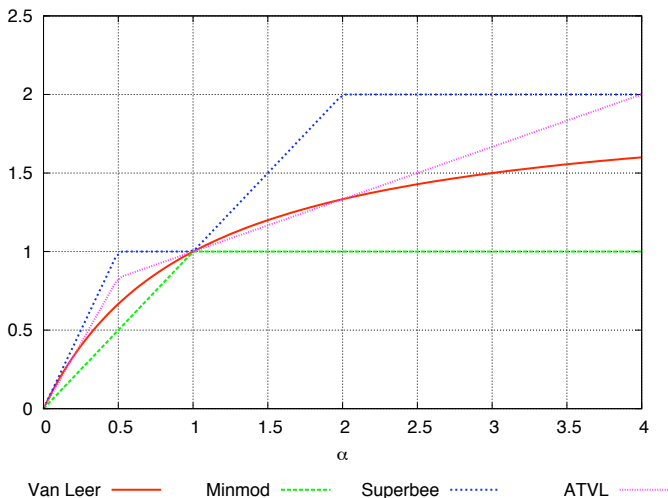
$$\Psi(r) = \frac{r + |r|}{1 + r}$$

### Van-Albada

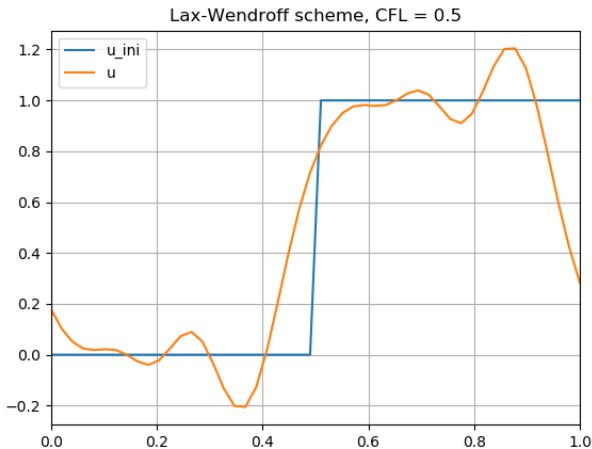
Comportement plus régulier que le limiteur de Van-Leer :

$$\Psi(r) = \frac{r^2 + r}{r^2 + 1}$$

## Evolution de limiteurs classiques en fonction de $r$

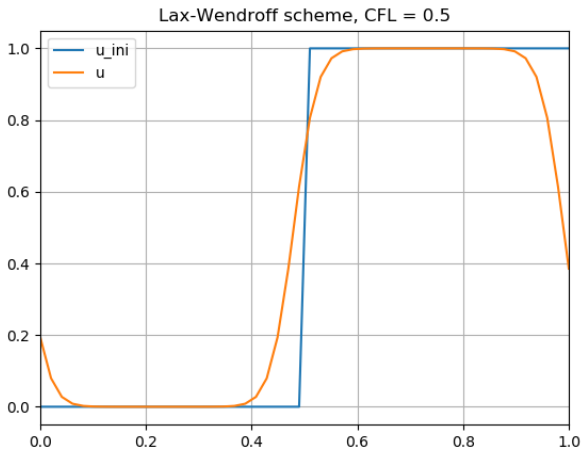


## Schéma LW sans limiteur (rappel)

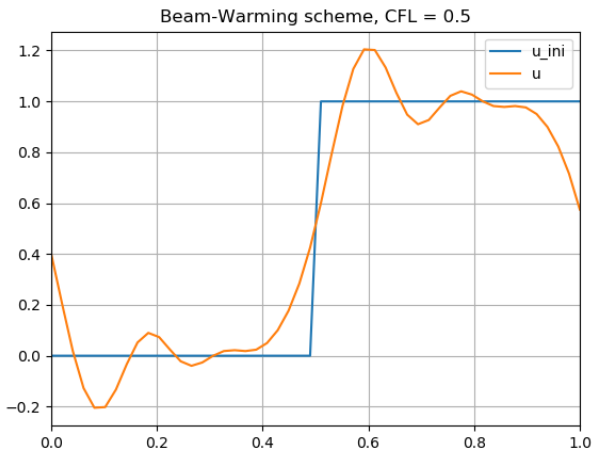




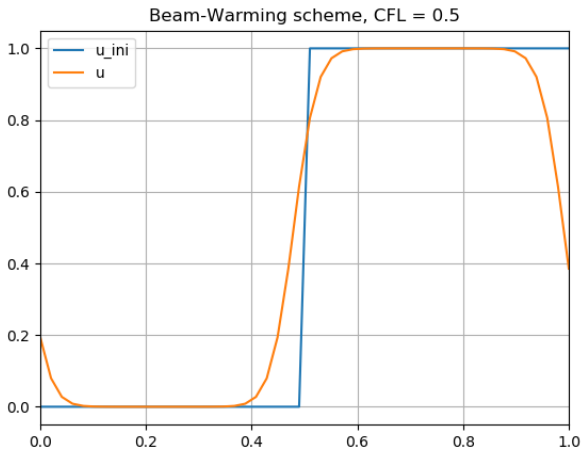
## Schéma LW avec limiteur de Van-Leer



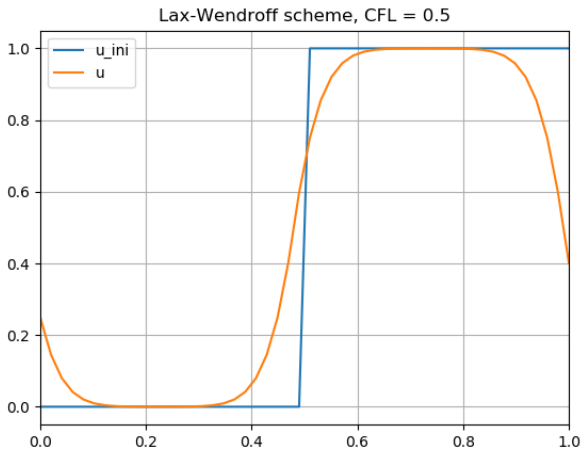
## Schéma BW sans limiteur (rappel)



## Schéma BW avec limiteur de Van-Leer



## Schéma LW avec limiteur Min-mod



## Schéma LW avec limiteur Superbee

