Lycée Saint Augustin
Classe de Terminale spécialité Mathématiques expertes

2025–2026
M. Berard

MATHÉMATIQUES

CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 4

À rendre le Jeudi 8 Janvier 2026

Durée indicative : 6 heures

Barème : 34 points

Récurrence. Combinatoire. Suites.

Exercice 1 Exposants pairs ou impairs *(6 points)*

1. *(2 pts)* **Pour tout entier naturel n, calculer les deux sommes :**

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad s'_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

Par le binôme de Newton :

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = s_n$$

donc

$$\boxed{s_n = 2^n.}$$

De même,

$$(1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = s'_n.$$

Donc

$$\boxed{s'_n = (1-1)^n = 0 \quad \text{pour } n \geq 1,}$$

et à part :

$$s'_0 = 1.$$

2. **En déduire que :**

   a) *(2 pts)* **si n est pair, $\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2k} = 2^{n-1}$.**

Si n est pair ($n = 2m$), on écrit

$$s_n = \sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m}{2k} + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{2k+1},$$

et

$$s'_n = \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k \binom{2m}{k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m}{2k} - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{2k+1}.$$

En additionnant ces deux égalités :

$$s_n + s'_n = 2 \sum_{k=0}^{m} \binom{2m}{2k}.$$

Or $s_n = 2^{2m}$ et, pour $m \geq 1$, $s'_n = (1-1)^{2m} = 0$, donc

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{2m}{2k} = 2^{2m-1} = 2^{n-1}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2k} = 2^{n-1}.}$$

b) *(2 pts)* **si n est impair,** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}$.

Si n est impair ($n = 2m+1$), on écrit

$$s_n = \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k} + \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k+1},$$

et

$$s'_n = \sum_{k=0}^{2m+1} (-1)^k \binom{2m+1}{k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k} - \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k+1}.$$

En soustrayant la seconde égalité à la première :

$$s_n - s'_n = 2\sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k+1}.$$

Or $s_n = 2^{2m+1}$ et $s'_n = (1-1)^{2m+1} = 0$, donc

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k+1} = 2^{2m} = 2^{n-1}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}.}$$

Exercice 2 Suites arithmético-géométriques[1] *(8 points)*

Soient a et b deux réels, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b.$$

On se propose de calculer u_n en fonction de n et u_0.

1. *(1 pt)* **Traiter le cas $a = 1$.**

Si $a = 1$, alors :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + b.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une suite arithmétique de raison b. Ainsi :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nb.}$$

1. Aussi appelées « Suites récurrentes linéaires d'ordre 1 »

2. *(1 pt)* **On suppose désormais $a \neq 1$. Résoudre l'équation $x = ax + b$. On note ℓ la solution.**

On a :

$$\begin{aligned} x = ax + b &\iff x - ax = b \\ &\iff (1-a)x = b \\ &\iff x = \frac{b}{1-a} \qquad \textit{car } a \neq 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'équation } x = ax + b \text{ a pour solution } \frac{b}{1-a}.}$$

Dans la question suivante, il est inutile (voire toxique) de remplacer ℓ par sa valeur ; seule est utile l'équation

$$\ell = a\ell + b.$$

3. *(3 pts)* **On pose, pour tout n dans $\mathbb{N}$:**

$$v_n = u_n - \ell.$$

Montrer que $(v_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite géométrique. Conclure.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \ell \\ &= au_n + b - \ell \\ &= au_n + b - (a\ell + b) \\ &= a(u_n - \ell) \\ &= av_n \end{aligned}$$

Ainsi, $(v_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite géométrique de raison a. Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0 a^n.$$

Par définition de $(v_n)_{n \geqslant 0}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + \ell$. Il vient donc :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n &= v_0 a^n + \ell \\ &= (u_0 - \ell) a^n + \ell \\ &= \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a} \qquad \textit{car } \ell = \frac{b}{1-a} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a}}$$

4. *(3 pts)* **À quelles conditions portant sur a et u_0 la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est-elle convergente ?**

On suppose toujours $a \neq 1$ (le cas $a = 1$ conduit soit à une limite infinie, soit à une suite constante à u_0 si $b = 0$).

- Si $|a| < 1$, autrement dit $a \in]-1\,;\,1[$, alors $a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell = \frac{b}{1-a}.$$

- Si $u_0 = \ell$, alors $u_n = \ell$ pour tout n.
- Si $a \notin]-1\,;\,1[$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente si, et seulement si, $|a| < 1$ ou $u_0 = \ell$. Par conséquent,

$$\boxed{(|a| < 1) \vee \left(u_0 = \frac{b}{1-a}\right) \iff u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{b}{1-a}.}$$

Exercice 3 Lettres de l'alphabet *(6 points)*

Soit k un nombre entier compris entre 2 et 26.
Avec les 26 lettres de l'alphabet, combien peut-on former de mots de :

1. *(1 pt)* k **lettres,**

Un mot formé de k lettres est une k-liste avec répétitions, chaque lettre étant choisie dans l'ensemble des 26 lettres de l'alphabet.
Nous dénombrons ainsi

$$\boxed{26^k}$$

mots de k lettres.

