Feuille de TP n°3

Analyse Hilbertienne et Fourier: FFT 2D

Exercice 1 – Visualiser une FFT à deux dimensions. Une image de $N \times M$ pixels encodée avec 256 niveaux de gris peut être interprétée comme une matrice à N lignes et M colonnes dont les composantes prennent des valeurs dans $[0, 255] \subset \mathbb{N}$.

1) En utilisant la librairie numpy de Python, générer une matrice carrée $Z \in \mathcal{M}_{N,N}(\mathbb{R})$ dont les composantes vérifient la relation

$$Z_{n,m} = \cos\left(\frac{2\pi}{N} f \, X_{n,m}\right)$$

où $X_{n,m} = m$. On prendra pour commencer $N = 32$ et $f = 1$.

2) Éxecuter la commande `display_images(Z)`.
Comme on peut le constater, Z n'est pas en l'état une image. Cependant, les commandes d'affichage font la translation ici de l'image de la fonction cos, soit l'intervalle $[-1, 1]$, vers l'espace d'affichage $[0, 255] \subset \mathbb{N}$. Créer une deuxième matrice $Z2$ qui prend directement en compte cette translation.

3) Calculer la FFT de Z. Utiliser pour cela la fonction `fft2` de `numpy.fft`.

4) Représenter le module de cette FFT à l'aide de la fonction fournie `display_image`. On pourra utiliser le paramètre `vmax = 10000` de manière à augmenter la luminosité des valeurs situées en-dessous. à la place, on pourra aussi afficher $\log_{10}(1 + |\hat{Z}|)$ afin « d'aplatir » l'intervalle des valeurs affichées. On pourra également observer l'effet de la fonction `fftshift` sur les données à visualiser.

5) La fonction `display_image` affiche une image (ici de taille 512×512). Les axes des abscisses et des ordonnées proposent par défaut des valeurs minimales et maximales liées à la taille de l'image. Ceci n'est pas correct lors de l'utilisation de la FFT. On lui préférera par la suite la fonction `aff_img` qui permet de changer les valeurs par défaut sur les axes. Une exemple d'utilisation est fourni ci-dessous

```
i=np.zeros((128,128))
i[54:74,54:74]=255
aff_img(i,[-64,64,-64,64])
aff_img(i,xv=range(-64,64),yv=range(-128,0))
```

Utiliser cette nouvelle fonction pour reproduire l'étude de la question précédente

6) Décrire qualitativement les résultats obtenus.

7) Reproduire la question pour Z_2.

8) Créer une nouvelle matrice Z_3 vérifiant la même relation que Z mais pour $f = 8$. Reproduire les questions précédentes et interpréter.

9) Générer une matrice carrée $Z_4 \in \mathcal{M}_{N,N}(\mathbb{R})$ dont les composantes vérifient la relation

$$Z_{4,n,m} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}(f_x \, X_{n,m} + f_y \, Y_{n,m})\right)$$

où $X_{n,m} = m$ et $Y_{n,m} = n$. On prendra $N = 32$, $f_x = 4$ et $f_y = 8$. Reproduire les questions précédentes et interpréter.

10) Créer la matrice Z_5 vérifiant

$$Z_{5,n,m} = Z_{4,n,m} \exp(-R_{n,m}^2)$$

où $R_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{N} X_{n,m} - \pi\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{N} Y_{n,m} - \pi\right)^2}$. Répéter les questions précédentes pour cette nouvelle matrice.

11)Répéter les mêmes questions pour $Z_6 = \text{sign}(Z_1)$ où on aura pris $f = 2$ et $Z_7 = \text{sign}(Z_4)$ pour $f_x = 2$ et $f_y = 2$.

12) Ouvrir l'image `barbara.png` et la stocker dans la variable `i`. Nous souhaitons voir dans cette question l'effet d'une « troncature » en fréquence. Créer pour cela les cinq matrices carrées suivantes de taille $N \times N$

$$\begin{aligned}
R_{1,n,m} &= (X_{n,m} - 256)^2 + (Y_{n,m} - 256)^2, \\
R_{2,n,m} &= (X_{n,m} - 183)^2 + (Y_{n,m} - 318)^2, \\
R_{3,n,m} &= (X_{n,m} - 338)^2 + (Y_{n,m} - 192)^2, \\
R_{4,n,m} &= (X_{n,m} - 205)^2 + (Y_{n,m} - 211)^2, \\
R_{5,n,m} &= (X_{n,m} - 305)^2 + (Y_{n,m} - 311)^2.
\end{aligned}$$

