



Lycée Saint Augustin
Classe de Terminale spécialité Mathématiques expertes

2025–2026
M. BERARD

MATHÉMATIQUES

CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 4

À rendre le Jeudi 8 Janvier 2026
Durée indicative : 6 heures
Barème : 24 points

RÉCURRENCE. COMBINATOIRE. SUITES.

Exercice 1 Exposants pairs ou impairs (4 points)

1. Pour tout entier naturel n , calculer les deux sommes :

$$s_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad s'_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}.$$

Par le binôme de Newton :

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = s_n$$

donc

$$s_n = 2^n.$$

De même,

$$(1-1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = s'_n.$$

Donc

$$s'_n = (1-1)^n = 0 \quad \text{pour } n \geq 1,$$

et à part :

$$s'_0 = 1.$$

2. En déduire que :

a) si n est pair, $\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2k} = 2^{n-1}.$

Si n est pair ($n = 2m$), on écrit

$$s_n = \sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} = \sum_{k=0}^m \binom{2m}{2k} + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{2k+1},$$

et

$$s'_n = \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k \binom{2m}{k} = \sum_{k=0}^m \binom{2m}{2k} - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{2k+1}.$$

En additionnant ces deux égalités :

$$s_n + s'_n = 2 \sum_{k=0}^m \binom{2m}{2k}.$$

Or $s_n = 2^{2m}$ et, pour $m \geq 1$, $s'_n = (1-1)^{2m} = 0$, donc

$$\sum_{k=0}^m \binom{2m}{2k} = 2^{2m-1} = 2^{n-1}.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2k} = 2^{n-1}.$$

b) si n est impair, $\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}$.

Si n est impair ($n = 2m + 1$), on écrit

$$s_n = \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{2k} + \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{2k+1},$$

et

$$s'_n = \sum_{k=0}^{2m+1} (-1)^k \binom{2m+1}{k} = \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{2k} - \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{2k+1}.$$

En soustrayant la seconde égalité à la première :

$$s_n - s'_n = 2 \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{2k+1}.$$

Or $s_n = 2^{2m+1}$ et $s'_n = (1-1)^{2m+1} = 0$, donc

$$\sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{2k+1} = 2^{2m} = 2^{n-1}.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}.$$

Exercice 2 Suites arithmético-géométriques¹ (4 points)

Soient a et b deux réels, $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b.$$

On se propose de calculer u_n en fonction de n et u_0 .

1. Traiter le cas $a = 1$.

Si $a = 1$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + b.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors une suite arithmétique de raison b . Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nb.$$

¹. Aussi appelées « Suites récurrentes linéaires d'ordre 1 »

2. On suppose désormais $a \neq 1$. Résoudre l'équation $x = ax + b$. On note ℓ la solution.

On a :

$$\begin{aligned} x = ax + b &\iff x - ax = b \\ &\iff (1 - a)x = b \\ &\iff x = \frac{b}{1 - a} \quad \text{car } a \neq 1 \end{aligned}$$

L'équation $x = ax + b$ a pour solution $\frac{b}{1 - a}$.

Dans la question suivante, il est inutile (voire toxique) de remplacer ℓ par sa valeur ; seule est utile l'équation

$$\ell = a\ell + b.$$

3. On pose, pour tout n dans \mathbb{N} :

$$v_n = u_n - \ell.$$

Montrer que $(v_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique. Conclure.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \ell \\ &= au_n + b - \ell \\ &= au_n + b - (a\ell + b) \\ &= a(u_n - \ell) \\ &= av_n \end{aligned}$$

Ainsi, $(v_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison a . Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0 a^n.$$

Par définition de $(v_n)_{n \geq 0}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + \ell$. Il vient donc :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n &= v_0 a^n + \ell \\ &= (u_0 - \ell) a^n + \ell \\ &= \left(u_0 - \frac{b}{1 - a} \right) a^n + \frac{b}{1 - a} \quad \text{car } \ell = \frac{b}{1 - a} \end{aligned}$$

Ainsi,

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(u_0 - \frac{b}{1 - a} \right) a^n + \frac{b}{1 - a}$

4. À quelles conditions portant sur a et u_0 la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est-elle convergente ?

On suppose toujours $a \neq 1$ (le cas $a = 1$ conduit soit à une limite infinie, soit à une suite constante à u_0 si $b = 0$).

- Si $|a| < 1$, autrement dit $a \in]-1; 1[$, alors $a^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Ainsi :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell = \frac{b}{1-a}.$$

- Si $u_0 = \ell$, alors $u_n = \ell$ pour tout n .
- Si $a \notin]-1; 1[$, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ ne converge pas.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente si, et seulement si, $|a| < 1$ ou $u_0 = \ell$. Par conséquent,

$$(|a| < 1) \vee \left(u_0 = \frac{b}{1-a} \right) \iff u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{b}{1-a}.$$

Exercice 3 Lettres de l'alphabet (4 points)

Soit k un nombre entier compris entre 2 et 26.

