

Classe de Terminale, spécialité Mathématiques expertes

2025 – 2026

```
\documentclass[12pt,a4paper]{book}
\input{preamble_cours}
```

```
\begin{document}
```

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} \cdot \sqrt{\frac{\pi^n}{n!}} \cdot \sin \left(\frac{2\pi n x}{L} \right) \right) + \int_0^{\infty} e^{-st} \cos(\omega t) dt = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow \infty}} \left(\frac{\log(xy)}{xy^2 + e^{xy}} \right)$$

```
\begin{center}
```

`\textbf{\sc Lycée Saint Augustin}`

```
{\it Classe de Terminale, spécialité Mathématiques expertes}
```

`\vspace{1cm}`

`\Large{\bf 2025 -- 2026}`

$$\end{center}$$

\vfill

% COMPLEX ROOTS - extended graph

```
\def\xang{-7}
```

```
\def\zang{25}
```

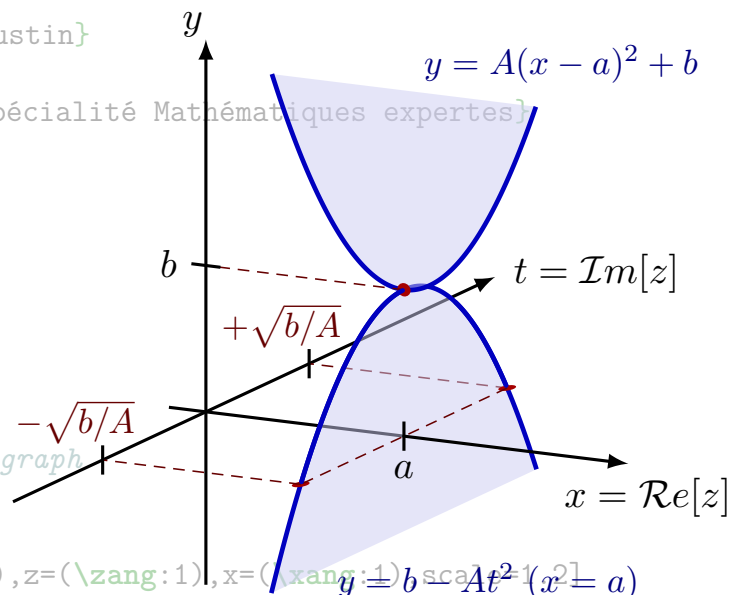
$$\begin{tikzpicture}[y=(90:1),z=(\zang:1),x=(\xang:1)] \draw[blue] (0,0,0) -- (1,0,0) node[below]{$x=a$}; \draw[blue] (0,0,0) -- (0,1,0) node[below]{$y=b-At^2$}; \draw[blue] (0,0,0) -- (0,0,1) node[below]{$z=1$}; \end{tikzpicture}$$

```
\message{^^JComplex solutions - extended graph}
```

```
\def\xmax{3.2} % x axis maximum
```

```
\def\ymin{-1.3} % y axis minimum
```

```
\def\ymax{2.8} % y axis maximum
```



MATHÉMATIQUES

Cours pour la spécialité et l'option experte, rédigés en L^AT_EX.

Julien BÉRARD

Table des matières

Table des matières	III
Avant-propos	X
Livre I – Spécialité Maths	1
I Fondements mathématiques	3
1 Notions de logique, ensembles	5
1.1 Notions de logique	6
1.2 Ensembles	8
2 Divers modes de raisonnement	11
2.1 Raisonnement par déduction	12
2.2 Raisonnement par équivalence	12
2.3 Raisonnement par analyse-synthèse	13
2.4 Raisonnement par contraposée	14
2.5 Raisonnement par l'absurde	14
2.6 Raisonnement par disjonction des cas	15
2.7 Raisonnement par récurrence	15
3 Applications	17
3.1 Correspondances, fonctions, applications	18
3.1.1 Produit cartésien	18
3.1.2 Correspondances	18
3.1.3 Fonctions, applications	19
3.1.4 Restrictions et prolongements	20
3.2 Applications injectives, surjectives et bijectives	20
3.3 Composition des applications	23
3.4 Application réciproque	25
3.5 Images directes et réciproques d'ensembles	28
3.6 Fonction indicatrice (ou caractéristique)	29
3.7 Familles indexées	30
4 Relations	33
4.1 Relations binaires	34
4.2 Relations d'équivalence	34
4.3 Relations d'ordre	37

4.3.1	Définitions	37
4.3.2	Majorants, minorants	37
4.3.3	Plus petit, plus grand élément	38
4.3.4	Borne supérieure	39
5	Structures	41
5.1	Lois de composition	42
5.1.1	Lois de composition internes	42
5.1.2	Lois de composition externes	44
5.2	Groupe	45
5.3	Anneaux	47
5.4	Corps	47
5.5	Espaces vectoriels	48
5.5.1	Structure d'espace vectoriel	48
5.5.2	Propriétés	50
5.5.3	Sous-espaces vectoriels	51
5.5.4	Bases d'un espace vectoriel	52
5.5.5	Applications linéaires	53
II	Analyse	55
6	Récurrence	57
6.1	L'ensemble \mathbb{N}	58
6.2	Principe de récurrence	58
6.3	Raisonnement par récurrence	59
6.4	Réurrences fortes	63
7	Combinatoire – Dénombrement	67
7.1	Ensembles finis	68
7.2	Principe additif	69
7.3	Produit cartésien (rappels)	72
7.4	Principe multiplicatif	73
7.5	Listes avec répétitions	76
7.6	Listes sans répétition	77
7.7	Permutations	79
7.8	Combinaisons	80
7.8.1	Coefficients binomiaux	80
7.8.2	Propriétés des coefficients binomiaux	83
7.8.3	Triangle de Pascal	85
7.9	Binôme de Newton	86
8	Suites	91
8.1	Suites convergentes	93
8.1.1	Exemple introductif	93
8.1.2	Définitions d'une suite convergente	94
8.1.3	Unicité – Opérations sur les limites	96
8.1.4	Suites convergentes et inégalités	101
8.2	Suites divergentes vers l'infini	104
8.2.1	Exemple introductif	104

