sujet D9

Méthode de Simpson $\frac{1}{3}$

1 Objectif

Ce mini-projet a pour objectif de produire un programme permettant de calculer numériquement, par l'intermédiaire de la Méthode de Simpson $\frac{1}{3}$, l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$.

2 Description

La Méthode de Simpson est une amélioration d'autres méthodes d'intégration numérique telles la Méthode des Rectangles ou la Méthode des Trapèzes.

Pour son implémentation numérique on définit une subdivision uniforme de l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles non vides $[x_{i-1}, x_i]$. La famille $(x_i)_{i\in\{0,...,n\}}$ est donnée par la relation

$$x_i = a + ih$$

où $h = \frac{b-a}{n}$ est appelé *le pas* de la subdivision.

Afin de calculer l'intégral sur l'intervalle $[a, b]$, on regroupe trois par trois les points de la subdivision $(x_i)_{i\in\{0,...,n\}}$, c'est à dire

$$(x_0, x_1, x_2), (x_2, x_3, x_4), (x_4, x_5, x_6), \dots, (x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$$

où $x_0 = a$ et $x_n = b$. On remarque que n doit être pair.

L'expression pour la Règle de Simpson $\frac{1}{3}$est :

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left\{ f(x_0) + f(x_n) + 4\sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} f(x_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} f(x_{2k}) \right\}$$

3 Indications

Afin de tester votre code, vous pouvez calculer l'intégrale de la fonction $x \mapsto \frac{4}{1+x^2}$ sur l'intervalle $[0; 1]$ des deux manières suivantes :

— Analytiquement

— Règle de Simpson ($n = 6, n = 12$)

Vous pouvez aussi considérer une fonction pour laquelle le calcul exact de l'intégrale n'est pas possible comme, par exemple $x \mapsto e^{x^2}$ et comparer vos estimations avec celles données par d'autres sources, en précisant celles-ci.

4 Travail à réaliser

voir document fourni sur Moodle.