Lycée Saint Augustin | 2025–2026
Classe de Terminale spécialité Mathématiques expertes | M. Berard

MATHÉMATIQUES
CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 3

À rendre le Jeudi 13 Novembre 2025

Durée indicative : 8 heures

Barème : 43 points

Récurrence. Combinatoire. Suites.

Exercice 1 Une égalité fonctionnelle *(5 points)*

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ satisfaisant à

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = f(x).$$

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x).$$

On note $\mathscr{P}$ le prédicat de la variable n défini sur $\mathbb{N}$ par :

$$\mathscr{P}(n) : \text{« } \forall x \in \mathbb{R}, \quad f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x) \text{ »}.$$

Initialisation
Pour $n = 0$, nous avons $f\left(\frac{x}{2^0}\right) = f(x)$, ainsi $\mathscr{P}(0)$ est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité
Supposons qu'à un rang $n \in \mathbb{N}$ fixé, $\mathscr{P}(n)$ est vraie, *i.e.* :

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x).$$

En appliquant l'égalité $f(2x) = f(x)$ et l'hypothèse de récurrence, il vient :

$$f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = f\left(2 \times \frac{x}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$$

d'où $\mathscr{P}(n+1)$, ce qui prouve que l'égalité attendue est héréditaire.
En appliquant le principe de récurrence, nous en concluons

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x).}$$

Exercice 2 Manipulation de cœfficients binomiaux *(6 points)*

Soient un entier naturel $n \geqslant 1$ et f la fonction $x \longmapsto (1+x)^n$.

1. En dérivant cette fonction de deux façons, montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = 2^{n-1}n.$$

Pour tout réel x, en utilisant la formule du binôme de Newton, nous avons

$$f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

En dérivant chaque membre de cette égalité, pour tout réel x, il vient

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} kx^{k-1}.$$

En particulier, pour $x = 1$, nous obtenons

$$f'(1) = n \times 2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \times \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k \times \binom{n}{k}.$$

Ainsi nous en concluons que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k \times \binom{n}{k} = n \times 2^{n-1}.}$$

2. En dérivant deux fois la fonction f et en supposant que $n \geqslant 2$, justifier

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{k}{n} = 2^{n-2} n(n+1).$$

Soit un entier $n \geqslant 2$. En dérivant à nouveau chaque membre de l'égalité donnant $f'(x)$, il vient

$$\begin{aligned} f''(x) &= n(n-1)(1+x)^{n-2} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1)x^{k-2} \\ &= \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(k-1)x^{k-2}. \end{aligned}$$

En particulier, pour $x = 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned} f''(1) &= n(n-1) \times 2^{n-2} \\ &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \times \binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \times \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \times \binom{n}{k} - \sum_{k=0}^{n} k \times \binom{n}{k} = n(n-1) \times 2^{n-2},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k^2 \times \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} k \times \binom{n}{k} + n(n-1) \times 2^{n-2} \\ &= n \times 2^{n-1} + n(n-1) \times 2^{n-2} \\ &= n \times 2^{n-2}(2 + n - 1) \\ &= n(n+1) \times 2^{n-2}. \end{aligned}$$

Exercice 3 Suites *(10 points)*

Soit $q \in]0,1[$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$.

1. Donner la nature et le terme général de la suite (u_n).

La relation $u_{n+1} = q \times u_n$ justifie le fait qu'il s'agit d'une $\boxed{\text{suite géométrique.}}$
De plus, on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 q^n = q^n.}$$

2. Calculer la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Comme $|q| < 1$, alors $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

3. On fixe $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

a) Combien y a-t-il de termes dans la somme S_n ?

La somme S_n contient $\boxed{n+1 \text{ termes.}}$

b) Donner une écriture simplifiée de S_n sous forme de fraction.

Il s'agit de reconnaître ici la somme des termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$. La formule de cette somme donne alors :

$$\boxed{S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.}$$

c) Calculer la limite de la suite (S_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Puisque $q^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on en déduit par des opérations sur les limites de suites que $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1-0}{1-q}$, donc finalement

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1-q}.}$$

4. Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $f_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$.

a) Que vaut $f_n(1)$?

$$\boxed{f_n(1) = \sum_{k=0}^{n} 1^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1.}$$

b) Pour $x \neq 1$, simplifier l'expression de $f_n(x)$.

En reprenant les résultats précédents, comme on a $f_n(q) = S_n$, avec $q = x$, on a

$$\boxed{f_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.}$$

c) Justifier que f_n est dérivable. Préciser sur quel domaine.