8.2.2	Définitions d'une suite divergente	105
8.2.3	Opérations sur les suites de limite finie ou infinie	107
8.2.4	Limites infinies et inégalités	109
8.3	Limite d'une suite géométrique	111
8.3.1	Limite de q^n	111
8.3.2	Limite de la somme des termes d'une suite géométrique	113
8.4	Limite et monotonie	114
8.4.1	Compléments sur l'ordre dans \mathbb{R}	114
8.4.2	Suite croissante majorée – décroissante minorée	115
8.4.3	Limite infinie et monotonie	116
8.5	Suites adjacentes	117
9	Limite d'une fonction	123
9.1	Limite finie en un point	125
9.1.1	Définitions	125
9.1.2	Opérations sur les limites	127
9.1.3	Limite à droite, limite à gauche	129
9.1.4	Limite finie et inégalités	130
9.2	Limite finie en $+\infty$ ou $-\infty$	132
9.2.1	Exemple introductif	132
9.2.2	Définitions	133
9.2.3	Asymptote horizontale	136
9.2.4	Limite finie en $-\infty$ ou $+\infty$ et inégalités	137
9.3	Limite infinie en $-\infty$ ou $+\infty$	141
9.3.1	Exemple introductif	141
9.3.2	Définitions	142
9.3.3	Limite infinie en $-\infty$ ou $+\infty$ et inégalités	144
9.3.4	Limite de la fonction \exp en $+\infty$, en $-\infty$	146
9.3.5	Asymptote oblique	148
9.4	Limite infinie en un point	149
9.4.1	Exemple introductif	149
9.4.2	Définitions	151
9.4.3	Asymptote verticale	153
9.5	Opérations sur les limites	155
9.5.1	Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient	155
9.5.2	Limite de la composée de deux fonctions	159
9.6	Limite de la composée d'une suite par une fonction	161
9.7	Formes indéterminées exponentielles	163
9.7.1	Limite de $x \mapsto \frac{e^x}{x}$ en $+\infty$	163
9.7.2	Limite de $x \mapsto \frac{x}{xe^x}$ en $-\infty$	166
9.7.3	Limite de $x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$ en 0	168
10	Continuité	171
10.1	Continuité d'une fonction en un point	173
10.1.1	Définitions	173
10.1.2	Exemples et contre-exemples	174
10.1.3	Continuité et dérivabilité en un point	175
10.1.4	Opérations sur les fonctions continues en un point	177

10.1.5	Composée d'une suite par une fonction continue en un point	179
10.1.6	Suite récurrente et fonction continue en un point	180
10.2	Continuité sur un intervalle	182
10.2.1	Définitions	182
10.2.2	Propriétés des valeurs intermédiaires	184
10.2.3	Action d'une fonction continue sur un intervalle	192
10.2.4	Continuité et monotonie stricte sur un intervalle	196
10.3	Fonction racine n -ième	199
11	Dérivation : compléments	203
11.1	Dérivée de la composée de deux fonctions	205
11.1.1	Le cas général	205
11.1.2	Une généralisation de la dérivée de u^p	207
11.2	Dérivée seconde – Dérivée n -ième	210
11.3	Fonction convexe	214
11.3.1	Définition – Caractérisations	214
11.3.2	Dérivée et convexité	218
11.3.3	Point d'inflexion	223
11.4	Rolle et accroissements finis	224
11.4.1	Dérivée et extremum	224
11.4.2	Théorème de Rolle	226
11.4.3	Théorème des accroissements finis	228
11.4.4	Dérivée et sens de variations	229
12	Fonction logarithme népérien	233
12.1	Définition – Premières propriétés	235
12.1.1	Notion de fonction réciproque	235
12.1.2	Définition de la fonction logarithme népérien	235
12.1.3	Premières propriétés	236
12.2	Dérivée et variations de \ln	238
12.2.1	Dérivée de $x \mapsto \ln x$	238
12.2.2	Variations de \ln	238
12.2.3	Dérivée de $x \mapsto \ln(u(x))$	241
12.3	Propriétés algébriques de la fonction \ln	242
12.3.1	Action de \ln sur la multiplication	242
12.3.2	Action de \ln sur une puissance	243
12.4	Représentation graphique de la fonction \ln	245
12.4.1	Limites en $+\infty$, en 0	245
12.4.2	Représentation graphique	247
12.5	Formes indéterminées logarithmiques	249
12.5.1	Limite de $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$	249
12.5.2	Limite de $x \mapsto x \ln x$ en 0 à droite	251
12.5.3	Limite de $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ en 0	254
12.6	Fonction logarithme décimal	256
12.7	Fonctions exponentielles de bases a	258

