

Séries de Fourier

I Séries de Fourier dans $L^2_{\text{per}}((0, 2\pi))$ (ou $L^2_{\text{per}}(-\pi, \pi)$)

Définition: on note $(e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$. On appelle cette famille base de Fourier

Proposition La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{\text{per}}(-\pi, \pi)$

Corollaire: $\forall f \in L^2_{\text{per}}(-\pi, \pi) \quad f = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (f, e_m) e_m = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$
 avec $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$ (coefficients de Fourier)

La preuve repose sur le lemme de Riemann-Lebesgue et le principe de localisation

A) Lemme (Riemann-Lebesgue) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx$

$$\textcircled{1} \quad \text{Si } f \in C_c^k(\mathbb{R}) \text{ et } f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R}) \quad |\hat{f}(\xi)| \leq \frac{\|f^{(k)}\|_{L^1}}{|\xi|^k}$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Si } f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ alors } \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{ix\xi} dx \xrightarrow[\mathbb{R} \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\textcircled{3} \quad \forall f \in L^1(-\pi, \pi) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

B) Principe de localisation Si $f \in L^1(-\pi, \pi)$ et $y \mapsto \frac{f(y) - f(x)}{|y-x|}$ est intégrable au voisinage de x alors $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f)(x) = f(x)$

$$S_N(f) = \sum_{|n| \leq N} c_n(f) e^{inx}.$$

Preuve $\textcircled{1}$ Si la proposition est montrée pour $f(0)=0$ ($x=0$).

Si g vérifie les hypothèses du théorème, $f(y) = g(x+y) - g(x)$

Alors $S_n(f)(0) \rightarrow f(0) = 0$

$$S_n(f)(0) = \sum_{k=-n}^n c_n(g(x+k)) - c_n(g(x)) = S_n(g)(x) - g(x)$$

$$\textcircled{2} \quad \text{On a } s_n(f)(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \frac{\sin((n+\frac{1}{2})y)}{\sin(\frac{y}{2})} dy$$

$$\text{On a } \left| \frac{f(y)}{\sin(\frac{y}{2})} \right| \leq \frac{\pi |f(y)|}{|y|} \quad \text{car } |\sin(\frac{y}{2})| \geq \left| \frac{y}{\pi} \right|$$

On conclut avec le lemme de Riemann Lebesgue.

Preuve (en base Hilbertienne) Il suffit de montrer que les polynômes trigonométriques $P_n(t) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{ikt}$ sont denses dans $L^2_{\text{per}}(-\pi, \pi)$

Si $f \in C_c^2$ alors $s_n(f) \rightarrow f$ (uniformément car $|c_n(f)| \leq \frac{\|f^{(2)}\|_\infty}{k^2}$) donc $s_n(f) \xrightarrow{L^2} f$. Or les fonctions C_c^∞ (et donc C_c^2) sont denses dans $L^2(-\pi, \pi)$ \square

L'égalité de Parseval s'applique donc

$$\forall f \in L^2_{\text{per}}(-\pi, \pi) : \frac{1}{2\pi} \|f\|_{L^2_{\text{per}}(-\pi, \pi)}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$$

II Convolution des fonctions périodiques

Définition Si $f \in L^1(-\pi, \pi)$ et $g \in L^1(-\pi, \pi)$, on les prolonge par périodicité et on pose $f * g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y) dy$. La fonction $f * g \in L^1(-\pi, \pi)$ et 2π -périodique

Théorème Si $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ alors $f * g$ est continue et $c_m(f * g) = 2\pi c_m(f)c_m(g)$. De plus la série de Fourier de $f * g$ converge uniformément vers $f * g$.

Preuve On a $|f * g(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y)| |g(y)| dy \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}$. Ainsi $f * g$ est bornée donc dans $L^2(-\pi, \pi)$. On calcule le m -ième coefficient de Fourier

$$\begin{aligned} c_m(f * g) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} f(x-y) g(y) dx dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} g(y) e^{-imy} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} f(x-y) e^{inx} dx \right) dy = 2\pi c_m(f)c_m(g) \end{aligned}$$

La série trigonométrique $\sum c_n(f \ast g) e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$ converge normalement donc uniformément donc $f \ast g$ est égale à sa série de Fourier. En effet, on a.

$$\begin{aligned} \sup_{x \in (-\pi, \pi)} |c_n(f \ast g) e^{inx}| &\leq 2\pi |c_n(f)| |c_n(g)| \\ &\leq \pi (|c_n(f)|^2 + |c_n(g)|^2) \end{aligned}$$

On en déduit au passage que $f \ast g$ est continue \square

Piq ① On remarque que le produit de convolution a un effet régularisant

Ex $g = 1$ alors $f \ast g = 1$

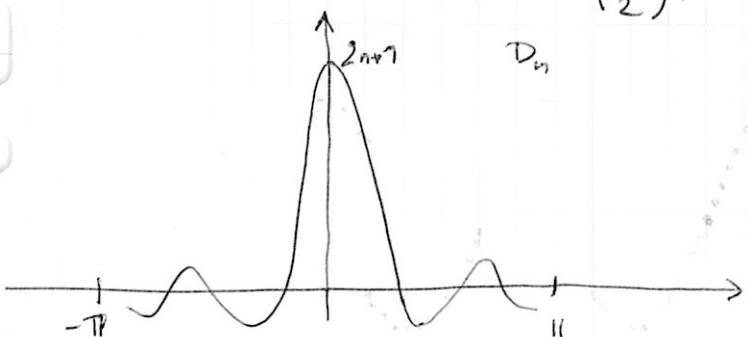
ii) La série de Fourier triangulaire d'une fonction f peut être écrite comme un produit de convolution

$$\begin{aligned} S_N(f)(n) &= \sum_{k=-N}^N c_m(f) e^{imk} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sum_{k=-N}^N e^{im(x-y)} dy \\ &= f \ast D_N(x) \quad \text{avec } D_N(y) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((N+\frac{1}{2})y)}{\sin(\frac{y}{2})} \end{aligned}$$

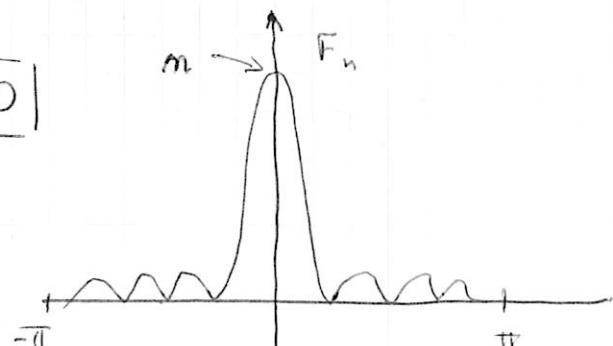
D_N est appelé "Noyau de Dirichlet"

