



Correction du TD 11 Dérivation : compléments

Exercice 1 (★☆☆☆) Q.C.M. Pour chaque question de ce Q.C.M, il y a deux réponses exactes sur les 4 proposées.

1. On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, et on note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
 - a) L'ensemble de définition \mathcal{D} de f est égal à $[-1,1]$.
 - b) f est dérivable en 1.
 - c) L'équation réduite de la tangente \mathcal{T} à \mathcal{C} en son point d'abscisse $\frac{\sqrt{3}}{2}$ est $y = \sqrt{3}x - 1$.
 - d) La courbe représentative \mathcal{C} dans le repère orthonormé donné est un demi-cercle.

Réponses : a) et d).

- a) Vrai : $1 - x^2 \geq 0 \iff x \in [-1,1]$.
- b) Faux : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$ (tangente verticale).
- c) Faux : $f(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{2}$ et $f'(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{-2(\frac{\sqrt{3}}{2})}{2(1/2)} = -\sqrt{3}$. L'équation est $y - \frac{1}{2} = -\sqrt{3}(x - \frac{\sqrt{3}}{2}) \iff y = -\sqrt{3}x + 2$.
- d) Vrai : $y = \sqrt{1-x^2} \implies y^2 + x^2 = 1$ avec $y \geq 0$.

2. On considère la fonction polynôme du troisième degré $P : x \mapsto x^3 - 3x + 2$ et on désigne par \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère du plan.
 - a) $f(1) = f'(1) = 0$.
 - b) f est croissante sur l'intervalle $[-2,0]$.
 - c) $f(1)$ est le minimum de f sur \mathbb{R} .
 - d) Le point $A(0,2)$ est un point d'inflexion de \mathcal{C} .

Réponses : a) et d). Calculs : $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. $f''(x) = 6x$.

- a) Vrai : $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$ et $f'(1) = 3 - 3 = 0$.
- b) Faux : f décroît sur $[-1,1]$, donc n'est pas croissante sur $[-2,0]$ entier.
- c) Faux : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
- d) Vrai : $f''(x)$ s'annule en changeant de signe en $x = 0$, et $f(0) = 2$.

Exercice 2 (★☆☆☆) Pour chacune des fonctions ci-après, déterminer l'ensemble de définition et calculer la dérivée.

- | | | |
|--------------------------------------|---------------------------------------|---|
| 1. $a : x \mapsto x^3 \cos(5x + 1)$ | 4. $d : x \mapsto e^{\sqrt{x^2+x+1}}$ | 6. $g : x \mapsto \frac{\cos(2x)}{x^2 - 2}$ |
| 2. $b : x \mapsto e^{\cos x}$ | 5. $f : x \mapsto \frac{x}{x^2 + 1}$ | 7. $h : x \mapsto \frac{x}{\sin(x)}$ |
| 3. $c : x \mapsto e^{x^3+2x^2+3x+4}$ | | |

1. $D_a = \mathbb{R}$. $a'(x) = 3x^2 \cos(5x + 1) - 5x^3 \sin(5x + 1)$.
2. $D_b = \mathbb{R}$. $b'(x) = -\sin(x)e^{\cos x}$.

3. $D_c = \mathbb{R}$. $c'(x) = (3x^2 + 4x + 3)e^{x^3+2x^2+3x+4}$.
4. $D_d = \mathbb{R}$ (car $\Delta < 0$ pour le trinôme sous la racine). $d'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}e^{\sqrt{x^2+x+1}}$.
5. $D_f = \mathbb{R}$. $f'(x) = \frac{1(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.
6. $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$. $g'(x) = \frac{-2\sin(2x)(x^2-2) - 2x\cos(2x)}{(x^2-2)^2}$.
7. $D_h = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. $h'(x) = \frac{1\sin(x) - x\cos(x)}{\sin^2(x)}$.

Exercice 3 (★☆☆☆) Soient f et g deux fonctions deux fois dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On pose $h = g \circ f$. Si $x \in \mathbb{R}$, donner une expression de $h''(x)$.