13 Fonctions trigonométriques	263
13.1 Propriétés qualitatives	264
13.1.1 Parité	264
13.1.2 Sens de variations	265
13.1.3 Représentations graphiques	265
13.1.4 Fonctions périodiques	266
13.2 Les formules d'addition – de duplication	267
13.2.1 Formule d'addition	267
13.2.2 Formules de duplication	269
13.3 Dérivation des fonctions trigonométriques	271
13.3.1 Dérivées en 0 de sin et cos	271
13.3.2 Dérivées de sin et cos	273
13.3.3 Dérivée de la fonction tangente	275
13.3.4 Dérivée de la composée avec une fonction affine	275
14 Primitives – Équations différentielles	277
14.1 Fonctions primitives	279
14.1.1 Définition – Existence	279
14.1.2 Propriétés	280
14.1.3 Tableau des primitives des fonctions usuelles	283
14.1.4 Primitives et composition	284
14.2 Équation différentielle linéaire du 1 ^{er} ordre	287
14.2.1 Équation $y' = ay$ telle que $y(0) = 1$	287
14.2.2 Équation $y' = ay$	288
14.3 Équation différentielle affine du 1 ^{er} ordre	291
14.3.1 Résolution de $y' = ay + b$	291
14.3.2 Résolution de $y' = ay + b$ avec une condition initiale	293
15 Intégration	295
15.1 Définition – Exemples	297
15.1.1 Définition	297
15.2 Primitives et intégrale	302
15.2.1 Dérivée de $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$	302
15.2.2 Calcul d'une intégrale	307
15.3 Propriétés algébriques de l'intégrale	310
15.3.1 Linéarité de l'intégrale	310
15.3.2 Relation de Chasles	312
15.4 Intégrale et inégalités	314
15.4.1 Positivité	314
15.4.2 Comparaison de deux intégrales	315
15.4.3 Valeur moyenne	318
15.5 Méthode des rectangles	320
15.5.1 Encadrement d'une intégrale	320
15.5.2 Algorithme de la méthode des rectangles	323
15.6 Intégration par partie	325
15.6.1 Introduction	325
15.6.2 La formule d'intégration par parties	325
15.7 Aires entre deux courbes	328

III	Géométrie	333
16	Calcul vectoriel dans l'espace	335
17	Produit scalaire dans l'espace	337
18	Géométrie analytique dans l'espace	339
IV	Probabilités	341
19	Probabilités	343
19.1	Épreuves successives indépendantes	345
19.1.1	Cas de deux épreuves successives	345
19.1.2	Cas de n épreuves successives	346
19.2	Schéma de Bernoulli	347
19.2.1	Loi de Bernoulli	347
19.2.2	Loi binomiale	350
19.3	Opérations sur les variables aléatoires	354
19.3.1	Linéarité de l'espérance	354
19.3.2	Action de l'espérance sur une fonction affine	356
19.3.3	Action de la variance sur une fonction affine	357
19.3.4	Notion de variables aléatoires indépendantes	358
19.3.5	Échantillon de variables aléatoires	360
19.4	Loi des grands nombres	362
19.4.1	Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev	362
19.4.2	Inégalité de concentration : loi des grands nombres	365
19.4.3	Loi des grands nombres et schéma de Bernoulli	367
	Livre II – Maths expertes	369
V	Arithmétique	371
20	Divisibilité dans \mathbb{Z}	373
20.1	Diviseurs d'un entier relatif	374
20.1.1	Définitions	374
20.1.2	Propriétés de la relation divise $ $	375
20.2	Division euclidienne dans \mathbb{Z}	379
20.2.1	Division euclidienne dans \mathbb{N}	380
20.2.2	Division d'un entier relatif par un entier naturel non nul	384
20.2.3	Division d'un entier relatif par un entier relatif non nul	386
21	Congruences dans \mathbb{Z}	389
21.1	Définition – Caractérisation	390
21.1.1	Définition – Notations	390
21.2	Propriétés algébriques d'une congruence	394
21.2.1	Une relation d'équivalence	394
21.2.2	Compatibilité de l'addition avec une congruence	396

21.2.3	Compatibilité de la multiplication avec une congruence	398
21.2.4	Exposants et congruences	401
22	PGCD de deux entiers	405
22.1	Plus grand commun diviseur	407
22.1.1	Un exemple – Trois remarques préalables	407
22.1.2	Définition du plus grand commun diviseur de deux entiers	408
22.1.3	Premières propriétés du pgcd	408
22.1.4	Algorithme d'Euclide	413
22.1.5	Propriété multiplicative du pgcd	417
22.2	Entiers premiers entre eux	419
22.2.1	Définition – caractérisation du pgcd de deux entiers	419
22.2.2	Caractérisation de deux entiers premiers entre eux	420
22.2.3	Caractérisation de Bezout du pgcd de deux entiers	424
22.3	Le théorème de Gauss	427
22.3.1	Le théorème	427
22.3.2	Résolution de l'équation $ax \equiv b[n]$	430
22.4	Équation diophantienne $ax + by = c$	431
23	Nombres premiers	437
VI	Analyse complexe	439
24	Les nombres complexes	441
25	Nombres complexes et trigonométrie	443
26	Équations polynomiales dans \mathbb{C}	445
27	Angles dans le plan complexe	447
VII	Algèbre	449
28	Calcul matriciel	451
29	Graphes	453
30	Matrices et processus d'évolution	455

Avant-propos

Vous avez sous vos yeux le cours de spécialité et option experte de Mathématiques pour la classe de Terminale au Lycée Saint Augustin. Ce cours est encore en cours de rédaction et peut comporter des imperfections. Aussi, il ne se substitue en aucun cas à une écoute et une participation **actives** durant les heures de cours.

Pour rappel, la classe de Terminale a pour but non seulement de préparer l'examen du Baccalauréat, mais aussi de s'armer pour aborder sereinement les études supérieures et réussir dans la voie qui aura été choisie. À cet effet, le contenu de ce cours se veut au dessus du cadre du programme officiel, pour donner aux élèves la possibilité d'acquérir des connaissances et savoirs-faire qui leurs seront utiles afin de permettre une transition plus douce entre les exigences de l'enseignement des Mathématiques dans le supérieur et celles du lycée.