La moyenne de Cesaro : $\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} S_k(f) = f \ast \left(\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} D_k \right) = f \ast F_m$

$$F_m(x) = \frac{1}{m} \left(\frac{\sin(\frac{mx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} \right)^2 \rightarrow \text{Noyau de Fejér.}$$



$$F_n \geq 0$$



III Autres bases de Fourier

1°) Bases en sinus, cosinus

Propriété 1) Les fonctions $\frac{1}{\sqrt{\pi}} ; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kt) ; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kt)$, $k=1,2,\dots$

forment une base Hilbertienne de $L^2_{\text{per}}(-\pi, \pi)$

2°) (Sans la périodicité) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} ; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kt)$ $k=1,2,\dots$ forment une base Hilbertienne de $L^2(0, \pi) \Rightarrow$ "transformée en cosinus"

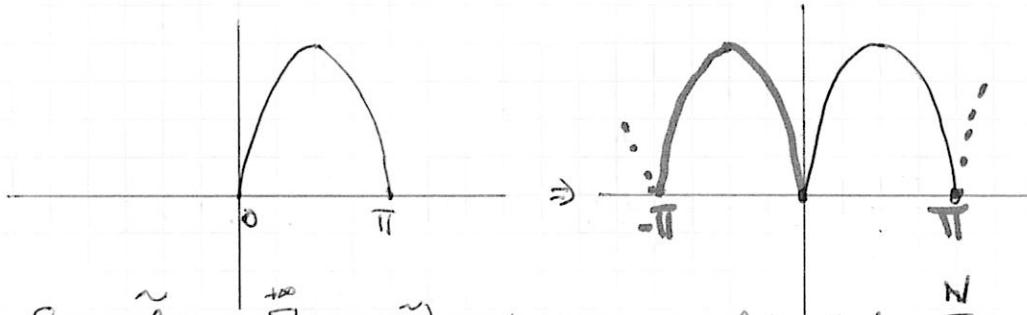
3°) (Sans la périodicité) $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kt)$ $k=1,2,\dots$ forment une base Hilbertienne de $L^2(0, \pi)$.

Preuve 1). $e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt$

2°) Si $f \in L^2(0, \pi)$, on la prolonge par parité (puisque on veut un développement en cosinus) sur $[-\pi, \pi]$ en posant

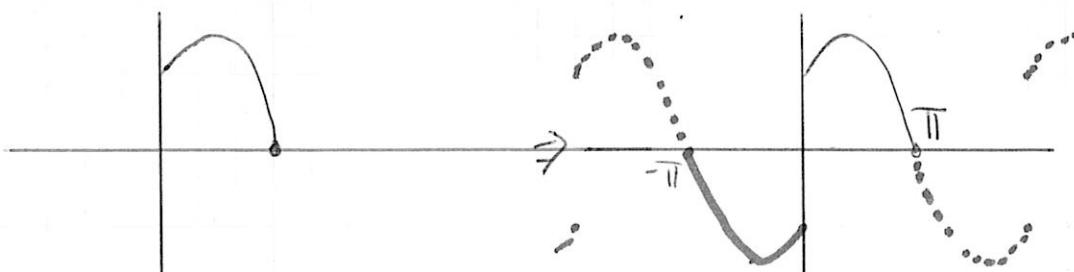
$$\tilde{f}(x) = f(x) \text{ si } x \in [0, \pi] \text{ et } \tilde{f}(x) = f(-x) \text{ si } x \in [-\pi, 0]$$

\tilde{f} est ensuite prolongée par périodicité \Rightarrow son développement en série de Fourier ne contient que des cosinus.



Si $\tilde{f}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(\tilde{f}) \cos(kt)$, on a $\lim_{N \rightarrow +\infty} \|f - \sum_{k=0}^N a_k(\tilde{f}) \cos(kt)\|_{L^2(0, \pi)} = 0$

3°) Si $f \in L^2(0, \pi)$, on prolonge par imparité



2°) Bases de Fourier en dimension 2

Théorème Les fonctions $e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2}$ pour $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$, $x = (x_1, x_2)$

forment une base hilbertienne de $L^2([0; 2\pi]^2)$ et pour tout $f \in L^2_{\text{per}}([0; 2\pi]^2)$, on a $\int f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} c_k(f) e^{ik \cdot x}$ (au sens L^2)

$$c_k(f) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ik \cdot x} dx$$

Preuve: elle repose sur les deux lemmes

Lemme 1: Les fonctions à variables séparées sont dans $L^2[0, 2\pi]^2$

$$\hookrightarrow (x_1, x_2) \mapsto f(x_1) g(x_2)$$

¶ des fonctions caractéristiques de pavés $1_{[a,b] \times [c,d]}(x,y) = 1_{[a,b]}(x) 1_{[c,d]}(y)$ sont à variables séparées. ¶

Lemme 2 $\begin{cases} u_k \rightarrow u & L^2(0, 2\pi) \\ v_\ell \rightarrow v & L^2(0, 2\pi) \end{cases} \Rightarrow u_k v_\ell \rightarrow uv \text{ dans } L^2$

$$\begin{aligned} \|u_k v_\ell - uv\|_{L^2(0, 2\pi)^2} &\leq \|u_k - u\|_{L^2} \|v_\ell\|_{L^2} + \|u(u - v_\ell)\|_{L^2} \\ &\leq \|u_k - u\|_{L^2(0, 2\pi)} \|v_\ell\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} \|u - v_\ell\|_{L^2} \end{aligned}$$

¶

Pour démontrer le théorème, il suffit de considérer les fonctions à variables séparées.

$$u(x) = \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} c_{k_1}(u) e^{ik_1 x_1} \quad v(y) = \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} c_{k_2}(v) e^{ik_2 y_2}$$

$$\text{Alors } (uv)_{M,N} = \sum_{k_1=-N}^N \sum_{k_2=-M}^M c_{k_1}(u) c_{k_2}(v) e^{i(k_1 x_1 + k_2 y_2)} \xrightarrow[L^2]{(M, N \rightarrow +\infty)} uv$$

