Opti Num 2A - TD 2

mardi 6 octobre 2020
09:57

▷ **Exercice 1.** Soit le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}\left((x_1-1)^2 + x_2^2\right) \\ x \in \mathbb{R}^2 \\ -x_1 + \beta x_2^2 = 0 \end{cases}$$

paramétré par β dans $\mathbb{R}$.

1.1. Représenter graphiquement la contrainte et les lignes de niveau associées au critère.

1.2. Déterminer la nature (minimum/maximum, local/global) des points critiques suivant la valeur de β.

▷ **Exercice 2.** Soit le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \min f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ x \in \mathbb{R}^3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

2.1. Montrer qu'on a existence et unicité.

2.2. Caractériser la solution.

2.3. Soient

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Montrer que $Az = b$ si et seulement si (x_1, x_2, x_3) est solution d'un problème d'optimisation quadratique à contraintes linéaires à préciser.

(blc 1×1) = diag > 0 et dominante strictement c'est une matrice déf-pos

A, C^T, C, O, $-g$, d

Le domaine $\mathcal{C}$ est l'intersection de deux hyperplans affines dans $\mathbb{R}^3$, non vide car $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$

c'est naturellement un fermé de $\mathbb{R}^3$, non borné, convexe.

$f(x) = \|x\|_2^2$ est bien évidemment croissante à l'∞ continue (et même $\mathcal{C}^\infty$, polynômiale).

On a donc l'existence d'un min global de f sur $\mathcal{C}(\neq \emptyset)$

Unicité : $\mathcal{C}$ étant convexe, étudions la hessienne de f.

$\forall x \in \mathcal{C}$, $\nabla^2 f(x) = 2 I_n$ déf. pos.

donc f est strictement convexe sur le convexe $\mathcal{C}$

$\left(\forall x \neq y \in \mathcal{C},\ \langle \nabla^2 f(x) \underbrace{(y-x)}_{\alpha \vec{u}}, \underbrace{y-x}_{\alpha \vec{u}} \rangle = \alpha^2 u^T [\nabla^2 f(x)] u > 0 \right)$

d'où l'unicité du min global.

2)

⓪ La qualification des contraintes est automatiquement acquise dans le cas de contraintes toutes affines.

① CN1, qui dans le cas convexe devient une CNS d'optimalité globale (sous HQC)

On pose le Lagrangien :

$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 (x_1 + 2x_2 - x_3 - 4) + \lambda_2 (x_1 - x_2 + x_3 + 2)$

$x \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}^2$

KKT $\mid \nabla \mathcal{L}(x, \lambda) = 0 \iff \Big(\quad 2x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla_\lambda \mathcal{L}(x,\lambda) = 0 \\ \quad (x \in C) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 &=& 0 \\ 2x_3 - \lambda_1 + \lambda_2 &=& 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &=& 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 &=& -2 \end{array}\right.$$

Système linéaire 5×5.

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \hline \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + g^T x \\ x \,/\, Cx = d \end{array}\right.$$

(système symétrique avec un bloc diagonal de 0)

$$\nabla_x \mathcal{L}(x,\lambda) = Ax + g + C^T\lambda = 0$$
$$\nabla_\lambda \mathcal{L}(x,\lambda) = Cx - d = 0$$

Ce système est appelé <u>système augmenté</u>.

Exo 3

mardi 6 octobre 2020
10:00

▷ **Exercice 3.** Soit le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}\|x-a\|^2 \\ x \in \mathbb{R}^n \\ \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = 0 \end{cases}$$

avec a fixé dans $\mathbb{R}^n$.

3.1. Montrer qu'on a existence et unicité.

3.2. Caractériser la solution.

Existence et unicité :

- $\mathcal{C} = \mathrm{Vect}\{e_n\}$ est un fermé convexe, non borné.
- $f(x) = \frac{1}{2}\|x-a\|_2^2$ est $\mathcal{C}^\infty$, $\nearrow$ à l'∞.
  - d'où l'existence
  - et pour l'unicité, $\nabla^2 f(x) = I_n$ définie positive.

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2} x^T x - a^T x + \frac{1}{2} a^T a \\ \nabla f(x) = x - a \\ \nabla^2 f(x) = I_n \end{cases}$$

- $\mathcal{L}(x, \lambda) = \frac{1}{2}\|x-a\|_2^2 + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \right)$

$x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$

ds le cas convexe, la CNS est une CNS.

