Semaine 17

lundi 2 février 2026
> ven. 6 février 2026

Chapitre 10 **Continuité**

Continuité sur un intervalle

- **Définition :** Une fonction f est *continue sur un intervalle ouvert* I si et seulement si quel que soit le réel $a \in I$, f est continue en a.
- **Remarques :**
  - Si I est semi-fermé ou fermé, par exemple $I = [\alpha,\beta]$, f est continue sur I si et seulement si
    - f est continue sur $]\alpha,\beta[$,
    - f est continue à droite en α,
    - f est continue à gauche en β.
  - D'une façon imagée, f est continue sur un intervalle I signifie que sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ peut être dessinée, « sans lever le crayon ».
- **Exemples :**
  - L'image de l'intervalle $[-1,2]$ par l'échelon unité (discontinu en 0) est $\{0,1\}$.
    Nous observons graphiquement que $U([-2,1])$ n'est pas un intervalle.
  - Exemples graphiques de fonctions discontinues dont l'image n'est pas un intervalle, et de fonctions continues dont l'image est un intervalle.

Méthode de dichotomie (ou Théorème de Bolzano) : Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$.
Si $f(a)f(b) \leqslant 0$, alors

$$\exists\, c \in [a,b], \quad f(c) = 0.$$

En d'autres termes, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a,b]$.

- **Algorithme de dichotomie :**

```
def dicho(f,a,b,p) :
    while b-a > 10**(-p) :
        m-(a+b)/2
        if f(a)*f(m)<0 :
            b=m
        else :
            a=m
    return b
```

- **Exemple :** On trouve à l'aide de cet algorithme une valeur approchée de la solution de l'équation $x^3 - x - 1 = 0$.

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) : Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que

$$f(c) = k.$$

- **Remarques :**
  - Le théorème des valeurs intermédiaires (TVI) signifie que, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a,b]$ mais l'unicité de cette solution n'est pas garantie par ce théorème. On a donc la surjectivité de la restriction $f|_{[a,b]}$.
  - Lorsque $k = 0$, nous retrouvons le théorème de Bolzano, qui est donc un cas particulier du TVI.
  - Le théorème des valeurs intermédiaires donne une preuve de l'existence *implicite* d'au moins une solution de l'équation $f(x) = k$, ce qui signifie, en général, qu'une résolution algébrique de cette dernière est impossible. Une méthode comme la dichotomie est alors privilégiée. Elle permet d'approximer avec une précision donnée une solution localisée par les valeurs intermédiaires de l'équation $f(x) - k = 0$.
  - La condition de continuité de f est essentielle pour appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.
  - Si $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, nous pouvons observer graphiquement que l'intervalle $\big[f(a),f(b)\big]$ (respectivement $\big[f(b),f(a)\big]$ est inclus dans $f\big([a,b]\big) = [m,M]$.
- **Propriété (image d'un intervalle quelconque) :** Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle.
- **Remarque :** Les intervalles I et $f(I)$ ne sont pas toujours de même nature.
  Par exemple, $\cos(\mathbb{R}) = [-1,1]$ et $\sin(\mathbb{R}) = [-1,1]$.

Lemme (caractérisation séquentielle de la borne supérieure) : Soient A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et M un majorant de A.
Nous disposons de l'équivalence suivante :

$$M = \sup A \iff \exists\,(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = M.$$

- **Remarque :** On dispose évidemment de la caractérisation équivalente pour la borne inférieure.

Propriété (image d'un intervalle fermé) : Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ avec $a < b$, alors $f\big([a,b]\big)$ est un intervalle fermé.
Plus précisément, si f est continue sur $[a,b]$, alors $f\big([a,b]\big) = [m,M]$, où m est le minimum et M le maximum de f sur $[a,b]$.

- **Remarques :**
  - Nous rappelons que
    - le minimum m est atteint par f sur $[a,b]$, c'est-à-dire :

$$\exists\, \alpha \in [a,b], \quad f(\alpha) = m.$$

    - le maximum M est atteint par f sur $[a,b]$, c'est-à-dire :

$$\exists\, \beta \in [a,b], \quad f(\beta) = M.$$

- La réciproque de cette proposition est fausse.

