



## Correction du TD 11 Dérivation : compléments

**Exercice 1 (★☆☆☆)** Q.C.M. Pour chaque question de ce Q.C.M, il y a deux réponses exactes sur les 4 proposées.

1. On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ , et on note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
  - a) L'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de  $f$  est égal à  $[-1,1]$ .
  - b)  $f$  est dérivable en 1.
  - c) L'équation réduite de la tangente  $\mathcal{T}$  à  $\mathcal{C}$  en son point d'abscisse  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  est  $y = \sqrt{3}x - 1$ .
  - d) La courbe représentative  $\mathcal{C}$  dans le repère orthonormé donné est un demi-cercle.

Réponses : a) et d).

- a) Vrai :  $1 - x^2 \geqslant 0 \iff x \in [-1,1]$ .
- b) Faux :  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\infty$  (tangente verticale).
- c) Faux :  $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}$  et  $f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-2(\sqrt{3}/2)}{2(1/2)} = -\sqrt{3}$ . L'équation est  $y - \frac{1}{2} = -\sqrt{3}(x - \frac{\sqrt{3}}{2}) \iff y = -\sqrt{3}x + 2$ .
- d) Vrai :  $y = \sqrt{1 - x^2} \implies y^2 + x^2 = 1$  avec  $y \geqslant 0$ .

2. On considère la fonction polynôme du troisième degré  $P : x \mapsto x^3 - 3x + 2$  et on désigne par  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère du plan.
  - a)  $f(1) = f'(1) = 0$ .
  - b)  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[-2,0]$ .
  - c)  $f(1)$  est le minimum de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - d) Le point  $A(0,2)$  est un point d'inflexion de  $\mathcal{C}$ .

Réponses : a) et d). Calculs :  $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$ .  $f''(x) = 6x$ .

- a) Vrai :  $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$  et  $f'(1) = 3 - 3 = 0$ .
- b) Faux :  $f$  décroît sur  $[-1,1]$ , donc n'est pas croissante sur  $[-2,0]$  entier.
- c) Faux :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .
- d) Vrai :  $f''(x)$  s'annule en changeant de signe en  $x = 0$ , et  $f(0) = 2$ .

**Exercice 2 (★☆☆☆)** Pour chacune des fonctions ci-après, déterminer l'ensemble de définition et calculer la dérivée.

- |                                     |                                       |   |
|-------------------------------------|---------------------------------------|---|
| 1. $a : x \mapsto x^3 \cos(5x + 1)$ | 4. $d : x \mapsto e^{\sqrt{x^2+x+1}}$ | 6. $g : x \mapsto \frac{\cos(2x)}{x^2 - 2}$ |
| 2. $b : x \mapsto e^{\cos x}$       | 5. $f : x \mapsto \frac{x}{x^2 + 1}$  | 7. $h : x \mapsto \frac{x}{\sin(x)}$        |

1.  $D_a = \mathbb{R}$ .  $a'(x) = 3x^2 \cos(5x + 1) - 5x^3 \sin(5x + 1)$ .
2.  $D_b = \mathbb{R}$ .  $b'(x) = -\sin(x)e^{\cos x}$ .

3.  $D_c = \mathbb{R}$ .  $c'(x) = (3x^2 + 4x + 3)e^{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}$ .
4.  $D_d = \mathbb{R}$  (car  $\Delta < 0$  pour le trinôme sous la racine).  $d'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}e^{\sqrt{x^2 + x + 1}}$ .
5.  $D_f = \mathbb{R}$ .  $f'(x) = \frac{1(x^2 + 1) - x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$ .
6.  $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ .  $g'(x) = \frac{-2 \sin(2x)(x^2 - 2) - 2x \cos(2x)}{(x^2 - 2)^2}$ .
7.  $D_h = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .  $h'(x) = \frac{1 \sin(x) - x \cos(x)}{\sin^2(x)}$ .

**Exercice 3 (★☆☆☆)** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions deux fois dérivables de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On pose  $h = g \circ f$ . Si  $x \in \mathbb{R}$ , donner une expression de  $h''(x)$ .

