Chapitre 10 **Dérivation : compléments**

Dérivée de la composée de deux fonctions

Propriété (Dérivée d'une fonction composée) : Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et g une fonction dérivable sur un intervalle J telles que :

$$\forall\, x \in I, \quad u(x) \in J,$$

alors

- La fonction $g \circ u$ définie sur I est dérivable sur I.
- $\forall\, x \in I, \quad (g \circ u)'(x) = u'(x) \times (g' \circ u)(x)$.

▶ **Remarque :** Nous en déduisons

- En termes fonctionnels : $(g \circ u)' = \big((g' \circ u) \times u'\big)$.
- En termes différentiels : $\dfrac{d(g \circ u)}{dx} = \dfrac{dg}{du}\dfrac{du}{dx}$.

▶ **Exemples :** e^{-x^2}, $\sqrt{\sin x}$, $x^3 e^{\frac{1}{x}}$.

▶ **Propriété (généralisation de la dérivée de u^p) :** Soient u une fonction dérivable sur un intervalle I et p un entier relatif non nul ou un nombre rationnel du type

$$p = \frac{1}{n}, \quad \text{avec } n \geqslant 2.$$

Alors :

$$(u^p)' = pu'u^{p-1}.$$

▶ **Remarque :** Nous montrerons plus tard que cette formule de dérivation d'une composée s'étend aux exposants réels non nuls.

Dérivée seconde – Dérivée n-ième

▶ **Définition (dérivée seconde) :** Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée.
Si f' est elle-même dérivable sur I, la dérivée de f', notée f'' est la *dérivée seconde* de la fonction f.

▶ **Remarque :** En notation de Leibniz, nous avons $f'' = \dfrac{d^2 f}{dx^2}$.

▶ **Remarque :** Le signe de la dérivée seconde est utile, pour déterminer, si besoin est, le sens de variations de la dérivée f'. Ce dernier régule les tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ et induit la notion de convexité.

▶ **Définition (dérivée n-ième) :** Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $n \in \mathbb{N}$.
La *dérivée n-ième*, sous réserve d'existence, notée $f^{(n)}$, est définie en posant $f^{(0)} = f$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'.$$

▶ **Notation (rappel)** L'ensemble des fonctions dérivables $n \in \mathbb{N}^*$ fois sur un intervalle I est noté $\mathcal{D}^n(I)$.

▶ **Exemple (dérivée n-ième de la fonction inverse) :** Si f est la fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$, alors

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

▶ **Remarque :** Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I, par une récurrence immédiate, nous pouvons justifier

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$

et, pour tout λ réel,

$$(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}.$$

Par contre, c'est plus compliqué en ce qui concerne la dérivée n-ième d'un produit comme le montre la propriété suivante.

Propriété (Formule de Leibniz) : Soient f et g deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I.
Le produit fg est n fois dérivable sur I et, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, nous avons

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

▶ **Exemple :** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : x \longmapsto x^2 e^{-x}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En appliquant la formule de Leibniz, nous obtenons, pour tout réel x,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}\big(x^2 - 2nx + n(n-1)\big).$$

Fonction convexe

- **Définition (convexité) :** Une fonction f est *convexe* sur I si et seulement si, pour tous les réels $a,b \in I$ distincts, la partie de cette courbe comprise entre les points $A\big(a,f(a)\big)$ et $B\big(b,f(b)\big)$ de sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est située en dessous du segment $[AB]$ (appelé *corde*).
  Dans le cas contraire, la fonction est *concave*.
- **Exemples :** Les fonctions $x \longmapsto x^2$, $x \longmapsto |x|$, $x \longmapsto e^x$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.
  La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est convexe sur $]0,+\infty[$ et concave sur $]-\infty,0[$.
  Les fonctions affines sont à la fois convexes et concaves.
- **Propriété (Caractérisation de la convexité)** Une fonction f définie sur un intervalle I est convexe si et seulement si, pour tous les réels a et b appartenant à I tels que $a<b$,

$$f(ka+(1-k)b) \leqslant kf(a)+(1-k)f(b),$$

  avec k décrivant $[0,1]$.
- **Remarque :** La fonction f est concave si, et seulement si :

$$f(ka+(1-k)b) \geqslant kf(a)+(1-k)f(b), \quad \text{avec } k \in [0,1].$$

- **Exemple (inégalité triangulaire) :** La convexité de la fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}$ établit une preuve immédiate de l'inégalité triangulaire.
  En effet, pour tous les réels a et b,

$$\left|\frac{a+b}{2}\right| \leqslant \frac{|a|+|b|}{2},$$

  ce qui implique $|a+b| \leqslant |a|+|b|$.

