Lycée Saint Augustin
Classe de Terminale spécialité Mathématiques expertes

2024–2025
M. Berard

MATHÉMATIQUES

DEVOIR SURVEILLÉ N° 2

Vendredi 12 Décembre 2025

Durée : 2 heures

Barème : 25 points

Révisions de 1ère. Récurrence. Suites.

Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, d'une part vous le signalez au surveillant, d'autre part vous le signalez sur votre copie et vous poursuivez la composition en indiquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
L'élève est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Calculatrice autorisée.

Indications :

- La présentation doit comporter le nom, la classe, la date, le numéro du devoir et un encadré pour les commentaires et la note. Vos résultats doivent être $\boxed{\text{encadrés}}$.
- Composer sur **copies doubles grand carreaux uniquement**.
- À la fin d'un exercice, on **change de page** (ou de copie) obligatoirement.
- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part **importante** dans l'appréciation des copies.
- **En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.**

1 Entraînement

Exercice 1 Limite de suite 1 *(3 points)*

La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \sqrt{n+1} + \sin(u_n).$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

2. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 2 Limite de suite 2 *(5 points)*

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}}.$$

1. Encadrer $\dfrac{1}{n+\sqrt{k}}$ pour $k \in [\![0,n]\!]$.

2. En déduire l'encadrement :

$$\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}} \leqslant 1.$$

3. Donner la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

2 Type Bac

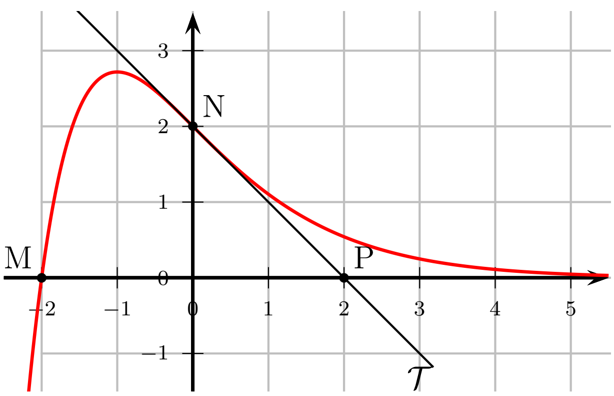
Exercice 3 Étude d'une fonction *(9 points)*

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa dérivée seconde.

Dans le repère orthonormé ci-dessous ont été représentés :

- la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f ;
- la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ en son point $\mathrm{N}(0\,;\,2)$;
- le point $\mathrm{M}(-2\ ;\ 0)$ appartenant à $\mathcal{C}_f$ et $\mathrm{P}(2\,;\,0)$ appartenant à la tangente $\mathcal{T}$.

On précise que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$ et qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1]$.



On répondra aux deux questions suivantes en utilisant le graphique.

1. **a)** Donner $f(0)$.

b) Déterminer $f'(0)$.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

On admet que la fonction f est de la forme

$$f(x) = (ax + b)e^{\lambda x},$$

où a,b et λ sont des constantes réelles.

Pour répondre aux trois questions suivantes, on utilisera les résultats des deux premières questions.

3. Justifier que $b = 2$.

4. Justifier que $-2a + b = 0$ puis en déduire la valeur de a.

5. Déterminer l'expression de f. Justifier.

6. Dresser le tableau de variations complet de f. Justifier.

Les points qui annulent la dérivée seconde d'une fonction sont les « points d'inflexion » de cette fonction.

7. Déterminer les éventuels points d'inflexion de la fonction f.

3 Niveau ★★★

Exercice 4 Comparaison carré/factorielle *(8 points)*

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{n^2}{n!}.$$

1. Conjecturer le comportement de (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

2. Justifier que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n > 0.$$

3. Prouver que : pour tout entier naturel,

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad u_{n+1} \leqslant \frac{3}{4} u_n.$$

4. En déduire que :

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad u_n \leqslant u_2 \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$$

La suite (u_n) converge-t-elle ?

Bon courage.