On a  $h'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$ . En dérivant un produit et une composée :

$$h''(x) = f''(x)g'(f(x)) + f'(x) \times [f'(x)g''(f(x))] = f''(x)g'(f(x)) + (f'(x))^2g''(f(x)).$$

**Exercice 4 (★☆☆☆)** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ .

Par récurrence. Pour  $n = 0$ ,  $\cos(x) = \cos(x)$ .

Supposons la propriété vraie au rang  $n$ . Alors :

$$\cos^{(n+1)}(x) = (\cos^{(n)})'(x) = \left(\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right)' = -\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Or  $-\sin(X) = \cos(X + \frac{\pi}{2})$ , d'où :

$$\cos^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right).$$

**Exercice 5 (★☆☆☆)** Dérivée d'une fonction paire, impaire, périodique

Soit  $f$  une fonction dérivable de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

1. On suppose  $f$  paire. Que dire de  $f'$ ?
2. Même question si  $f$  est impaire.
3. Même question si  $f$  est périodique de période  $T$ , où  $T \in \mathbb{R}_+^*$ .

1.  $f(-x) = f(x) \implies -f'(-x) = f'(x) \implies f'(-x) = -f'(x)$ .  $f'$  est **impaire**.
2.  $f(-x) = -f(x) \implies -f'(-x) = -f'(x) \implies f'(-x) = f'(x)$ .  $f'$  est **paire**.
3.  $f(x+T) = f(x) \implies f'(x+T) = f'(x)$ .  $f'$  est  **$T$ -périodique**.

### Exercice 6 (★☆☆☆) Recherche de maximum

Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ . Calculer le maximum de la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

$f_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ .

$$f'_n(x) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} = x^{n-1}e^{-x}(n-x).$$

Sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $f'_n(x)$  est du signe de  $n-x$ .  $f_n$  est croissante sur  $[0, n]$  et décroissante sur  $[n, +\infty[$ . Le maximum est atteint en  $n$  :

$$\max(f_n) = f_n(n) = n^n e^{-n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

### Exercice 7 (★★☆☆) Dérivées d'ordre $n$

Déterminer les dérivées d'ordre  $n$  (où  $n \in \mathbb{N}^*$ ) des fonctions  $f$  et  $g$  suivantes :

1.  $f : x \mapsto xe^x$ .
2.  $g = \sin$ .

1. Formule de Leibniz avec  $u(x) = x$  et  $v(x) = e^x$ . Comme  $u^{(k)} = 0$  pour  $k \geq 2$  :

$$f^{(n)}(x) = x(e^x)^{(n)} + n(1)(e^x)^{(n-1)} = xe^x + ne^x = (x+n)e^x.$$

2. Comme pour le cosinus :  $g^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$ .

### Exercice 8 (★★☆☆) Fonctions à dérivée $n$ -ième nulle

Déterminer les fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $n$  fois dérivables sur  $\mathbb{R}$  et dont la dérivée  $n$ -ième est identiquement nulle.

Ce sont les fonctions polynomiales de degré au plus  $n-1$ .

### Exercice 9 (★★☆☆) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer le maximum de la fonction $f_n$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

Voir exercice 6 (identique). Le maximum est  $(n/e)^n$ , atteint en  $x = n$ .

### Exercice 10 (★★☆☆) Pendule simple

Soient un pendule simple de masse  $m$  et de longueur  $\ell$ ,  $\theta$  l'angle que fait le pendule avec la « verticale descendante » ; alors  $\theta$  dépend du temps  $t$  et obéit à l'équation différentielle :

$$\theta''(t) + \frac{g}{\ell} \sin(\theta(t)) = 0.$$

L'énergie du pendule au temps  $t$  est donnée par la formule :

$$E(t) = \frac{m\ell^2\theta'(t)^2}{2} - mg\ell \cos(\theta(t)).$$

Montrer que  $E$  est constante (conservation de l'énergie).

On dérive  $E$  par rapport au temps  $t$  :

$$E'(t) = \frac{m\ell^2}{2} \cdot 2\theta'(t)\theta''(t) - mg\ell(-\sin(\theta(t)) \cdot \theta'(t))$$

$$E'(t) = m\ell^2\theta'(t) \left[ \theta''(t) + \frac{g}{\ell} \sin(\theta(t)) \right]$$

Or, d'après l'équation différentielle, le terme entre crochets est nul. Donc  $E'(t) = 0$ , et  $E$  est constante.

