



Lycée Saint Augustin
Classe de Terminale spécialité Mathématiques expertes

2025–2026
M. BERARD

MATHÉMATIQUES

CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 3

À rendre le Jeudi 13 Novembre 2025

Durée indicative : 8 heures

Barème : 43 points

RÉCURRENCE. COMBINATOIRE. SUITES.

Exercice 1 Une égalité fonctionnelle (*5 points*)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ satisfaisant à

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = f(x).$$

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x).$$

On note \mathcal{P} le prédictat de la variable n défini sur \mathbb{N} par :

$$\mathcal{P}(n) : \text{« } \forall x \in \mathbb{R}, \quad f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x) \text{ »}.$$

Initialisation

Pour $n = 0$, nous avons $f\left(\frac{x}{2^0}\right) = f(x)$, ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie au rang $n = 0$.

Héritéité

Supposons qu'à un rang $n \in \mathbb{N}$ fixé, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, *i.e.* :

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x).$$

En appliquant l'égalité $f(2x) = f(x)$ et l'hypothèse de récurrence, il vient :

$$f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = f\left(2 \times \frac{x}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$$

d'où $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui prouve que l'égalité attendue est héréditaire.

En appliquant le principe de récurrence, nous en concluons

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x).}$$

Exercice 2 Manipulation de coefficients binomiaux (*6 points*)

Soient un entier naturel $n \geq 1$ et f la fonction $x \mapsto (1+x)^n$.

1. (*2 pts*) **En dérivant cette fonction de deux façons, montrer que**

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = 2^{n-1}n.$$

Pour tout réel x , en utilisant la formule du binôme de Newton, nous avons

$$f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

En dérivant chaque membre de cette égalité, pour tout réel x , il vient

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} kx^{k-1}.$$

En particulier, pour $x = 1$, nous obtenons

$$f'(1) = n \times 2^{n-1} = \sum_{k=1}^n k \times \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n k \times \binom{n}{k}.$$

Ainsi nous en concluons que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^n k \times \binom{n}{k} = n \times 2^{n-1}.}$$

2. (4 pts) En dérivant deux fois la fonction f et en supposant que $n \geq 2$, justifier

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{k}{n} = 2^{n-2} n(n+1).$$

Soit un entier $n \geq 2$. En dérivant à nouveau chaque membre de l'égalité donnant $f'(x)$, il vient

$$\begin{aligned} f''(x) &= n(n-1)(1+x)^{n-2} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k(k-1)x^{k-2} \\ &= \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} k(k-1)x^{k-2}. \end{aligned}$$

En particulier, pour $x = 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned} f''(1) &= n(n-1) \times 2^{n-2} \\ &= \sum_{k=2}^n k(k-1) \times \binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=0}^n k(k-1) \times \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\sum_{k=0}^n k^2 \times \binom{n}{k} - \sum_{k=0}^n k \times \binom{n}{k} = n(n-1) \times 2^{n-2},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k^2 \times \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^n k \times \binom{n}{k} + n(n-1) \times 2^{n-2} \\ &= n \times 2^{n-1} + n(n-1) \times 2^{n-2} \\ &= n \times 2^{n-2}(2+n-1) \\ &= n(n+1) \times 2^{n-2}. \end{aligned}$$

Exercice 3 Suites (10 points)

Soit $q \in]0,1[$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$.

1. (0,5 pts) Donner la nature et le terme général de la suite (u_n) .

La relation $u_{n+1} = q \times u_n$ justifie le fait qu'il s'agit d'une suite géométrique.
De plus, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 q^n = q^n.$$

2. (0,5 pts) Calculer la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Comme $|q| < 1$, alors $q^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

3. On fixe $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

- a) (0,5 pts) Combien y a-t-il de termes dans la somme S_n ?

La somme S_n contient $n+1$ termes.

- b) (1 pt) Donner une écriture simplifiée de S_n sous forme de fraction.

Il s'agit de reconnaître ici la somme des termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$. La formule de cette somme donne alors :

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

- c) (1 pt) Calculer la limite de la suite (S_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Puisque $q^{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, on en déduit par des opérations sur les limites de suites que $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1 - 0}{1 - q}$, donc finalement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{1 - q}.$$

4. Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $f_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$.

- a) (0,5 pts) Que vaut $f_n(1)$?

$$f_n(1) = \sum_{k=0}^n 1^k = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1.$$

b) (1 pt) Pour $x \neq 1$, simplifier l'expression de $f_n(x)$.

