



Lycée Saint Augustin
Classe de Terminale spécialité Mathématiques expertes

2025–2026
M. BERARD

MATHÉMATIQUES

CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 4

À rendre le Jeudi 8 Janvier 2026

Durée indicative : 6 heures

Barème : 24 points

RÉCURRENCE. COMBINATOIRE. SUITES.

Exercice 1 Exposants pairs ou impairs (*4 points*)

1. Pour tout entier naturel n , calculer les deux sommes :

$$s_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad s'_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}.$$

Par le binôme de Newton :

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = s_n$$

donc

$$\boxed{s_n = 2^n.}$$

De même,

$$(1-1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = s'_n.$$

Donc

$$\boxed{s'_n = (1-1)^n = 0 \quad \text{pour } n \geq 1,}$$

et à part :

$$s'_0 = 1.$$

2. En déduire que :

a) si n est pair, $\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2k} = 2^{n-1}$.

Si n est pair ($n = 2m$), on écrit

$$s_n = \sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} = \sum_{k=0}^m \binom{2m}{2k} + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{2k+1},$$

et

$$s'_n = \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k \binom{2m}{k} = \sum_{k=0}^m \binom{2m}{2k} - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{2k+1}.$$

En additionnant ces deux égalités :

$$s_n + s'_n = 2 \sum_{k=0}^m \binom{2m}{2k}.$$

Or $s_n = 2^{2m}$ et, pour $m \geq 1$, $s'_n = (1-1)^{2m} = 0$, donc

$$\sum_{k=0}^m \binom{2m}{2k} = 2^{2m-1} = 2^{n-1}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2k} = 2^{n-1}.}$$

b) si n est impair, $\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}$.

Si n est impair ($n = 2m + 1$), on écrit

$$s_n = \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{2k} + \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{2k+1},$$

et

$$s'_n = \sum_{k=0}^{2m+1} (-1)^k \binom{2m+1}{k} = \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{2k} - \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{2k+1}.$$

En soustrayant la seconde égalité à la première :

$$s_n - s'_n = 2 \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{2k+1}.$$

Or $s_n = 2^{2m+1}$ et $s'_n = (1-1)^{2m+1} = 0$, donc

$$\sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{2k+1} = 2^{2m} = 2^{n-1}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}.}$$

Exercice 2 Suites arithmético-géométriques¹ (4 points)

Soient a et b deux réels, $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b.$$

On se propose de calculer u_n en fonction de n et u_0 .

1. Traiter le cas $a = 1$.

Si $a = 1$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + b.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors une suite arithmétique de raison b . Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nb.}$$

1. Aussi appelées « Suites récurrentes linéaires d'ordre 1 »

2. On suppose désormais $a \neq 1$. Résoudre l'équation $x = ax + b$. On note ℓ la solution.

On a :

$$\begin{aligned} x = ax + b &\iff x - ax = b \\ &\iff (1 - a)x = b \\ &\iff x = \frac{b}{1 - a} \quad \text{car } a \neq 1 \end{aligned}$$

L'équation $x = ax + b$ a pour solution $\frac{b}{1 - a}$.

Dans la question suivante, il est inutile (voire toxique) de remplacer ℓ par sa valeur ; seule est utile l'équation

$$\ell = a\ell + b.$$

3. On pose, pour tout n dans \mathbb{N} :

$$v_n = u_n - \ell.$$

Montrer que $(v_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique. Conclure.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \ell \\ &= au_n + b - \ell \\ &= au_n + b - (a\ell + b) \\ &= a(u_n - \ell) \\ &= av_n \end{aligned}$$

Ainsi, $(v_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison a . Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0 a^n.$$

Par définition de $(v_n)_{n \geq 0}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + \ell$. Il vient donc :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n &= v_0 a^n + \ell \\ &= (v_0 - \ell)a^n + \ell \\ &= \left(v_0 - \frac{b}{1 - a}\right)a^n + \frac{b}{1 - a} \quad \text{car } \ell = \frac{b}{1 - a} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(v_0 - \frac{b}{1 - a}\right)a^n + \frac{b}{1 - a}}$$

4. À quelles conditions portant sur a et u_0 la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est-elle convergente ?

On suppose toujours $a \neq 1$ (le cas $a = 1$ conduit soit à une limite infinie, soit à une suite constante à u_0 si $b = 0$).

- Si $|a| < 1$, autrement dit $a \in]-1 ; 1[$, alors $a^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Ainsi :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell = \frac{b}{1-a}.$$

- Si $u_0 = \ell$, alors $u_n = \ell$ pour tout n .
- Si $a \notin]-1 ; 1[$, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ ne converge pas.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente si, et seulement si, $|a| < 1$ ou $u_0 = \ell$. Par conséquent,

$$(|a| < 1) \vee \left(u_0 = \frac{b}{1-a}\right) \iff u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{b}{1-a}.$$

Exercice 3 Lettres de l'alphabet (*4 points*)

Soit k un nombre entier compris entre 2 et 26.

