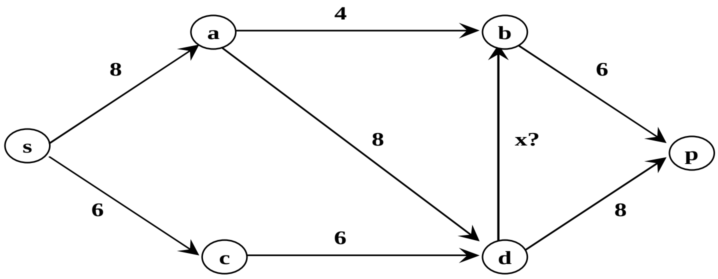
ENSEEIHT 1ière année Télecom et Réseaux
Contrôle de Théorie de Graphes - Mardi 15 juin 2010 – 8h00 – Riadh DHAOU
(Aucun document n'est autorisé.)
Durée : 1 heure 45 - Nombre de pages : 3 pages

I - Exercice - flot maximal, coupe minimale

Étant donne un graphe orienté *G*(*X, A*), où chaque arête (*u*,*v*) a une capacité *c*(*u*,*v*), on cherche un flot maximum *f* depuis la source *s* vers le puits *p*, sous la contrainte de capacité.

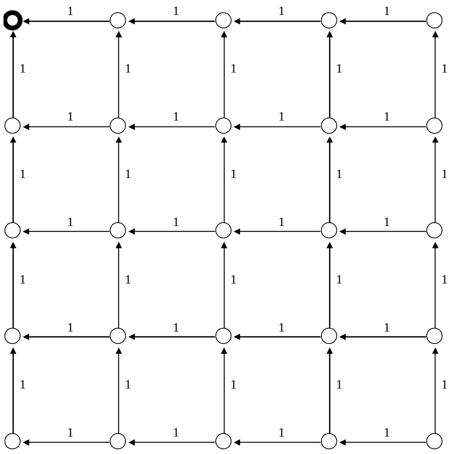


1. A partir de quelle valeur de la capacité *x*, donnée à l'arête (*d*,*b*), nous obtenons la valeur maximale du flot maximum *f* ? Quelle est la valeur du flot maximum ?
2. Donner une coupe minimale du graphe *G*.

Problème (Les questions sont relativement indépendantes)

Nous nous intéressons à l'optimisation d'un réseau de capteurs sans fil. Les capteurs sont répartis sur une grille de dimension (NxN). Chaque nœud-capteur prend régulièrement des mesures de température et envoie ses données vers la station de base (BS). La station de base est un nœud-capteur particulier qui s'occupe uniquement de collecter les données de l'ensemble des capteurs du réseau avant de les fournir à un opérateur (aucune mesure de température n'est faite au niveau de la BS). Chaque noeud capteur peut émettre à différentes portées (d, √2.d, 2.d,…). Différents niveaux de puissances d'émission sont utilisés. La consommation due à la transmission est proportionnelle au carré de la distance. Chaque capteur n'envoie des données que vers les capteurs qui sont plus proches que lui de la station de base (ou plus généralement de la destination).

Nous modélisons ce système par un graphe orienté. Chaque sommet modélise un capteur et chaque arc modélise une communication, dans un sens, entre deux capteurs à portée l'un de l'autre. La figure 1 présente deux graphes obtenus respectivement pour une puissance maximale de valeur 1 et de valeur 2, avec une BS dans un coin.



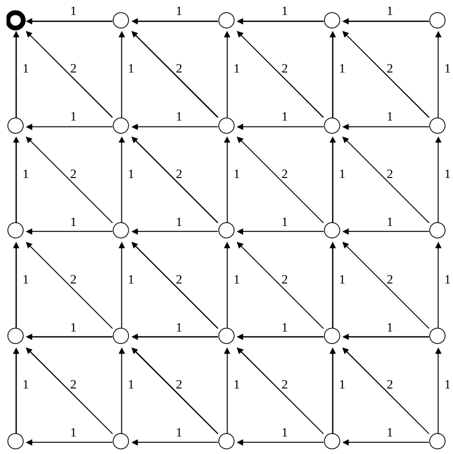


Figure 1: Graphe puissance maximale Pmax=1   Graphe puissance maximale Pmax=2

1) Arbre couvrant de poids minimum

Nous considérons une grille 3x3. La fonction coût associe à chaque arête une valeur de consommation (due à la puissance d'émission utilisée). Pour simplifier, nous limitons l'étude à deux niveaux de puissance d'émission (P_1=1 et P_2=2). Le graphe G1 est donné lorsque les capteurs émettent uniquement avec la puissance maximale P1. Le graphe G2 est obtenu lorsque les capteurs émettent avec les deux niveaux de puissance.