On a $h'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$. En dérivant un produit et une composée :

$$h''(x) = f''(x)g'(f(x)) + f'(x) \times [f'(x)g''(f(x))] = f''(x)g'(f(x)) + (f'(x))^2 g''(f(x)).$$

Exercice 4 (★☆☆☆) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

Par récurrence. Pour $n = 0$, $\cos(x) = \cos(x)$.
Supposons la propriété vraie au rang n . Alors :

$$\cos^{(n+1)}(x) = \left(\cos^{(n)}\right)'(x) = \left(\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right)' = -\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Or $-\sin(X) = \cos\left(X + \frac{\pi}{2}\right)$, d'où :

$$\cos^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right).$$

Exercice 5 (★☆☆☆) Dérivée d'une fonction paire, impaire, périodique

Soit f une fonction dérivable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

1. On suppose f paire. Que dire de f' ?
2. Même question si f est impaire.
3. Même question si f est périodique de période T , où $T \in \mathbb{R}_+^*$.

1. $f(-x) = f(x) \implies -f'(-x) = f'(x) \implies f'(-x) = -f'(x)$. f' est **impaire**.
2. $f(-x) = -f(x) \implies -f'(-x) = -f'(x) \implies f'(-x) = f'(x)$. f' est **paire**.
3. $f(x+T) = f(x) \implies f'(x+T) = f'(x)$. f' est **T -périodique**.

Exercice 6 (★☆☆☆) Recherche de maximum

Soit n dans \mathbb{N}^* . Calculer le maximum de la fonction f_n définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

f_n est dérivable sur \mathbb{R}_+ .

$$f'_n(x) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} = x^{n-1}e^{-x}(n-x).$$

Sur \mathbb{R}_+ , $f'_n(x)$ est du signe de $n-x$. f_n est croissante sur $[0, n]$ et décroissante sur $[n, +\infty[$. Le maximum est atteint en n :

$$\max(f_n) = f_n(n) = n^n e^{-n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Exercice 7 (★★☆☆) Dérivées d'ordre n

Déterminer les dérivées d'ordre n (où $n \in \mathbb{N}^*$) des fonctions f et g suivantes :

1. $f : x \mapsto xe^x$.
2. $g = \sin$.

1. Formule de Leibniz avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$. Comme $u^{(k)} = 0$ pour $k \geq 2$:

$$f^{(n)}(x) = x(e^x)^{(n)} + n(1)(e^x)^{(n-1)} = xe^x + ne^x = (x+n)e^x.$$

2. Comme pour le cosinus : $g^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

Exercice 8 (★★☆☆) Fonctions à dérivée n -ième nulle

Déterminer les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , n fois dérivables sur \mathbb{R} et dont la dérivée n -ième est identiquement nulle.

Ce sont les fonctions polynomiales de degré au plus $n-1$.

Exercice 9 (★★☆☆) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le maximum de la fonction f_n définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

Voir exercice 6 (identique). Le maximum est $(n/e)^n$, atteint en $x = n$.

Exercice 10 (★★☆☆) Pendule simple

Soient un pendule simple de masse m et de longueur ℓ , θ l'angle que fait le pendule avec la « verticale descendante » ; alors θ dépend du temps t et obéit à l'équation différentielle :

$$\theta''(t) + \frac{g}{\ell} \sin(\theta(t)) = 0.$$

L'énergie du pendule au temps t est donnée par la formule :

$$E(t) = \frac{m\ell^2\theta'(t)^2}{2} - mg\ell \cos(\theta(t)).$$

Montrer que E est constante (conservation de l'énergie).

On dérive E par rapport au temps t :

$$E'(t) = \frac{m\ell^2}{2} \cdot 2\theta'(t)\theta''(t) - mg\ell(-\sin(\theta(t)) \cdot \theta'(t))$$

$$E'(t) = m\ell^2\theta'(t) \left[\theta''(t) + \frac{g}{\ell} \sin(\theta(t)) \right]$$

Or, d'après l'équation différentielle, le terme entre crochets est nul. Donc $E'(t) = 0$, et E est constante.

Exercice 11 (★★★☆☆) Dérivée n -ième de $x \mapsto x^2 e^x$

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 e^x$.

1. Pour tout entier $n \geq 1$, montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = (x^2 + a_n x + b_n) e^x.$$

2. Expliciter $f^{(n)}(x)$ en fonction de n et x .

1. On dérive : $f^{(n+1)}(x) = (2x + a_n)e^x + (x^2 + a_n x + b_n)e^x = (x^2 + (a_n + 2)x + (a_n + b_n))e^x$. On a les récurrences $a_{n+1} = a_n + 2$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$, avec $a_0 = 0, b_0 = 0$ (ou $n = 1$ directement).
 2. Plus simple avec Leibniz : $f^{(n)}(x) = x^2(e^x)^{(n)} + n(2x)(e^x)^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2}(2)(e^x)^{(n-2)}$.

$$f^{(n)}(x) = e^x (x^2 + 2nx + n(n-1)).$$

Donc $a_n = 2n$ et $b_n = n(n-1)$.