▶ **Propriété :** Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle $[a,b]$.
Nous disposons de la propriété suivante :
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel $c \in [a,b]$ tel que

$$f(x) = k.$$

▶ **Remarques :**
- Si f est continue et strictement croissante sur $[a,b]$, l'image de cet intervalle est l'intervalle fermé $f\big([a,b]\big) = \big[f(a),f(b)\big]$.
Dans ce cas, la proposition précédente signifie également :
$$\forall\, k \in \big[f(a),f(b)\big],\ \exists!\, c \in [a,b], \quad f(c) = k,$$
ce qui correspond à la définition de $f|_{[a,b]}$ bijection de $[a,b]$ sur $\big[f(a),f(b)\big]$.
- Si f est strictement décroissante sur $[a,b]$, sa restriction à $[a,b]$, $f|_{[a,b]}$, est aussi une bijection, cette fois de $[a,b]$ sur $\big[f(b),f(a)\big]$.

Théorème de la bijection : Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I quelconque, alors f est une bijection de I sur l'intervalle image $f(I)$, ce qui signifie

$$\forall\, y \in f(I),\ \exists!\, x \in I, \quad f(x) = y.$$

▶ **Remarques :**
- Selon la nature de l'intervalle I, l'intervalle $f(I)$ est déterminé dans le contexte.
Par exemple :
  – si f est croissante strictement et continue sur $I =]a,b[$, alors
  $$f(I) = \Big]\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x)\Big[$$
  – si f est décroissante strictement et continue sur $I =]a,+\infty[$, alors
  $$f(I) = \Big]\lim_{x\to +\infty} f(x), \lim_{x\to a^+} f(x)\Big[$$
  – si f est croissante strictement et continue sur $I =]-\infty,+\infty[$, alors
  $$f(I) = \Big]\lim_{x\to -\infty} f(x), \lim_{x\to +\infty} f(x)\Big[.$$
- Le théorème de la bijection est particulièrement important car il permet la construction de nouvelles fonctions de référence.

▶ **Exemples :** fonction racine carrée, fonction logarithme népérien.

■ Fonction racine n-ième

Propriété : Soit un entier naturel $n \geqslant 2$ et un réel $a \geqslant 0$.
L'équation $x^n = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$.

▶ **Définition (fonction racine n-ième) :** Soit un entier $n \geqslant 2$.
Pour chaque réel $a \in \mathbb{R}_+$, la *racine n-ième* du réel a, notée $\sqrt[n]{a}$, est l'unique solution appartenant à $\mathbb{R}_+$ de l'équation $x^n = a$.
La fonction $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ est la fonction racine n-ième.

▶ **Remarques :**
- Nous retiendrons par définition que, pour tous les réels a et b appartenant à $\mathbb{R}_+$, nous disposons de l'équivalence
$$b^n = a \iff b = \sqrt[n]{a}.$$
- Si $n \geqslant 2$ est un entier impair, la fonction $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ peut être définie sur $\mathbb{R}$, car dans ce cas, la fonction $x \longmapsto x^n$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

▶ **Propriété :** Soit un entier $n \geqslant 2$. Pour tout réel $a \in \mathbb{R}_+$, nous avons

$$\big(\sqrt[n]{a}\big)^n = a \quad \text{et} \quad \sqrt[n]{a^n} = a.$$

▶ **Propriété (action de la fonction racine n-ième sur la multiplication) :** Soit un entier $n \geqslant 2$.
Pour tous les réels $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, nous avons

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}.$$

Chapitre 11 **Dérivation : compléments**

■ Dérivée de la composée de deux fonctions

Propriété (Dérivée d'une fonction composée) : Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et g une fonction dérivable sur un intervalle J telles que :

$$\forall\, x \in I, \quad u(x) \in J,$$

alors
- La fonction $g \circ u$ définie sur I est dérivable sur I.
- $\forall\, x \in I, \quad (g \circ u)'(x) = u'(x) \times (g' \circ u)(x).$

▶ **Remarque :** Nous en déduisons
- En termes fonctionnels : $(g \circ u)' = \big((g' \circ u) \times u'\big)$.
- En termes différentiels : $\dfrac{d(g \circ u)}{dx} = \dfrac{dg}{du}\dfrac{du}{dx}$.