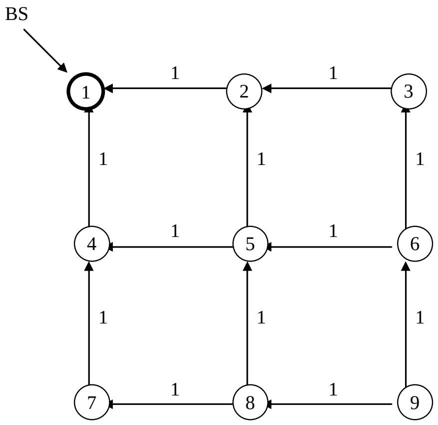


Figure 2a: Graphe G1

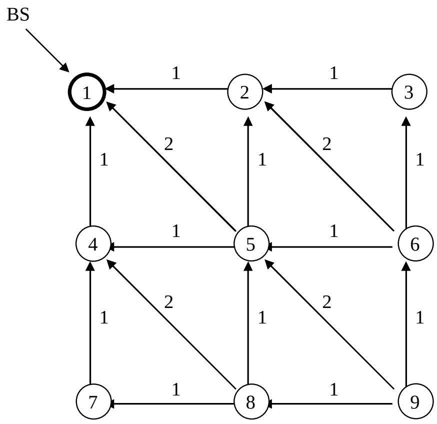


Figure 3b: Graphe G2

1. Pour chaque graphe, construire un arbre couvrant de coût minimal dont la racine est la BS. Donner le coût de chaque arbre. Cet arbre est-il unique ?
2. Chaque capteur génère un message par minute. Sachant que la capacité maximale de chaque lien est de 3 messages par minute, construire un arbre couvrant à coût minimal avec la BS comme racine en tenant compte des contraintes de trafic.

2) Plus courts chemins

La BS envoie des commandes aux différents nœuds en utilisant les plus courts chemins.

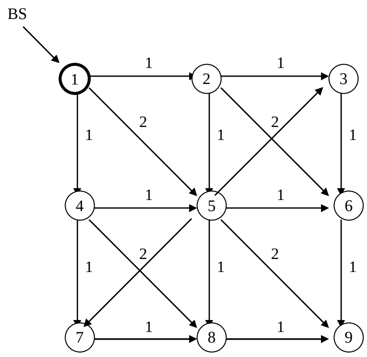


Figure 4: Graphe G1

1. Appliquer les algorithmes de Dijkstra et de Bellman-Ford pour trouver tous les plus courts chemins partant de la BS (Développer en donnant uniquement les étapes modifiant les états des variables).

3) Coloration de graphe

Pour réduire les interférences, deux capteurs à portée l'un de l'autre utilisent des canaux différents pour émettre. Tous les capteurs émettent avec la puissance la plus faible. Pour minimiser le nombre de canaux utilisés, nous modélisons les interactions entre capteurs. Deux capteurs adjacents ne peuvent utiliser le même canal (ou même couleur dans le modèle).

Le graphe non orienté $G1$ est un premier modèle d'interaction. Si deux nœuds i et j sont adjacents (à portée l'un de l'autre) alors i et j ne peuvent émettre simultanément en utilisant le même canal.

Le graphe non orienté $G2$ tient compte des interactions en réception. Ce graphe est déduit du graphe $G1$. Si deux nœuds capteurs i et j ont un voisin commun k, à portée (il existe un sommet k tel que i et j sont adjacents à k dans le graphe $G1$), alors i et j ne peuvent utiliser le même canal pour émettre simultanément vers k (i et j sont adjacents dans $G2$).