KKT
$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ \vdots \\ 2x_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0$

et $x = a$. ⚠

HQC n'est pas valide !

en effet, $\forall x \in \mathcal{C}$, $\nabla c(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ \vdots \\ 2x_{n-1} \end{pmatrix}$ mais $x \in \mathcal{C} \Leftrightarrow$ $x_1 = 0$ ⋮

$C(x) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2$

$\begin{pmatrix} \vdots \\ 2x_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_{n-1} = 0$

$\Rightarrow \nabla C(x) = 0$

Changeons la formulation du PB.

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2} \|x - a\|_2^2 \\ x \in \mathbb{R}^n \,/\, \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_{n-1} = 0 \end{cases} \end{cases}$$

($n-1$ éq^{ns} linéaires)

- HQC automatiquement acquise ds le cas de contraintes affines.
- $\mathcal{L}(x, \lambda) = \frac{1}{2}\|x - a\|_2^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i$

$x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}^{n-1}$

KKT
CNS

$$\begin{cases} x_1 - a_1 + \lambda_1 = 0 \\ x_2 - a_2 + \lambda_2 = 0 \\ \vdots \\ x_{n-1} - a_{n-1} + \lambda_{n-1} = 0 \\ x_n - a_n = 0 \\ x_1 = x_2 \cdots = x_{n-1} = 0 \end{cases}$$

solu° : $x = a_n e_n$

et $\lambda_1 = a_1$
$\vdots$
$\lambda_{n-1} = a_{n-1}$

▷. **Exercice 4.** Soit le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \min f(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 6x_1x_2x_3 \\ x \in \mathbb{R}^3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

4.1. Le point $x = (1, 1, -1)$ est-il solution locale ? Globale ?

4.2. Donner l'ensemble des solutions locales, puis l'ensemble des solutions globales.

f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3$ (polynômiale)

$\mathcal{C} = \{ x \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 1 \}$ est un hyperplan affine

$\mathcal{C}$ est fermé, non borné, convexe.

$f(z,z,z) = 9z^2 + 6z^3 \xrightarrow[z \to +\infty]{} +\infty$, $\xrightarrow[z \to -\infty]{} -\infty$ donc pas de max global et pas de min global.

$\bar{x} = (1,1,-1) \in \mathcal{C}$.

La Qualification des contraintes est automatiquement acquise dans le cas de contraintes affines.

On regarde alors les CN1 / CN2 / CS2

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 6x_1x_2x_3 + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 1)$$

$x \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{KKT} : \begin{cases} 6x_1 + 6x_2x_3 + \lambda = 0 \\ 6x_2 + 6x_1x_3 + \lambda = 0 \\ 6x_3 + 6x_1x_2 + \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

effectivement, on vérifie que $\bar{x} = (1,1,-1)$, $\bar{\lambda} = 0$ est solution du système KKT.

$$\nabla^2_{xx} \mathcal{L}(x,\lambda) = \nabla^2 f(x) + \lambda \underbrace{\nabla^2 c(x)}_{}$$

(nul car $c(x)$ est affine)

$$= \begin{bmatrix} 6 & 6x_3 & 6x_2 \\ 6x_3 & 6 & 6x_1 \\ 6x_2 & 6x_1 & 6 \end{bmatrix}$$

et $\nabla^2_{xx} \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 6 \\ -6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$

les ddl ici correspondent aux vecteurs $h \in T(\bar{x}, \mathcal{C})$

Sous HQC : $Z(\bar{x}, \mathcal{C}) = Z_L(\bar{x}, \mathcal{C}) = \{ h \in \mathbb{R}^3 / \langle \nabla c(\bar{x}), h \rangle = 0 \}$

$= \left\{ h \in \mathbb{R}^3 \quad h \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$= \mathrm{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Regardons donc

$$H = V^T \nabla^2_{xx} \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}) V \qquad \text{avec } V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -6 & 6 \\ -6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24 & -12 \\ -12 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det = -(12)^2 < 0$$

donc elle est indéfinie.

· Cela invalide la CN2 de min local.

