Lycée Saint Augustin
Classe de Terminale spécialité Mathématiques expertes

2024–2025
M. Berard

MATHÉMATIQUES

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 2

Vendredi 12 Décembre 2025

Durée : 2 heures

Barème : 25 points

Révisions de 1ère. Récurrence. Suites.

1 Entraînement

Exercice 1 Limite de suite 1 *(3 points)*

La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \sqrt{n+1} + \sin(u_n).$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

On commence par déterminer la variation de $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+1} + \sin(u_n).$$

Or, $-1 \leqslant \sin(u_n) \leqslant 1$, donc

$$-1 + \sqrt{n+1} \leqslant u_{n+1} - u_n \leqslant 1 + \sqrt{n+1}.$$

Comme $n \geqslant 0$, $\sqrt{n+1} \geqslant 1$, d'où :

$$0 \leqslant u_{n+1} - u_n \leqslant 1 + \sqrt{n+1}.$$

Ainsi, la suite (u_n) est croissante. On a donc, comme $u_0 \in \mathbb{R}_+$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant u_0 \geqslant 0,$$

ce qui permet de conclure que $\boxed{(u_n) \text{ est à valeurs dans } \mathbb{R}_+.}$

2. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$ et $\sin(u_n) \geqslant -1$, on a :

$$u_{n+1} = u_n + \sqrt{n+1} + \sin(u_n) \geqslant \sqrt{n+1} + \sin(u_n) \geqslant \sqrt{n+1} - 1.$$

Or, par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$. Nous avons ainsi, par théorème de comparaison :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = +\infty,$$

ce qui entraîne

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

Exercice 2 Limite de suite 2 *(5 points)*

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}}.$$

1. Encadrer $\dfrac{1}{n+\sqrt{k}}$ pour $k \in [\![0,n]\!]$.

Pour $k \in [\![0,n]\!]$, nous avons :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \sqrt{k} \leqslant \sqrt{n} &\iff n \leqslant n+\sqrt{k} \leqslant n+\sqrt{n} \\ &\iff \boxed{\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{n+\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{n+\sqrt{n}}.} \end{aligned}$$

2. En déduire l'encadrement :

$$\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}} \leqslant 1.$$

En sommant l'inégalité obtenue pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, il vient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{n}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}.$$

Comme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{n}} = \frac{n}{n+\sqrt{n}} = \frac{1}{1+\frac{\sqrt{n}}{n}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1,$$

on en déduit :

$$\boxed{\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} \leqslant u_n \leqslant 1.}$$

3. Donner la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1.$$

Par théorème d'encadrement, en vertu de la question précédente, nous déduisons :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.}$$

2 Type Bac

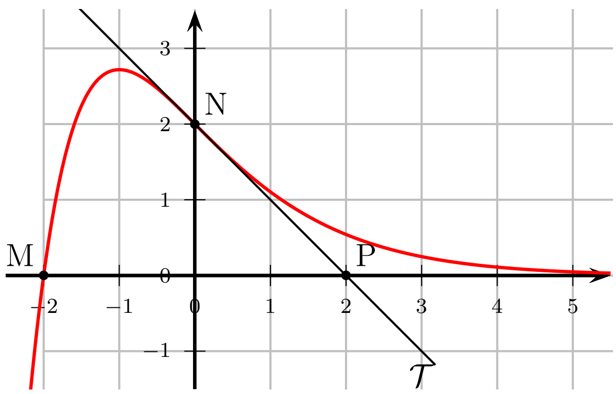
Exercice 3 Étude d'une fonction *(9 points)*

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa dérivée seconde.

Dans le repère orthonormé ci-dessous ont été représentés :

- la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f ;
- la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ en son point $\mathrm{N}(0\,;\,2)$;
- le point $\mathrm{M}(-2\ ;\ 0)$ appartenant à $\mathcal{C}_f$ et $\mathrm{P}(2\,;\,0)$ appartenant à la tangente $\mathcal{T}$.

On précise que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$ et qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1]$.



On répondra aux deux questions suivantes en utilisant le graphique.

1. **a)** Donner $f(0)$.

Nous lisons $\boxed{f(0) = 2.}$

b) **Déterminer $f'(0)$.**

Le nombre dérivé $f'(0)$ est égal au coefficient directeur de la droite (NP), soit :
$$f'(0) = \frac{0-2}{2-0} = -1.$$

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Il semble que $f(-2) = 0$, d'où

$$\boxed{S = \{-2\}.}$$

On admet que la fonction f est de la forme

$$f(x) = (ax+b)e^{\lambda x},$$

où a,b et λ sont des constantes réelles.

Pour répondre aux trois questions suivantes, on utilisera les résultats des deux premières questions.

3. Justifier que $b = 2$.

On a vu que $f(0) = 2$, d'où $be^{\lambda \times 0} = 2$, soit $b = 2$.

4. Justifier que $-2a + b = 0$ puis en déduire la valeur de a.

Avec la question précédente, on a donc $f(x) = (ax+2)e^{\lambda x}$.
On sait aussi que $f(-2) = 0$, soit $(-2a+2)\,\mathrm{e}^{-2\lambda} = 0$ et comme $e^{-2\lambda} \neq 0$, on a donc $-2a + 2 = 0$, d'où $a = 1$.