En tant que matière la plus coefficientée et avec le plus gros taux horaire, il est attendu qu'elle soit celle qui mobilise la plus grande part de votre temps de travail personnel. À titre d'exemple¹, votre temps de travail hebdomadaire peut être organisé comme suit :

- 30 min de relecture du cours après chaque séance, pour identifier les points qui vous paraissent obscurs ou mal compris et consolider les connaissances acquises durant l'écoute active en cours, refaire les démonstrations... ;
- 4 h maximum pour préparer le TD (Travaux Dirigés) : chaque semaine, un TD vous sera distribué, avec des exercices de difficulté variable, indiquée par un nombre d'étoiles (entre 1 et 4). Il vous sera demandé de totaliser un certain nombre d'étoiles (★) de difficulté avant la séance de TD de la semaine où nous corrigerons les exercices incontournables ou qui vous ont posé problème ;
- 6 h maximum réparties sur deux semaines pour les DM (Devoir Maison) qui seront bimensuels ;
- Lorsque vous avez une *colle* dans la semaine, le temps de préparation maximum est de 2 h. Un *programme de colle* vous est distribué, qui vous récapitulera les démonstrations et savoirs-faire exigibles ;
- Lorsque vous avez un DS (Devoir Surveillé), il est bon de reprendre vos exercices de TD pour vous assurer qu'aucun ne pose problème et les refaire le cas échéant. Il vous faut aussi retravailler le cours (en particulier les définitions et propriétés). Ce travail nécessite environ 3 h, selon le sérieux que vous avez mis dans votre travail régulier.

Par conséquent, une dizaine d'heures de travail personnel par semaine sera en moyenne nécessaire pour suivre les exigences de ce cours. Il est très conseillé de répartir son temps de travail sur toute la semaine et de travailler les Mathématiques un peu chaque jour, en s'imposant au minimum la relecture du cours et un exercice de TD les soirs déjà chargés de travail dans les autres matières.

La particularité de l'apprentissage des Mathématiques réside dans le fait qu'il s'agit d'une discipline à « longue détente », i.e. le résultat d'un travail régulier apparaît concrètement après plusieurs semaines, mais une fois ce résultat atteint, poursuivre le travail continuellement permet de garder ces bons résultats. Autant dire qu'il faut de la persévérance en Mathématiques, mais il est évident qu'il ne vous en manque pas.

1. Qu'on ne peut que chaudement recommander de suivre.

En terme d'évaluation du travail :

- les Compositions Trimestrielles (coef. 5) seront des sujets type bac, qui prépareront uniquement à cet examen ;
- les Devoirs Surveillés (coef. 4) seront d'un niveau plus relevé, sur des notions dépassant le cadre du programme, avec des exercices demandant plus d'intuition ;
- les Devoirs Maison (coef. 2) seront dans le même style que les DS, avec des exercices de recherche encore plus poussés ;
- les colles (coef. 2) permettront d'évaluer à l'oral la compréhension du cours par la démonstration de résultats parmi ceux précisés dans le programme de colle, suivie de la résolution d'un exercice.

Les TD ne seront pas notés individuellement, mais la participation et le travail régulier sera l'objet d'une note globale trimestrielle de même coefficient qu'un DM.

	Composition	DS	DM	Colle	TD	Relecture cours
Coefficient	5	4	2	2		
Temps de travail	5 h	3 h	6 h	2 h	4 h	30 min

FIGURE 1 – Coefficients des évaluations et temps de travail personnel

Dans ce cours, pour distinguer les différents résultats que nous allons démontrer, nous leur donnons les noms de :

- **proposition** pour la plupart des résultats,
- **théorème** pour les résultats les plus fondamentaux,
- **corollaire** pour les conséquences immédiates de résultats précédents,
- **lemme** pour certains résultats préliminaires, utiles pour la suite, mais dont l'intérêt intrinsèque est limité.

Les **définitions** seront étayées par des **exemples**. Des **remarques** viendront ajouter des points de vigilance ou de méthode, ainsi que des liens inter-disciplinaires. Des points **méthode** sont régulièrement faits.

En pratique, ce cours débute par une partie intitulée « Fondements mathématiques », qui vous permet d'acquérir des bases importantes pour la suite. Il ne faudra donc pas tarder à atteindre son rythme de croisière dès la rentrée, pour que ces « Fondements » soient bien maîtrisés.

Dans la plupart des lycées, les élèves n'ont en général pas construit les objets mathématiques qu'ils ont utilisés : ils se sont contentés d'en admettre les propriétés. Or construire un objet, comme le fait un artisan, c'est se l'approprier, connaître parfaitement ses propriétés et les limites de celles-ci.

Aussi, le choix a été fait de rédiger la grande majorité des démonstrations, et celles qui ne sont pas présentes dans ce cours sont en exercice dans les TD ; ainsi, à la fin de l'année, vous n'aurez admis aucun résultat de ce cours.

J'espère que ce cours vous aidera à aborder sereinement votre Baccalauréat, votre arrivée dans le supérieur et, partant, à y trouver la meilleure raison de faire des mathématiques : LE PLAISIR.

Spécialité Maths

Première partie

Fondements mathématiques

Chapitre 1

Notions de logique, ensembles

Sommaire

1.1	Notions de logique	6
1.2	Ensembles	8

1.1 Notions de logique

Définition 1.1 – Assertion

Une *assertion* ou une *proposition mathématique* est un énoncé qui peut prendre deux valeurs logiques

- vrai (V)
- faux (F)

sans ambiguïté aucune dans le cadre d'une théorie fondée sur un ensemble d'*axiomes*.

Exemple 1.1

- $\sqrt{2} < 3$ est une assertion vraie.
- $\pi = 3,14$ est une assertion fausse ^a.

^a 3,14 est un nombre décimal qui n'est que le début du développement décimal illimité non périodique du réel transcendant π , i.e. qui n'est solution d'aucune équation à coefficients entiers.