En reprenant les résultats précédents, comme on a $f_n(q) = S_n$, avec $q = x$, on a

$$f_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

c) (1 pt) Justifier que f_n est dérivable. Préciser sur quel domaine.

La fonction $[x \rightarrow f_n(x)]$ est dérivable sur \mathbb{R} car elle est somme de $n + 1$ fonctions dérivables (fonctions puissances, $x \rightarrow x^k$ avec $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$).

d) (3 pts) Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$,

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

Il faut calculer de deux façons la dérivée de f_n : d'une part en utilisant la définition de f_n , en dérivant terme à terme, on obtient

$$\forall x \in]0, 1[, \quad f'_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)x^k,$$

et d'autre part, en utilisant l'égalité

$$f_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x},$$

on obtient (quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas) :

$$f'_n(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

Comme la dérivée d'une fonction est unique, on déduit des deux expressions précédentes que :

$$\forall x \in]0; 1[, \quad \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)x^k = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

e) (1 pt) En déduire que pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\sum_{k=0}^n (k+1)x^k = \frac{(n+1)x^{n+2} - x^{n+1}(n+2) + 1}{(1-x)^2}.$$

Il suffit d'appliquer l'égalité précédente en remplaçant n par $n + 1$.

Exercice 4 Suites récurrentes (*6 points*)

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

1. (4 pts) **Montrer que pour tout** $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} - 3^n$.

Montrons par récurrence double cette formule.

Soit \mathcal{P} le prédictat de la variable n défini sur \mathbb{N} par :

$$\mathcal{P}(n) : u_n = 2^{n+1} - 3^n.$$

Initialisation

Pour $n = 0$, nous avons $u_0 = 1 = 2^{0+1} - 3^0 = 2 - 1$. Pour $n = 1$, nous avons $u_1 = 1 = 2^{1+1} - 3^1 = 4 - 3$.

Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n + 1)$ vraies, c'est-à-dire :

$$u_n = 2^{n+1} - 3^n \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2^{n+2} - 3^{n+1}.$$

Montrons que $\mathcal{P}(n + 2)$ est vraie.

En appliquant la formule de récurrence de la suite (u_n) , on a :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n \\ &= 5(2^{n+2} - 3^{n+1}) - 6(2^{n+1} - 3^n) \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= 5 \times 2^{n+2} - 5 \times 3^{n+1} - 3 \times 2 \times 2^{n+1} + 2 \times 3 \times 3^n \\ &= 5 \times 2^{n+2} - 3 \times 2^{n+2} - 5 \times 3^{n+1} + 2 \times 3^{n+1} \\ &= 2 \times 2^{n+2} - 3 \times 3^{n+1} \\ &= 2^{n+3} - 3^{n+2}, \end{aligned}$$

d'où $\mathcal{P}(n + 2)$, ce qui prouve que l'égalité attendue est héréditaire.

En appliquant le principe de récurrence, nous en concluons :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^{n+1} - 3^n.}$$

2. (2 pts) **En remarquant que**

$$u_n = 3^n \left(2 \left(\frac{2}{3} \right)^n - 1 \right),$$

déterminer la limite de la suite (u_n) .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc :

$$\begin{aligned} u_n &= 2^{n+1} - 3^n \\ &= 3^n \left(\frac{2^{n+1}}{3^n} - 1 \right) \\ &= 3^n \left(2 \left(\frac{2}{3} \right)^n - 1 \right) \end{aligned}$$

Or, $\left| \frac{2}{3} \right| < 1$, donc $\left(\frac{2}{3} \right)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Par ailleurs, $3^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ Par somme et produit, nous obtenons ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

Exercice 5 Polynômes de Tchebychev¹ (12 points)

Pour tout entier naturel n , on considère les polynômes T_n , définis sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \end{cases}$$

- 1.** (0,5 pt) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $T_2(x)$ puis $T_3(x)$.

Soit un réel x . Nous avons

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1.$$

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x.$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x.$$

- 2.** (2 pts) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n(-x) = (-1)^n T_n(x).$$

Quelle est la parité de la fonction T_n ?

Pour tout réel x , nous prouvons cette égalité par récurrence double.

