TD 4 – Dualité et Algorithmie

▷ **Exercice 1.** On s'intéresse ici à un cas simple des "Support Vector Machines". On considère dans $\mathbb{R}^n$ deux groupes de points $\mathcal{X}^1 = \{x^1_{1.}, \ldots, x^1_{n_1.}\}$ et $\mathcal{X}^2 = \{x^2_{1.}, \ldots, x^2_{n_2.}\}$ où $x^k_{i.} = (x^k_{i1}, \ldots, x^k_{in}) \in \mathbb{R}^n$. On suppose que ces deux groupes de points sont séparables par un hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$ (et non vides !). L'objectif est de trouver le "meilleur" hyperplan séparateur (cf. Figure 1). On désire donc trouver les hyperplans H_1 d'équation $\langle a\,,\,x\rangle = \alpha_1$ ($a \neq 0$) et H_2 d'équation $\langle a\,,\,x\rangle = \alpha_2$ tels que :

— Pour tout $x \in \mathcal{X}^1$, $\langle a\,,\,x\rangle - \alpha_1 \geq 0$;

— Pour tout $x \in \mathcal{X}^2$, $\langle a\,,\,x\rangle - \alpha_2 \leq 0$;

— $d(H_1, H_2) = |\alpha_1 - \alpha_2|/||a||$ soit maximal.

On peut toujours en fait écrire les deux premières conditions de la façon suivante :

— H_1 d'équation $\langle \omega\,,\,x\rangle + b - 1 = 0$ et pour tout $x \in \mathcal{X}^1$, $\langle \omega\,,\,x\rangle + b \geq 1$;

— H_2 d'équation $\langle \omega\,,\,x\rangle + b + 1 = 0$ et pour tout $x \in \mathcal{X}^2$, $\langle \omega\,,\,x\rangle + b \leq -1$.

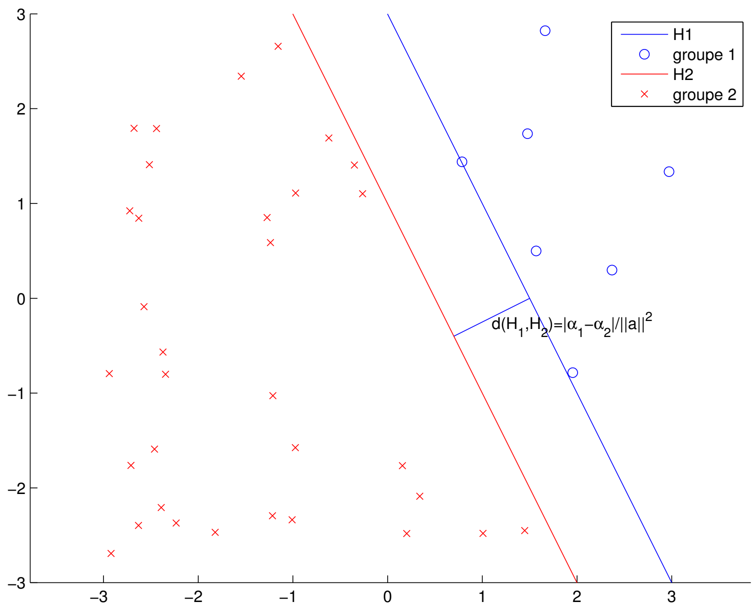

FIGURE 1 – *SMV pour* $n = 2$.