En Mathématiques, on se propose d'obtenir de nouvelles assertions à partir des axiomes de la théorie à l'aide de *démonstrations* en utilisant des règles de logique. On peut associer à l'assertion A sa négation notée non A ou \bar{A} , ou encore $\neg A$, dont on définit la valeur logique en fonction de la valeur logique de A à l'aide d'une *table de vérité* :

A	$\neg A$
V	F
F	V

À deux assertions quelconques A et B peuvent être associées deux autres assertions :

- la *conjonction* de A et B notée « A et B » ou encore $A \wedge B$
- la *disjonction* de A et B , notée « A ou B » ou encore $A \vee B$

définies via leur tables de vérité :

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

L'assertion $(\neg A) \vee B$, notée $A \implies B$, est appelée l'*implication* de B par A . Elle se lit « A implique B ».

A	B	$(\neg A) \vee B$	$A \implies B$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

L'implication permet d'obtenir à partir d'une assertion vraie une autre assertion vraie : si l'on sait que A est vraie et si l'on montre que l'implication $A \implies B$ est vraie, alors l'assertion B est vraie.

Remarque

L'assertion (3 est pair \implies 3 est multiple de 2) est vraie bien que l'assertion (3 est pair) soit fausse, tout comme l'assertion (3 est multiple de 2).

L'assertion $(A \implies B) \wedge (B \implies A)$ est notée $A \iff B$ et est appelée *équivalence (logique)* de A et de B .

A	B	$A \implies B$	$B \implies A$	$A \iff B$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Remarque

Deux propositions A et B sont équivalentes si elles ont les mêmes tables de vérité.

Les assertions $A \implies B$ et $B \implies A$ sont appelées *implications réciproques*.

Au vu des tables de vérité, on peut écrire :

$$(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A).$$

On dit que la proposition $\neg B \implies \neg A$ est la *contraposée* de la proposition $A \implies B$.

Proposition 1.1 – Propriétés des connecteurs logiques

Soit A , B , C et D des assertions.

- Associativité de « \wedge » et « \vee » :

$$A \wedge (B \wedge C) \iff (A \wedge B) \wedge C$$

$$A \vee (B \vee C) \iff (A \vee B) \vee C.$$

- Transitivité de « \implies » :

$$((A \implies B) \wedge (B \implies C)) \implies (A \implies C)$$

- Distributivité de « \wedge » sur « \vee » :

$$((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \iff (A \wedge (B \vee C))$$

- Distributivité de « \vee » sur « \wedge » :

$$(A \vee (B \wedge C)) \iff ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$$

Proposition 1.2 – Lois de De Morgan

Soit A et B deux assertions. On a :

$$\neg(A \wedge B) \iff (\neg A) \vee (\neg B)$$

$$\neg(A \vee B) \iff (\neg A) \wedge (\neg B)$$

Démonstration

Ces propriétés se démontrent à l'aide des tables de vérité, leur démonstration est laissée en exercice (TD1 Exercices 3 et 4).

Étant donné un ensemble E appelé *référentiel*, on appelle *forme propositionnelle* \mathcal{P} à une variable ou *prédicat* à une variable¹ défini sur E , toute expression contenant une variable x et qui devient une proposition $\mathcal{P}(x)$ pour toute valeur donnée à x dans E .

Au prédicat \mathcal{P} à une variable, on peut associer deux nouvelles assertions :

- la première qui s'écrit : $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$ à l'aide du *quantificateur universel* \forall et qui s'énonce « l'assertion $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout x du référentiel E » ;
- la seconde qui s'écrit : $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$ à l'aide du *quantificateur existentiel* \exists et qui s'énonce « il existe au moins un élément de E tel que l'assertion $\mathcal{P}(x)$ soit vraie ».

L'assertion $\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)$, qui s'énonce « il existe un unique élément x de E tel que l'assertion $\mathcal{P}(x)$ soit vraie », peut être définie uniquement par les quantificateurs existentiel et universel et la relation d'égalité par :

$$\exists x \in E, (\mathcal{P}(x) \wedge \forall y \in E, (\mathcal{P}(y) \implies y = x)).$$

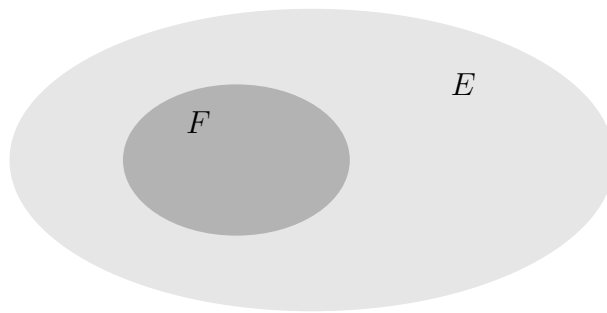
1.2 Ensembles

La notion d'ensemble est une notion première. Elle correspond à une « collection » d'objets appelés *éléments*.

On note $x \in E$ si l'objet x est un *élément* de l'*ensemble* E .

Soient E et F deux ensembles. On dit que F est une *partie* de E ou que F est un *sous-ensemble* de E si tout élément de F appartient à E . On note alors $F \subset E$ et on lit « F est inclus dans E ». On a formellement :

$$F \subset E \iff (\forall x \in F, x \in E).$$



Par ailleurs, on peut remarquer que

$$x \in E \iff \{x\} \subset E.$$

1. Une situation classique où l'on rencontre un prédicat sur le référentiel \mathbb{N} est le raisonnement par récurrence (que nous verrons au chapitre 6) : chaque proposition $\mathcal{P}(n)$ est l'image de l'entier naturel n par le prédicat \mathcal{P} . Pour prouver que la proposition est vraie pour tout entier naturel n , on établit que

- la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie ;
- le prédicat est *héréditaire* : $\forall k \in \mathbb{N}, (\mathcal{P}(k) \implies \mathcal{P}(k+1))$.