IV Décroissance des coefficients de Fourier et Régularité

- Prop ① Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge absolument, $\sum a_n e^{inx}$ converge uniformément vers une fonction $f \in C^0_{\text{per}}(-\pi, \pi)$ et $a_n = c_n(f)$
- ② Si $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^k a_n$ converge, $\sum a_n e^{inx}$ est une fonction de classe $C^k(-\pi, \pi)$
- ③ Reciproquement si $f \in C^k(-\pi, \pi)$, on a $c_m(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$
et on en déduit $c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$

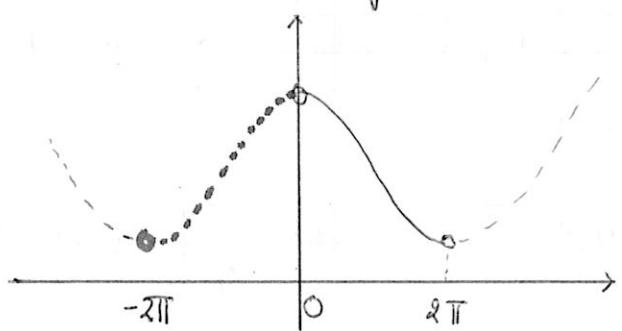
Supposons maintenant que $f \in C^1(0, 2\pi)$ mais admet une discontinuité en 0. On a alors

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[-\frac{f}{in} \right]_0^{2\pi} + \int_0^\infty \frac{f'(x)}{in} e^{-inx} dx \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{f(0^+) - f(2\pi^-)}{in} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Donc $(c_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ a une décroissance très lente ($\sum |c_n(f)|$ diverge)

En deuse dimensions, le phénomène est encore amplifié $c_{m,n}(f) = o\left(\frac{1}{mnp}\right)$

Une première solution : transformée en cosinus

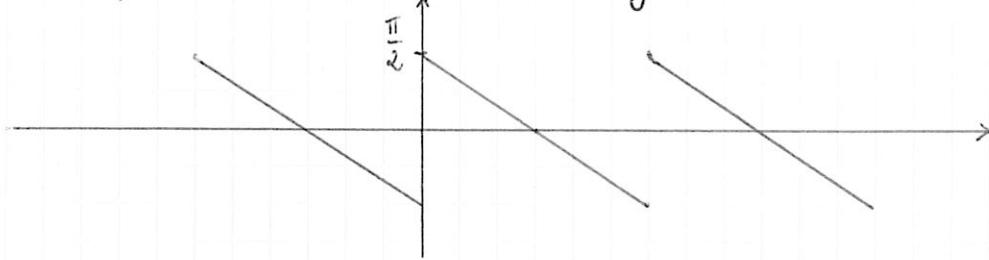


\Leftarrow enlève la discontinuité

$\left\{ \begin{array}{l} \text{coefficients de Fourier décroissent} \\ \text{plus rapidement} \end{array} \right.$

\Rightarrow à la base du JPEG standard

Le phénomène d'oscillation de Gibbs



On examine l'effet de couper les hautes fréquences sur une discontinuité.

La fonction est impaire, au sens L^2 , on a $s(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$

On considère $s_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k}$

Proposition $s_n(x) = \int_0^x \frac{\sin(nt)}{t} dt = \frac{x}{2} + O\left(x, \frac{1}{n}\right)$

$$\begin{aligned} \text{D}\square \quad \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^m \cos(kx) - \frac{1}{2} \cos(mx) &= \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^m e^{ikx} - \frac{1}{2} \cos(mx) \\ &= \frac{\sin(mx) \cos(\frac{x}{2}) + \sin(\frac{x}{2}) \cos(mx)}{2 \sin(\frac{x}{2})} - \frac{1}{2} \cos(mx) = \frac{\sin(mx)}{2 \tan(\frac{x}{2})} \end{aligned}$$

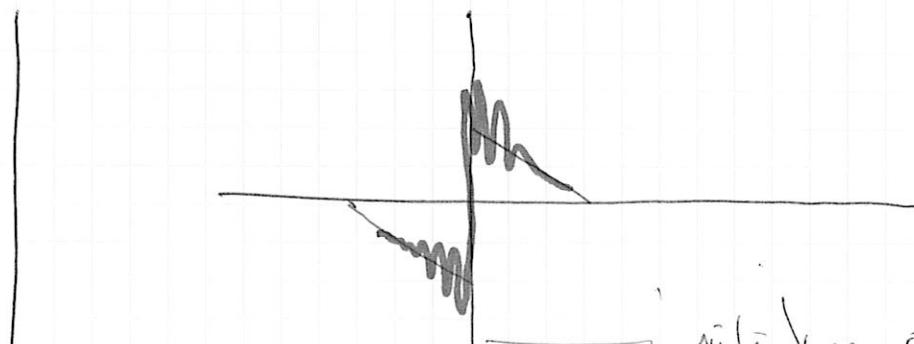
On intègre entre 0 et x.

$$\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^m \frac{\sin(kx)}{k} - \frac{\sin mx}{2m} = \int_0^x \frac{\sin(nt)}{t} dt + \int_0^x \sin(nt) \left(\underbrace{\frac{1}{2 \tan(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t}}_{O(t) \rightarrow C^{-1}} \right) dt$$

Ainsi $s_n(x) = \int_0^x \frac{\sin(nt)}{t} dt - \frac{x}{2} + O\left(\frac{1}{n}, x\right) \quad \blacksquare$

On examine $s_n(\frac{\pi}{n}) = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt - \frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n}, x\right)$

On peut montrer que $\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt = (-1+c) \frac{\pi}{2}$, $c \approx 0,18$



$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt \end{aligned}$$

Transformée de Fourier et Convolution

I L'espace de Schwartz

P) Définition: On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ à "décroissance rapide":

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d) / \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^d \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|^\beta) |\partial^\alpha \varphi(x)| < \infty \right\}$$

Ex. (i) $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$(ii) \forall A \in \mathbb{M}_n^{++}(\mathbb{R}), \forall \beta \in \mathbb{N}^d \quad G_{A,\beta}(x) = x^\beta e^{-x^T Ax} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

Convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ $\mathcal{N}_p(\varphi) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq p \\ \beta \leq p}} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|)^\beta |\partial^\alpha \varphi(x)|$

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \text{ si } \forall p \in \mathbb{N} \quad \mathcal{N}_p(\varphi_n - \varphi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Propriété i) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $p \in [1, +\infty]$

ii) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ stable par dérivation

iii) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ stable par multiplication par un polynôme

iv) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (stabilité par multiplication)

2) Transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Définition: Pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on associe $\hat{\phi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i \langle x; \xi \rangle} \phi(x) dx$

$$\text{Exemple} \quad G_\alpha(x) = e^{-\alpha|x|^2} \quad \hat{G}_\alpha(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4\alpha}}$$

$$\text{Propriétés} \quad i) \quad \partial_\xi^\alpha \hat{\phi} = \overbrace{(-i)^{|\alpha|} x^\alpha \phi}^{(\cdot)}(\xi)$$

$$ii) \quad \overbrace{\partial_x^\alpha \phi}^{(\cdot)}(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{\phi}(\xi)$$

$$iii) \quad \overbrace{\hat{\phi}(\cdot - x)}^{(\cdot)}(\xi) = e^{-i \langle x; \xi \rangle} \hat{\phi}(\xi)$$

$$iv) \quad \overbrace{e^{i \langle w; x \rangle} \phi}^{(\cdot)}(x) = \hat{\phi}(\xi - w)$$

La transformée de Fourier échange dérivation et multiplication par un polynôme, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ étant stable par ces opérations

on en déduit que $\hat{\cdot}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et c'est une application linéaire continue.

Théorème (formule d'inversion) $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{\varphi}(\xi) d\xi$$

Preuve

$$I(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, \xi \rangle} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) e^{-i\langle y, \xi \rangle} dy d\xi$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} d\xi \right] \varphi(y) dy$$

\hookrightarrow mon intégrable

$$I_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} e^{-\varepsilon \frac{|\xi|^2}{2}} d\xi \right] \phi(y) dy$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, \xi \rangle} e^{-\varepsilon \frac{|\xi|^2}{2}} \hat{\phi}(\xi) d\xi \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} I(x) \quad (\text{CVD})$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} G_\varepsilon(x-y) \phi(y) dy \quad G_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{d/2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2\varepsilon}}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-\frac{|\omega|^2}{2}} \phi(x - \sqrt{\varepsilon}\omega) d\omega \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} \phi(x)$$

□

Corollaire (Plancherel)

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \quad \langle \varphi; \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^d} \langle \hat{\varphi}; \hat{\psi} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

Preuve $\langle \varphi; \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\hat{\varphi}}(x) \hat{\psi}(x) dx$.

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(2\pi)^d} e^{-i\langle x, \xi \rangle} \bar{\hat{\varphi}}(\xi) \hat{\psi}(\xi) \psi(x) dx d\xi$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\hat{\varphi}}(\xi) \hat{\psi}(\xi) d\xi$$

□

Prop $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ $\varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\widehat{\varphi * \psi} = \widehat{\varphi} \widehat{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Preuve $\widehat{\varphi * \psi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x, \xi)} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x-y) \psi(y) dy dx$
 $= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(y, \xi)} \psi(y) \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x-y, \xi)} \varphi(x-y) dx$
 $= \widehat{\psi}(\xi) \widehat{\varphi}(\xi)$ \square

3°) Résultats de densité

Rappel $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ $\forall p \in [1; +\infty[$

Corollaire $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$

Qsg ① $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-inx} dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

② Extension de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$

Formule d'inversion valable si $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$

③ Extension de la TF dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ • Pas de formule explicite mais $\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = (2\pi)^d \delta$ presque partout avec $\delta(x) = \delta(-x)$ •

Exemple $f = 1_{[a,b]}$, $\widehat{f}(\xi) = (b-a)e^{-i\frac{(a+b)\xi}{2}} \text{sinc}\left(\xi, \frac{b-a}{2}\right)$

II Filtrage - Echantillonnage

Filtrage \rightsquigarrow convolution Echantillonnage \rightsquigarrow Fourier,

Position du problème on se donne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et on enregistre $(f(nT))_{n \in \mathbb{Z}}$
 A quelle condition peut-on reconstruire f ?

Formule de Poisson Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$F(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t+nT) = \frac{1}{T} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{f}\left(m \frac{2\pi}{T}\right) e^{im \frac{2\pi t}{T}}$$

$$\widehat{f}\left(m \frac{2\pi}{T}\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{-inx \frac{2\pi}{T}} f(x) dx \quad \text{Supp } f \subset \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \Rightarrow \text{coeff Fourier}$$

On en déduit le théorème de Shannon

Théorème (Shannon) Si $\text{Supp}(\hat{f}) \subset [-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$

$$f(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(mT) h_T(t - mT)$$

$$h_T(s) = \text{sinc}\left(\frac{\pi s}{T}\right)$$

III Analyse Temps Fréquence (Fourier à Fenêtre)

1) Motivation: La TF donne accès aux fréquences présentes dans un signal mais l'information temporelle est perdue

1° Atomes Temps-Fréquence

Principe Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ ϕ_γ famille de $L^2(\mathbb{R})$ t.q. $\|\phi_\gamma\|=1$

$$Tf(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \phi_\gamma(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{\phi}_\gamma(\xi)} d\xi.$$

\Rightarrow Si ϕ_γ nulle sauf autour de $t_0 \rightsquigarrow$ information locale sur f .
 $\hat{\phi}_\gamma \rightsquigarrow \xi_0 \rightsquigarrow \hat{f}$.

Si on voit $|\phi_\gamma|^2$ et $|\hat{\phi}_\gamma|^2$ comme des densités de proba, on a

$$t_\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} t |\phi_\gamma(t)|^2 dt \quad \xi_\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi |\hat{\phi}_\gamma(\xi)|^2 d\xi.$$

et une variance

$$\begin{cases} \sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_\gamma)^2 |\phi_\gamma(t)|^2 dt \\ \sigma_\xi^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - \xi_\gamma)^2 |\hat{\phi}_\gamma(\xi)|^2 d\xi \end{cases}$$

Proposition (Principe d'incertitude d'Heisenberg)

Si $\sqrt{f(0)} = o(1)$ $\sigma_t \sigma_\xi \geq \frac{1}{2}$ avec égalité pour les gaussiennes.

On choisit en général N pair (en fait une puissance de 2) et on travaille sur $-N/2 \leq k \leq N/2 - 1$ pour \hat{f}_k symétrique / 0.

En dimension supérieure (2)

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{w}_{k,l} = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} w_{m,n} e^{-\frac{2i\pi}{N}(km+ln)} \\ w_{m,n} = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{w}_{k,l} e^{\frac{2i\pi}{N}(km+ln)} \end{array} \right.$$

III La transformée de Fourier rapide

Côté de calcul TFD: $\hat{f}_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-\frac{2i\pi}{N} \frac{kn}{N}}$ $O(N^2)$

En dimension d $\sim N^2d$.