### Exercice 11 (★★★☆) Dérivée $n$ -ième de $x \mapsto x^2 e^x$

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 e^x$ .

1. Pour tout entier  $n \geq 1$ , montrer qu'il existe deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = (x^2 + a_n x + b_n) e^x.$$

2. Expliciter  $f^{(n)}(x)$  en fonction de  $n$  et  $x$ .

1. On dérive :  $f^{(n+1)}(x) = (2x + a_n)e^x + (x^2 + a_n x + b_n)e^x = (x^2 + (a_n + 2)x + (a_n + b_n))e^x$ . On a les récurrences  $a_{n+1} = a_n + 2$  et  $b_{n+1} = a_n + b_n$ , avec  $a_0 = 0, b_0 = 0$  (ou  $n = 1$  directement).  
2. Plus simple avec Leibniz :  $f^{(n)}(x) = x^2(e^x)^{(n)} + n(2x)(e^x)^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2}(2)(e^x)^{(n-2)}$ .

$$f^{(n)}(x) = e^x (x^2 + 2nx + n(n-1)).$$

Donc  $a_n = 2n$  et  $b_n = n(n-1)$ .

### Exercice 12 (★★★☆) Limites et taux d'accroissement

Soit  $f$  une fonction dérivable en  $a$  appartenant à un intervalle ouvert  $I$ .

1. Calculer la limite quand  $h$  tend vers 0 des fonctions suivantes :

a)  $h \mapsto \frac{(a+h)f(a) - af(a+h)}{h}$ .

b)  $h \mapsto \frac{(a+nh)f(a) - af(a+h)}{h}$ , avec  $n \in \mathbb{N}^*$ .

2. Calculer la limite quand  $x$  tend vers  $a$  de la fonction

$$x \mapsto \frac{e^{-a}f(x) - e^{-x}f(a)}{x - a}.$$

1. a)  $\frac{af(a) + hf(a) - af(a+h)}{h} = f(a) - a \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} f(a) - af'(a)$ .

b) De même :  $\frac{af(a) + nhf(a) - af(a+h)}{h} = nf(a) - a \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} nf(a) - af'(a)$  (Attention ici le terme variable  $f(a+h)$  est le même, seul le coeff devant  $f(a)$  change). *Correction du raisonnement pour b) si c'était  $f(a+nh)$  : ce serait  $f(a) - naf'(a)$ . Ici l'énoncé est bien  $(a+nh)f(a)$ .*

2. On reconnaît le taux d'accroissement de  $g(x) = e^{-x}f(x)$  en  $a$ .  $g'(x) = -e^{-x}f(x) + e^{-x}f'(x)$ .  
Donc la limite est  $g'(a) = e^{-a}(f'(a) - f(a))$ .

### Exercice 13 (★★★☆) Dérivée de la bijection réciproque

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles ouverts non vides. Soit  $f$  une bijection de  $I$  sur  $J$  où  $f^{-1} : J \rightarrow I$  est la bijection réciproque de  $f$ . Montrer que si  $f$  est dérivable sur  $I$  et que si, de plus,  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors  $f^{-1}$  est dérivable sur  $J$  et

$$\forall y \in J, \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

On part de l'identité  $\forall y \in J, f(f^{-1}(y)) = y$ .  $f$  est dérivable et  $f^{-1}$  est continue (admis pour une bijection sur un intervalle). En dérivant la composée :  $(f^{-1})'(y) \times f'(f^{-1}(y)) = 1$ . Comme  $f'$  ne s'annule pas, on peut diviser :  $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ .

### Exercice 14 (★★★★) Méthode de la sécante

Soient deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $a < b$ . On considère une fonction  $f$  continue, croissante strictement et convexe sur  $[a,b]$  telle que  $f(a)f(b) < 0$ . On désigne par  $A$  et  $B$  les deux points de  $\mathcal{C}_f$  d'abscisses respectives  $a$  et  $b$ .

