Module optimisation non lisse pour le machine learning
Pas de document autorisé

Sujet d'examen convexité : 31 janvier 2020

Nom :

Prénom :

Dans les réponses, on utilisera les notations suivantes : $\theta \in [0,1]$ et $x_\theta = \theta x + (1-\theta)y$.

Exercice 1 : Max-sup (10pt)

Pour $i \in \mathbb{N}$, on suppose que les fonctions $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont convexes sur $\mathbb{R}^n$.

1. Pour $p \in \mathbb{N}$, montrer que
$$\max_{0 \leq i \leq p} f_i(x)$$
est convexe sur $\mathbb{R}^n$. Réponse :

Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide et $\forall \alpha \in \mathcal{A}$, $f_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexes sur $\mathbb{R}^n$.

2. Montrer que
$$\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha(x)$$
est convexe sur $\mathbb{R}^n$. Réponse :

3. En déduire que la fonction définie sur les matrices symétriques, $A \mapsto \lambda_{\max(A)}$ est convexe. Réponse :

Exercice 2 : Fonction distance (10pt)

Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ une partie convexe non vide, et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(x, y)$ une fonction convexe sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, minorée inférieurement (i.e., $\exists m > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $f(x, y) > m$).

4. Montrer que
$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ y \mapsto \inf_{y \in C} f(x, y)$$
est convexe sur $\mathbb{R}^n$. Réponse :

5. Conséquence de 4. Supposons de plus C est fermée, et que $x \mapsto \|x\|$ est la norme Euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Montrer que
$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \min_{y \in C} \|x - y\|$$
est convexe sur $\mathbb{R}^n$. Réponse :