

Composition trimestrielle n°1

18/11/25

1 Question de cours

Donner les propriétés de la relation « divise » |.

2 Exercice : Chiffres des unités et des dizaines des termes d'une suite

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie sur \mathbb{N} par

$$\begin{cases} u_0 = 14 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 5u_n - 6 \end{cases}$$

Calculer à l'aide la calcultarice les premiers termes de la suite.

Quelle observation peut-on faire sur les deux derniers chiffres de u_n ? Démontrer cette conjecture.

Composition trimestrielle n°1

18/11/25

1 Question de cours

Que pouvez-vous dire à propos de la relation de congruence, ses propriétés ainsi que ses caractérisations vis-à-vis de la divisibilité et de la division euclidienne ?

2 Exercice : Puissances de 2 modulo 3

Selon les valeurs de l'entier naturel n , déterminer le reste de la division euclidienne de 2^n par 3 ?

Quel est le reste de la division par 3 de 2^{2023} ? On donne la fonction Python :

```
1 def div3(n):
2     L=[]
3     for k in range(1,n+1):
4         N=4**n+12**(2*n)-1
5         r=N%3
6         L.append(r)
7     return L
```

Que restitue `div3(13)` ? Quelle conjecture peut-on énoncer ?

Démontrer cette observation.

Composition trimestrielle n°1

18/11/25

1 Question de cours

Comment résoudre une équation polynomiale du 2nd degré, modulo n ?

2 Exercice : Un système modulo 6

Selon les valeurs de l'entier relatif m , résoudre dans \mathbb{Z}^2 le système

$$\begin{cases} 3x + y \equiv 1[6] \\ x - y \equiv m[6] \end{cases}$$

Composition trimestrielle n°1

18/11/25

1 Question de cours

Quels résultats pouvez-vous donner concernant la compatibilité des congruences avec l'addition, la soustraction, la multiplication et l'exposant ?

2 Exercice : Puissances de 5 Modulo 13

Soit n un entier naturel.

1. Déterminer, suivant les valeurs de n , les restes de la division euclidienne de 5^n par 13.
2. Quel est le reste de la division euclidienne de 2020^{2022} par 13 ?
3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$N_n = 44^{4n+1} + 31^{4n-1}$$

Calculer les premiers termes de la suite (N_n) à l'aide de la calculatrice. Quelle conjecture peut-on faire ?

Démontrer cette dernière.

4. (*Si vous avez le temps*) Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} 5^k$$

Donner un script Python qui restitue les entiers naturels n non nuls tels que 13 divise s_n . Le faire fonctionner pour quelques valeurs de n sur la calculatrice. Que remarquez-vous ?

Montrer que l'entier s_n est divisible par 13 si et seulement si $5^n - 1$ est divisible par 13.

En déduire la preuve de la conjecture obtenue par la procédure Python proposée.