▶ **Exemples :** e^{-x^2}, $\sqrt{\sin x}$, $x^3 e^{\frac{1}{x}}$.

▶ **Propriété (généralisation de la dérivée de u^p) :** Soient u une fonction dérivable sur un intervalle I et p un entier relatif non nul ou un nombre rationnel du type

$$p = \frac{1}{n}, \quad \text{avec } n \geqslant 2.$$

Alors :
$$(u^p)' = pu'u^{p-1}.$$

▶ **Remarque :** Nous montrerons plus tard que cette formule de dérivation d'une composée s'étend aux exposants réels non nuls.

Dérivée seconde – Dérivée n-ième

- **Définition (dérivée seconde) :** Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée.
  Si f' est elle-même dérivable sur I, la dérivée de f', notée f'' est la *dérivée seconde* de la fonction f.
- **Remarque :** En notation de Leibniz, nous avons $f'' = \dfrac{d^2f}{dx^2}$.
- **Remarque :** Le signe de la dérivée seconde est utile, pour déterminer, si besoin est, le sens de variations de la dérivée f'. Ce dernier régule les tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ et induit la notion de convexité.
- **Définition (dérivée n-ième) :** Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et $n \in \mathbb{N}$.
  La *dérivée n-ième*, sous réserve d'existence, notée $f^{(n)}$, est définie en posant $f^{(0)} = f$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
  $$f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'.$$
- **Notation (rappel)** L'ensemble des fonctions dérivables $n \in \mathbb{N}^*$ fois sur un intervalle I est noté $\mathcal{D}^n(I)$.
- **Exemple (dérivée n-ième de la fonction inverse) :** Si f est la fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$, alors
  $$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$
- **Remarque :** Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I, par une récurrence immédiate, nous pouvons justifier
  $$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$
  et, pour tout λ réel,
  $$(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}.$$
  Par contre, c'est plus compliqué en ce qui concerne la dérivée n-ième d'un produit comme le montre la propriété suivante.

Propriété (Formule de Leibniz) : Soient f et g deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I.
Le produit fg est n fois dérivable sur I et, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, nous avons
$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

- **Exemple :** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
  $$f : x \longmapsto x^2 e^{-x}.$$
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En appliquant la formule de Leibniz, nous obtenons, pour tout réel x,
  $$f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}\left(x^2 - 2nx + n(n-1)\right).$$

Fonction convexe

- **Définition (convexité) :** Une fonction f est *convexe* sur I si et seulement si, pour tous les réels $a,b \in I$ distincts, la partie de cette courbe comprise entre les points $A\big(a,f(a)\big)$ et $B\big(b,f(b)\big)$ de sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est située en dessous du segment $[AB]$ (appelé *corde*).
  Dans le cas contraire, la fonction est *concave*.
- **Exemples :** Les fonctions $x \longmapsto x^2$, $x \longmapsto |x|$, $x \longmapsto e^x$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.
  La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est convexe sur $]0,+\infty[$ et concave sur $]-\infty,0[$.
  Les fonctions affines sont à la fois convexes et concaves.
- **Propriété (Caractérisation de la convexité)** Une fonction f définie sur un intervalle I est convexe si et seulement si, pour tous les réels a et b appartenant à I tels que $a < b$,
  $$f(ka + (1-k)b) \leqslant kf(a) + (1-k)f(b),$$
  avec k décrivant $[0,1]$.
- **Remarque :** La fonction f est concave si, et seulement si :
  $$f(ka + (1-k)b) \geqslant kf(a) + (1-k)f(b), \quad \text{avec } k \in [0,1].$$
- **Exemple (inégalité triangulaire) :** La convexité de la fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}$ établit une preuve immédiate de l'inégalité triangulaire.
  En effet, pour tous les réels a et b,
  $$\left|\frac{a+b}{2}\right| \leqslant \frac{|a|+|b|}{2},$$
  ce qui implique $|a+b| \leqslant |a| + |b|$.