L'ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$ et vérifie :

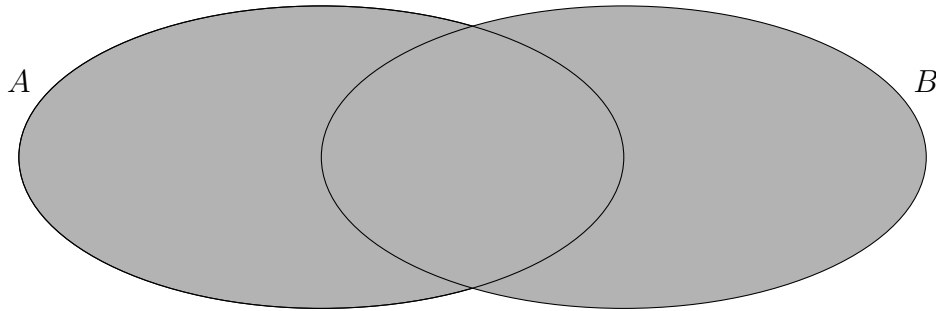
$$F \in \mathcal{P}(E) \iff F \subset E.$$

L'*ensemble vide* noté \emptyset ou encore $\{\}$ ne contient aucun élément.

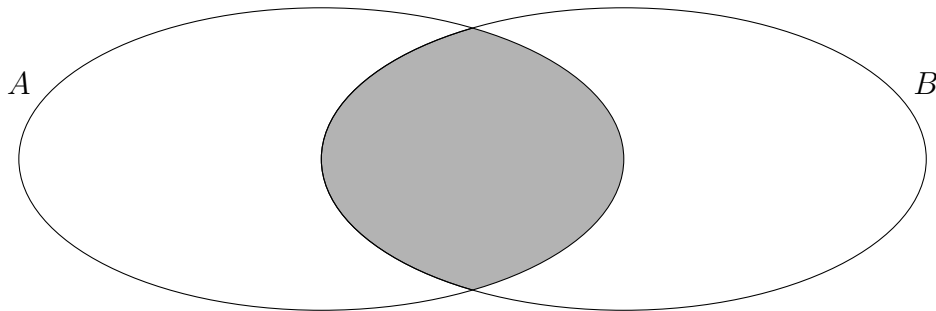
Deux ensembles E et F sont égaux, ce que l'on note $E = F$, si et seulement si $(E \subset F) \wedge (F \subset E)$.

Soient A et B deux ensembles. On définit alors :

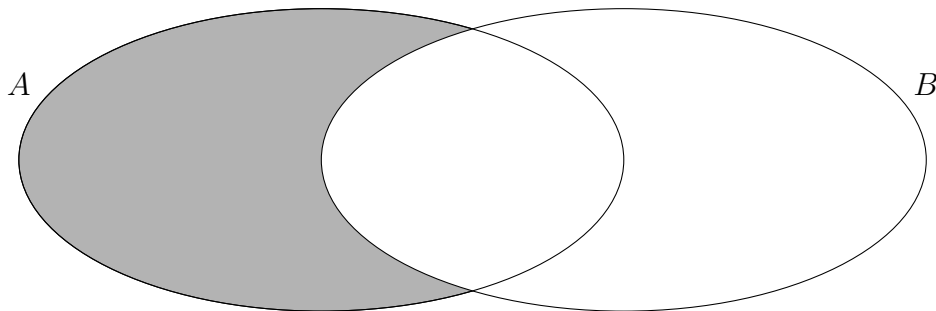
- l'*union* $A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$



- l'*intersection* $A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$



- la *différence* $A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$.



Deux parties A et B sont dites *disjointes* si leur intersection est l'ensemble vide ($A \cap B = \emptyset$) et *distinctes* si $A \neq B$.

Le *complémentaire* d'une partie A de E , noté $\complement_E A$ (ou \bar{A} quand il n'y a pas d'ambiguïté), est défini par :

$$\complement_E A = E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

Chapitre 2

Divers modes de raisonnement

Sommaire

2.1	Raisonnement par déduction	12
2.2	Raisonnement par équivalence	12
2.3	Raisonnement par analyse-synthèse	13
2.4	Raisonnement par contraposée	14
2.5	Raisonnement par l'absurde	14
2.6	Raisonnement par disjonction des cas	15
2.7	Raisonnement par récurrence	15

On se référera au chapitre 1 pour les notions de proposition, implication, équivalence et contraposée.

2.1 Raisonnement par déduction

C'est le raisonnement le plus habituellement utilisé (en mathématiques, mais pas seulement). Il s'agit de prouver une implication $A \implies B$ en « passant » de la proposition A à la proposition B par des enchaînements logiques.

Une autre façon de voir consiste à supposer que A est vraie, et à montrer qu'alors B l'est également.

Exemple 2.1

Montrons que $x^2 = x - 3 \implies x^4 = -5x + 6$.

$$\begin{aligned} x^2 = x - 3 &\implies (x^2)^2 = (x - 3)^2 \\ &\implies x^4 = x^2 - 6x + 9 \\ &\implies x^4 = x - 3 - 6x + 9 \\ &\implies x^4 = -5x + 6. \end{aligned}$$

On a bien démontré par déduction que $x^2 = x - 3 \implies x^4 = -5x + 6$. Remarquer au passage qu'on ignore si un tel x existe ; l'implication n'en reste pas moins vraie. En d'autres termes, l'implication $A \implies B$ peut être vraie sans que A ne soit vraie...

2.2 Raisonnement par équivalence

Pour démontrer une équivalence du type $A \iff B$, on peut :

- « enchaîner » les équivalences en partant de A et en arrivant à B (ou le contraire) ;
- faire un raisonnement par « double implication » (ou par condition nécessaire et suffisante) en prouvant séparément que $A \implies B$ puis que $B \implies A$.

