

ENSEEIHT 2^{ème} année Sciences du Numérique
Contrôle de Théorie de Graphes - Mardi 10 décembre 2019 – 08h00 – Riadh DHAOU

(Aucun document n'est autorisé à part une feuille A4)

Durée : 1 heure 30 - Nombre de pages : 2 pages
Exercice 1 : Coloration de sommets d'un graphe

Q1) Sept émetteurs A,...G partagent un ensemble de canaux pendant la journée, à différentes périodes de temps. Une capture du trafic a montré que les émetteurs suivants sont actifs simultanément:

L'émetteur	A	B	C	D	E	F	G
Transmet en même temps que	D, E	D, E, F, G	E, G	A, B, E	A, B, C, D, F, G	B, E, G	B, C, E, F

De combien de canaux doivent-ils disposer afin de ne pas avoir de blocage pendant la journée ? Modéliser le problème sous forme de coloration de graphe et donner les bornes, inférieure et supérieure, du nombre chromatique ainsi qu'une coloration possible (Aucun détail sur l'algorithme utilisé pour l'obtention de cette coloration n'est demandé).

Q2) Donner le plus grand sous ensemble stable du graphe.

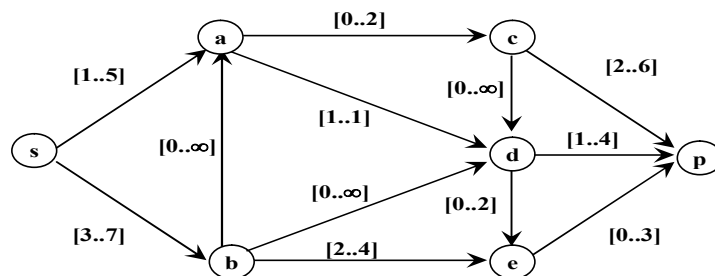
Q3) Donner la plus grande composante connexe du graphe.

Q4) Ce graphe est-il planaire ? Justifier.

Exercice 2 : Flot maximal, coupe minimale

Sur le graphe suivant, la capacité de chaque arc varie entre une valeur minimale (débit minimal garanti) et une valeur maximale (débit crête) notées [min..max].

Q1) Donner une coupe minimale du graphe suivant (Source : S, Puit : P) :



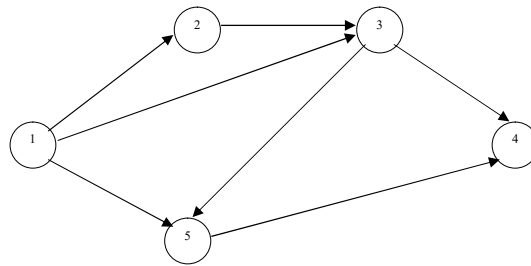
On identifiera deux coupes différentes : une coupe minimale pour le graphe à débit garanti et une deuxième coupe minimale pour le graphe à débit crête.

Q2) Donner un intervalle dans lequel la valeur de tout flot réalisable doit se trouver. Justifier votre réponse.

Q3) Déterminer le flot maximal garanti en appliquant l'algorithme de **Ford-Fulkerson**.

Exercice 3 : Fermeture transitive

On considère le graphe $G=(X, V)$ ci-dessous :



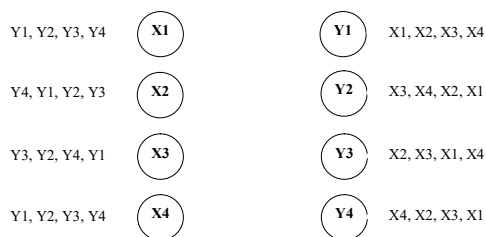
Q1) Soit $\tau(G)$ la fermeture transitive du graphe G . Etablir le graphe $\tau(G)$.

Q2) Donner la matrice A d'adjacence du graphe G . Soit la matrice d'adjacence A^* de $\tau(G)$. Quelle est la relation mathématique entre la matrice A^* et la matrice A ?

Q3) Donner une interprétation des coefficients de la matrice A^2 .

Exercice 4 : Mariages stables

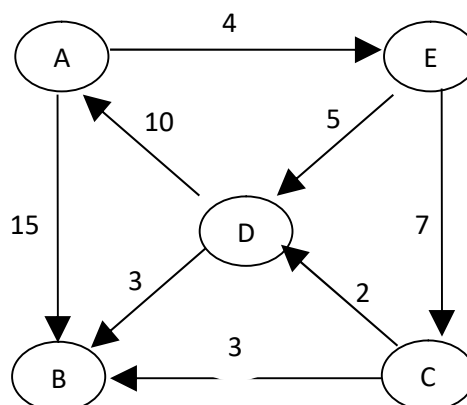
Trouver une affectation stable en utilisant l'algorithme de **Gale Shapley**. Les ordres de préférences pour les éléments des ensembles X et Y sont donnés sur le digraphe suivant.



Exercice 5 : Plus courts chemins et arbres couvrants

Utiliser **Dijkstra** pour obtenir tous les plus courts chemins en partant du sommet A

Q1) Donner l'arbre des plus courts chemins, en partant du sommet A , pour le graphe suivant :



Q2) Soit G' un graphe non orienté obtenu à partir du graphe G en remplaçant la valeur associée aux arcs orientés par le minimum entre les deux valeurs sur les deux sens.

Donner un arbre couvrant de poids minimal pour ce graphe G' et déterminer son poids.