[même raisonnement pour le max local :
on minimise $-f(x)$, avec $c(x) = 0$]

$$\text{KKT} : \begin{cases} 6x_1 + 6x_2x_3 + \lambda = 0 \\ 6x_2 + 6x_1x_3 + \lambda = 0 \\ 6x_3 + 6x_1x_2 + \lambda = 0 \\ \underbrace{x_1 + x_2} + x_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

on a : $6x_1 - 6x_1x_3 = 6x_2 - 6x_2x_3 \iff 6x_1(1 - x_3) = 6x_2(1 - x_3)$

$\iff 6\underbrace{(x_1 - x_2)}(1 - x_3) = 0$

de même : $6(x_2 - x_3)(1 - x_1) = 0$

$6\underbrace{(x_1 - x_3)}\underbrace{(1 - x_2)} = 0$

$x_3 = 1$: $x_1 = -x_2$; $x_3 \neq 1$: $x_1 = x_2$ et $x_3 = 1 - 2x_1$.

- Soit $\boxed{x_2 = 1, \; x_1 = -1 \\ x_3 = 1 \quad \bar{\lambda} = 0}$ et $x_1 - x_3 = 3x_1 - 1 = 0$ ssi $\boxed{x_1 = +\frac{1}{3} = x_2 \\ x_3 = \frac{1}{3} \; ; \bar{\lambda} = -\frac{8}{3}}$

- Soit $\boxed{x_2 \neq 1 \; ; \; x_2 = -x_3 = -1 \\ \text{et } x_1 = 1 \quad \bar{\lambda} = 0}$ si $x_1 - x_3 \neq 0$ nec^t on doit avoir $\boxed{x_2 = 1 = x_1 \\ \text{et } x_3 = -1}$, $\bar{\lambda} = 0$

(déjà traité)

en $\bar{x} = (1/3, 1/3, 1/3)$, $\bar{\lambda} = -8/3$

$$\nabla^2 \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

diag > 0 et dominante stricte $(6 > 4)$

$\Rightarrow$ définie positive sur $\mathbb{R}^3$

donc a fortiori sur $T_L(\bar{x}, \mathcal{C})$

$\Rightarrow$ $(1/3, 1/3, 1/3)$ est un min local strict

Exo 5

mardi 6 octobre 2020

10:01

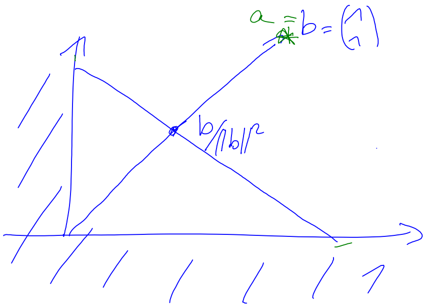
▷ **Exercice 5.** Soit le problème d'optimisation

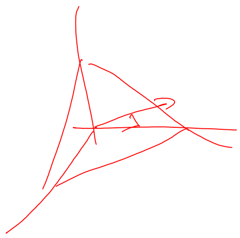
$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}\|x-a\|^2 \\ x \in \mathbb{R}^n \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

avec $a = (1, \ldots, 1)$.

5.1. Montrer qu'on a existence et unicité.

5.2. Caractériser la solution.





$\sum x_i = 1 \iff \langle b, x \rangle = 1$ avec $b = \begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}$

Hyperplan $\perp$ à b, qui passe $\frac{b}{\|b\|^2}$

. le domaine $\mathcal{C}$ est fermé borné dans $\mathbb{R}^n$.

en effet : $0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i$.

(le caractère fermé étant trivial)

$\mathcal{C} \neq \emptyset$ est compact dans $\mathbb{R}^n$, et f continue ($\mathcal{C}^\infty$)

sur $\mathcal{C}$ admet un min global

(et un max global aussi)

. Unicité. le domaine $\mathcal{C}$ $\cap$ du 1er quadrant positif et d'un Hyperplan affine est convexe dans $\mathbb{R}^n$

et $\forall x \in \mathcal{C}$ $\nabla^2 f(x) = I_n$ (déf pos)

d'où f strictement convexe sur le convexe $\mathcal{C}$.

et le min global est unique.

. HQC : toutes les contraintes étant affines. $\boxed{\text{HQC est automatiquement validée.}}$

. la CN1 sera alors une CNS de min global.