Cette seconde possibilité doit être envisagée dès que la première n'est pas applicable.

Exemple 2.2

Soit (E) l'équation différentielle $y' = 2y - 2x + 1$ et (E') l'équation différentielle $y' = 2y$.

Montrons que

$$f \text{ est une solution de } (E) \iff g = f - x \text{ est solution de } (E').$$

On peut ici « enchaîner » les équivalences (dans un sens ou dans l'autre) :

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) &\iff f' = 2f - 2x + 1 \\ &\iff g' + 1 = 2(g + x) - 2x + 1 \\ &\iff g' + 1 = 2g + 2x - 2x + 1 \\ &\iff g' = 2g \\ &\iff g \text{ est solution de } (E'). \end{aligned}$$

Exemple 2.3

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $a_n = 2n + 1$ et $b_n = 3n + 5$.

Montrons que

$$(7|a_n) \wedge (7|b_n) \iff \exists k \in \mathbb{N} : n = 3 + 7k.$$

Ici, un raisonnement semblable à l'exemple précédent serait pour le moins délicat ; mieux vaut procéder par double implication

\Rightarrow Supposons que 7 divise a_n et 7 divise b_n : il existe des entiers u et v tels que $a_n = 7u$ et $b_n = 7v$, c'est-à-dire $2n + 1 = 7u$ et $3n + 5 = 7v$. En soustrayant ces égalités entre elles, il vient $n + 4 = 7(v - u)$, soit $n = -4 + 7(v - u)$, ce qu'on peut écrire $n = 3 + 7(v - u - 1)$. En posant $k = v - u - 1$, on a bien k entier et $n = 3 + 7k$.

\Leftarrow Réciproquement, supposons qu'il existe un entier k tel que $n = 3 + 7k$. Alors $a_n = 2n + 1 = 2(3 + 7k) + 1 = 7(2k + 1)$ est un multiple de 7, et $b_n = 3n + 5 = 3(3 + 7k) + 5 = 7(3k + 2)$ est également un multiple de 7.

On a prouvé l'implication dans les deux sens, les deux propositions sont bien équivalentes.

2.3 Raisonnement par analyse-synthèse

Il s'agit un peu d'un raisonnement par équivalence, mais appliqué à la recherche de solution d'un problème donné : on suppose que celui-ci possède une solution, on cherche, par déduction, des conséquences à cette hypothèse (on cherche des propriétés d'une telle solution), jusqu'à réduire suffisamment le champ des possibles : c'est l'*analyse*.

Puis on effectue une réciproque, c'est la *synthèse* : parmi toutes les solutions possibles trouvées, quelles sont celles qui conviennent *réellement* ?

Exemple 2.4

Déterminons tous les polynômes P tels que :

$$P^2 = XP.$$

Remarquons d'ores et déjà que le polynôme nul convient ; cherchons alors les polynômes non nuls.

- Analyse : supposons qu'un tel polynôme existe, et notons n son degré. P^2 est un polynôme de degré $2n$, et XP est un polynôme de degré $n + 1$; on doit donc avoir $2n = n + 1$ (deux polynômes, pour être égaux, doivent avoir le même degré), donc $n = 1$: P est un polynôme du premier degré.
- Synthèse : les solutions du problème sont donc à rechercher parmi les polynômes du premier degré ; on cherche alors à savoir si tous les polynômes du premier degré conviennent ou non. Soit P un tel polynôme : $P = aX + b$

($a \neq 0$). On a :

$$\begin{aligned}
 P^2 = XP &\iff (aX + b)^2 = X(aX + b) \\
 &\iff a^2X^2 + 2abX + b^2 = aX^2 + bX \\
 &\iff \begin{cases} a^2 &= a \\ 2ab &= b \\ b^2 &= 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} a &= 1 \\ 0 &= 0 \\ b &= 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Par conséquent, seul le polynôme $P = X$ convient (en plus du polynôme nul).

2.4 Raisonnement par contraposée

Le raisonnement par contraposée est fondé sur le fait qu'une proposition ($A \implies B$) et sa contraposée ($\neg B \implies \neg A$) sont équivalentes (cf. chapitre 1).

Exemple 2.5

Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouvons que : n^2 est pair $\implies n$ est pair.

On va démontrer la contraposée : n n'est pas pair $\implies n^2$ n'est pas pair.

Ici, la situation est assez simple, puisque la proposition (« n n'est pas pair ») est équivalente à la proposition (« n est impair »).

Pour n impair, il existe un entier p tel que $n = 2p + 1$. On obtient alors :

$$n^2 = (2p + 1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1.$$

Ainsi, n^2 est un entier impair et n'est donc pas pair.

On a donc prouvé que

$$n \text{ n'est pas pair } \implies n^2 \text{ n'est pas pair,}$$

ce qui revient au même que

$$n^2 \text{ est pair } \implies n \text{ est pair.}$$

2.5 Raisonnement par l'absurde

On considère deux propositions A et B et l'on souhaite démontrer que A implique B .

Le *raisonnement par l'absurde*¹ consiste à supposer que A est vraie et que B est fausse. En raisonnant par déduction, on aboutit à une contradiction. On en déduit alors que B est nécessairement vraie.

Le raisonnement par l'absurde est très souvent utilisé pour prouver une propriété *négative* : un certain objet *ne possède pas* une certaine propriété.

1. lat. *reductio ad absurdum*.

Exemple 2.6

Montrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Il s'agit de prouver que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel ; supposons donc le contraire, c'est-à-dire que $\sqrt{2}$ est rationnel : il existe deux entiers p et q tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ où q n'est pas nul. On peut bien sûr supposer en plus que cette fraction est irréductible.