La fonction $\boxed{x \to f_n(x) \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$ car elle est somme de $n+1$ fonctions dérivables (fonctions puissances, $x \to x^k$ avec $k \in [\![0,n]\!]$).

d) Montrer que pour tout $x \in]0,1[$,

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

Il faut calculer de deux façons la dérivée de f_n : d'une part en utilisant la définition de f_n, en dérivant terme à terme, on obtient

$$\forall x \in]0,1[, \quad f_n'(x) = 1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k,$$

et d'autre part, en utilisant l'égalité

$$f_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x},$$

on obtient (quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas) :

$$f_n'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

Comme la dérivée d'une fonction est unique, on déduit des deux expressions précédentes que :

$$\boxed{\forall x \in]0;1[, \quad \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.}$$

e) En déduire que pour tout $x \in]0,1[$,

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k = \frac{(n+1)x^{n+2} - x^{n+1}(n+2) + 1}{(1-x)^2}.$$

$\boxed{\text{Il suffit d'appliquer l'égalité précédente en remplaçant } n \text{ par } n+1.}$

Exercice 4 Suites récurrentes *(6 points)*

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} - 3^n$.

Montrons par récurrence double cette formule.
Soit $\mathscr{P}$ le prédicat de la variable n défini sur $\mathbb{N}$ par :

$$\mathscr{P}(n) : u_n = 2^{n+1} - 3^n.$$

Initialisation
Pour $n = 0$, nous avons $u_0 = 1 = 2^{0+1} - 3^0 = 2 - 1$. Pour $n = 1$, nous avons $u_1 = 1 = 2^{1+1} - 3^1 = 4 - 3$.
Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies.

Hérédité
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ vraies, c'est-à-dire :

$$u_n = 2^{n+1} - 3^n \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2^{n+2} - 3^{n+1}.$$

Montrons que $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.
En appliquant la formule de récurrence de la suite (u_n), on a :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n \\ &= 5\left(2^{n+2} - 3^{n+1}\right) - 6\left(2^{n+1} - 3^n\right) \quad \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= 5 \times 2^{n+2} - 5 \times 3^{n+1} - 3 \times 2 \times 2^{n+1} + 2 \times 3 \times 3^n \\ &= 5 \times 2^{n+2} - 3 \times 2^{n+2} - 5 \times 3^{n+1} + 2 \times 3^{n+1} \\ &= 2 \times 2^{n+2} - 3 \times 3^{n+1} \\ &= 2^{n+3} - 3^{n+2}, \end{aligned}$$

d'où $\mathscr{P}(n+2)$, ce qui prouve que l'égalité attendue est héréditaire.
En appliquant le principe de récurrence, nous en concluons :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^{n+1} - 3^n.}$$

2. En remarquant que

$$u_n = 3^n \left(2\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right),$$

déterminer la limite de la suite (u_n).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc :

$$\begin{aligned} u_n &= 2^{n+1} - 3^n \\ &= 3^n \left(\frac{2^{n+1}}{3^n} - 1\right) \\ &= 3^n \left(2\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right) \end{aligned}$$

Or, $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$, donc $\left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par ailleurs, $3^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ Par somme et produit, nous obtenons ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty.}$$

Exercice 5 Polynômes de Tchebychev[1] *(12 points)*

Pour tout entier naturel n, on considère les polynômes T_n, définis sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \end{cases}$$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $T_2(x)$ puis $T_3(x)$.

Soit un réel x. Nous avons

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1,$$

$$\boxed{T_2(x) = 2x^2 - 1.}$$

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x.$$

$$\boxed{T_3(x) = 4x^3 - 3x.}$$

2. Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad T_n(-x) = (-1)^n T_n(x).$$

Quelle est la parité de la fonction T_n ?

Pour tout réel x, nous prouvons cette égalité par récurrence double.
Soit $\mathscr{P}$ le prédicat de la variable n défini sur $\mathbb{N}$ par :

$$\mathscr{P}(n) : T_n(-x) = (-1)^n T_n(x).$$

Initialisation
Nous avons

$$T_0(-x) = 1 = (-1)^0 \times 1 = (-1)^0 T_0(x),$$
$$T_1(-x) = -x = (-1)^1 \times x = (-1)^1 T_1(x).$$

Hérédité
Pour un entier $n \geqslant 1$, on suppose $\mathscr{P}(n-1)$ et $\mathscr{P}(n)$ vraies, c'est-à-dire :

$$T_{n-1}(-x) = (-1)^{n-1} T_{n-1}(x) \quad \text{et} \quad T_n(-x) = (-1)^n T_n(x).$$