Dans le cas $N = 2^d \sim O(N \log N)$

$$\begin{aligned} \hat{f}_k &= \sum_{m=0}^{N-1} f_m e^{-\frac{2i\pi}{N} \frac{km}{N}} & \omega_N := e^{-\frac{2i\pi}{N}} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} f_m \omega_N^{km} . \text{ La suite est } N \text{ périodique.} \end{aligned}$$

On l'examine sur $[0, \frac{N}{2}-1]$ puis $[\frac{N}{2}, N-1]$ $N=2p$

Sait $k \in [0, p-1]$

$$\begin{aligned} \hat{f}_k &= \underbrace{f_0 \omega_N^0}_{\text{pair}} + \underbrace{f_1 \omega_N^k}_{\text{impair}} + \underbrace{f_2 \omega_N^{2k}}_{\text{pair}} + \dots + \underbrace{f_{N-2} \omega_N^{(N-2)k}}_{\text{impair}} + \underbrace{f_{N-1} \omega_N^{(N-1)k}}_{\text{pair}} \\ &= \sum_{m=0}^{p-1} f_{2m} \omega_N^{2mk} + \omega_N^k \sum_{m=0}^{p-1} f_{2m+1} \omega_N^{2mk} \end{aligned}$$

Or $\omega_N^{2mk} = \omega_{N/2}^{mk}$

$$\begin{aligned} \hat{f}_k &= \sum_{m=0}^{p-1} (f_n^{\text{pair}}) \omega_p^{mk} + \omega_N^k \sum_{m=0}^{p-1} f_n^{\text{impair}} \omega_p^{mk} \\ &= \overbrace{\hat{f}_n^{\text{pair}}}^k + \omega_N^k \overbrace{\hat{f}_n^{\text{impair}}}^k \quad 0 \leq k \leq p-1 \end{aligned}$$

Dans le cas $\frac{N}{2} \leq k \leq N-1$, $p \leq k \leq 2p-1$ $k=p+l$ $l=0 \dots p-1$

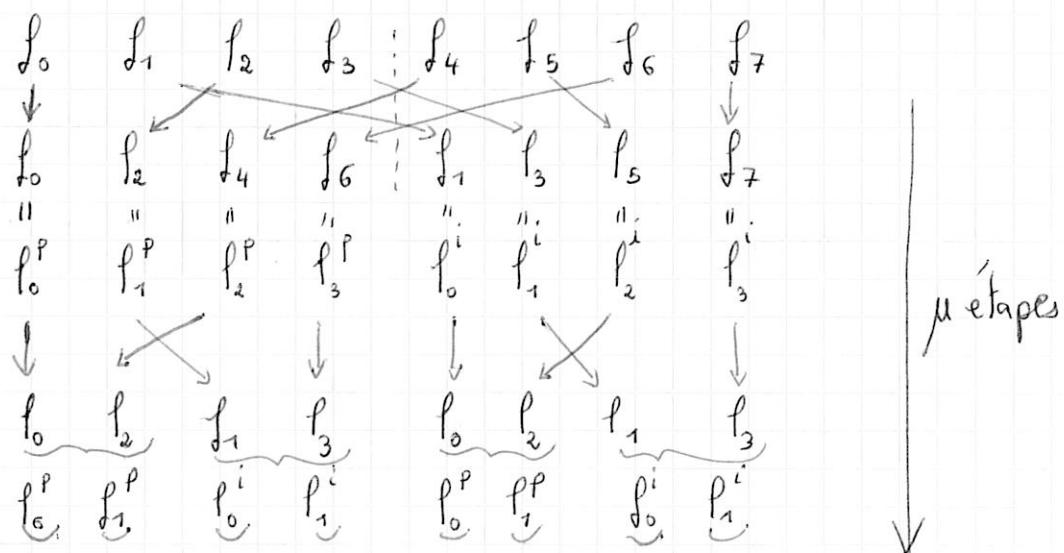
$$\begin{aligned}\hat{f}_k &= \hat{f}_{p+l} = \sum_{m=0}^{N-1} f_m \omega_N^{m(p+l)} \\ &= \sum_{m=0}^{p-1} f_{2m} \omega_N^{2m(p+l)} + \sum_{m=0}^{p-1} f_{2m+1} \omega_N^{(2m+1)(p+l)} \\ \hat{f}_{p+l} &= \sum_{m=0}^{p-1} f_m^{\text{pair}} \omega_p^{ml} - \omega_N^l \sum_{m=0}^{p-1} f_m^{\text{impair}} \omega_p^{ml} \\ &= \overbrace{f_m^{\text{pair}}}^l - \omega_N^l \overbrace{f_m^{\text{impair}}}^l\end{aligned}$$

Bilan :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{f}_k = \overbrace{f_m^{\text{pair}}}^k + \omega_N^k \overbrace{f_m^{\text{impair}}}^k \\ \hat{f}_{p+k} = \overbrace{f_m^{\text{pair}}}^k - \omega_N^k \overbrace{f_m^{\text{impair}}}^k \end{array} \right.$$

$\rightarrow N = 2^{\mu}$ et $p = 2^{\mu-1}$

On peut donc ré-appliquer jusqu'à $p=1 \rightarrow \hat{f}_0 = f_0$



C'est un algorithme récursif \rightarrow coût de calcul $\propto 2^{\mu} \approx N \log N$.

IV Sous échantillonnage version discrète

Formule de Poisson Soit $(f_n)_{n=0 \dots KN-1}$ une suite de réels

On note $u_m = f_{km}$ pour $0 \leq m \leq N-1$ l'échantillonnage de rapport K.

$$\text{On a } \hat{u}_k = \frac{1}{K} \sum_{\ell=0}^{K-1} \hat{f}_{k+\ell N}$$

$$\hat{u}_k = \sum_{m=0}^{N-1} u_m e^{-2i\pi \frac{kn}{N}} - \sum_{n=0}^{N-1} f_{kn} e^{-2i\pi \frac{kn}{N}}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{NK} \sum_{p=0}^{KN-1} \hat{f}_p e^{2i\pi \frac{pk}{KN}} e^{-2i\pi \frac{kn}{N}} \\ &= \frac{1}{NK} \sum_{p=0}^{KN-1} \hat{f}_p \sum_{m=0}^{N-1} e^{2i\pi \frac{(p-k)n}{N}} \end{aligned}$$

Si $p=k+jN$ la somme vaut N

$$\hat{u}_k = \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} \hat{f}_{k+jN}$$

on les appelle les alias

Le signal sous échantillonné est une moyenne des coefficients de Fourier associées aux fréquences $k+jN$. Pour éliminer les alias, on utilise un filtre $\hat{f}_k = 0$ si k est un alias.

