



Chapitre 9 Limite d'une fonction

■ Limite finie en un point

- **Définition (limite finie en un point) :** Soit f une fonction définie sur une partie D de \mathbb{R} et a un réel tel que $D \cup \{a\}$ contient un intervalle I tel que $a \in I$.

On dit que f admet pour limite ℓ en a si et seulement si

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - \ell) = 0.$$

Dans ce cas, nous notons

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell.$$

Formellement, cela équivaut à :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall x \in D, |x - a| < r \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

- **Propriété :** Avec les données de la définition, si la fonction f admet une limite ℓ en a et si f est définie en a , alors $\ell = f(a)$.

Propriété (unicité de la limite) : Avec les données de la définition, si la fonction f admet une limite ℓ en a , cette limite est unique.

- **Propriété (opérations sur les limites) :** Soient a, ℓ et ℓ' trois réels. On considère deux fonctions f et g définies sur une partie D de \mathbb{R} tel que $D \cup \{a\}$ contient un intervalle I tel que $a \in I$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'$, alors :

- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \ell + \ell'.$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow a} \lambda f(x) = \lambda \ell.$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \ell \ell'.$
- Si $\ell' \neq 0, \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{\ell'}.$

- **Définition (limite à droite, limite à gauche) :** Soit f une fonction définie sur une partie D de \mathbb{R} et a un réel tel que $D \cup \{a\}$ contient un intervalle I tel que $a \in I$.

- Un réel ℓ est la *limite à droite* (ou *par valeurs supérieures*) de f en a si, et seulement si, la restriction de f à $D \cap]a, +\infty[$ admet ℓ pour limite en a .

Cette limite à droite est notée

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{x > a} f(x) = \ell.$$

En d'autres termes

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall x \in D, 0 < x - a < r \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

- Un réel ℓ est la *limite à gauche* (ou *par valeurs inférieures*) de f en a si, et seulement si, la restriction de f à $D \cap]-\infty, a[$ admet ℓ pour limite en a .

Cette limite à gauche est notée

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{x < a} f(x) = \ell.$$

En d'autres termes

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall x \in D, -r < x - a < 0 \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

- **Propriété :** Avec les données de la définition, les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$

- **Remarques :**

- Si f est définie en a , alors nous obtenons

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell = f(a).$$

- La négation de (ii) permet de justifier facilement qu'une fonction n'a pas de limite en a .

- **Exemple :** l'échelon unité n'admet pas de limite en 0.

Théorème d'encadrement (ou des gendarmes) : Soient ℓ un réel, f, g, h trois fonctions définies sur une partie D de \mathbb{R} et a un réel tel que $D \cup \{a\}$ contient un intervalle I tel que $a \in I$.

Si

- $\forall x \in D, g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$

alors la fonction f admet une limite en a et

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell.$$

- **Corollaire :** Soient ℓ un réel, f et u deux fonctions définies sur une partie D de \mathbb{R} et a un réel tel que $D \cup \{a\}$ contient un intervalle I tel que $a \in I$.

Si

- $\forall x \in D, |f(x) - \ell| \leq u(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$

alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell.$$

- **Remarque :** Si les inégalités sont strictes, le théorème d'encadrement et son corollaire restent vrais.

Théorème de passage à la limite sur une inégalité :

Soient ℓ un réel, f une fonction définie sur une partie D de \mathbb{R} et a un réel tel que $D \cup \{a\}$ contient un intervalle I tel que $a \in I$.

Si

- $\forall x \in D, f(x) > 0$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$

alors $\ell \geq 0$.

- **Remarque :** Nous retiendrons que le passage à la limite sur une inégalité stricte restitue une inégalité large.

■ Limite finie en $\pm\infty$

► **Exemple :** $\frac{2x-1}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 2$.

► **Définition (limite finie en $+\infty$) :** Soient a et ℓ deux réels. Une fonction f définie sur un intervalle I de la forme $[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$, a pour limite ℓ quand x tend vers $+\infty$, ce que l'on note

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell,$$

si, et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in I, \forall x \geq A, |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

► **Définition (limite finie en $-\infty$) :** Soient a et ℓ deux réels. Une fonction f définie sur un intervalle I de la forme $]-\infty, a]$ ou $]-\infty, a[$, a pour limite ℓ quand x tend vers $-\infty$, ce que l'on note

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \ell,$$

si, et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in I, \forall x \leq A, |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

► **Propriété (unicité de la limite en $\pm\infty$) :** Si une fonction admet une limite finie en $+\infty$ (respectivement $-\infty$), alors cette limite est unique.