1. Mathématicien russe (1821–1894)

Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire :

$$T_{n+1}(-x) = (-1)^{n+1} T_{n+1}(x).$$

En utilisant la relation de récurrence double et l'hypothèse de récurrence, il vient

$$\begin{aligned} T_{n+1}(-x) &= 2(-x)T_n(-x) - T_{n-1}(-x) \\ &= 2(-x)(-1)^n T_n(x) - (-1)^{n-1} T_{n-1}(x) \\ &= 2x(-1)^{n+1} T_n(x) - (-1)^{n+1} T_{n-1}(x) \quad (\text{car } (-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}) \\ &= (-1)^{n+1} \left[2xT_n(x) - T_{n-1}(x)\right] \\ &= (-1)^{n+1} T_{n+1}(x), \end{aligned}$$

d'où $\mathscr{P}(n+1)$, ce qui démontre que l'égalité proposée est héréditaire.
En appliquant le théorème de récurrence d'ordre deux, pour tout réel x, nous en concluons

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad T_n(-x) = (-1)^n T_n(x).}$$

Par disjonction, nous en déduisons deux cas.

- Si n est pair, alors

  $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad T_n(-x) = T_n(x),$$

  la fonction T_n est paire.
- Si n est impair, alors

  $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad T_n(-x) = -T_n(x),$$

  la fonction T_n est impaire.

3. Pour tout $u \in]1, +\infty[$, on pose $x = \dfrac{1}{2}\left(u + \dfrac{1}{u}\right)$.

a) Justifier que dans ce cas, $x > 1$.

Pour tout $u \in]1, +\infty[$, posons $g(u) = \dfrac{1}{2}\left(u + \dfrac{1}{u}\right)$.
Cette fonction est dérivable sur $]1, +\infty[$, par inverse et somme. Pour tout réel $u > 1$, nous avons

$$g'(u) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{u^2}\right) = \frac{u^2 - 1}{2u^2} > 0.$$

Nous en déduisons que la fonction g est strictement croissante sur $]1, +\infty[$. Puisque $g(1) = 1$, il en résulte :

$$\forall\, u \in]1, +\infty[, \quad g(u) > 1.$$

ce qui justifie que $\boxed{x = g(u) > 1.}$

b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n(x) = \frac{1}{2}\left(u^n + \frac{1}{u^n}\right).$$

Pour tout réel $u > 1$, nous montrons par une récurrence d'ordre 2 que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n(x) = \frac{1}{2}\left(u^n + \frac{1}{u^n}\right).$$

Soit $\mathscr{P}$ le prédicat de la variable n défini sur $\mathbb{N}$ par :

$$\mathscr{P}(n) : T_n(x) = \frac{1}{2}\left(u^n + \frac{1}{u^n}\right).$$

Initialisation
Pour tout $u \in]1, +\infty[$, on a

$$T_0(x) = 1 = \frac{1}{2}\left(u^0 + \frac{1}{u^0}\right),$$

$$T_1(x) = x = \frac{1}{2}\left(u^1 + \frac{1}{u^1}\right).$$

D'où $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$.

Hérédité
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Nous supposons $\mathscr{P}(n-1)$ et $\mathscr{P}(n)$ vraies, c'est-à-dire

$$T_{n-1}(x) = \frac{1}{2}\left(u^{n-1} + \frac{1}{u^{n-1}}\right) \quad \text{et} \quad T_n(x) = \frac{1}{2}\left(u^n + \frac{1}{u^n}\right).$$

Montrons $\mathscr{P}(n+1)$, c'est-à-dire

$$T_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left(u^{n+1} + \frac{1}{u^{n+1}}\right).$$

En utilisant la relation de récurrence double et l'hypothèse de récurrence, il vient

$$\begin{aligned}
T_{n+1} &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \\
&= 2x\frac{1}{2}\left(u^n + \frac{1}{u^n}\right) - \frac{1}{2}\left(u^{n-1} + \frac{1}{u^{n-1}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right)\left(u^n + \frac{1}{u^n}\right) - \frac{1}{2}\left(u^{n-1} + \frac{1}{u^{n-1}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[u^{n+1} + \frac{1}{u_{n-1}} + u^{n-1} + \frac{1}{u^{n+1}} - u^{n-1} - \frac{1}{u^{n-1}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(u^{n+1} + \frac{1}{u^{n+1}}\right),
\end{aligned}$$

d'où $\mathscr{P}(n+1)$, l'égalité attendue est donc héréditaire.
En appliquant le théorème de récurrence d'ordre deux, pour tout réel $x > 1$, nous en concluons