Avec les 26 lettres de l'alphabet, combien peut-on former de mots de :

1. k lettres,

Un mot formé de k lettres est une k -liste avec répétitions, chaque lettre étant choisie dans l'ensemble des 26 lettres de l'alphabet.

Nous dénombrons ainsi

$$26^k$$

mots de k lettres.

2. k lettres distinctes,

Un mot formé de k lettres distinctes est une k -liste sans répétition, chaque lettre distincte étant choisie dans l'ensemble des 26 lettres de l'alphabet.

Nous dénombrons ainsi

$$A_{26}^k = \frac{26!}{(26 - k)!}$$

mots de k lettres distinctes.

3. k lettres, les deux premières lettres sont des voyelles distinctes,

Nous commençons par compter le nombre de 2-listes sans répétition de deux voyelles qui appartiennent à l'ensemble des 6 voyelles. Il y en a

$$A_6^2 = \frac{6!}{(6 - 2)!} = 6 \times 5 = 30.$$

Nous associons à chacune de ces 2-listes sans répétition les $(k - 2)$ -listes avec répétitions formées avec les 24 lettres qui sont encore à disposition dont le nombre est 24^{k-2} .

En appliquant le principe multiplicatif, nous obtenons

$$30 \times 24^{k-2}$$

mots de k lettres dont les deux premières lettres sont des voyelles distinctes.

4. **k lettres, les deux premières lettres sont des voyelles distinctes, les suivantes des consonnes distinctes.**

Comme dans la question précédente, nous comptons 30 façons pour commencer un mot par deux voyelles distinctes.

Pour chaque choix de ces deux voyelles distinctes, nous associons les $(k - 2)$ -listes sans répétitions formées avec les 20 consonnes distinctes. Leur nombre est

$$A_{20}^{k-2} = \frac{20!}{(20 - (k - 2))!} = \frac{20!}{(22 - k)!}.$$

En appliquant le principe multiplicatif, nous obtenons

$$30 \times \frac{20!}{(22 - k)!}$$

mots de k lettres dont les deux premières lettres sont des voyelles distinctes et les suivantes des consonnes distinctes.

Exercice 4 Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 (*8 points*)

Soient a et b deux nombres réels. On suppose que l'équation $x^2 = ax + b$ admet deux racines réelles distinctes λ et μ . On se propose de déterminer l'ensemble \mathcal{E} des suites réelles $(u_n)_{n \geq 0}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

1. Montrer que, pour α et β dans \mathbb{R} , la suite $(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n)_{n \geq 0}$ appartient à \mathcal{E} .

On fixe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et on pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$.

Rappelons que $\lambda^2 = a\lambda + b$ et $\mu^2 = a\mu + b$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} aW_{n+1} + bW_n &= a(\alpha\lambda^{n+1} + \beta\mu^{n+1}) + b(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n) \\ &= \alpha\lambda^n(a\lambda + b) + \beta\mu^n(a\mu + b) \\ &= \alpha\lambda^{n+2} + \beta\mu^{n+2} \\ &= W_{n+2}. \end{aligned}$$

On a bien $(W_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{E}$.

2. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ un élément de \mathcal{E} . Vérifier qu'il existe deux nombres réels α et β tels que

$$\alpha + \beta = u_0 \quad \text{et} \quad \alpha\lambda + \beta\mu = u_1.$$

On a :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = u_0 \\ \alpha\lambda + \beta\mu = u_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{u_0\mu - u_1}{\mu - \lambda} \\ \beta = \frac{u_1 - u_0\lambda}{\mu - \lambda} \end{cases}$$

Ceci prouve l'existence (et l'unicité) de (α, β) . On remarquera que $\lambda \neq \mu$.

3. Avec les notations de 2., montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n.$$

On raisonne par récurrence double sur n pour établir la propriété $\mathcal{P}_n : u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$.

Initialisation

Par choix de (α, β) , \mathcal{P}_0 et \mathcal{P}_1 sont vraies.

Héritéité

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que \mathcal{P}_n et \mathcal{P}_{n+1} soient vraies (HR). Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= au_{n+1} + bu_n \\ &= a(\alpha\lambda^{n+1} + \beta\mu^{n+1}) + b(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n) \quad \text{d'après (HR)} \\ &= \alpha\lambda^n(a\lambda + b) + \beta\mu^n(a\mu + b) \\ &= \alpha\lambda^{n+2} + \beta\mu^{n+2}. \end{aligned}$$

D'où \mathcal{P}_{n+2} .