À l'aide de la FFT inverse, créer l'image Z_8 vérifiant la relation

$$Z_8 = \mathrm{ifft}\Big(\exp(-R_1/200) \cdot \mathrm{fft}(i)\Big).$$

La notation $\cdot$ désigne ici la multiplication terme à terme. Afficher Z_8 et interpréter le résultat.
Reproduire la question pour

$$Z_9 = \mathrm{ifft}\Big((\exp(-R_1/200) + \sum_{k=2}^{5} \exp(-R_k/50)) \cdot \mathrm{fft}(i)\Big).$$

Exercice 2 – Rotation, interpolation par plus proche voisin.. Pour commencer, on va assimiler une image v de taille $N \times N$ à une fonction $\tilde{v}$ constante par morceaux sur $\mathbb{R}^2$ telle que l'origine soit au centre de l'image. Ainsi, on a

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2 \tilde{v}(x, y) = v_{\mathrm{round}(x+\frac{N}{2}),\mathrm{round}(y+\frac{N}{2})}.$$

où $\mathrm{round}(r)$ désigne l'entier le plus proche de r. La fonction mathématique ROUND est implémentée par la fonction NUMPY du même nom en Python. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Dans $\mathbb{R}^2$, on note R_θ la rotation d'angle θ et on pose $\tilde{w} = \tilde{v} \circ R_\theta$.

1) Rappeler quelle est la matrice de R_θ dans la base canonique.

2) Soit w l'échantillonnage de $\tilde{w}$ de taille $N \times N$ avec les mêmes conventions (centre de l'image à l'origine). Pour tout couple (m, n), il existe un couple (m', n') tel que $w_{m,n} = v_{m',n'}$. Exprimer m' et n' en fonction de m et n.

3) Dfinir une fonction ROTATE1(V, THETA) qui renvoie l'image w obtenue après rotation d'angle θ avec les conventions précédentes. La tester à l'aide des images fournies.

4) Pour éviter qu'une partie de l'image ne se retrouve en dehors du fenêtrage après rotation, définir une fonction ENLARGE(V) qui, à partir d'une image de taille $N \times N$, renvoie l'image de taille $N \times N$ obtenue en entourant l'image de v d'une bande noire de taille $N/2$.

5) Appliquer la fonction ENLARGE à l'image BARBARA.PNG puis deux fois la fonction ROTATE1 avec des angles de $\pm 30^o$. Comparer l'image obtenue à l'image initiale.

6) Générer pour $N = 40$ l'image $v_{k,l} = \cos(8\pi \frac{k+l}{N})$, lui appliquer ENLARGE et lui appliquer 36 fois ROTATE1 avec un angle de 10^o. Comparer le résultat avec l'image initiale.

7) Décrire qualitativement les résultats obtenus.

Exercice 3 – Rotation sans perte avec Fourier. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Dans ce qui suit, on note M_θ la matrice de la rotation d'angle θ et

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Interpréter géométriquement les applications linéaires D_x et D_y dont M_x et M_y sont les matrices.

2) Calculer le produit $M_x\, M_y\, M_x$.

3) En utilisant les formules

$$\cos(\theta) = 1 - 2\sin^2(\frac{\theta}{2}), \qquad \sin(\theta) = 2\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2}),$$

vérifier qu'en prenant $a = -\tan(\theta/2)$ et $b = \sin(\theta)$, on a l'identité $M_\theta = M_x\, M_y\, M_x$.

4) Soit $\tilde{v}$ une image analogique. On note $\mathcal{F}_x$ la transformée de Fourier unidimensionnelle selon la première variable et $\mathcal{F}_x$ la transformée de Fourier unidimensionnelle selon la deuxième variable. Exprimer $\mathcal{F}_x(\tilde{v} \circ D_x)$ en fonction de $\mathcal{F}_x(\tilde{v})$ et $\mathcal{F}_y(\tilde{v} \circ D_x)$ en fonction de $\mathcal{F}_y(\tilde{v})$.

5) Donner une généralisation approchée des formules précédentes pour une image discrète (avec la convention que le l'origine est au centre de l'image).

6) Implémenter les fonctions $Xshear(v, a)$ et $Yshear(v, b)$ qui effectuent une transformée de Fourier selon une direction, multiplient les coefficients par le déphasage obtenu à la question précédente puis renvoie le résultat de la transformée de Fourier selon la direction considérée. Vérifier le résultat pour a, b compris entre -1 et 1.

7) Définir une fonction ROTATE2(V, THETA) qui applique successivement $Xshear$ puis $Yshear$ puis $Xshear$ à l'image v avec les valeurs de a, b déterminées précédemment.La tester avec les images fournies et des angles de roation entre -45^o et 45.

8) Refaire les tests de l'exercice 2 avec cette nouvelle fonction.