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n(x) = \frac{1}{2}\left(u^n + \frac{1}{u^n}\right).}$$

c) **En déduire que :**

$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad T_n(x) > 1.$$

Soient $u \in]1,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$.
Avec les notations ci-dessus, comme $u^n \in]1,+\infty[$, nous en déduisons

$$g(u^n) = \frac{1}{2}\left(u^n + \frac{1}{u^n}\right),$$

ce qui établit

$$\boxed{\forall x \in]1,+\infty[, \quad T_n(x) > 1.}$$

Remarque : En utilisant la parité de T_n, nous montrons que :

— *si n est pair, alors :*

$$\forall x \in]-\infty,-1[, \quad T_n(x) > 1,$$

— *si n est impair, alors :*

$$\forall x \in]-\infty,-1[, \quad T_n(x) < -1.$$

Par suite, l'équation $T_n(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R} \setminus [-1;1]$.

4. a) **Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, en utilisant les formules d'addition vues l'année dernière, montrer que**

$$2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b).$$

Pour tous les réels a et b, nous savons que :

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{cases}$$

ce qui induit, par addition membres à membres

$$2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b).$$

b) **Pour tout $x \in [-1,1]$, on pose $x = \cos\alpha$, avec $\alpha \in [0,\pi]$. Montrer que**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha).$$

Soient $x \in [-1,1]$ et $\alpha \in [0,\pi]$ tels que $x = \cos\alpha$.
Par une récurrence d'ordre 2, nous démontrons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha).$$

Pour tout $\alpha \in [0,\pi]$, soit $\mathscr{P}$ le prédicat de la variable n défini sur $\mathbb{N}$ par

$$\mathscr{P}(n) : \quad T_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$$

Initialisation

Pour tout $\alpha \in [0,\pi]$, on a

$$T_0(\cos\alpha) = 1 = \cos 0,$$

$$T_1(\cos\alpha) = \cos\alpha,$$

ce qui justifie que $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies.

Hérédité
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons $\mathscr{P}(n-1)$ et $\mathscr{P}(n)$ vraies, c'est-à-dire

$$T_{n-1}(\cos\alpha) = \cos\big((n-1)\alpha\big) \quad \text{et} \quad T_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha).$$

Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire

$$T_{n+1}(\cos\alpha) = \cos\big((n+1)\alpha\big).$$

En utilisant la relation de récurrence double, l'hypothèse de récurrence et la formule de transformation d'un produit en somme (démontrée à la question précédente), nous obtenons

$$\begin{aligned}
T_{n+1}(\cos\alpha) &= 2\cos\alpha T_n(\cos\alpha) - T_{n-1}(\cos\alpha)\\
&= 2\cos\alpha\cos(n\alpha) - \cos\big((n-1)\alpha\big)\\
&= \cos(n\alpha+\alpha) + \cos(n\alpha-\alpha) - \cos\big((n-1)\alpha\big)\\
&= \cos\big((n+1)\alpha\big),
\end{aligned}$$

d'où $\mathscr{P}(n+1)$. L'égalité proposée est donc héréditaire.
En appliquant le théorème de récurrence d'ordre deux, pour tout $\alpha \in [0,\pi]$, nous en concluons :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad T_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha).}$$

5. En déduire les solutions, dans l'intervalle $[-1,1]$, de l'équation

$$T_n(x) = 0.$$

En posant $x = \cos\alpha$, l'équation considérée devient

$$T_n(\cos\alpha) = 0 \iff \cos(n\alpha) = 0.$$

Ainsi, nous en déduisons

$$n\alpha \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \iff \exists\, k \in \mathbb{Z},\ n\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff \exists\, k \in \mathbb{Z},\ \alpha = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}.$$

Puisque $\alpha \in [0,\pi]$, l'entier relatif k est tel que

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \leqslant \pi &\iff 0 \leqslant \frac{1}{2n} + \frac{k}{n} \leqslant 1 \\
&\iff 0 \leqslant \frac{1+2k}{2n} \leqslant 1 \\
&\iff 0 \leqslant 1 + 2k \leqslant 2n \\
&\iff -\frac{1}{2} \leqslant k \leqslant n - \frac{1}{2} \\
&\iff k \in \left[-\frac{1}{2}, n - \frac{1}{2}\right].
\end{aligned}$$

