Henri Lepeu

Colle S15

21/01/26

1 Démonstration

Démontrer la proposition suivante :

Proposition 1

Soient f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et un réel $a \in I$.
Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
Autrement dit :

$$\mathcal{D}^1(I) \subset \mathcal{C}^0(I).$$

2 Exercice : Complément sur la fonction exponentielle

Nous proposons dans cet exercice d'établir la preuve de l'égalité :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = e^x.$$

Nous rappelons la proposition **2** et les égalités sur l'exponentielle prouvées en Première :

Proposition 2

Soit un entier $n \geqslant 2$. Pour tout réel $a \in \mathbb{R}_+$, nous avons

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \quad \text{ou} \quad \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a.$$

Proposition 3

Nous disposons des égalités suivantes :

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}, \qquad \exp(n) = e^n \quad \text{et} \quad \exp\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

1. Calcul de $\exp\left(\dfrac{1}{n}\right)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que si a et b sont deux réels strictement positifs tels que $a^n = b^n$, alors $a = b$.

b) En déduire :

$$\exp\left(\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e}.$$

2. Calcul de $\exp(r)$, pour $r \in \mathbb{Q}$.

a) Nous supposons que $r \in \mathbb{Q}_+$.

En posant $r = \dfrac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, cette fraction étant irréductible, prouver que :

$$\exp\left(\frac{a}{b}\right) = e^{\frac{a}{b}}.$$

3. Calcul de $\exp(x)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

Pour traiter cette partie, nous utilisons la proposition suivante :

Proposition 4 – Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Pour tout réel x, il existe une suite (r_n) de nombres rationnels qui converge vers x.

Avec les données de la proposition **4**, en considérant la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$v_n = \exp(r_n),$$

prouver que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = e^x.$$

Corentin Poisblaud

Terminale spécialité Mathématiques expertes
M. Bérard

Colle S15

21/01/26

1 Démonstration

Démontrer la proposition suivante :

Proposition 1

Soient g une fonction définie sur un intervalle ouvert I et un réel $\ell \in I$.
Étant donnée une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ satisfaisant à

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in I$
- u_0 est donné
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = g(u_n)$.

Si (u_n) converge vers ℓ et si g est continue en ℓ, alors $\ell = g(\ell)$.

2 Exercices

2.1 Un exemple du cours

Nous considérons la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{5} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n(1-u_n) \end{cases}$$

Déterminer la limite de la suite (u_n).

2.2 Une application du théorème des valeurs intermédiaires

1. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, et soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n réels quelconques de $[0,1]$.
Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

2. Une voiture parcourt 150 km en 3 h. Montrer qu'il existe un intervalle d'une heure pendant lequel elle parcourt exactement 50 km.
On pourra introduire $f(t) =$ distance parcourue jusqu'à l'instant t et s'intéresser à $g(t) = f(t+1) - f(t)$