Exercice 12 (★★★☆☆) Limites et taux d'accroissement

Soit f une fonction dérivable en a appartenant à un intervalle ouvert I .

1. Calculer la limite quand h tend vers 0 des fonctions suivantes :

a) $h \mapsto \frac{(a+h)f(a) - af(a+h)}{h}$.

b) $h \mapsto \frac{(a+nh)f(a) - af(a+h)}{h}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Calculer la limite quand x tend vers a de la fonction

$$x \mapsto \frac{e^{-a}f(x) - e^{-x}f(a)}{x-a}.$$

1. a) $\frac{af(a)+hf(a)-af(a+h)}{h} = f(a) - a \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(a) - af'(a)$.
 b) De même : $\frac{af(a)+nhf(a)-af(a+h)}{h} = nf(a) - a \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} nf(a) - af'(a)$ (Attention ici le terme variable $f(a+h)$ est le même, seul le coeff devant $f(a)$ change). *Correction du raisonnement pour b) si c'était $f(a+nh)$: ce serait $f(a) - naf'(a)$. Ici l'énoncé est bien $(a+nh)f(a)$.*
 2. On reconnaît le taux d'accroissement de $g(x) = e^{-x}f(x)$ en a . $g'(x) = -e^{-x}f(x) + e^{-x}f'(x)$. Donc la limite est $g'(a) = e^{-a}(f'(a) - f(a))$.

Exercice 13 (★★★☆☆) Dérivée de la bijection réciproque

Soient I et J deux intervalles ouverts non vides. Soit f une bijection de I sur J où $f^{-1} : J \rightarrow I$ est la bijection réciproque de f . Montrer que si f est dérivable sur I et que si, de plus, f' ne s'annule pas sur I , alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$\forall y \in J, \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

On part de l'identité $\forall y \in J, f(f^{-1}(y)) = y$. f est dérivable et f^{-1} est continue (admis pour une bijection sur un intervalle). En dérivant la composée : $(f^{-1})'(y) \times f'(f^{-1}(y)) = 1$. Comme f' ne s'annule pas, on peut diviser : $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Exercice 14 (★★★★) Méthode de la sécante

Soient deux réels a et b tels que $a < b$. On considère une fonction f continue, croissante strictement et convexe sur $[a, b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$. On désigne par A et B les deux points de \mathcal{C}_f d'abscisses respectives a et b .

1. Justifier l'existence d'un unique réel $\alpha \in]a, b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
2. Déterminer une équation de la droite (AB) .
3. En déduire que l'abscisse x_1 du point d'intersection de la sécante (AB) avec la droite des abscisses satisfait à

$$x_1 = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)}f(a).$$

4. En répétant ce procédé, nous considérons la suite (x_n) définie sur \mathbb{N} par son premier terme $x_0 = a$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{b-x_n}{f(b)-f(x_n)}f(x_n).$$

En utilisant la convexité de la fonction f , prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \leq \alpha.$$

En déduire le sens de variation de la suite (x_n) .

5. Justifier que (x_n) converge vers le réel α .
6. Nous supposons que $f : x \mapsto x^3 - 4x - 2$. Proposer un algorithme qui restitue une valeur approchée d'une solution $\alpha \in [2, 3]$ de l'équation $f(x) = 0$.

1. f est continue et strictement croissante, $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. D'après le théorème de la bijection (ou TVI strict), il existe un unique $\alpha \in]a, b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
2. Pente $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Équation : $y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$.
3. On cherche x_1 tel que $y = 0$: $-f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_1 - a) \iff x_1 - a = -f(a) \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$. D'où le résultat.
4. **Position** : f est convexe, donc sa courbe est située au-dessous de ses sécantes. Sur $[x_n, b]$, la corde $(M_n B)$ est au-dessus de \mathcal{C}_f . Comme f est croissante et $f(b) > 0$, la corde coupe l'axe des abscisses en un point x_{n+1} situé *avant* le point où la courbe coupe l'axe (qui est α). Donc $x_{n+1} \leq \alpha$. Par récurrence, $x_n \leq \alpha$. **Variation** : f croissante et $x_n \leq \alpha \implies f(x_n) \leq 0$. Or $x_{n+1} - x_n = -f(x_n) \frac{b-x_n}{f(b)-f(x_n)}$. Le ratio est positif (car $b > x_n$ et $f(b) > f(x_n)$), et $-f(x_n) \geq 0$. Donc $x_{n+1} \geq x_n$. La suite est **croissante**.
5. (x_n) est croissante et majorée par α , donc elle converge vers $\ell \in]a, \alpha]$. En passant à la limite dans la récurrence, on obtient $f(\ell) = 0$, donc $\ell = \alpha$.
6. Algorithme classique de la sécante (ou *regula falsi*).