Puisque $k \in \mathbb{Z}$, nous obtenons

$$k \in \left[-\frac{1}{2}, n - \frac{1}{2}\right] \cap \mathbb{Z} \iff k \in [\![0,n-1]\!].$$

Par conséquent, une solution dans l'intervalle $[-1,1]$ de l'équation $T_n(x) = 0$ est nécessairement de la forme

$$x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}, \quad k \in [\![0,n-1]\!].$$

Réciproquement, pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, les n réels x_k définis ci-dessus satisfont à

$$\begin{aligned}
T_n(x_k) &= T_n\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \\
&= \left(\cos n\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \\
&= \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ce qui prouve que ces derniers sont solutions de l'équation proposée.
Nous en concluons que l'équation $T_n(x) = 0$, admet dans $[-1,1]$, n solutions distinctes x_k définies par

$$x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}, \quad k \in [\![0,n-1]\!].$$

L'ensemble des solutions de l'équation est

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} \;\middle|\; k \in [\![0,n-1]\!]\right\}.}$$

Exercice 6 Applications et récurrence *(4 points)*

Soit $f : E \longrightarrow E$ une application. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit f^n par récurrence en posant :

$$\begin{cases} f^0 = \mathrm{Id}_E \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ f^{n+1} = f^n \circ f. \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{n+1} = f \circ f^n$

Par une récurrence simple, nous démontrons

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f^{n+1} = f \circ f^n.$$

Soit $\mathscr{P}$ le prédicat de la variable n défini sur $\mathbb{N}$ par

$$\mathscr{P}(n) : f^{n+1} = f \circ f^n.$$

Initialisation
On a

$$f^1 = \mathrm{Id}_E \circ f = f^0 \circ f,$$

d'où $\mathscr{P}(0)$.

Hérédité
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie au rang n, c'est-à-dire

$$f^{n+1} = f \circ f^n.$$

Montrons $\mathscr{P}(n+1)$, c'est-à-dire

$$f^{n+2} = f \circ f^{n+1}.$$

En utilisant la définition de f ainsi que l'hypothèse de récurrence, nous obtenons

$$\begin{array}{rcll} f^{n+2} & = & f^{n+1} \circ f & \\ & = & (f^n \circ f) \circ f & \\ & = & (f \circ f^n) \circ f & \text{(hypothèse de récurrence)} \\ & = & f \circ (f^n \circ f) & \text{(associativité de } \circ\text{)} \\ & = & f \circ f^{n+1} & \text{(définition de } f^{n+1}\text{)} \end{array}$$

d'où $\mathscr{P}(n+1)$. L'égalité proposée est donc héréditaire.
Par principe de récurrence, nous en concluons

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f^{n+1} = f \circ f^n = f^n \circ f.}$$

2. Montrer que si f est bijective, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, f^n est aussi bijective et $(f^n)^{-1} = (f^{-1})^n$.

On suppose f bijective. Montrons par récurrence simple la propriété $\mathscr{P}(n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\mathscr{P}(n) : \text{« } f^n \text{ est bijective et } (f^n)^{-1} = (f^{-1})^n \text{ »}$$

Initialisation
L'identité de E Id_E est bijective. Par ailleurs :

$$(f^{-1})^0 = \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E^{-1} = (f^0)^{-1}.$$

On a donc $\mathscr{P}(0)$ vraie.

Hérédité
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie au rang n. Montrons $\mathscr{P}(n+1)$.
Par hypothèse de récurrence, on a f^n bijective. On a également f bijective. Comme la bijectivité est stable par composition, on a $f^{n+1} = f \circ f^n$ bijective. Ainsi, f^{-1} et $(f^n)^{-1}$ existent et nous avons

$$(f^{n+1})^{-1} = (f \circ f^n)^{-1}.$$

Or, on sait que si f g sont deux applications bijectives, alors $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$. Il vient alors

$$\begin{aligned}
(f^{n+1})^{-1} &= (f^n)^{-1} \circ f^{-1} \\
&= (f^{-1})^n \circ f^{-1} \quad \text{(hypothèse de récurrence)} \\
&= (f^{-1})^{n+1},
\end{aligned}$$

d'où $\mathscr{P}(n+1)$. Ainsi, la proposition est héréditaire.
Par principe de récurrence, on a donc, si f est bijective :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f^n \text{ est bijective et } (f^n)^{-1} = (f^{-1})^n.}$$