Par principe de récurrence double, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui signifie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n.}$$

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n. \end{cases}$$

4. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n + 3^n.$$

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ a pour équation caractéristique $x^2 = 5x - 6$.

Comme $\lambda = 2$ et $\mu = 3$ sont solutions, les formules de la question 2. donnant α et β montrent que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n + 3^n.}$$

On suppose désormais que l'équation $x^2 = ax + b$ admet une unique racine réelle λ .

5. Montrer que, pour α et β dans \mathbb{R} , la suite $(\alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n)_{n \geq 0}$ appartient à \mathcal{E} .

On fixe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \alpha\lambda^n + n\beta\lambda^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappelons que $\lambda^2 = a\lambda + b$ et $2\lambda = a$ (formule d'addition des racines d'un polynôme). On a :

$$\begin{aligned} aV_{n+1} + bV_n &= a(\alpha\lambda^{n+1} + \beta(n+1)\lambda^{n+1}) + b(\alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n) \\ &= \alpha\lambda^n(a\lambda + b) + \beta\lambda^n a\lambda + n\beta\lambda^n(a\lambda + b) \\ &= \alpha\lambda^{n+2} + \beta(n+2)\lambda^{n+2} \\ &= V_{n+2} \end{aligned}$$

On a bien $(V_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{E}$.

6. Montrer que, si la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est un élément de \mathcal{E} , il existe deux nombres réels α et β tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n.$$

Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{cases} \alpha = u_0 \\ \alpha\lambda + \beta\lambda = u_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = u_0 \\ \beta = \frac{u_1 - u_0\lambda}{\lambda} \end{cases}$$

Il existe donc un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ solution du système.

Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}_n : u_n = \alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n$.

Initialisation

Par choix de (α, β) , \mathcal{P}_0 et \mathcal{P}_1 sont vraies.

Héritage Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que \mathcal{P}_n et \mathcal{P}_{n+1} soient vraies. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= au_{n+1} + bu_n \\ &= a(\alpha\lambda^{n+1} + \beta(n+1)\lambda^{n+1}) + b(\alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n) \\ &= \alpha\lambda^n(a\lambda + b) + \beta\lambda^n a\lambda + n\beta\lambda^n(a\lambda + b) \\ &= \alpha\lambda^{n+2} + \beta(n+2)\lambda^{n+2}. \end{aligned}$$

D'où \mathcal{P}_{n+2} .

Par principe de récurrence double, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui signifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n.$$

7. (Bonus +2 pts) Montrer que si l'équation $x^2 = ax + b$ ne comporte pas de solutions réelles, alors il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, ainsi que deux réels α et β tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = r^n (\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta)).$$

Si l'équation $x^2 = ax + b$ ne comporte pas de solutions réelles, elle comporte des solutions complexes z et \bar{z} .

Ainsi, en notant $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$, on a l'existence de $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que les solutions de l'équation caractéristique $x^2 = ax + b$ soient $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$. Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{cases} \alpha = u_0 \\ r(\alpha \cos(\theta) + \beta \sin(\theta)) = u_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = u_0 \\ \beta = \frac{u_1 - ru_0 \cos(\theta)}{r \sin(\theta)} \end{cases}$$

Il existe donc un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ solution du système.

En posant $A = \frac{\alpha}{2} - i\frac{\beta}{2} \in \mathbb{C}$, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} r^n (\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta)) &= r^n [2\Re(A) \cos(n\theta) - 2\Im(A) \sin(n\theta)] \\ &= r^n \times 2\Re(Ae^{in\theta}) \\ &= Ar^n e^{in\theta} + \overline{Ar^n} e^{-in\theta} \\ &= Az^n + \overline{A}\bar{z}^n \end{aligned}$$

Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}_n : u_n = Az^n + \overline{A}\bar{z}^n$.

Initialisation

Par choix de (α, β) , \mathcal{P}_0 et \mathcal{P}_1 sont vraies.

Héritage Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que \mathcal{P}_n et \mathcal{P}_{n+1} soient vraies.

Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= au_{n+1} + bu_n \\ &= a(Az^{n+1} + \overline{A}\bar{z}^{n+1}) + b(Az^n + \overline{A}\bar{z}^n) \\ &= Az^n(az + b) + \overline{A}\bar{z}^n(a\bar{z} + b) \\ &= Az^{n+2} + \overline{A}\bar{z}^{n+2} \quad \text{car } z^2 = az + b \end{aligned}$$

D'où \mathcal{P}_{n+2} .

Par principe de récurrence double, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui signifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = Az^n + \overline{A}\bar{z}^n.$$

Par définition de A , on obtient donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = r^n (\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta)).}$$