Exercice 15 (★★★★) Méthode de Newton

Soit f une fonction dérivable deux fois sur un intervalle I . Soient $a \in I$ et $b \in I$ tels que $a < b$. Nous supposons :

- $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$,
- $\forall x \in [a, b], f'(x) > 0$ et $f''(x) > 0$.

1. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]a, b[$.
2. a) Soit \mathcal{T}_0 la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point M_0 d'abscisse $x_0 = b$. Déterminer l'abscisse x_1 du point d'intersection de \mathcal{T}_0 avec la droite des abscisses.
b) Soit \mathcal{T}_1 la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point M_1 d'abscisse x_1 . Déterminer l'abscisse x_2 du point d'intersection de \mathcal{T}_1 avec la droite des abscisses.
3. En réitérant ce processus, pour tout entier naturel n , nous désignons par :
 - \mathcal{T}_n la tangente à \mathcal{C}_f au point M_n d'abscisse x_n ,
 - x_{n+1} l'abscisse du point d'intersection de \mathcal{T}_n avec la droite des abscisses.

Montrer que, le réel $x_0 = b$ étant donné, la suite (x_n) est définie par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

4. a) Justifier que la suite (x_n) est minorée par α .
b) Quel est le sens de variation de cette suite ?
c) La suite (x_n) converge vers le réel α . Expliquez pourquoi.

1. f strictement croissante ($f' > 0$) et continue sur $[a, b]$, change de signe. TVI strict \implies unique α .
2. Équation tangente en x_n : $y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$. Intersection axe des abscisses ($y = 0$) : $0 = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n) \implies x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Cela prouve la question 3 directement par récurrence.
3. (Voir ci-dessus).
4. a) f est convexe ($f'' > 0$), donc sa courbe est au-dessus de ses tangentes. Ainsi $0 = f(x_{n+1}) + (\dots) \implies f(x_{n+1}) \geq 0$ (par position relative tangente/courbe, l'annulation de la tangente se fait "avant" l'annulation de la courbe). Plus rigoureusement : $f(x) \geq f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$. En $x = x_{n+1}$, le membre de droite est nul. Donc $f(x_{n+1}) \geq 0 = f(\alpha)$. Comme f croissante, $x_{n+1} \geq \alpha$.
b) $x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Comme $x_n \geq \alpha$, $f(x_n) \geq 0$. Et $f' > 0$. Donc $x_{n+1} - x_n \leq 0$. La suite est **décroissante**.
c) Décroissante et minorée par α , elle converge vers ℓ . Les limites donnent $\ell = \ell - f(\ell)/f'(\ell) \implies f(\ell) = 0 \implies \ell = \alpha$.

Exercice 16 (★★★★) La fonction sinus cardinal

La fonction sinus cardinal, notée ici sinc, est définie par :

$$\begin{cases} \text{sinc}(0) = 1 \\ \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}. \end{cases}$$

1. Étudier la parité de sinc.
2. Montrer que sinc est continue en 0. Quelle est sa limite en $\pm\infty$?
3. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, calculer $\text{sinc}'(x)$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction tan admet un unique point fixe sur l'intervalle $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ que l'on note x_n .
5. Montrer que les x_n pour $n \in \mathbb{Z}$ sont les points en lesquels sinc' s'annule.

1. $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \text{sinc}(x)$. Fonction **paire**.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = \text{sinc}(0)$ (taux d'accroissement du sinus). Continue. En $\pm\infty$, $|\text{sinc}(x)| \leq 1/|x| \rightarrow 0$.
3. $\text{sinc}'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$.
4. Sur $I_n =]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$, la fonction $x \mapsto \tan x - x$ est strictement croissante (dérivée $\tan^2 x > 0$). Limites $-\infty$ et $+\infty$ aux bornes. Unique zéro x_n (bijection).
5. $\text{sinc}'(x) = 0 \iff x \cos x = \sin x \iff x = \tan x$ (pour $\cos x \neq 0$, ce qui est vrai aux points d'annulation car sinon $\sin x = 0$ et $x = 0$, mais ici on est sur \mathbb{R}^*). 0 est aussi solution de $x \cos x - \sin x = 0$.