Lemme : Soient deux réels a et b tels que $a < b$. Nous avons
$$\forall\, t \in [0,1], \quad ta + (1-t)b \in [a,b].$$

Propriété (Deuxième caractérisation de la convexité) : Soient f une fonction définie sur un intervalle I, $a \in I$ et $b \in I$ deux réels tels que $a < b$.
Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) f est convexe.
(ii) $\forall\, x \in [a,b], \quad f(x) \leqslant f(a) + (x-a)\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

- **Propriété (Dérivée croissante) :** Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a \in I$. Si la dérivée f' est croissante sur I alors
  $$\forall\, x \in I, \quad f(x) \geqslant f(a) + (x-a)f'(a).$$
- **Exemple :** Pour tout entier $n \geqslant 2$, la fonction $p_n : x \longmapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $p : x \longmapsto nx^{n-1}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
  Cette fonction puissance est donc convexe sur $[0,+\infty[$.
  Pour tous les réels x et a positifs, il vient
  $$x^n \geqslant a^n + (x-a)na^{n-1},$$
  c'est-à-dire
  $$x^n \geqslant na^{n-1}x - (n-1)a^n.$$
  En particulier, pour $a = 1$ et $x = 1+t$, avec $t \geqslant 0$, nous retrouvons l'inégalité de Bernoulli
  $$\forall\, t \geqslant 0, \quad (1+t)^n \geqslant 1 + nt.$$

Propriété (Dérivée croissante et convexité) : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si la dérivée f' est croissante sur I, alors f est convexe.

- **Remarques :**
  - On peut démontrer que la réciproque de cette proposition est vraie (et c'est bien plus simple).
  - Si f est dérivable et f' décroissante sur I, alors f est concave.
- **Propriété (Action de la dérivée seconde)** Soit un intervalle I et une fonction $f \in \mathcal{D}^2(I)$.
  - $\forall x \in I,\ f''(x) \geqslant 0 \implies f$ est convexe.
  - $\forall x \in I,\ f''(x) \leqslant 0 \implies f$ est concave.
- **Exemple :**
  - La fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ est convexe sur les intervalles $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$
  - La fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ est concave sur l'intervalle $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.
- **Définition (point d'inflexion) :** Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
  Si f'' s'annule en $a \in I$ en changeant de signe, le point $A\big(a, f(a)\big)$ est un *point d'inflexion*.
- **Exemple :** En reprenant l'exemple précédent, la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ admet deux points d'inflexion d'abscisses $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Rolle et accroissements finis

- **Définition (extremum global) :** Soient f une fonction définie sur un intervalle I, m et M deux réels.
  On dit que :
  - La fonction f admet sur I le réel m pour minimum si et seulement si :
  $$\forall x \in I,\ f(x) \geqslant m \quad \text{et} \quad \exists a \in I,\ f(a) = m.$$
  - La fonction f admet sur I le réel M pour maximum si et seulement si :
  $$\forall x \in I,\ f(x) \leqslant M \quad \text{et} \quad \exists a \in I,\ f(a) = M.$$
- **Définition (extremum local) :** Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.
  On dit que $f(a)$ est un *maximum local* (respectivement un *minimum local*) de f sur I s'il existe un intervalle $J \subset I$ ouvert centré en $a \in J$ tel que $f(a)$ soit un maximum (respectivement un minimum) de f sur J.
- **Remarque :** Un extremum global est local.

Propriété (Condition nécessaire d'existence d'extremum local) : Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert et $a \in I$.
Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

Théorème de Rolle : Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et qui satisfait à $f(a) = f(b)$, alors
$$\exists\, c \in]a,b[, \quad f'(c) = 0.$$

- **Remarques :**
  - Ce théorème affirme que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet au moins une tangente parallèle à la droite des abscisses.
  - Il assure l'existence implicite d'au moins une solution dans l'intervalle ouvert $]a,b[$ de l'équation $f'(x) = 0$.
  - Les conditions pour appliquer le théorème de Rolle sont indispensables.

Théorème des accroissements finis : Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors
$$\exists\, c \in]a,b[, \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- **Propriété :** Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
  - Si f est croissante sur I, alors pour tout réel $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.
  - Si f est décroissante sur I, alors pour tout réel $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.
  - Si f est constante sur I, alors pour tout réel $x \in I$, $f'(x) = 0$.