► **Propriété (limites nulles de référence en $\pm\infty$) :** Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Nous disposons des résultats suivants :

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x+a)^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(x+a)^n} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+a}} = 0.$$

• En particulier, pour $a = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

► **Remarque :** En $-\infty$ ou en $+\infty$, les opérations sur les limites exposées dans le cas de limites finies en a restent vraies.

■ Limite infinie en $\pm\infty$

► **Exemple :** $x^2 \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} +\infty$.

► **Définition (limite infinie en $+\infty$) :** Soit un réel a et f une fonction définie sur un intervalle I de la forme $[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$.

• La fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, ce que l'on note

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty,$$

si, et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists B \in I, \forall x > B, f(x) > A.$$

• La fonction f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$, ce que l'on

► **Définition (asymptote horizontale) :** Soit \mathcal{C}_f la représentation graphique d'une fonction f relativement à un repère orthogonal.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$, alors la droite d'équation $y = \ell$ est une *asymptote horizontale* pour la courbe \mathcal{C}_f , en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).

► **Remarque :** L'étude du signe de $f(x) - \ell$ détermine la position de \mathcal{C}_f par rapport à son asymptote horizontale. Plus précisément :

- si $f(x) - \ell > 0$, alors \mathcal{C}_f est au-dessus de son asymptote horizontale,
- si $f(x) - \ell < 0$, alors \mathcal{C}_f est en-dessous de son asymptote horizontale.

► **Théorème d'encadrement (ou des gendarmes) :** Soient ℓ et a deux réels, f , g et h trois fonctions définies sur un intervalle I de la forme $[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$. Si

- $\forall x \in I, g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell$

alors la fonction f admet une limite en $+\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell.$$

► **Corollaire :** Soient ℓ et a deux réels, f et u deux fonctions définies sur un intervalle I de la forme $[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$.

Si

- $\forall x \in I, |f(x) - \ell| \leq u(x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$

alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

► **Remarque :** Si les inégalités sont strictes, le théorème d'encadrement et son corollaire restent vrais.

► **Exemple :** $\frac{\sin(\pi x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{\sin(\pi x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$; l'axe des abscisses est une asymptote horizontale en $\pm\infty$ pour la courbe de $x \mapsto \frac{\sin(\pi x)}{x}$.

► **Propriété (passage à la limite sur une inégalité) :** Soient ℓ et a deux réels, f une fonction définie sur un intervalle I de la forme $[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$.

Si

- $\forall x \in I, f(x) > 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$

alors $\ell \geq 0$.

► **Remarque :** Cette proposition reste vraie en $-\infty$.

note

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty,$$

si, et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists B \in I, \forall x > B, f(x) < -A.$$

► **Définition (limite infinie en $-\infty$) :** Soit un réel a et f une fonction définie sur un intervalle I de la forme $]-\infty, a]$ ou $]-\infty, a[$.

• La fonction f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$, ce que l'on note

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty,$$

si, et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists B \in I, \forall x < B, f(x) > A.$$

- La fonction f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$, ce que l'on note

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty,$$

si, et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists B \in I, \forall x < B, f(x) < -A.$$

- Propriété (limites infinies de référence en l'infini) :** Pour tout entier naturel n non nul, nous avons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

- Propriété (limite d'une fonction polynomiale) :** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, le n -uplet (a_0, a_1, \dots, a_n) et $p : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$, avec $a_n \neq 0$, un polynôme de degré n . Nous avons :

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_n > 0 \\ -\infty & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$
$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_n > 0 \text{ et } n \text{ pair} \\ -\infty & \text{si } a_n > 0 \text{ et } n \text{ impair} \\ -\infty & \text{si } a_n < 0 \text{ et } n \text{ pair} \\ +\infty & \text{si } a_n < 0 \text{ et } n \text{ impair} \end{cases}$$

- Remarque :** Nous retiendrons cette proposition en se souvenant que la limite infinie d'un polynôme est la limite de son terme $a_n x^n$ de plus haut degré, en $-\infty$ ou $+\infty$. On dit aussi qu'un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré, en $-\infty$ ou $+\infty$.