Exercice 17 (★★★★) Inégalités des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, avec $a < b$.

1. Nous supposons qu'il existe deux réels m et M tels que $\forall x \in]a, b[, \quad m \leq f'(x) \leq M$. Prouver que $m \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq M$.
2. *Une application.* Justifier que pour tout entier $n \geq 1$, $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.
3. Nous supposons qu'il existe un réel $k > 0$ tel que $\forall x \in]a, b[, \quad |f'(x)| \leq k$. Montrer que $|f(b)-f(a)| \leq k(b-a)$.
4. *Une application.* Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin x| \leq |x|$.

1. C'est l'Inégalité des Accroissements Finis (IAF). On applique le TAF : il existe $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. Or $m \leq f'(c) \leq M$.
2. On pose $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[n, n+1]$. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Pour $x \in [n, n+1]$, f' décroît, donc $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$. On applique le 1.
3. Corollaire immédiat du 1 avec $m = -k$ et $M = k$. $-k \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq k \iff \left| \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right| \leq k$.
4. On applique à $f(t) = \sin t$ sur $[0, x]$ (ou $[x, 0]$). $|f'(t)| = |\cos t| \leq 1$. Donc $|\sin x - \sin 0| \leq 1 \cdot |x - 0| \implies |\sin x| \leq |x|$.

Exercice 18 (★★★★) Méthode du point fixe

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle $]a, b[$. Nous supposons

- $\forall x \in [a, b], \quad f(x) \in [a, b]$.
- $\exists k \in]0, 1[, \quad \forall x \in]a, b[, \quad |f'(x)| \leq k$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in [a, b]$.
2. On considère la suite (x_n) définie sur \mathbb{N} par son premier terme $x_0 \in [a, b]$ et par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$. Justifier que, pour tout entier naturel n ,
 - a) $x_n \in [a, b]$.
 - b) $|x_{n+1} - \alpha| < k|x_n - \alpha|$.
3. En déduire $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n - \alpha| \leq k^n |x_0 - \alpha|$. La suite (x_n) converge-t-elle ?

1. **Existence** : Posons $g(x) = f(x) - x$. $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$. TVI \implies existence. **Unicité** : Si $f(x) = x$ et $f(y) = y$, alors $|x - y| = |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. Comme $k < 1$, cela impose $|x - y| = 0$.
2. a) Par récurrence immédiate car $f([a, b]) \subset [a, b]$.
b) D'après l'IAF : $|f(x_n) - f(\alpha)| \leq k|x_n - \alpha|$ car $|f'| \leq k$. Or $f(\alpha) = \alpha$.
3. Par récurrence : $|x_n - \alpha| \leq k|x_{n-1} - \alpha| \leq \dots \leq k^n |x_0 - \alpha|$. Comme $0 < k < 1$, $\lim k^n = 0$,

donc $x_n \rightarrow \alpha$.

Exercice 19 (★★★★) Méthode du point fixe. Étude d'un exemple

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.

1. Justifier que $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], f(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
3. Prouver que, pour tout réel $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], 0 \leq f'(x) \leq k$, en posant $k = \frac{\sqrt{e}}{(\sqrt{e}+1)^2}$.
4. Étude de la convergence de $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. f est strictement croissante ($f' > 0$). $f(1/2) \approx 0.62 \geq 0.5$ et $f(1) \approx 0.73 \leq 1$. Donc l'intervalle est stable.
 2. Résulte de l'exercice précédent (stabilité + dérivée bornée strictement par 1 ? À vérifier au 3).
 3. $f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$. f'' s'annule en 0 et est négative sur $[1/2, 1]$. Donc f' est décroissante sur cet intervalle. Le max de f' est en $1/2$: $f'(1/2) = \frac{e^{0.5}}{(1+e^{0.5})^2} = \frac{\sqrt{e}}{(1+\sqrt{e})^2} \approx 0.23$. On a bien $|f'| \leq k \approx 0.23 < 1$.
 4. Les hypothèses de l'exercice précédent sont vérifiées. La suite converge vers α .
-