

Colle S02

17/09/25

1 Démonstration

Démontrer le **Lemme d'Archimède** puis la proposition suivante :

Proposition 1 – Propriété (Division euclidienne dans \mathbb{N})

Quels que soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, il existe un couple unique d'entiers naturels (q,r) satisfaisant à

$$a = bq + r, \quad \text{avec } 0 \leq r < b.$$

2 Exercices

2.1 Équation fonctionnelle

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + xf(1-x) = 1+x \quad (\text{E1})$$

1. Dans cette question, on suppose que f est une fonction solution, c'est-à-dire une fonction qui vérifie (E1).
 - a) Déterminer $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
 - b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(1-x) + (1-x)f(x) = 2 - x$. On note cette égalité (E2).
 - c) À l'aide de (E1) et (E2), déterminer une expression de $f(x)$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Donner la conclusion de l'exercice.

2.2 Divisibilité d'un polynôme de degré n

Soient n et p deux entiers naturels non nuls et x un entier relatif.

1. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes.
 - (i) $p \mid x^2 - x$,
 - $\forall n \in \mathbb{N}^*, p \mid x^n - x$.
2. En déduire l'ensemble des entiers relatifs 0 tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'entier $x^n - x$ est pair.

Colle S02

17/09/25

1 Démonstration

Démontrer la proposition suivante puis les **Lois de De Morgan** :

Proposition 1

- Associativité de « \wedge » et « \vee » ;
- Transitivité de « \Rightarrow » ;
- Distributivité de « \wedge » sur « \vee » ;
- Distributivité de « \vee » sur « \wedge ».

2 Exercices

2.1 Équation fonctionnelle

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ qui vérifient :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad f(m+n) = f(m) + f(n).$$

2.2 Division euclidienne d'un polynôme

Pour tout entier $x \in \mathbb{N}^*$, nous posons :

$$p(x) = [x^2 + (x-1)^2]^2.$$

Quel est le reste de la division euclidienne de $p(x)$ par $4x^2$?