Lemme : Soient deux réels a et b tels que $a<b$. Nous avons

$$\forall t \in [0,1], \quad ta+(1-t)b \in [a,b].$$

Propriété (Deuxième caractérisation de la convexité) : Soient f une fonction définie sur un intervalle I, $a \in I$ et $b \in I$ deux réels tels que $a<b$.
Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) f est convexe.
(ii) $\forall x \in [a,b], \quad f(x) \leqslant f(a)+(x-a)\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

- **Propriété (Dérivée croissante) :** Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a \in I$. Si la dérivée f' est croissante sur I alors

$$\forall x \in I, \quad f(x) \geqslant f(a)+(x-a)f'(a).$$

- **Exemple :** Pour tout entier $n \geqslant 2$, la fonction $p_n : x \longmapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $p : x \longmapsto nx^{n-1}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
  Cette fonction puissance est donc convexe sur $[0,+\infty[$.
  Pour tous les réels x et a positifs, il vient

$$x^n \geqslant a^n+(x-a)na^{n-1},$$

  c'est-à-dire

$$x^n \geqslant na^{n-1}x-(n-1)a^n.$$

  En particulier, pour $a=1$ et $x=1+t$, avec $t \geqslant 0$, nous retrouvons l'inégalité de Bernoulli

$$\forall t \geqslant 0, \quad (1+t)^n \geqslant 1+nt.$$

Propriété (Dérivée croissante et convexité) : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si la dérivée f' est croissante sur I, alors f est convexe.

- **Remarques :**
  - On peut démontrer que la réciproque de cette proposition est vraie (et c'est bien plus simple).
  - Si f est dérivable et f' décroissante sur I, alors f est concave.
- **Propriété (Action de la dérivée seconde)** Soit un intervalle I et une fonction $f \in \mathcal{D}^2(I)$.
  - $\forall x \in I,\ f''(x) \geqslant 0 \implies f$ est convexe.
  - $\forall x \in I,\ f''(x) \leqslant 0 \implies f$ est concave.
- **Exemple :**
  - La fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ est convexe sur les intervalles $\left]-\infty,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right[$
  - La fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ est concave sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.
- **Définition (point d'inflexion) :** Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
  Si f'' s'annule en $a \in I$ en changeant de signe, le point $A\big(a,f(a)\big)$ est un *point d'inflexion*.
- **Exemple :** En reprenant l'exemple précédent, la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ admet deux points d'inflexion d'abscisses $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Rolle et accroissements finis

- **Définition (extremum global) :** Soient f une fonction définie sur un intervalle I, m et M deux réels.
  On dit que :
  - La fonction f admet sur I le réel m pour minimum si et seulement si :

$$\forall x \in I,\ f(x) \geqslant m \quad \text{et} \quad \exists a \in I,\ f(a)=m.$$

  - La fonction f admet sur I le réel M pour maximum si et seulement si :

$$\forall x \in I,\ f(x) \leqslant M \quad \text{et} \quad \exists a \in I,\ f(a)=M.$$

- **Définition (extremum local) :** Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.
  On dit que $f(a)$ est un *maximum local* (respectivement un *minimum local*) de f sur I s'il existe un intervalle $J \subset I$ ouvert centré en $a \in J$ tel que $f(a)$ soit un maximum (respectivement un minimum) de f sur J.
- **Remarque :** Un extremum global est local.

Propriété (Condition nécessaire d'existence d'extremum local) : Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert et $a \in I$.
Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a)=0$.

Théorème de Rolle : Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et qui satisfait à $f(a) = f(b)$, alors

$$\exists\, c \in]a,b[, \quad f'(c) = 0.$$

- **Remarques :**
  - Ce théorème affirme que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet au moins une tangente parallèle à la droite des abscisses.
  - Il assure l'existence implicite d'au moins une solution dans l'intervalle ouvert $]a,b[$ de l'équation $f'(x) = 0$.
  - Les conditions pour appliquer le théorème de Rolle sont indispensables.