Avec les 26 lettres de l'alphabet, combien peut-on former de mots de :

1. k lettres,

Un mot formé de k lettres est une k -liste avec répétitions, chaque lettre étant choisie dans l'ensemble des 26 lettres de l'alphabet.

Nous dénombrons ainsi

$$26^k$$

mots de k lettres.

2. k lettres distinctes,

Un mot formé de k lettres distinctes est une k -liste sans répétition, chaque lettre distincte étant choisie dans l'ensemble des 26 lettres de l'alphabet.

Nous dénombrons ainsi

$$A_{26}^k = \frac{26!}{(26-k)!}$$

mots de k lettres distinctes.

3. k lettres, les deux premières lettres sont des voyelles distinctes,

Nous commençons par compter le nombre de 2-listes sans répétition de deux voyelles qui appartiennent à l'ensemble des 6 voyelles. Il y en a

$$A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = 6 \times 5 = 30.$$

Nous associons à chacune de ces 2-listes sans répétition les $(k-2)$ -listes avec répétitions formées avec les 24 lettres qui sont encore à disposition dont le nombre est 24^{k-2} .

En appliquant le principe multiplicatif, nous obtenons

$$30 \times 24^{k-2}$$

mots de k lettres dont les deux premières lettres sont des voyelles distinctes.

4. k lettres, les deux premières lettres sont des voyelles distinctes, les suivantes des consonnes distinctes.

Comme dans la question précédente, nous comptons 30 façons pour commencer un mot par deux voyelles distinctes.

Pour chaque choix de ces deux voyelles distinctes, nous associons les $(k-2)$ -listes sans répétitions formées avec les 20 consonnes distinctes. Leur nombre est

$$A_{20}^{k-2} = \frac{20!}{(20 - (k-2))!} = \frac{20!}{(22-k)!}.$$

En appliquant le principe multiplicatif, nous obtenons

$$30 \times \frac{20!}{(22-k)!}$$

mots de k lettres dont les deux premières lettres sont des voyelles distinctes et les suivantes des consonnes distinctes.

Exercice 4 Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 (8 points)

Soient a et b deux nombres réels. On suppose que l'équation $x^2 = ax + b$ admet deux racines réelles distinctes λ et μ . On se propose de déterminer l'ensemble \mathcal{E} des suites réelles $(u_n)_{n \geq 0}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

1. Montrer que, pour α et β dans \mathbb{R} , la suite $(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n)_{n \geq 0}$ appartient à \mathcal{E} .

On fixe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et on pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$.

Rappelons que $\lambda^2 = a\lambda + b$ et $\mu^2 = a\mu + b$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} aW_{n+1} + bW_n &= a(\alpha\lambda^{n+1} + \beta\mu^{n+1}) + b(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n) \\ &= \alpha\lambda^n(a\lambda + b) + \beta\mu^n(a\mu + b) \\ &= \alpha\lambda^{n+2} + \beta\mu^{n+2} \\ &= W_{n+2}. \end{aligned}$$

$$\text{On a bien } (W_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{E}.$$

2. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ un élément de \mathcal{E} . Vérifier qu'il existe deux nombres réels α et β tels que

$$\alpha + \beta = u_0 \quad \text{et} \quad \alpha\lambda + \beta\mu = u_1.$$

On a :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = u_0 \\ \alpha\lambda + \beta\mu = u_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{u_0\mu - u_1}{\mu - \lambda} \\ \beta = \frac{u_1 - u_0\lambda}{\mu - \lambda} \end{cases}$$

Ceci prouve l'existence (et l'unicité) de (α, β) . On remarquera que $\lambda \neq \mu$.

3. Avec les notations de 2., montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n.$$

On raisonne par récurrence double sur n pour établir la propriété $\mathcal{P}_n : u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$.

Initialisation

Par choix de (α, β) , \mathcal{P}_0 et \mathcal{P}_1 sont vraies.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que \mathcal{P}_n et \mathcal{P}_{n+1} soient vraies (HR). Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= au_{n+1} + bu_n \\ &= a(\alpha\lambda^{n+1} + \beta\mu^{n+1}) + b(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n) \quad \text{d'après (HR)} \\ &= \alpha\lambda^n(a\lambda + b) + \beta\mu^n(a\mu + b) \\ &= \alpha\lambda^{n+2} + \beta\mu^{n+2}. \end{aligned}$$

D'où \mathcal{P}_{n+2} .