Le théorème de Shannon en discret $(f_n)_{n=0 \dots KN-1}$ et

$$\hat{f}_k = 0 \quad \forall k \notin \left[-\frac{N}{2} + 1 ; \frac{N}{2} - 1 \right]$$

On note $u_n = f_{kn}$ le sous échantillonnage de rapport K.

Alors $f_n = \sum_{p=0}^{N-1} u_p \operatorname{sinc}_{m-kp}$

$$\operatorname{sinc}_m = \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{(N-1)\pi}{KN} m\right)}{\sin\left(\frac{\pi m}{KN}\right)} \quad \text{si } m \neq 0$$

$$= \frac{N-1}{N} \quad \text{si } m = 0$$

Analyse de Fourier discrète

I Echantillonnage d'une fonction définie sur \mathbb{R} (signal analogique)

1) Théorème de Shannon

Un signal échantillonné s'écrit $f_S(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(mT) S_{mT}(t)$

Sa transformée de Fourier est donnée par $\hat{f}_d(\xi) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(mT) e^{-imT\xi}$

$$\text{Prop} \quad \hat{f}_d(\xi) = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\xi - \frac{2k\pi}{T}\right)$$

Ainsi l'échantillonage rend la transformée de Fourier $\frac{2\pi}{T}$ périodique

Th Si $\text{supp}(\hat{f}) \subset [-\frac{\pi}{T}; \frac{\pi}{T}]$ alors

$$f(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(mT) \Phi_T(t) \quad \Phi_T(t) = \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right)$$

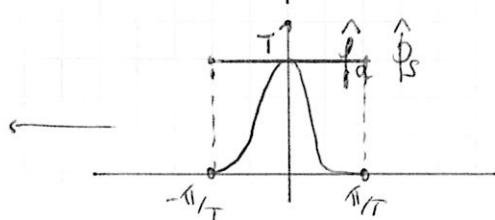
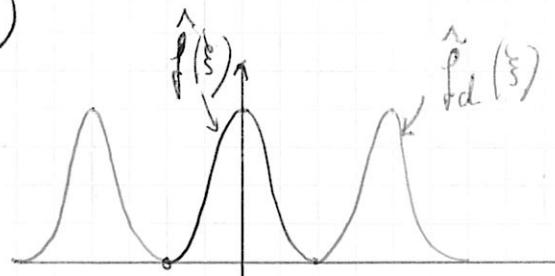
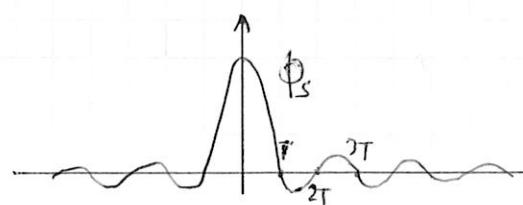
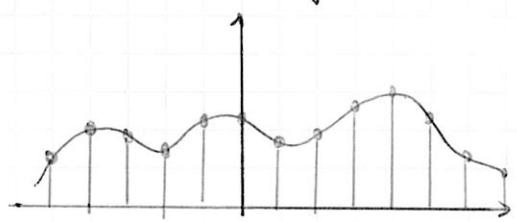
■ Sous cette hypothèse, on a $\hat{f}_d(\xi) = \frac{1}{T} \hat{f}(\xi) \quad \forall \xi \in [-\frac{\pi}{T}; \frac{\pi}{T}]$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } \hat{f}(\xi) &= T \hat{f}_d(\xi) \underset{\substack{\text{---} \\ \text{---}}}{\wedge}_{[-\frac{\pi}{T}; \frac{\pi}{T}]}(\xi) \\ &= \hat{f}_d * \Phi_T \quad \hat{\Phi}_T(\xi) = T \underset{\substack{\text{---} \\ \text{---}}}{\wedge}_{[-\frac{\pi}{T}; \frac{\pi}{T}]}(\xi) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } f(t) = f_d * \Phi_T(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) \Phi_T(t - nT)$$

$$\Phi_T(s) = \text{sinc}\left(\frac{\pi s}{T}\right)$$

On peut reconstruire f pourvu que f soit très régulière (le spectre est borné, la fonction est C^∞)

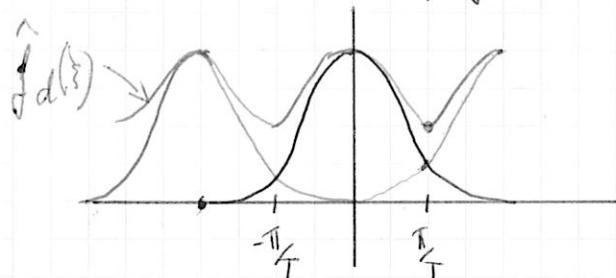


2°) Aliasing

Dans la pratique, on ne connaît pas une infinité d'échantillons, et en général $\text{Supp } \hat{f} \notin [-\frac{\pi}{T}; \frac{\pi}{T}] \Rightarrow$ la formule de Shannon engendre une erreur.

Si $\text{Supp } \hat{f} \notin [-\frac{\pi}{T}; \frac{\pi}{T}] \exists k / \text{Supp } \hat{f}(\xi - \frac{2k\pi}{T}) \cap \text{Supp } \hat{f}(\xi) \neq \emptyset$
 \Rightarrow Ce repliement de fréquences de composantes $|\xi| > \frac{\pi}{T}$ vers les basses fréquences s'appellent aliasing.

Dans ce cas, $\hat{f}_d(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\xi - \frac{2k\pi}{T}\right)$

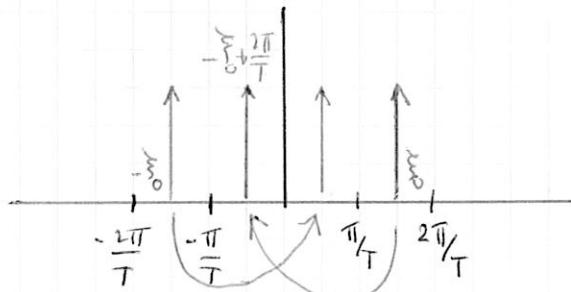


Exemple : $f(t) = \cos(\xi_0 t) = \frac{e^{i\xi_0 t} + e^{-i\xi_0 t}}{2}$

$$\hat{f}_d(\xi) = \pi \{ \delta_{\xi_0}(\xi) + \delta_{-\xi_0}(\xi) \}$$

Si $\xi_0 \in [\frac{\pi}{T}, \frac{2\pi}{T}]$

repliement de spectre \Rightarrow



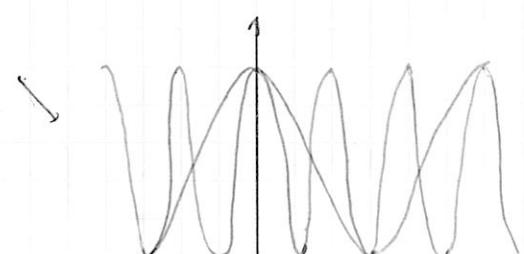
$$\Rightarrow f_d * \phi_T(t) = \cos\left((\frac{2\pi}{T} - \xi_0)t\right)$$