1. Justifier l'existence d'un unique réel  $\alpha \in ]a,b[$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .
  2. Déterminer une équation de la droite  $(AB)$ .
  3. En déduire que l'abscisse  $x_1$  du point d'intersection de la sécante  $(AB)$  avec la droite des abscisses satisfait à
- $$x_1 = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a).$$
4. En réitérant ce procédé, nous considérons la suite  $(x_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par son premier terme  $x_0 = a$  et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{b-x_n}{f(b)-f(x_n)} f(x_n).$$

En utilisant la convexité de la fonction  $f$ , prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \leq \alpha.$$

En déduire le sens de variation de la suite  $(x_n)$ .

5. Justifier que  $(x_n)$  converge vers le réel  $\alpha$ .
6. Nous supposons que  $f : x \mapsto x^3 - 4x - 2$ . Proposer un algorithme qui restitue une valeur approchée d'une solution  $a \in [2,3]$  de l'équation  $f(x) = 0$ .

1.  $f$  est continue et strictement croissante,  $f(a) < 0$  et  $f(b) > 0$ . D'après le théorème de la bijection (ou TVI strict), il existe un unique  $\alpha \in ]a,b[$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .
2. Pente  $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ . Équation :  $y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$ .
3. On cherche  $x_1$  tel que  $y = 0$  :  $-f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_1 - a) \iff x_1 - a = -f(a) \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$ . D'où le résultat.
4. **Position :**  $f$  est convexe, donc sa courbe est située au-dessous de ses sécantes. Sur  $[x_n, b]$ , la corde  $(M_n B)$  est au-dessus de  $\mathcal{C}_f$ . Comme  $f$  est croissante et  $f(b) > 0$ , la corde coupe l'axe des abscisses en un point  $x_{n+1}$  situé avant le point où la courbe coupe l'axe (qui est  $\alpha$ ). Donc  $x_{n+1} \leq \alpha$ . Par récurrence,  $x_n \leq \alpha$ . **Variation :**  $f$  croissante et  $x_n \leq \alpha \implies f(x_n) \leq 0$ . Or  $x_{n+1} - x_n = -f(x_n) \frac{b-x_n}{f(b)-f(x_n)}$ . Le ratio est positif (car  $b > x_n$  et  $f(b) > f(x_n)$ ), et  $-f(x_n) \geq 0$ . Donc  $x_{n+1} \geq x_n$ . La suite est **croissante**.
5.  $(x_n)$  est croissante et majorée par  $\alpha$ , donc elle converge vers  $\ell \in ]a, \alpha]$ . En passant à la limite dans la récurrence, on obtient  $f(\ell) = 0$ , donc  $\ell = \alpha$ .
6. Algorithme classique de la sécante (ou *regula falsi*).

---

### Exercice 15 (★★★★) Méthode de Newton

Soit  $f$  une fonction dérivable deux fois sur un intervalle  $I$ . Soient  $a \in I$  et  $b \in I$  tels que  $a < b$ . Nous supposons :

- $f(a) < 0$  et  $f(b) > 0$ ,
- $\forall x \in [a,b]$ ,  $f'(x) > 0$  et  $f''(x) > 0$ .

1. Justifier que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in ]a,b[$ .
2. a) Soit  $\mathcal{T}_0$  la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point  $M_0$  d'abscisse  $x_0 = b$ . Déterminer l'abscisse  $x_1$  du point d'intersection de  $\mathcal{T}_0$  avec la droite des abscisses.
- b) Soit  $\mathcal{T}_1$  la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point  $M_1$  d'abscisse  $x_1$ . Déterminer l'abscisse  $x_2$  du point d'intersection de  $\mathcal{T}_1$  avec la droite des abscisses.
3. En réitérant ce processus, pour tout entier naturel  $n$ , nous désignons par :
  - $\mathcal{T}_n$  la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point  $M_n$  d'abscisse  $x_n$ ,
  - $x_{n+1}$  l'abscisse du point d'intersection de  $\mathcal{T}_n$  avec la droite des abscisses.