2. *(1 pt)* k **lettres distinctes,**

Un mot formé de k lettres distinctes est une k-liste sans répétition, chaque lettre distincte étant choisie dans l'ensemble des 26 lettres de l'alphabet.
Nous dénombrons ainsi

$$\boxed{A_{26}^k = \frac{26!}{(26-k)!}}$$

mots de k lettres distinctes.

3. *(2 pts)* k **lettres, les deux premières lettres sont des voyelles distinctes,**

Nous commençons par compter le nombre de 2-listes sans répétition de deux voyelles qui appartiennent à l'ensemble des 6 voyelles. Il y en a

$$A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = 6 \times 5 = 30.$$

Nous associons à chacune de ces 2-listes sans répétition les $(k-2)$-listes avec répétitions formées avec les 24 lettres qui sont encore à disposition dont le nombre est 24^{k-2}.
En appliquant le principe multiplicatif, nous obtenons

$$\boxed{30 \times 24^{k-2}}$$

mots de k lettres dont les deux premières lettres sont des voyelles distinctes.

4. *(2 pts)* k **lettres, les deux premières lettres sont des voyelles distinctes, les suivantes des consonnes distinctes.**

Comme dans la question précédente, nous comptons 30 façons pour commencer un mot par deux voyelles distinctes.
Pour chaque choix de ces deux voyelles distinctes, nous associons les $(k-2)$-listes sans répétitions formées avec les 20 consonnes distinctes. Leur nombre est

$$A_{20}^{k-2} = \frac{20!}{(20-(k-2))!} = \frac{20!}{(22-k)!}.$$

En appliquant le principe multiplicatif, nous obtenons

$$\boxed{30 \times \frac{20!}{(22-k)!}}$$

mots de k lettres dont les deux premières lettres sont des voyelles distinctes et les suivantes des consonnes distinctes.

Exercice 4 Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 *(14 points)*

Soient a et b deux nombres réels. On suppose que l'équation $x^2 = ax + b$ admet deux racines réelles distinctes λ et μ. On se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

1. *(2 pts)* **Montrer que, pour** α **et** β **dans** $\mathbb{R}$**, la suite** $(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n)_{n\geqslant 0}$ **appartient à** $\mathcal{E}$**.**

On fixe $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ et on pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$.
Rappelons que $\lambda^2 = a\lambda + b$ et $\mu^2 = a\mu + b$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} aW_{n+1} + bW_n &= a(\alpha\lambda^{n+1} + \beta\mu^{n+1}) + b(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n) \\ &= \alpha\lambda^n(a\lambda + b) + \beta\mu^n(a\mu + b) \\ &= \alpha\lambda^{n+2} + \beta\mu^{n+2} \\ &= W_{n+2}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{On a bien } (W_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{E}.}$

2. *(2 pts)* **Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ un élément de $\mathcal{E}$. Vérifier qu'il existe deux nombres réels α et β tels que**

$$\alpha+\beta=u_0 \quad \text{et} \quad \alpha\lambda+\beta\mu=u_1.$$

On a :

$$\begin{cases}\alpha+\beta=u_0\\ \alpha\lambda+\beta\mu=u_1\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha=\dfrac{u_0\mu-u_1}{\mu-\lambda}\\ \beta=\dfrac{u_1-u_0\lambda}{\mu-\lambda}\end{cases}$$

Ceci prouve l'existence (et l'unicité) de (α,β). On remarquera que $\lambda\neq\mu$.

3. *(3 pts)* **Avec les notations de 2., montrer que**

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\alpha\lambda^n+\beta\mu^n.$$

On raisonne par récurrence double sur n pour établir la propriété $\mathscr{P}_n : u_n=\alpha\lambda^n+\beta\mu^n$.

Initialisation
Par choix de (α,β), $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$ sont vraies.

Hérédité
Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ soient vraies (HR). Alors :

$$\begin{aligned}u_{n+2}&=au_{n+1}+bu_n\\ &=a(\alpha\lambda^{n+1}+\beta\mu^{n+1})+b(\alpha\lambda^n+\beta\mu^n)\quad \textit{d'après (HR)}\\ &=\alpha\lambda^n(a\lambda+b)+\beta\mu^n(a\mu+b)\\ &=\alpha\lambda^{n+2}+\beta\mu^{n+2}.\end{aligned}$$

D'où $\mathscr{P}_{n+2}$.
Par principe de récurrence double, $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$, ce qui signifie :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\alpha\lambda^n+\beta\mu^n.}$$

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par :

$$\begin{cases}u_0=2\\ u_1=5\\ \forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+2}=5u_{n+1}-6u_n.\end{cases}$$

4. *(2 pts)* **Montrer que**

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=2^n+3^n.$$

La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ a pour équation caractéristique $x^2=5x-6$.
Comme $\lambda=2$ et $\mu=3$ sont solutions, les formules de la question **2.** donnant

α et β montrent que :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n + 3^n.}$$

On suppose désormais que l'équation $x^2 = ax + b$ admet une unique racine réelle λ.