Soit \mathcal{P} le prédictat de la variable n défini sur \mathbb{N} par :

$$\mathcal{P}(n) : T_n(-x) = (-1)^n T_n(x).$$

1. Mathématicien russe (1821–1894)

Initialisation

Nous avons

$$T_0(-x) = 1 = (-1)^0 \times 1 = (-1)^0 T_0(x),$$

$$T_1(-x) = -x = (-1)^1 \times x = (-1)^1 T_1(x).$$

Héritéité

Pour un entier $n \geq 1$, on suppose $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n)$ vraies, c'est-à-dire :

$$T_{n-1}(-x) = (-1)^{n-1} T_{n-1}(x) \quad \text{et} \quad T_n(-x) = (-1)^n T_n(x).$$

Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire :

$$T_{n+1}(-x) = (-1)^{n+1} T_{n+1}(x).$$

En utilisant la relation de récurrence double et l'hypothèse de récurrence, il vient

$$\begin{aligned} T_{n+1}(-x) &= 2(-x)T_n(-x) - T_{n-1}(-x) \\ &= 2(-x)(-1)^n T_n(x) - (-1)^{n-1} T_{n-1}(x) \\ &= 2x(-1)^{n+1} T_n(x) - (-1)^{n+1} T_{n-1}(x) \quad (\text{car } (-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}) \\ &= (-1)^{n+1} [2xT_n(x) - T_{n-1}(x)] \\ &= (-1)^{n+1} T_{n+1}(x), \end{aligned}$$

d'où $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui démontre que l'égalité proposée est héréditaire.
En appliquant le théorème de récurrence d'ordre deux, pour tout réel x , nous en concluons

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n(-x) = (-1)^n T_n(x).}$$

Par disjonction, nous en déduisons deux cas.

- Si n est pair, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_n(-x) = T_n(x),$$

la fonction T_n est paire.

- Si n est impair, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_n(-x) = -T_n(x),$$

la fonction T_n est impaire.

3. Pour tout $u \in]1, +\infty[$, on pose $x = \frac{1}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right)$.

- a) (1 pt) Justifier que dans ce cas, $x > 1$.

Pour tout $u \in]1, +\infty[$, posons $g(u) = \frac{1}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right)$.

Cette fonction est dérivable sur $]1, +\infty[$, par inverse et somme. Pour

tout réel $u > 1$, nous avons

$$g'(u) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{u^2} \right) = \frac{u^2 - 1}{2u^2} > 0.$$

Nous en déduisons que la fonction g est strictement croissante sur $]1, +\infty[$. Puisque $g(1) = 1$, il en résulte :

$$\forall u \in]1, +\infty[, \quad g(u) > 1.$$

ce qui justifie que $x = g(u) > 1$.

b) (2 pts) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n(x) = \frac{1}{2} \left(u^n + \frac{1}{u^n} \right).$$

Pour tout réel $u > 1$, nous montrons par une récurrence d'ordre 2 que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n(x) = \frac{1}{2} \left(u^n + \frac{1}{u^n} \right).$$

Soit \mathcal{P} le prédictat de la variable n défini sur \mathbb{N} par :

$$\mathcal{P}(n) : T_n(x) = \frac{1}{2} \left(u^n + \frac{1}{u^n} \right).$$

Initialisation

Pour tout $u \in]1, +\infty[$, on a

$$T_0(x) = 1 = \frac{1}{2} \left(u^0 + \frac{1}{u^0} \right),$$

$$T_1(x) = x = \frac{1}{2} \left(u^1 + \frac{1}{u^1} \right).$$

D'où $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$.

Héritéité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Nous supposons $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n)$ vraies, c'est-à-dire

$$T_{n-1}(x) = \frac{1}{2} \left(u^{n-1} + \frac{1}{u^{n-1}} \right) \quad \text{et} \quad T_n(x) = \frac{1}{2} \left(u^n + \frac{1}{u^n} \right).$$

Montrons $\mathcal{P}(n+1)$, c'est-à-dire

$$T_{n+1}(x) = \frac{1}{2} \left(u^{n+1} + \frac{1}{u^{n+1}} \right).$$

En utilisant la relation de récurrence double et l'hypothèse de récurrence,

il vient

$$\begin{aligned}
T_{n+1} &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \\
&= 2x \frac{1}{2} \left(u^n + \frac{1}{u^n} \right) - \frac{1}{2} \left(u^{n-1} + \frac{1}{u^{n-1}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right) \left(u^n + \frac{1}{u^n} \right) - \frac{1}{2} \left(u^{n-1} + \frac{1}{u^{n-1}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[u^{n+1} + \frac{1}{u^{n-1}} + u^{n-1} + \frac{1}{u^{n+1}} - u^{n-1} - \frac{1}{u^{n-1}} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left(u^{n+1} + \frac{1}{u^{n+1}} \right),
\end{aligned}$$

d'où $\mathcal{P}(n+1)$, l'égalité attendue est donc héréditaire.