Montrer que, le réel  $x_0 = b$  étant donné, la suite  $(x_n)$  est définie par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

4. a) Justifier que la suite  $(x_n)$  est minorée par  $\alpha$ .
- b) Quel est le sens de variation de cette suite ?
- c) La suite  $(x_n)$  converge vers le réel  $\alpha$ . Expliquez pourquoi.

1.  $f$  strictement croissante ( $f' > 0$ ) et continue sur  $[a,b]$ , change de signe. TVI strict  $\implies$  unique  $\alpha$ .
2. Équation tangente en  $x_n$  :  $y = f'(x_n)(x-x_n)+f(x_n)$ . Intersection axe des abscisses ( $y = 0$ ) :  $0 = f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)+f(x_n) \implies x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ . Cela prouve la question 3 directement par récurrence.
3. (Voir ci-dessus).
4. a)  $f$  est convexe ( $f'' > 0$ ), donc sa courbe est au-dessus de ses tangentes. Ainsi  $0 = f(x_{n+1}) + (\dots) \implies f(x_{n+1}) \geq 0$  (par position relative tangente/courbe, l'annulation de la tangente se fait "avant" l'annulation de la courbe). Plus rigoureusement :  $f(x) \geq f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$ . En  $x = x_{n+1}$ , le membre de droite est nul. Donc  $f(x_{n+1}) \geq 0 = f(\alpha)$ . Comme  $f$  croissante,  $x_{n+1} \geq \alpha$ .
- b)  $x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ . Comme  $x_n \geq \alpha$ ,  $f(x_n) \geq 0$ . Et  $f' > 0$ . Donc  $x_{n+1} - x_n \leq 0$ . La suite est **décroissante**.
- c) Décroissante et minorée par  $\alpha$ , elle converge vers  $\ell$ . Les limites donnent  $\ell = \ell - f(\ell)/f'(\ell) \implies f(\ell) = 0 \implies \ell = \alpha$ .

---

### Exercice 16 (★★★★) La fonction sinus cardinal

La fonction sinus cardinal, notée ici  $\text{sinc}$ , est définie par :

$$\begin{cases} \text{sinc}(0) = 1 \\ \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}. \end{cases}$$

1. Étudier la parité de  $\text{sinc}$ .
2. Montrer que  $\text{sinc}$  est continue en 0. Quelle est sa limite en  $\pm\infty$  ?
3. Pour  $x \in \mathbb{R}^*$ , calculer  $\text{sinc}'(x)$ .
4. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , la fonction  $\tan$  admet un unique point fixe sur l'intervalle  $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$  que l'on note  $x_n$ .
5. Montrer que les  $x_n$  pour  $n \in \mathbb{Z}$  sont les points en lesquels  $\text{sinc}'$  s'annule.

1.  $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \text{sinc}(x)$ . Fonction **paire**.
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = \text{sinc}(0)$  (taux d'accroissement du sinus). Continue. En  $\pm\infty$ ,  $|\text{sinc}(x)| \leq 1/|x| \rightarrow 0$ .
3.  $\text{sinc}'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ .
4. Sur  $I_n = ]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$ , la fonction  $x \mapsto \tan x - x$  est strictement croissante (dérivée  $\tan^2 x > 0$ ). Limites  $-\infty$  et  $+\infty$  aux bornes. Unique zéro  $x_n$  (bijection).
5.  $\text{sinc}'(x) = 0 \iff x \cos x = \sin x \iff x = \tan x$  (pour  $\cos x \neq 0$ , ce qui est vrai aux points d'annulation car sinon  $\sin x = 0$  et  $x = 0$ , mais ici on est sur  $\mathbb{R}^*$ ). 0 est aussi solution de  $x \cos x - \sin x = 0$ .

### Exercice 17 (★★★★★) Inégalités des accroissements finis

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a,b]$ , dérivable sur  $]a,b[$ , avec  $a < b$ .

1. Nous supposons qu'il existe deux réels  $m$  et  $M$  tels que  $\forall x \in ]a,b[, m \leq f'(x) \leq M$ . Prouver que  $m \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq M$ .
2. *Une application.* Justifier que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ .
3. Nous supposons qu'il existe un réel  $k > 0$  tel que  $\forall x \in ]a,b[, |f'(x)| \leq k$ . Montrer que  $|f(b)-f(a)| \leq k(b-a)$ .
4. *Une application.* Justifier que  $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$ .