⚠ avec des contraintes d'inégalité. mettre en 1er le pb sous forme canonique.

| $\min \frac{1}{2} \|x - a\|_2^2$

$$\left[x \in \mathbb{R}^n \text{ tq } \begin{cases} \sum_{i=1} x_i - 1 = 0 \\ -x_1 \leq 0 \\ \vdots \\ -x_n \leq 0 \end{cases} \right.$$

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = \frac{1}{2}\|x-a\|_2^2 + \lambda(\langle b, x\rangle - 1) + \sum_{i=1}^n \mu_i(-x_i)$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\underline{\mu \in (\mathbb{R}^+)^n}$

KKT (CNS)
$$\begin{cases} x - a + \lambda b - \mu = 0 \\ \sum x_i = 1 \\ \quad x_i \geq 0 \quad \forall i \\ \mu_i \geq 0 \quad \forall i \\ \mu_i(-x_i) = 0 \quad \forall i \end{cases}$$

Ce pb n'a qu'une solution

1 seule configuration possible dans l'arbre des choix entre les contraintes saturées ou pas

si $a = b = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ on peut (c.f. le dessin)

faire l'hypothèse que $x_i > 0 \quad \forall i$, et $\mu_i = 0 \quad \forall i$

on trouve bien une solution avec $x_i = 1/n \quad \forall i$

$\mu_i = 0 \quad \forall i$

et $\lambda = 1 - 1/n$

Pour le pb du max de f sur $\mathcal{C}$ compact :

on écrit le Lagrangien après avoir mis le pb sous forme canonique :
$$\begin{cases} \min -f(x) \\ \quad x \,/\, -x_i \leq 0 \quad \forall i \\ \quad\quad \text{et } \sum x_i = 1 \end{cases}$$

(HQC tj ok)

KKT devient :
$$\begin{cases} -(x-a) + \lambda b - \mu = 0 \\ \sum b_i x_i = 1 \\ \quad x_i \geq 0 \quad \forall i \\ \text{et } \mu_i \geq 0 \ \forall i \ ; \ \mu_i(-x_i) = 0 \quad \forall i. \end{cases}$$

On n'a plus la garantie de l'unicité (car $-f$ n'est pas convexe sur le convexe $\mathcal{C}$.)

Ceci dit, il y a une (ou plusieurs) solutions au système KKT.

Par contre, si on regarde les CN2

on doit vérifier : $\langle \nabla^2_{xx} \mathcal{L}(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu}) h, h \rangle \geq 0 \quad \forall h \in \mathcal{C}_L(\bar{x}, \mathcal{C})$ (CN2)

Si on note $J(\bar{x}) = \{$ indices $i \in \{1 \dots n\}$, tq $-x_i = 0$ (contrainte saturée au pt $\bar{x}$) $\}$

$$\mathcal{C}_L(\bar{x}, \mathcal{C}) = \left\{ h \text{ tq } \begin{array}{l} h \perp (-e_i) \quad i \in J(\bar{x}) \\ \text{et } h \perp b \end{array} \right\}$$

Ici on est dans un cas très particulier car
$\nabla^2_{xx} \mathcal{L}(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu}) = -I_n$ définie négative sur $\mathbb{R}^n$

et pour que la CN2 puisse être validé (en $\bar{x}$ solution qui existe !)
il faut nécessairement que $\mathcal{C}_L(\bar{x}, \mathcal{C}) = \{0\}$
seule possibilité pour que $h^T(-I_n)h = -\|h\|^2 \geq 0$.
et il faut donc saturer tous les ddl au voisinage de $\bar{x}$
càd que on a au total $\underline{n \text{ contraintes d'égalité}}$
$\Rightarrow \quad \text{card}(J(\bar{x})) = n-1 \quad \oplus$ la contrainte $\sum b_i x_i = 1$

là on les solutions sont donc nécessairement sur un sommet du simplexe $\mathcal{C}$.
$$\left\{ \begin{array}{l} \sum b_i x_i = 1 \\ \forall j \neq k \quad x_j = 0 \\ \text{et } x_k = 1 \text{ pour un } k \text{ donné} \end{array} \right.$$

- Pour $a = b = \begin{pmatrix} 1 \\ | \\ 1 \end{pmatrix}$ – tous les sommets $\bar{x} = e_k \quad k = 1 \dots n$ sont solution du PB du max.

En effet, on cherche à résoudre : (par ex $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$)

$$-\left(e_1 - \begin{pmatrix} 1 \\ | \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ | \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_2 \\ | \\ \mu_n \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{array}{l} \mu_2 \geq 0 \\ | \\ \mu_n \geq 0 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} -1 + 1 + \lambda = 0 & \Rightarrow \lambda = 0 \\ 1 + \cancel{\lambda} - \mu_j = 0 & j = 2 \dots n \end{array} \right.$$
$$\mu_j = 1 \quad j = 2 \dots n$$