

TD 1 "Différences finies"

FORMATION MODIA, 4A

Toutes les notations utilisées sont celles du cours

Exercice 1 : schéma Leapfrog pour l'équation d'advection

Soit l'équation d'advection discrétisée à l'aide du schéma Leapfrog :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

- 1 Quels sont les ordres en espace et en temps de ce schéma ?
- 2 Étudiez la stabilité de ce schéma.
- 3 Quels sont, selon vous, les avantages et inconvénients de ce schéma ?

Exercice 2 : équation de diffusion discrète

Soit l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

- 1 Proposez un schéma DF centré pour la dérivée seconde en espace de u .
- 2 Utilisez le schéma d'intégration temporelle d'Euler explicite afin d'écrire un schéma discret (en espace et en temps).
- 3 Quelles sont les conditions de stabilité de ce schéma ?
- 4 Mettez en perspective les résultats obtenus par rapport à ce qui a été étudié en cours sur l'équation d'advection.

Exercice 3 : Schéma de Lax-Friedrichs pour l'équation de convection

Pour l'équation d'advection, le schéma DF centré associé à une intégration temporelle d'Euler explicite est inconditionnellement instable. Le schéma de Lax-Friedrichs constitue une manière de stabiliser ce schéma, en remplaçant l'évaluation de u_i par une moyenne des états u_{i-1} et u_{i+1} .

- 1 Montrez que ce schéma peut s'écrire :

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2} (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - \frac{c}{2} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$

- 2 Quelle est la précision en espace de ce schéma ?
- 3 Faire son analyse de stabilité.

Exercice 4 : Proposition d'un schéma DF pour une dérivée 3e en espace

Soit la dérivée 3e en espace de u , $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$. Proposez un schéma DF pour la discrétisation de cette dérivée.