En appliquant le théorème de récurrence d'ordre deux, pour tout réel $x > 1$, nous en concluons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n(x) = \frac{1}{2} \left(u^n + \frac{1}{u^n} \right).$$

c) (1 pt) En déduire que :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad T_n(x) > 1.$$

Soient $u \in]1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$.

Avec les notations ci-dessus, comme $u^n \in]1, +\infty[$, nous en déduisons

$$g(u^n) = \frac{1}{2} \left(u^n + \frac{1}{u^n} \right),$$

ce qui établit

$$\boxed{\forall x \in]1, +\infty[, \quad T_n(x) > 1.}$$

Remarque : En utilisant la parité de T_n , nous montrons que :

— si n est pair, alors :

$$\forall x \in]-\infty, -1[, \quad T_n(x) > 1,$$

— si n est impair, alors :

$$\forall x \in]-\infty, -1[, \quad T_n(x) < -1.$$

Par suite, l'équation $T_n(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R} \setminus [-1; 1]$.

4. a) (0,5 pts) Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, en utilisant les formules d'addition vues l'année dernière, montrer que

$$2 \cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b).$$

Pour tous les réels a et b , nous savons que :

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{cases}$$

ce qui induit, par addition membres à membres

$$2 \cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b).$$

- b) (2 pts)** Pour tout $x \in [-1,1]$, on pose $x = \cos \alpha$, avec $\alpha \in [0,\pi]$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n(\cos \alpha) = \cos(n\alpha).$$

Soient $x \in [-1,1]$ et $\alpha \in [0,\pi]$ tels que $x = \cos \alpha$.

Par une récurrence d'ordre 2, nous démontrons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n(\cos \alpha) = \cos(n\alpha).$$

Pour tout $\alpha \in [0,\pi]$, soit \mathcal{P} le prédicat de la variable n défini sur \mathbb{N} par

$$\mathcal{P}(n) : \quad T_n(\cos \alpha) = \cos(n\alpha)$$

Initialisation

Pour tout $\alpha \in [0,\pi]$, on a

$$T_0(\cos \alpha) = 1 = \cos 0,$$

$$T_1(\cos \alpha) = \cos \alpha,$$

ce qui justifie que $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n)$ vraies, c'est-à-dire

$$T_{n-1}(\cos \alpha) = \cos((n-1)\alpha) \quad \text{et} \quad T_n(\cos \alpha) = \cos(n\alpha).$$

Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire

$$T_{n+1}(\cos \alpha) = \cos((n+1)\alpha).$$

En utilisant la relation de récurrence double, l'hypothèse de récurrence et la formule de transformation d'un produit en somme (démontrée à la question précédente), nous obtenons

$$\begin{aligned} T_{n+1}(\cos \alpha) &= 2 \cos \alpha T_n(\cos \alpha) - T_{n-1}(\cos \alpha) \\ &= 2 \cos \alpha \cos(n\alpha) - \cos((n-1)\alpha) \\ &= \cos(n\alpha + \alpha) + \cos(n\alpha - \alpha) - \cos((n-1)\alpha) \\ &= \cos((n+1)\alpha), \end{aligned}$$

d'où $\mathcal{P}(n+1)$. L'égalité proposée est donc héréditaire.

En appliquant le théorème de récurrence d'ordre deux, pour tout $\alpha \in [0,\pi]$, nous en concluons :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n(\cos \alpha) = \cos(n\alpha).}$$

5. (3 pts) En déduire les solutions, dans l'intervalle $[-1,1]$, de l'équation

$$T_n(x) = 0.$$

En posant $x = \cos \alpha$, l'équation considérée devient

$$T_n(\cos \alpha) = 0 \iff \cos(n\alpha) = 0.$$

Ainsi, nous en déduisons

$$n\alpha \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \iff \exists k \in \mathbb{Z}, n\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \alpha = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}.$$

Puisque $\alpha \in [0, \pi]$, l'entier relatif k est tel que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \leq \pi \iff 0 \leq \frac{1}{2n} + \frac{k}{n} \leq 1 \\ &\iff 0 \leq \frac{1+2k}{2n} \leq 1 \\ &\iff 0 \leq 1+2k \leq 2n \\ &\iff -\frac{1}{2} \leq k \leq n - \frac{1}{2} \\ &\iff k \in \left[-\frac{1}{2}, n - \frac{1}{2}\right]. \end{aligned}$$