5. *(2 pts)* **Montrer que, pour α et β dans $\mathbb{R}$, la suite $(\alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n)_{n\geqslant 0}$ appartient à $\mathcal{E}$.**

On fixe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \alpha\lambda^n + n\beta\lambda^n$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappelons que $\lambda^2 = a\lambda + b$ et $2\lambda = a$ (formule d'addition des racines d'un polynôme). On a :

$$\begin{aligned} aV_{n+1} + bV_n &= a(\alpha\lambda^{n+1} + \beta(n+1)\lambda^{n+1}) + b(\alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n) \\ &= \alpha\lambda^n(a\lambda + b) + \beta\lambda^n a\lambda + n\beta\lambda^n(a\lambda + b) \\ &= \alpha\lambda^{n+2} + \beta(n+2)\lambda^{n+2} \\ &= V_{n+2} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{On a bien } (V_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{E}.}$

6. *(3 pts)* **Montrer que, si la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est un élément de $\mathcal{E}$, il existe deux nombres réels α et β tels que**

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n.$$

Pour $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{cases} \alpha = u_0 \\ \alpha\lambda + \beta\lambda = u_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = u_0 \\ \beta = \dfrac{u_1 - u_0\lambda}{\lambda} \end{cases}$$

Il existe donc un unique couple $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ solution du système.
Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}_n$: $u_n = \alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n$.

Initialisation
Par choix de (α,β), $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$ sont vraies.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ soient vraies. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= au_{n+1} + bu_n \\ &= a(\alpha\lambda^{n+1} + \beta(n+1)\lambda^{n+1}) + b(\alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n) \\ &= \alpha\lambda^n(a\lambda + b) + \beta\lambda^n a\lambda + n\beta\lambda^n(a\lambda + b) \\ &= \alpha\lambda^{n+2} + \beta(n+2)\lambda^{n+2}. \end{aligned}$$

D'où $\mathscr{P}_{n+2}$.
Par principe de récurrence double, $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui signifie :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n.}$$

7. *(Bonus +4 pts)* **Montrer que si l'équation $x^2 = ax + b$ ne comporte pas de solutions réelles, alors il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, ainsi que deux réels α et β tels que**

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = r^n\big(\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta)\big).$$

Si l'équation $x^2 = ax + b$ ne comporte pas de solutions réelles, elle comporte des solutions complexes z et $\overline{z}$.
Ainsi, en notant $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$, on a l'existence de $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que les solutions de l'équation caractéristique $x^2 = ax + b$ soient $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$.
Pour $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{cases} \alpha = u_0 \\ r\big(\alpha\cos(\theta) + \beta\sin(\theta)\big) = u_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = u_0 \\ \beta = \dfrac{u_1 - ru_0\cos(\theta)}{r\sin(\theta)} \end{cases}$$

Il existe donc un unique couple $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ solution du système.

En posant $A = \dfrac{\alpha}{2} - i\dfrac{\beta}{2} \in \mathbb{C}$, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} r^n\big(\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta)\big) &= r^n\left[2\mathcal{R}e(A)\cos(n\theta) - 2\mathcal{I}m(A)\sin(n\theta)\right] \\ &= r^n \times 2\mathcal{R}e(Ae^{in\theta}) \\ &= Ar^ne^{in\theta} + \overline{A}r^ne^{-in\theta} \\ &= Az^n + \overline{A}\overline{z}^n \end{aligned}$$

Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}_n$: $u_n = Az^n + \overline{A}\overline{z}^n$.

Initialisation
Par choix de (α,β), $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$ sont vraies.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ soient vraies.
Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= au_{n+1} + bu_n \\ &= a(Az^{n+1} + \overline{A}\overline{z}^{n+1}) + b(Az^n + \overline{A}\overline{z}^n) \\ &= Az^n(az + b) + \overline{A}\overline{z}^n(a\overline{z} + b) \\ &= Az^{n+2} + \overline{A}\overline{z}^{n+2} \quad \textit{car } z^2 = az + b \end{aligned}$$

D'où $\mathscr{P}_{n+2}$.
Par principe de récurrence double, $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui signifie :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = Az^n + \overline{A}\overline{z}^n.$$

Par définition de A, on obtient donc :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = r^n\big(\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta)\big).}$$