1. C'est l'Inégalité des Accroissements Finis (IAF). On applique le TAF : il existe  $c \in ]a,b[$  tel que  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ . Or  $m \leq f'(c) \leq M$ .
2. On pose  $f(x) = \sqrt{x}$  sur  $[n,n+1]$ .  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . Pour  $x \in [n,n+1]$ ,  $f'$  décroît, donc  $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ . On applique le 1.
3. Corollaire immédiat du 1 avec  $m = -k$  et  $M = k$ .  $-k \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq k \iff \left| \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right| \leq k$ .
4. On applique à  $f(t) = \sin t$  sur  $[0,x]$  (ou  $[x,0]$ ).  $|f'(t)| = |\cos t| \leq 1$ . Donc  $|\sin x - \sin 0| \leq 1 \cdot |x-0| \implies |\sin x| \leq |x|$ .

### Exercice 18 (★★★★★) Méthode du point fixe

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$  et  $f$  une fonction continue sur  $[a,b]$ , dérivable sur l'intervalle  $]a,b[$ . Nous supposons

- $\forall x \in [a,b], f(x) \in [a,b]$ .
- $\exists k \in ]0,1[, \forall x \in ]a,b[, |f'(x)| \leq k$ .

1. Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une solution unique  $\alpha \in [a,b]$ .
2. On considère la suite  $(x_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par son premier terme  $x_0 \in [a,b]$  et par la relation de récurrence  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ ,
  - a)  $x_n \in [a,b]$ .
  - b)  $|x_{n+1} - \alpha| < k|x_n - \alpha|$ .
3. En déduire  $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - \alpha| \leq k^n|x_0 - \alpha|$ . La suite  $(x_n)$  converge-t-elle ?

1. **Existence :** Posons  $g(x) = f(x) - x$ .  $g(a) = f(a) - a \geq 0$  et  $g(b) = f(b) - b \leq 0$ . TVI  $\implies$  existence. **Unicité :** Si  $f(x) = x$  et  $f(y) = y$ , alors  $|x-y| = |f(x)-f(y)| \leq k|x-y|$ . Comme  $k < 1$ , cela impose  $|x-y| = 0$ .
2. a) Par récurrence immédiate car  $f([a,b]) \subset [a,b]$ .  
b) D'après l'IAF :  $|f(x_n) - f(\alpha)| \leq k|x_n - \alpha|$  car  $|f'| \leq k$ . Or  $f(\alpha) = \alpha$ .
3. Par récurrence :  $|x_n - \alpha| \leq k|x_{n-1} - \alpha| \leq \dots \leq k^n|x_0 - \alpha|$ . Comme  $0 < k < 1$ ,  $\lim k^n = 0$ ,

donc  $x_n \rightarrow \alpha$ .

---

**Exercice 19 (★★★★) Méthode du point fixe. Étude d'un exemple**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ .

1. Justifier que  $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ,  $f(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ .
2. Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une solution unique  $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ .
3. Prouver que, pour tout réel  $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ,  $0 \leq f'(x) \leq k$ , en posant  $k = \frac{\sqrt{e}}{(\sqrt{e} + 1)^2}$ .
4. Étude de la convergence de  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1.  $f$  est strictement croissante ( $f' > 0$ ).  $f(1/2) \approx 0.62 \geq 0.5$  et  $f(1) \approx 0.73 \leq 1$ . Donc l'intervalle est stable.

2. Résulte de l'exercice précédent (stabilité + dérivée bornée strictement par 1 ? À vérifier au 3).

3.  $f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ .  $f''$  s'annule en 0 et est négative sur  $[1/2, 1]$ . Donc  $f'$  est décroissante sur cet intervalle. Le max de  $f'$  est en  $1/2$  :  $f'(1/2) = \frac{e^{0.5}}{(1+e^{0.5})^2} = \frac{\sqrt{e}}{(\sqrt{e} + 1)^2} \approx 0.23$ . On a bien  $|f'| \leq k \approx 0.23 < 1$ .

4. Les hypothèses de l'exercice précédent sont vérifiées. La suite converge vers  $\alpha$ .