Propriété (Principe de Lagrange) : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si, pour tout réel $x \in I$, on a
- $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I.
- $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.
- $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

- **Corollaire (Égalité de deux dérivées)** Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
  Si, pour tout réel $x \in I$, on a $f'(x) = g'(x)$, alors il existe $c \in I$ tel que
  $$f(x) = g(x) + c.$$
- **Exemple :** Un mobile est soumis à un mouvement rectiligne uniforme de vitesse v constante égale à v_0 en m.s^{-1}. Ainsi, pour tout réel $t \geqslant 0$, nous avons
  $$v(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt} = v_0.$$
  La loi horaire de ce mobile est donc
  $$x(t) = v_0 t + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$
  En considérant la condition initiale $x(0) = x_0$, nous obtenons $c = x_0$, soit
  $$x(t) = v_0 t + x_0.$$

Monotonie stricte : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
On suppose que l'ensemble
$$N = \{x \in I \mid f'(x) = 0\}$$
n'est pas une réunion d'intervalles non vides.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante strictement sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante strictement sur I.

- **Remarque :** Lorsque $N = \{x \in I \mid f'(x) = 0\}$ n'est pas une réunion d'intervalles non vides, on dit que les éléments de N sont des points « isolés ».

- **Corollaire :** Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
  - Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est croissante strictement sur I.
  - Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est décroissante strictement sur I.

Applications (vues en TD)

- **Propriété (Méthode de la sécante) :** Soient deux réels a et b tels que $a < b$. On considère une fonction f continue, croissante strictement et convexe sur $[a,b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$.
  Nous considérons la suite (x_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $x_0 = a$ et la relation de récurrence
  $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} f(x_n).$$
  Alors $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha$.
- **Propriété (Méthode de Newton) :** Soit f une fonction dérivable deux fois sur un intervalle I.
  Soient $a \in$ et $b \in I$ tels que $a < b$. Nous supposons :
  - $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$,
  - $\forall\, x \in [a,b]$, $f'(x) > 0$ et $f''(x) > 0$.

  Pour tout entier naturel n, nous désignons par :
  - $\mathcal{T}_n$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point M_n d'abscisse x_n,
  - x_{n+1} l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{T}_n$ avec la droite des abscisses.

  Ainsi, le réel $x_0 = b$ étant donné, la suite (x_n) est définie par la relation de récurrence
  $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$
  Nous avons alors $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha$.
- **Remarque :** Ces deux méthodes permettent de construire des algorithmes à convergence rapide pour déterminer des valeurs approchées de solutions d'équations du type $f(x) = 0$.
- **Théorème (Inégalités des accroissements finis) :** Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, avec $a < b$. Nous supposons qu'il existe deux réels m et M tels que
  $$\forall\, x \in]a,b[, \quad m \leqslant f'(x) \leqslant M.$$
  Alors
  $$m \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant M. \qquad (1)$$
  Soit maintenant f une fonction dérivable sur un intervalle I et satisfaisant à
  $$\exists\, k > 0, \forall\, x \in I, \quad |f'(x)| \leqslant k,$$
  alors, quels que soient les réels a et b appartenant à I,
  $$|f(b) - f(a)| \leqslant k|b - a|. \qquad (2)$$
- **Propriété (Méthode du point fixe) :** Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur l'intervalle $]a,b[$.
  Nous supposons
  - $\forall\, x \in [a,b], \quad f(x) \in [a,b]$.
  - $\exists\, k \in]0,1[, \forall\, x \in]a,b[, \quad |f'(x)| \leqslant k$.

  Alors la suite (x_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $x_0 \in [a,b]$ et par la relation de récurrence
  $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = f(x_n)$$
  converge vers l'unique solution α sur $[a,b]$ de l'équation $f(x) = x$.

!

► Pour les parties désignées par un symbole

Propriété : une démonstration est exigible.

► Une colle comporte une question de cours choisie *a priori* parmi celles indiquées dans le programme de la semaine en cours (normalement, ±15 min).
► Un cours non appris sera sanctionné par une note inférieure à 10 (même si l'exercice est fait correctement !).