Par principe de récurrence double, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui signifie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n.}$$

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n. \end{cases}$$

4. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n + 3^n.$$

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ a pour équation caractéristique $x^2 = 5x - 6$.

Comme $\lambda = 2$ et $\mu = 3$ sont solutions, les formules de la question 2. donnant α et β montrent que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n + 3^n.}$$

On suppose désormais que l'équation $x^2 = ax + b$ admet une unique racine réelle λ .

5. Montrer que, pour α et β dans \mathbb{R} , la suite $(\alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n)_{n \geq 0}$ appartient à \mathcal{E} .

On fixe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \alpha\lambda^n + n\beta\lambda^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappelons que $\lambda^2 = a\lambda + b$ et $2\lambda = a$ (formule d'addition des racines d'un polynôme). On a :

$$\begin{aligned} aV_{n+1} + bV_n &= a(\alpha\lambda^{n+1} + \beta(n+1)\lambda^{n+1}) + b(\alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n) \\ &= \alpha\lambda^n(a\lambda + b) + \beta\lambda^n a\lambda + n\beta\lambda^n(a\lambda + b) \\ &= \alpha\lambda^{n+2} + \beta(n+2)\lambda^{n+2} \\ &= V_{n+2} \end{aligned}$$

On a bien $(V_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{E}$.

6. Montrer que, si la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est un élément de \mathcal{E} , il existe deux nombres réels α et β tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n.$$

Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{cases} \alpha = u_0 \\ \alpha\lambda + \beta\lambda = u_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = u_0 \\ \beta = \frac{u_1 - u_0\lambda}{\lambda} \end{cases}$$

Il existe donc un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ solution du système.

Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}_n : u_n = \alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n$.

Initialisation

Par choix de (α, β) , \mathcal{P}_0 et \mathcal{P}_1 sont vraies.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que \mathcal{P}_n et \mathcal{P}_{n+1} soient vraies. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= au_{n+1} + bu_n \\ &= a(\alpha\lambda^{n+1} + \beta(n+1)\lambda^{n+1}) + b(\alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n) \\ &= \alpha\lambda^n(a\lambda + b) + \beta\lambda^n a\lambda + n\beta\lambda^n(a\lambda + b) \\ &= \alpha\lambda^{n+2} + \beta(n+2)\lambda^{n+2}. \end{aligned}$$

D'où \mathcal{P}_{n+2} .

Par principe de récurrence double, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui signifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n.$$

7. (Bonus +2 pts) **Montrer que si l'équation $x^2 = ax + b$ ne comporte pas de solutions réelles, alors il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, ainsi que deux réels α et β tels que**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = r^n (\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta)).$$

Si l'équation $x^2 = ax + b$ ne comporte pas de solutions réelles, elle comporte des solutions complexes z et \bar{z} .

Ainsi, en notant $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$, on a l'existence de $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que les solutions de l'équation caractéristique $x^2 = ax + b$ soient $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$. Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{cases} \alpha = u_0 \\ r(\alpha \cos(\theta) + \beta \sin(\theta)) = u_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = u_0 \\ \beta = \frac{u_1 - ru_0 \cos(\theta)}{r \sin(\theta)} \end{cases}$$

Il existe donc un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ solution du système.

En posant $A = \frac{\alpha}{2} - i\frac{\beta}{2} \in \mathbb{C}$, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} r^n (\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta)) &= r^n [2\operatorname{Re}(A) \cos(n\theta) - 2\operatorname{Im}(A) \sin(n\theta)] \\ &= r^n \times 2\operatorname{Re}(Ae^{in\theta}) \\ &= Ar^n e^{in\theta} + \overline{A}r^n e^{-in\theta} \\ &= Az^n + \overline{A}\bar{z}^n \end{aligned}$$

Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}_n : u_n = Az^n + \overline{A}\bar{z}^n$.

Initialisation

Par choix de (α, β) , \mathcal{P}_0 et \mathcal{P}_1 sont vraies.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que \mathcal{P}_n et \mathcal{P}_{n+1} soient vraies.

Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= au_{n+1} + bu_n \\ &= a(Az^{n+1} + \overline{A}\bar{z}^{n+1}) + b(Az^n + \overline{A}\bar{z}^n) \\ &= Az^n(az + b) + \overline{A}\bar{z}^n(a\bar{z} + b) \\ &= Az^{n+2} + \overline{A}\bar{z}^{n+2} \quad \text{car } z^2 = az + b \end{aligned}$$

D'où \mathcal{P}_{n+2} .

Par principe de récurrence double, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui signifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = Az^n + \overline{A}\bar{z}^n.$$

Par définition de A , on obtient donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = r^n (\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta)).}$$