Le problème d'optimisation s'écrit alors

$$
(P)\left\{\begin{array}{l}
\text{Max}\frac{2}{||\omega||}\\
\langle \omega\,,\,x\rangle + b \geq 1, \forall x \in \mathcal{X}^1\\
\langle \omega\,,\,x\rangle + b \leq -1, \forall x \in \mathcal{X}^2\\
(\omega, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}
\end{array}\right.
\iff
(P')\left\{\begin{array}{l}
\text{Min}||\omega||^2\\
\langle \omega\,,\,x\rangle + b \geq 1, \forall x \in \mathcal{X}^1\\
\langle \omega\,,\,x\rangle + b \leq -1, \forall x \in \mathcal{X}^2\\
(\omega, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}
\end{array}\right.
$$

1.1. Montrer l'existence de solution.

1.2. Écrire le Lagrangien associé à ce problème

1.3. Donnez les conditions de (KKT) associés à ce problème. Ces conditions sont-elles ici des conditions nécessaires et suffisantes ?

On pose maintenant

$$D = \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_{11}^1 & \dots & x_{1n}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n_11}^1 & \dots & x_{n_1n}^1 \\ x_{11}^2 & \dots & x_{1n}^2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n_21}^2 & \dots & x_{n_2n}^2 \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix},$$

D est de dimension $(n_1 + n_2, n_1 + n_2)$. Le problème (P') s'écrit alors

$$(P'') \begin{cases} \text{Min}||\omega||^2 \\ DX\omega + bDe \leq -e \\ (\omega, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

1.4. Écrire le Lagrangien associé au problème (P'').

1.5. Écrire le problème dual du problème (P'')

▷ **Exercice 2.** Résolution par pénalisation.

Soit f une fonction continûment différentiable de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x) \geq \|x\|_2$. On s'intéresse aux problèmes d'optimisation

$$\mathcal{P} \ : \ \min_{\|x\|_2^2=1} f(x), \quad \text{et } \mathcal{P}_n \ : \ \min_{x\in\mathbb{R}^d} f(x) + n\left(\|x\|_2^2 - 1\right)^2,$$

où n est un entier naturel.

2.1. Justifier que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}$ admettent au moins une solution.

Dans toute la suite, nous supposerons que ces deux problèmes admettent une solution unique et nous noterons $x^\star$ et $x_n^\star$ les solutions respectives de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_n$.

2.2. On pose $\Phi_n(x) = f(x) + n\left(\|x\|_2^2 - 1\right)^2$.

1. Montrer que, si $\|x\|_2 \geq 2$, $\Phi_n(x) \geq 2 + 9n$.
2. Montrer qu'il existe $M \geq 0$ tel que, pour tout x tel que $\|x\|_2 = 1$, on a $\Phi_n(x) \leq M$.
3. En déduire que la suite $(x_n^\star)$ est bornée et que $(x_n^\star)$ admet une sous-suite convergente (y_n), dont la limite sera notée $y^\star$ dans la suite.

On notera $y_n = x_{\varphi(n)}^\star$, avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.

2.3. Soit $\gamma(x) = (\|x\|_2^2 - 1)^2$. Calculer $\nabla\gamma(x)$ et montrer que $\nabla f(y_n) + 4\varphi(n)(\|y_n\|_2^2 - 1)y_n = 0$. En déduire que y^* est tel que soit $\|y^\star\|_2 = 0$, soit $\|y^\star\|_2 = 1$.

2.4. Montrer que, si on suppose que $\|y^\star\|_2 = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} \Phi_n(y_n) = +\infty$. Déduire des résultats de la question (2) que l'on aboutit à une contradiction et donc que $\|y^\star\|_2 = 1$.

2.5. Déduire des questions précédentes que $\lim_{n\to+\infty} 4\varphi(n)(\|y_n\|_2^2 - 1)$ existe et qu'il existe β tel que $\nabla f(y^\star) + \beta y^\star = 0$.

2.6. Former le lagrangien associé au problème $\mathcal{P}$. Montrer alors que $y^\star$ vérifie la condition au premier ordre de Kuhn-Tucker-Lagrange et donner le multiplicateur de Lagrange associé.

2.7. Montrer que $y^\star = x^\star$. Expliquer pourquoi chercher à résoudre $\mathcal{P}$ en considérant $\mathcal{P}_n$ est appelé technique de pénalisation.