Jean Butlen Terminale spécialité Mathématiques expertes
M. Bérard

Colle S14

14/01/26

1 Démonstration

Démontrer l'**unicité de la limite** en $-\infty$.

2 Exercices

2.1 Un exemple du cours

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.
Déterminer la limite de la suite (v_n) en $+\infty$.

2.2 Encadrement et partie entière

Soit f la fonction définie par :

$$f : x \longmapsto \frac{\lfloor 2x \rfloor}{\lfloor x - 2 \rfloor}.$$

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. Quelles sont sont les limites de cette fonction aux bornes de son ensemble de définition ?

2.3 Asymptotes obliques

On considère la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 - 4}$ dont on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. Montrer que $\mathcal{C}$ admet deux asymptotes obliques.

Grégoire Le Barber

Terminale spécialité Mathématiques expertes
M. Bérard

Colle S14

14/01/26

1 Démonstration

Démontrer le théorème suivant :

Théorème 1 – Composition de limites

Soit $a \in \mathbb{R}$.
Soient u une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J.
On suppose que la condition suivante est réalisée :

$$\forall\, x \in I, \quad u(x) \in J.$$

Si

$$\lim_{x \to a} u(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X \to -\infty} g(X) = +\infty,$$

alors

$$\lim_{x \to a} g\big(u(x)\big) = \lim_{x \to a} (g \circ u)(x) = +\infty.$$

2 Exercices

2.1 Un exemple du cours

Nous considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2x}{2 - \sin(2x)}.$$

Calculer la limite de f en $+\infty$, puis en $-\infty$.

2.2 Composée d'une suite par une fonction

La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{(-1)^{\lfloor x \rfloor} \lfloor x \rfloor}{2x + \lfloor x \rfloor}$ admet-elle une limite en $+\infty$?

2.3 Encadrements et partie entière

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + (x - \lfloor x \rfloor)^2.$$

Montrer que, pour tout réel x, $x \leqslant f(x) < x + 1$.

Quelle est la limite de $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ en $+\infty$? en $-\infty$?

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2.$$

Justifier que, pour tout réel x :

$$x - \frac{1}{4} \leqslant g(x) \leqslant x.$$

En déduire la limite de $x \longmapsto \dfrac{g(x)}{x}$ en $+\infty$, respectivement en $-\infty$.