On cherche une approximation \tilde{f} de f avec un support dans $[-\frac{\pi}{T}; \frac{\pi}{T}]$:

$$\|f - \tilde{f}\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| > \frac{\pi}{T}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| < \frac{\pi}{T}} |\hat{f} - \tilde{f}(\xi)|^2 d\xi$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(\xi) = \hat{f}(\xi) 1_{[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]}(\xi) \rightsquigarrow \text{on filtre donc}$$

les hautes fréquences puis on fait l'échantillonnage.



3) Echantillonage général II Fourier et les signaux discrets

En pratique, on ne travaille avec des vecteurs et non des fonctions (ou des suites infinies) \Rightarrow on ne connaît donc que des signaux finis $(f_k)_{k=0 \dots N-1}$ et on doit redéfinir les opérations de convolution et de "transformée de Fourier"

Définition (convolution circulaire) Soit $(\tilde{f}_n, \tilde{g}_n)_{n=0 \dots N-1}$. On souhaite définir $(\tilde{f} * \tilde{g})_n = \sum_{p=0}^{+\infty}$. On commence par périodiser le signal $f_n = \tilde{f}_{n[N]}$ et $g_n = \tilde{g}_{n[N]}$. On pose alors

$$(\tilde{f} * \tilde{g})_n = (f \circledast g)_n = \sum_{p=0}^{N-1} f_p g_{n-p} = \sum_{p=0}^{N-1} \tilde{f}_{n-p} \tilde{g}_p, \quad n=0 \dots N-1$$

C'est un signal de période N .

Transformée de Fourier discrète On identifie l'espace des signaux périodiques de période N à l'espace euclidien \mathbb{C}^N muni du produit scalaire canonique $\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \overline{g_n}$

Théorème $\left\{ e_{k,n} = \exp \left(2i\pi \frac{kn}{N} \right) \right\}_{k=0 \dots N-1}$ est une base orthogonale de \mathbb{C}^N des signaux N -périodiques

On peut décomposer f de période N : $f = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}_k \frac{e^{2i\pi \frac{km}{N}}}{N}$

$$\hat{f}_k = \langle f, e_{k,0} \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-2i\pi \frac{kn}{N}}$$

On a par orthogonalité la formule de Plancherel

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |f_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{f}_k|^2$$

Prop Si $(f_n)_{n=0 \dots N-1}$ et $(g_n)_{n=0 \dots N-1}$ de période

La TFD de $h = f \circledast g$ vaut $\hat{h}_k = \hat{f}_k \hat{g}_k$

En pratique, cette formule sert à calculer les produits de convolution

$$\begin{aligned}
 \widehat{f} \circledast g_k &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{N-1} f_{m-p} g_p e^{-2i\pi \frac{k}{N} (m-p+p)} \\
 &= \sum_{p=0}^{N-1} g_p e^{-2i\pi \frac{kp}{N}} \sum_{m=0}^{N-1} f_{m-p} e^{-2i\pi \frac{k}{N} (m-p)} \\
 &= \widehat{f}_k \sum_{p=0}^{N-1} g_p e^{-2i\pi \frac{kp}{N}} = \widehat{f}_k \widehat{g}_k.
 \end{aligned}$$

On a exploité la périodicité de f et $e^{-2i\pi \frac{k}{N} (\cdot)}$ pour ramener la somme de $[-p; N-1-p]$ à $[0; N-1]$.

Proposition: $\sum_{k=0}^{N-1} \widehat{f}_k \widehat{g}_k = N \sum_{n=0}^{N-1} f_n g_n$ $(f_n)_{n=0 \dots N-1}; (g_n)_{n=0 \dots N-1}$

sont des suites réelles

□ Soit $h_n = f_{-n}$ $\widehat{h}_k = \sum_{m=0}^{N-1} f_{-n} e^{-2i\pi \frac{kn}{N}} = \sum_{m=1-N}^0 f_m e^{2i\pi \frac{kn}{N}}$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} f_m e^{2i\pi \frac{kn}{N}} = \overline{\widehat{f}_k}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{N-1} \overline{\widehat{f}_k} \widehat{g}_k &= \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{h}_k \widehat{g}_k \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} (\widehat{h \circledast g})_k e^{2i\pi \frac{ko}{N}} \\
 &= N (h \circledast g)_o = N \sum_{m=0}^{N-1} h_{o-n} g_m = N \sum_{m=0}^{N-1} f_{n-m} g_m = N \sum_{m=0}^{N-1} f_n g_m \quad \square
 \end{aligned}$$

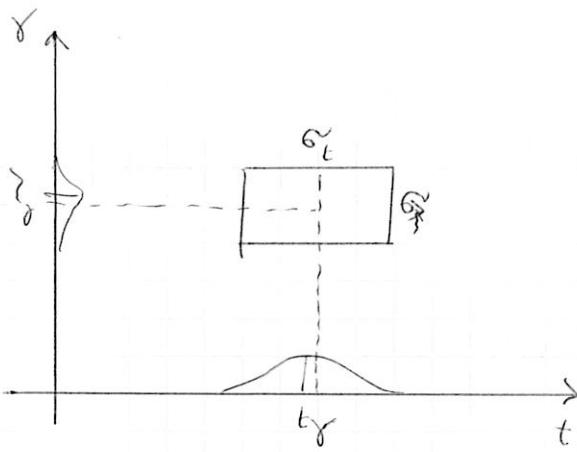
Lemme (Transformée de Fourier inverse)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{f}_k e^{2i\pi \frac{kn}{N}} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{p=0}^{N-1} f_p e^{-2i\pi \frac{kp}{N}} \right) e^{2i\pi \frac{kn}{N}} \\
 &= \sum_{p=0}^{N-1} \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} e^{-2i\pi \frac{k}{N} (p-n)} \right] f_p
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2i\pi \frac{p-n}{N} k} &= N \text{ si } p=n \\
 &= \frac{1 - e^{-2i\pi (p-n)}}{1 - e^{-2i\pi (p-n)/N}} = 0
 \end{aligned}$$