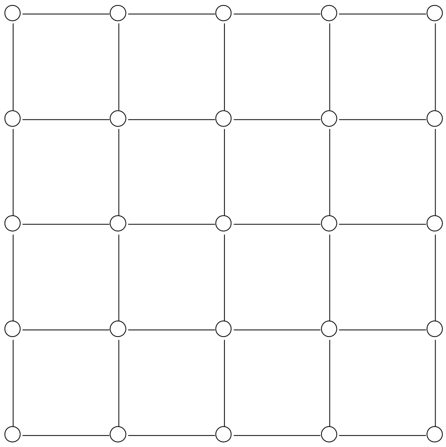


Figure 5: Graphe d'interaction G1

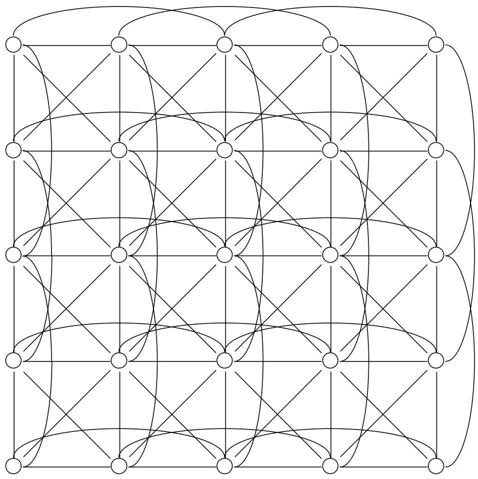


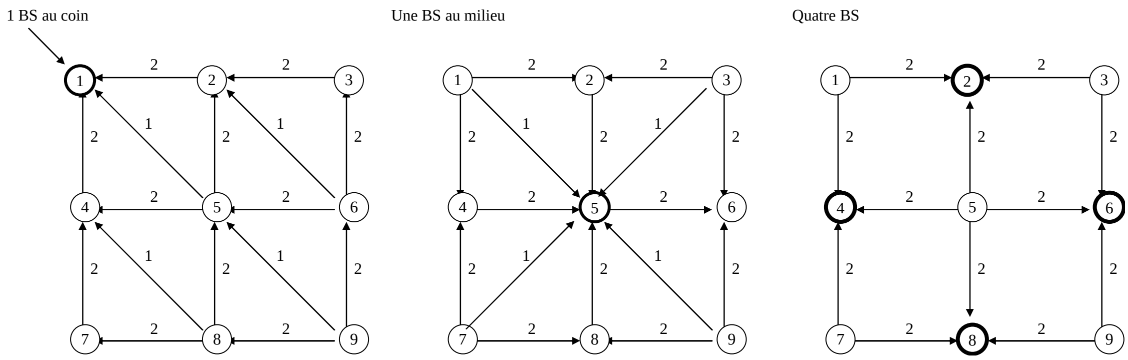
Figure 2: Graphe d'interaction G2

Trouver le nombre minimum de canaux utilisés revient à trouver le nombre minimal de couleurs.

1. Donner le nombre chromatique pour le graphe $G1$.
2. Pour un réseau de 3x3 capteurs, donner les bornes inférieure et supérieure du nombre chromatique du graphe $G2$.
3. Donner une coloration possible pour le graphe $G2$.

4) Flot maximal

Dans la suite, chaque nœud du réseau, y compris la station de base mesure la température et génère régulièrement un message par minute à destination de la BS. Nous faisons varier le nombre et la position de la BS. Les capacités des liens dépendent des distances relatives entre sommets (2 messages par minute pour les diagonales et 1 partout ailleurs).

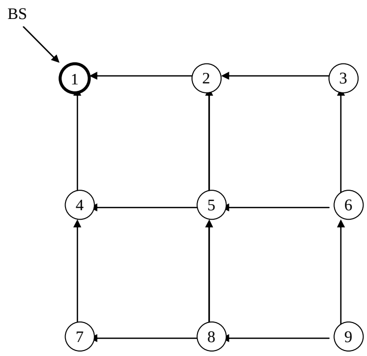


Pour déterminer le débit maximal de chaque cas, modéliser le système sous forme d'un réseau de transport.

1. Donner la valeur du flot maximum, dans chaque cas.

4) Ordonnancement

Dans la suite, nous considérons le graphe G1 modélisant les interactions avec le seul niveau de puissance P1.



Nous nous intéressons maintenant à la durée nécessaire à la station de base pour recevoir l'ensemble des données des capteurs du réseau.

Chaque capteur agrège l'ensemble des données qu'il reçoit avec ses propres données générées localement. Avant d'émettre sa donnée, chaque capteur attend de recevoir les données de tous ses prédécesseurs dans le graphe. Ces données peuvent être reçues sur plusieurs canaux (de fréquence) si possible. Si on ne dispose que d'une seule bande de fréquence alors les capteurs peuvent émettre, à tour de rôle, chacun sur un slot temporel approprié. Par exemple, si on suppose que c'est le nœud 9 qui commence à émettre, à t=0, alors les nœuds 6 et 8 peuvent émettre dès la réception du massage du noeud 9. Comme le nœud 5 est un récepteur commun aux capteurs 6 et 8 alors ces derniers doivent émettre l'un après l'autre pour éviter de générer des interférences au niveau du nœud 5. Le capteur 5 doit donc attendre deux slots avant de commencer à émettre son message. Nous négligeons les durées de propagation et d'émission devant la durée de réception et d'analyse des messages.

Nous pouvons observer que la durée de traitement à chaque capteur est égale au degré entrant du nœud multiplié par la durée de réception et d'analyse d'un message.

1. Elaborer le graphe potentiel-tâches modélisant ce problème.
2. Déterminer les dates au plus tôt de chaque tâche.
3. Déterminer les dates au plus tard de chaque tâche.
4. En déduire la marge de chaque tâche. Quelles sont les tâches (noeuds) critiques.