Théorème de comparaison en $+\infty$: Soient un réel a , f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de la forme $[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$.

Si

- $\forall x \in I, f(x) \geq g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

■ Limite infinie en un point

- Exemple :** $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x-1} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{x-1} = -\infty$

- Définitions :** Soient un réel a et f une fonction définie sur un intervalle I ouvert en a .

- La fonction f a pour *limite $+\infty$ en a à droite*, notée $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$, si et seulement si

$$\forall A > 0, \exists h > 0, \forall x \in]a, a+h[, f(x) > A.$$

- La fonction f a pour *limite $-\infty$ en a à droite*, notée $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$, si et seulement si

$$\forall A > 0, \exists h > 0, \forall x \in]a, a+h[, f(x) < -A.$$

- La fonction f a pour *limite $+\infty$ en a à gauche*, notée

- Remarque :** Ce théorème de comparaison s'étend aux fonctions qui tendent vers $-\infty$ en $+\infty$, ainsi que celles qui tendent vers $\pm\infty$ en $-\infty$.

- Exemple :** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2 - \sin(2x)} = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{2 - \sin(2x)} = -\infty.$

Lemme : Nous disposons de l'inégalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, e^x > x.$$

Propriété (limite de exp en $+\infty$) : Nous disposons de la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

- Propriété (limite de exp en $-\infty$) :** Nous disposons de la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

- Définition (asymptote oblique) :** Soient a, b deux réels avec $a \neq 0$ et f une fonction admettant une limite infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$.

La droite $(d) : y = ax + b$ est une asymptote oblique pour la courbe \mathcal{C}_f en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si, et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

$$\left(\text{resp. } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \right).$$

- Remarques :**

- Lorsque $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction ayant une limite infinie en $+\infty$ ou $-\infty$, \mathcal{C}_f n'admet pas obligatoirement une droite asymptote.
- La position de \mathcal{C}_f par rapport à son asymptote est déterminée dans chaque cas par l'étude du signe de $f(x) - (ax + b)$.
- La droite $(d) : y = ax + b$ est une asymptote oblique pour la courbe \mathcal{C}_f en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) si, et seulement si :

$$\forall x \in I, f(x) = ax + b + \varepsilon(x),$$

$$\text{avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0 \text{ (resp. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \varepsilon(x) = 0).$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \text{ si et seulement si}$$

$$\forall A > 0, \exists h > 0, \forall x \in]a-h, a[, f(x) > A.$$

- La fonction f a pour *limite $-\infty$ en a à gauche*, notée $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$, si et seulement si

$$\forall A > 0, \exists h > 0, \forall x \in]a-h, a[, f(x) < -A.$$

- Remarque :** Avec les données des définitions ci-dessus,

- La fonction f a pour limite $+\infty$ en a , notée $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$.
- La fonction f a pour limite $-\infty$ en a , notée $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$.

► **Propriété (limite infinie de référence en un point) :** Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Nous disposons des résultats suivants :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{\sqrt{x-a}} = +\infty.$$

• En particulier, pour $a = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

► **Définition (asymptote verticale) :** Soient un réel a et f une fonction définie sur un intervalle I ouvert en a .

La droite $(d) : x = a$ est une asymptote verticale pour la courbe \mathcal{C}_f si, et seulement si, au moins une de ces conditions est vérifiée :

- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$

■ Opérations sur les limites

Théorème (composition de limites) : Soient a, ℓ et ℓ' trois éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

Soient u une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J .

On suppose que la condition suivante est réalisée :

$$\forall x \in I, \quad u(x) \in J.$$

Si

$$\lim_{x \rightarrow a} u(x) = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow \ell} g(X) = \ell',$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow a} g(u(x)) = \lim_{x \rightarrow a} (g \circ u)(x) = \ell'.$$

► **Exemple :** Le facteur de Lorentz $\gamma(v) \xrightarrow{v \rightarrow +c^-} +\infty$.

► Pour les parties désignées par un symbole



Propriété : une démonstration est exigible.

► Une colle comporte une question de cours choisie *a priori* parmi celles indiquées dans le programme de la semaine en cours (normalement, ± 15 min).

► Un cours non appris sera sanctionné par une note inférieure à 10 (même si l'exercice est fait correctement!).