La TFD peut être définie sur \mathbb{Z} en la periodisant

$$\widehat{f}_{k+pN} = \widehat{f}_k \quad \widehat{f}_k = \widehat{f}_{-k}$$



La résolution dépend d'un compromis temps-fréquence.

$$\begin{aligned}
 \text{Preuve} \quad \sigma_t^2 \sigma_\xi^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |\phi(b)|^2 db \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |\phi(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi'(t)|^2 dt \\
 &\geq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |t \phi(t) \phi'(t)| dt \right)^2 \\
 &\geq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{2} (\phi(t) \bar{\phi}'(t) + \bar{\phi}'(t) \phi(t)) dt \right)^2 \\
 &\geq \frac{1}{4} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} t (|\phi(t)|^2) dt \right]^2 = \frac{1}{4} \left\{ \cancel{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(t)|^2 dt \right]} - \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(t)|^2 dt \right\}^2
 \end{aligned}$$

Exemples d'atomes

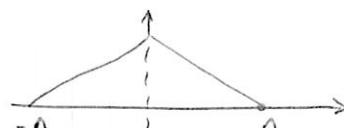
$$\left\{
 \begin{array}{l}
 \textcircled{1} \text{ Fourier à fenêtre} \quad g_{u,\xi}(t) = e^{i\xi t} \uparrow g(t-u) \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{modulation} \quad \uparrow \text{translation} \\
 \textcircled{2} \text{ Ondlettes} \quad \psi_{u,s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right)
 \end{array}
 \right.$$

2°) Transformée de Fourier à fenêtre

Soit g une fenêtre réelle et symétrique (paire) $g_{u,\xi}(t) = e^{i\xi t} g(t-u)$

$$\begin{aligned}
 \text{Exemple} \quad g_A(t) &= 1_{[-A,A]}(t) \quad h(t) = g_A(t) f(t) \\
 \hat{h}(\xi) &= \hat{g}_A * \hat{f}(\xi) = 2 \left(\frac{\sin(A\xi)}{\xi} \right) * \hat{f}(\xi) \\
 \Rightarrow & \text{élargit le spectre (surtout si } A \text{ est petit)} \\
 \Rightarrow & \text{sinc décroît très lentement} \\
 \Rightarrow & \text{la fonction } g_A \text{ introduit une discontinuité} \Rightarrow \text{phénomène de Gibbs}
 \end{aligned}$$

② Fenêtre triangulaire



$$g_A(\xi) = A \left(\sin^2 \left(\frac{A \xi}{2} \right) \right)$$

La décroissance est plus rapide.

$$\textcircled{3} \text{ Fenêtre de Hann. } g(t) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi t}{A} \right) \right) \mathbf{1}_{[-A, A]}(t)$$

Définition Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $\|g\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$

$$\textcircled{1} \quad Sf(u, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(t-u) e^{-i\xi t} dt$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Densité d'énergie} \quad |Sf(u, \xi)|^2$$

Ex Soit $f(t) = e^{i\phi(t)}$ $\phi(t) = \alpha t^2$

et g une fenêtre gaussienne $g(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi \sigma^2}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$

$$|Sf(u, \xi)|^2 = \left(\frac{4\pi \sigma^2}{1+4\alpha \sigma^2} \right)^{1/2} \exp \left(-\sigma^2 \frac{(\xi - 2\alpha u)^2}{1+4\alpha \sigma^2} \right)$$

Le maximum est atteint et $\xi = 2\alpha u$. $\phi'(u) \rightsquigarrow$ fréquence instantanée

Formules de Reconstruction

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$\textcircled{1} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Sf(u, \xi) g(t-u) e^{i\xi t} du d\xi$$

$$\textcircled{2} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |Sf(u, \xi)|^2 du d\xi.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Sf(u, \xi) g(t-u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{Sf(\cdot, \xi)(\omega)}^{} \overbrace{g(t-\omega)}^{} (\omega) d\omega.$$

$$\begin{aligned} \overbrace{Sf(\cdot, \xi)}^{} (\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega u} Sf(u, \xi) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu(\omega + \xi)} f * (g(\cdot) e^{i\xi \cdot})(u) du \\ &= \widehat{f}(\omega + \xi) \widehat{g}(\omega) \end{aligned}$$

$$\overbrace{g(t-\omega)}^{} (\omega) = e^{-i\omega t} \widehat{g}(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Sf(u, \xi) g(t-u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega + \xi) |\widehat{g}(\omega)|^2 e^{i\omega t} d\omega.$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} Sf(u, \xi) g(t-u) e^{i \xi t} du \right) d\xi \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(w+\xi) e^{i(w+\xi)t} |\hat{g}(w)|^2 dw d\xi \\
 &= \|f(t)\| \|g\|_2^2 \rightarrow \hat{f} \in L^2
 \end{aligned}$$

Cette représentation est redondante et \$S\$ n'est pas surjective

Prop \$\exists f \in L^2(\mathbb{R}) / \phi = Sf\$ si

$$\phi(u_0, \xi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u, \xi) K(u_0, u, \xi_0, \xi) du d\xi$$

$$K(u_0, u, \xi_0, \xi) = \langle g_{u, \xi}, g_{u_0, \xi_0} \rangle$$

\$\hookrightarrow\$ moyen reproduisant et mesure la corrélation.

de deux atomes temps fréquence / leur recouvrements

3°) Transformée de Fourier à fenêtre discrète.

On considère un signal \$f\$ discret périodique de période \$N\$. La fenêtre \$g\$ est aussi périodique et \$\|g\|=1\$. On pose \$g_{m,e}[n] = g(m-n) e^{i \frac{2\pi}{N} \ell n}

$$DFT(g_{m,e})[k] = \hat{g}_{m,e}[k] = \hat{g}[k-\ell] e^{-\frac{2\pi}{N} m(k-\ell)}$$

$$Sf[m, \ell] = \langle f, g_{m,e} \rangle$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{m=0}^{N-1} f[m] g[m-m] e^{-\frac{2\pi}{N} \ell m} \\
 &= \sum_{p=0}^{N-1} f[p+m] g[p] e^{-\frac{2\pi}{N} \ell (p+m)}
 \end{aligned}$$

la transformation inverse prend la forme

$$f[m] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} Sf[m, \ell] g[m-m] e^{\frac{2\pi}{N} \ell m}$$