Puisque $k \in \mathbb{Z}$, nous obtenons

$$k \in \left[-\frac{1}{2}, n - \frac{1}{2}\right] \cap \mathbb{Z} \iff k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket.$$

Par conséquent, une solution dans l'intervalle $[-1,1]$ de l'équation $T_n(x) = 0$ est nécessairement de la forme

$$x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}, \quad k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket.$$

Réciproquement, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, les n réels x_k définis ci-dessus satisfont à

$$\begin{aligned} T_n(x_k) &= T_n \left(\cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) \\ &= \left(\cos n \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) \\ &= \cos \left((2k+1) \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui prouve que ces derniers sont solutions de l'équation proposée.

Nous en concluons que l'équation $T_n(x) = 0$, admet dans $[-1,1]$, n solutions distinctes x_k définies par

$$x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}, \quad k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket.$$

L'ensemble des solutions de l'équation est

$$\mathcal{S} = \left\{ \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}.$$

Exercice 6 Applications et récurrence (*4 points*)

Soit $f : E \rightarrow E$ une application. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit f^n par récurrence en posant :

$$\begin{cases} f^0 = \text{Id}_E \\ \forall n \in \mathbb{N}, f^{n+1} = f^n \circ f. \end{cases}$$

1. (1,5 pt) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{n+1} = f \circ f^n$

Par une récurrence simple, nous démontrons

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{n+1} = f \circ f^n.$$

Soit \mathcal{P} le prédictat de la variable n défini sur \mathbb{N} par

$$\mathcal{P}(n) : f^{n+1} = f \circ f^n.$$

Initialisation

On a

$$f^1 = \text{Id}_E \circ f = f^0 \circ f,$$

d'où $\mathcal{P}(0)$.

Héritéité

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie au rang n , c'est-à-dire

$$f^{n+1} = f \circ f^n.$$

Montrons $\mathcal{P}(n+1)$, c'est-à-dire

$$f^{n+2} = f \circ f^{n+1}.$$

En utilisant la définition de f ainsi que l'hypothèse de récurrence, nous obtenons

$$\begin{aligned} f^{n+2} &= f^{n+1} \circ f \\ &= (f^n \circ f) \circ f \\ &= (f \circ f^n) \circ f \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= f \circ (f^n \circ f) \quad (\text{associativité de } \circ) \\ &= f \circ f^{n+1} \quad (\text{définition de } f^{n+1}) \end{aligned}$$

d'où $\mathcal{P}(n+1)$. L'égalité proposée est donc héréditaire.

Par principe de récurrence, nous en concluons

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, f^{n+1} = f \circ f^n = f^n \circ f.}$$

2. (2,5 pts) Montrer que si f est bijective, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, f^n est aussi bijective et $(f^n)^{-1} = (f^{-1})^n$.

On suppose f bijective. Montrons par récurrence simple la propriété $\mathcal{P}(n)$ définie sur \mathbb{N} par

$$\mathcal{P}(n) : \text{« } f^n \text{ est bijective et } (f^n)^{-1} = (f^{-1})^n \text{ »}$$

Initialisation

L'identité de E Id_E est bijective. Par ailleurs :

$$(f^{-1})^0 = \text{Id}_E = \text{Id}_E^{-1} = (f^0)^{-1}.$$

On a donc $\mathcal{P}(0)$ vraie.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie au rang n . Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

Par hypothèse de récurrence, on a f^n bijective. On a également f bijective. Comme la bijectivité est stable par composition, on a $f^{n+1} = f \circ f^n$ bijective. Ainsi, f^{-1} et $(f^n)^{-1}$ existent et nous avons

$$(f^{n+1})^{-1} = (f \circ f^n)^{-1}.$$

Or, on sait que si f, g sont deux applications bijectives, alors $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$. Il vient alors

$$\begin{aligned} (f^{n+1})^{-1} &= (f^n)^{-1} \circ f^{-1} \\ &= (f^{-1})^n \circ f^{-1} \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= (f^{-1})^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où $\mathcal{P}(n+1)$. Ainsi, la proposition est héréditaire.

Par principe de récurrence, on a donc, si f est bijective :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^n \text{ est bijective et } (f^n)^{-1} = (f^{-1})^n.}$$