Théorème des accroissements finis : Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors

$$\exists\, c \in]a,b[, \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- **Propriété :** Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
  - Si f est croissante sur I, alors pour tout réel $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.
  - Si f est décroissante sur I, alors pour tout réel $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.
  - Si f est constante sur I, alors pour tout réel $x \in I$, $f'(x) = 0$.

Propriété (Principe de Lagrange) : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si, pour tout réel $x \in I$, on a
- $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I.
- $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.
- $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

- **Corollaire (Égalité de deux dérivées)** Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
  Si, pour tout réel $x \in I$, on a $f'(x) = g'(x)$, alors il existe $c \in I$ tel que
  $$f(x) = g(x) + c.$$
- **Exemple :** Un mobile est soumis à un mouvement rectiligne uniforme de vitesse v constante égale à v_0 en m.s^{-1}. Ainsi, pour tout réel $t \geqslant 0$, nous avons
  $$v(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt} = v_0.$$
  La loi horaire de ce mobile est donc
  $$x(t) = v_0 t + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$
  En considérant la condition initiale $x(0) = x_0$, nous obtenons $c = x_0$, soit
  $$x(t) = v_0 t + x_0.$$

Monotonie stricte : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
On suppose que l'ensemble

$$N = \{x \in I \mid f'(x) = 0\}$$

n'est pas une réunion d'intervalles non vides.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante strictement sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante strictement sur I.

- **Remarque :** Lorsque $N = \{x \in I \mid f'(x) = 0\}$ n'est pas une réunion d'intervalles non vides, on dit que les éléments de N sont des points « isolés ».
- **Corollaire :** Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
  - Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est croissante strictement sur I.
  - Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est décroissante strictement sur I.

Applications (vues en TD)

- **Propriété (Méthode de la sécante) :** Soient deux réels a et b tels que $a < b$. On considère une fonction f continue, croissante strictement et convexe sur $[a,b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$.
  Nous considérons la suite (x_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $x_0 = a$ et la relation de récurrence
  $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} f(x_n).$$
  Alors $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha$.
- **Propriété (Méthode de Newton) :** Soit f une fonction dérivable deux fois sur un intervalle I.
  Soient $a \in$ et $b \in I$ tels que $a < b$. Nous supposons :
  - $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$,
  - $\forall\, x \in [a,b]$, $f'(x) > 0$ et $f''(x) > 0$.

  Pour tout entier naturel n, nous désignons par :
  - $\mathcal{T}_n$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point M_n d'abscisse x_n,
  - x_{n+1} l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{T}_n$ avec la droite des abscisses.

  Ainsi, le réel $x_0 = b$ étant donné, la suite (x_n) est définie par la relation de récurrence
  $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$
  Nous avons alors $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha$.
- **Remarque :** Ces deux méthodes permettent de construire des algorithmes à convergence rapide pour déterminer des valeurs approchées de solutions d'équations du type $f(x) = 0$.
- **Théorème (Inégalités des accroissements finis) :** Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, avec $a < b$. Nous supposons qu'il existe deux réels m et M tels que
  $$\forall\, x \in]a,b[, \quad m \leqslant f'(x) \leqslant M.$$
  Alors
  $$m \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant M. \tag{1}$$
  Soit maintenant f une fonction dérivable sur un intervalle I et satisfaisant à
  $$\exists\, k > 0, \forall\, x \in I, \quad |f'(x)| \leqslant k,$$

alors, quels que soient les réels a et b appartenant à I,

$$|f(b) - f(a)| \leqslant k|b - a|. \qquad (2)$$

► **Propriété (Méthode du point fixe) :** Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur l'intervalle $]a,b[$.
Nous supposons

- $\forall\, x \in [a,b], \quad f(x) \in [a,b]$.
- $\exists\, k \in]0,1[,\ \forall\, x \in]a,b[, \quad |f'(x)| \leqslant k$.

Alors la suite (x_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $x_0 \in [a,b]$ et par la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = f(x_n)$$

converge vers l'unique solution α sur $[a,b]$ de l'équation $f(x) = x$.

!

► Pour les parties désignées par un symbole

Propriété : une démonstration est exigible.

► Une colle comporte une question de cours choisie *a priori* parmi celles indiquées dans le programme de la semaine en cours (normalement, ± 15 min).
► Un cours non appris sera sanctionné par une note inférieure à 10 (même si l'exercice est fait correctement !).