5. Déterminer l'expression de f. Justifier.

On a vu que $f'(0) = -1$
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$$f'(x) = e^{\lambda x} + \lambda(x+2)e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(1 + \lambda x + 2\lambda).$$

Donc

$$\begin{aligned} f'(0) = -1 &\iff 1 + 2\lambda = -1 \\ &\iff 2\lambda = -2 \\ &\iff \lambda = -1. \end{aligned}$$

On a donc finalement :
$$\boxed{f(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}.}$$

6. Dresser le tableau de variations de f. Justifier.

La fonction f est dérivable comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et sur cet intervalle :

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x} - (x+2)e^{-x} \\ &= e^{-x}(1-x-2) \\ &= (-x-1)e^{-x}. \end{aligned}$$

On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$: le signe de $f('x)$ est donc celui de $-x-1$: positif puis négatif.
Nous avons par ailleurs :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff -x-1 = 0 \\ &\iff x = -1, \end{aligned}$$

ce qui entraîne que f' s'annule en -1. Or $f(-1) = e$.
Tout cela nous donne le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	e	$\searrow$	

Les points qui annulent la dérivée seconde d'une fonction sont les « points d'inflexion » de cette fonction.

7. Déterminer les éventuels points d'inflexion de la fonction f.

La fonction f' est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$$f''(x) = -e^{-x} + (x+1)e^{-x} = e^{-x}(x+1-1) = xe^{-x}.$$

Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de x, donc la courbe $\mathcal{C}_f$ a un seul point d'inflexion en $x = 0$, qui a pour coordonnées $\boxed{(0\ ;\ 2).}$

3 Niveau ★★★

Exercice 4 Comparaison carré/factorielle *(8 points)*

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{n^2}{n!}.$$

1. Conjecturer le comportement de (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

Nous calculons les 8 premières valeurs de u_n :

$$\begin{aligned}
u_1 &= 1\\
u_2 &= 2\\
u_3 &= 1{,}5\\
u_4 &\simeq 0{,}6667\\
u_5 &\simeq 0{,}20833\\
u_6 &= 0{,}05\\
u_7 &\simeq 0{,}00972\\
u_8 &\simeq 0{,}0015873015873
\end{aligned}$$

ce qui permet de conjecturer que la suite (u_n) tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

2. Justifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n > 0.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 > 0$ et $n! > 0$ donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n > 0.}$$

3. Prouver que :

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_{n+1} \leqslant \frac{3}{4} u_n.$$

Soit un entier naturel $n \geqslant 2$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^2}\\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{n!}{(n+1)!}\\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{1}{n+1}\\
&= \frac{n+1}{n^2}.
\end{aligned}$$

Nous en déduisons, pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{3}{4} &= \frac{n+1}{n^2} - \frac{3}{4}\\
&= \frac{-3n^2 + 4n + 4}{4n^2}.
\end{aligned}$$

Pour tout réel x, nous posons $P(x) = -3x^2 + 4x + 4$. Il vient :

$$\Delta = 42 - 4 \times (-3) \times 4 = 64,$$

ce qui donne
$$P(x) = 0 \iff x = -\frac{2}{3} \text{ ou } x = 2.$$
Le signe d'un trinôme du second degré étant celui de son cœfficient dominant, nous en déduisons
$$\forall\, x \geqslant 2, \quad P(x) \leqslant 0,$$
ce qui implique
$$\forall\, n \geqslant 2, \quad P(n) = -3n^2 + 4n + 4 \leqslant 0$$
Il en résulte que, pour tout entier $n \geqslant 2$, nous obtenons
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{3}{4} = \frac{P(n)}{4n^2} \leqslant 0,$$
ce qui donne
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{3}{4}.$$
Comme, pour tout $n \geqslant 2$, $u_n > 0$, nous concluons :
$$\boxed{\forall\, n \geqslant 2, \quad u_{n+1} \leqslant \frac{3}{4} u_n.}$$

4. En déduire que :
$$\forall\, n \geqslant 2, \quad u_n \leqslant u_2 \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$$
La suite (u_n) converge-t-elle ?

Nous démontrons cette inégalité par récurrence.

Initialisation
Nous avons
$$u_2 \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{2-2} u_2 = u_2,$$
ce qui justifie que l'inégalité proposée est vraie au rang $n = 2$.

Hérédité
Nous supposons qu'à un rang entier $n \geqslant 2$ fixé, $u_n \leqslant u_2 \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$.
Montrons que :
$$u_{n+1} \leqslant u_2 \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.$$
En appliquant l'hypothèse de récurrence et en multipliant les deux membres de cette inégalité par $\frac{3}{4}$, il vient :
$$\frac{3}{4} u_n \leqslant u_2 \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

Puisque $u_{n+1} \leqslant \frac{3}{4} u_n$, nous en déduisons par transitivité de la relation $\leqslant$,

$$u_{n+1} \leqslant u_2 \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1},$$

ce qui prouve que l'inégalité attendue est héréditaire.
En appliquant le principe de récurrence, nous en concluons :

$$\boxed{\forall\, n \geqslant 2, \quad u_n \leqslant u_2 \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}.}$$

De la question **2**, il résulte que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$0 < u_n \leqslant u_2 \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}.$$

Comme $\left|\frac{3}{4}\right| < 1$, nous en déduisons que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} = 0.$$

En appliquant le théorème d'encadrement, nous en concluons :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n!} = 0.}$$