Jean Butlen

Terminale spécialité Mathématiques expertes
M. Bérard

Colle S12

18/12/25

1 Démonstration

Démontrer le théorème suivant :

Théorème 1 – Limite de q^n

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.
Nous disposons de la disjonction suivante :

- si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.
- si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
- si $q < -1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite en $+\infty$.

Démontrer ensuite la proposition suivante :

Proposition 2 – Limite de la somme des termes d'une suite géométrique

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$. Alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

2 Exercices

2.1 Suite convergente d'entiers relatifs

Nous considérons une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$, convergente et telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \mathbb{Z}.$$

Montrer que cette suite est constante à partir d'un certain rang.

2.2 Somme des inverses dexposant entier $p \geqslant 2$

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

1. Quel est le sens de variation de (u_n) ?
2. Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}.$$

En déduire que cette suite est convergente.

Soit un entier $p \geqslant 2$ donné. Nous considérons la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}.$$

3. Justifier que, pour tout entier $k \geqslant 1$, $k^p \geqslant k^2$.

4. En déduire

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leqslant u_n.$$

5. La suite (v_n) converge-t-elle ?

6. Nous supposons que $p = 3$ et nous considérons la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$w_n = v_n + \frac{1}{n^2}.$$

Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

Remarque

La limite commune à ces deux suites est le nombre d'Apéry [a], noté

$$\zeta(3) \simeq 1{,}202.$$

Il apparaît notamment dans différents problèmes de physique, dont le rapport gyromagnétique de l'électron en électrodynamique quantique, ou bien en théorie des nombres, la probabilité pour trois nombres d'être premiers entre eux étant égale à l'inverse de la constante d'Apéry.

a. Mathématicien français qui a prouvé en 1979 que ce nombre est irrationnel.

Grégoire Le Barber Terminale spécialité Mathématiques expertes
M. Bérard

Colle S12

18/12/25

1 Démonstration

Démontrer le **Lemme d'Euclide** puis l'**Algorithme d'Euclide**.

2 Exercice

2.1 Convergence rapide vers le nombre e

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur [0,1] par

$$f_n(x) = -e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right).$$

1. Justifier que, pour tout réel $x \in [0,1]$,

$$f_n'(x) = e^{-x}\frac{x^n}{n!}.$$

En déduire que $f_n(0) \leqslant f_n(1)$.

2. Pour tout réel $x \in [0,1]$, nous posons

$$g_n(x) = f_n(x) - \frac{x}{n!}.$$

Quel est le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle [0,1] ?
En déduire l'encadrement suivant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(0) \leqslant f_n(1) \leqslant f_n(0) + \frac{1}{n!}.$$

3. On considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$e\left(1 - \frac{1}{n!}\right) \leqslant u_n \leqslant e.$$

En déduire la limite de (u_n) en $+\infty$.

4. P étant un entier naturel donné, proposer une fonction Python qui détermine le plus petit entier N tel que

$$|e - u_N| \leqslant 10^{-P}.$$

Remarque

Avec des résultats un peu plus poussés sur la convergence de suites de fonctions (convergence uniforme et continuité), on peut montrer que la suite de fonctions (f_n) converge vers la fonction constante à 1, ce qui est une des manières de démontrer que

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

2.2 Irrationalité de e

Soit (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

La suite (u_n) est celle de l'exercice précédent.

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

2. Déduire de l'exercice précédent la limite de la suite (v_n) et l'encadrement suivant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n < e < v_n.$$

3. Montrer par récurrence que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad n!\, u_n \in \mathbb{N}.$$

4. Pour prouver que le nombre e est irrationnel, nous supposons par l'absurde que

$$e = \frac{p}{q}$$

est rationnel avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
En posant $N = q!\, u_q$, montrer que :

$$N < p\,(q-1)! < N + 1.$$

Conclure.