On a alors $2\frac{p^2}{q^2}$, donc $p^2 = 2q^2$. p^2 est donc un entier pair ; p est donc pair également^a : $p = 2p'$ avec p' entier.

On obtient alors $(2p')^2 = 2q^2$, donc $2p'^2 = q^2$: q^2 est donc un entier pair également, et donc q aussi.

Mais alors $\frac{p}{q}$ est une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont pairs, elle est donc simplifiable par 2 : absurde !

Par suite, ce qu'on a supposé est faux : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, donc est irrationnel.

a. Voir paragraphe précédent.

2.6 Raisonnement par disjonction des cas

Le *raisonnement par disjonction de cas* consiste à démontrer une propriété générale en la démontrant dans plusieurs cas particuliers, choisis de façon à ce que la réunion de tous ces cas particuliers donne bien le cas général.

Exemple 2.7

Démontrons que, pour tout entier n , $n^2 + n$ est un entier pair. Envisageons deux cas, suivant que n est pair ou impair (il ne serait pas possible, par exemple, d'envisager deux cas, suivant que n est pair ou plus grand que 10).

- *premier cas* : Si n est pair, il existe un entier k tel que $n = 2k$. On obtient alors $n^2 + n = (2k)^2 + 2k = 2(2k^2 + k)$, et donc $n^2 + n$ est bien un nombre pair.
- *second cas* : Si n est impair, il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$. On obtient alors $n^2 + n = (2k + 1)^2 + 2k + 1 = 4k^2 + 4k + 1 + 2k + 1 = 2(2k^2 + 3k + 1)$, et donc $n^2 + n$ est bien un nombre pair.

Dans tous les cas (tout entier est pair ou impair), $n^2 + n$ est un nombre pair.

2.7 Raisonnement par récurrence

Le *raisonnement par récurrence* est utilisé pour établir qu'une suite de propositions $(\mathcal{P}(n))$ est vraie pour tout entier naturel supérieur ou égal à un certain entier naturel n_0 .

Il est particulièrement efficace pour s'attaquer à des propositions *fermées* faisant intervenir un entier n (des questions commençant par « montrer que, pour tout entier n , etc. »). Ce type de raisonnement est fondé sur un des axiomes de Peano servant à définir de manière axiomatique l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels, et s'effectue toujours en deux étapes.

Nous étudierons ce raisonnement dans le chapitre 6.

Chapitre 3

Applications

Sommaire

3.1	Correspondances, fonctions, applications	18
3.1.1	Produit cartésien	18
3.1.2	Correspondances	18
3.1.3	Fonctions, applications	19
3.1.4	Restrictions et prolongements	20
3.2	Applications injectives, surjectives et bijectives	20
3.3	Composition des applications	23
3.4	Application réciproque	25
3.5	Images directes et réciproques d'ensembles	28
3.6	Fonction indicatrice (ou caractéristique)	29
3.7	Familles indexées	30

3.1 Correspondances, fonctions, applications

3.1.1 Produit cartésien

Définition 3.1 – Produit cartésien

Si E et F sont deux ensembles, il existe un ensemble constitué de tous les couples (x,y) tels que $x \in E$ et $y \in F$. Cet ensemble est appelé *produit cartésien* de E par F et on le note $E \times F$.

Si E et F sont des ensembles finis, on a :

$$\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F),$$

où $\text{Card}(E)$ est le cardinal (nombre d'éléments) de E .

La notion de produit cartésien peut être étendue au produit d'un nombre fini d'ensembles :

$$\prod_{i=1}^n E_i = E_1 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n\}.$$

3.1.2 Correspondances

Définition 3.2 – Graphe, correspondance

Soient E et F deux ensembles non vides.

- On appelle *graphe* de E vers F toute partie de $E \times F$.
- On appelle *correspondance* de E vers F la donnée d'un triplet (Γ, E, F) où Γ est un graphe de E vers F .
- E est appelé l'*ensemble de départ* et F l'*ensemble d'arrivée de la correspondance*.

Soit $\gamma = (\Gamma, E, F)$ une correspondance de E vers F . On appelle *ensemble de définition* de γ l'ensemble

$$\{x \mid (x \in E) \wedge (\exists y \in F, (x,y) \in \Gamma)\}.$$

3.1.3 Fonctions, applications

Définition 3.3 – Application, fonction

Soient E et F deux ensembles non vides.

- On appelle *graphe fonctionnel* de E vers F tout graphe Γ de E vers F tel que, pour tout x de E , l'ensemble $\{y \mid (y \in F) \wedge ((x,y) \in \Gamma)\}$ a au plus un élément.
- On appelle *application* de E dans F toute correspondance de E vers F dont le graphe est un graphe fonctionnel et dont E est l'ensemble de définition. On note alors

$$f \mid \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$$

- Si l'ensemble de définition est une partie de E , on a la notion de *fonction* de E vers F .

Proposition 3.1

Soient E et F deux ensembles non vides. Soit $u = (\Gamma, E, F)$ une application, avec Γ le graphe de u . On a alors

$$\forall x \in E, \exists! y \in F, (x,y) \in \Gamma.$$

Démonstration

$u = (\Gamma, E, F)$ étant une application, E est son ensemble de définition. On a ainsi :

$$E = \{x \mid (x \in E) \wedge (\exists y \in F, (x,y) \in \Gamma)\} = \{x \mid \exists y \in F, (x,y) \in \Gamma\}$$

Pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{y \mid (y \in F) \wedge ((x,y) \in \Gamma)\}$ compte donc au moins un élément.

Par ailleurs, Γ est un graphe fonctionnel. Ainsi, l'ensemble $\{y \mid (y \in F) \wedge ((x,y) \in \Gamma)\}$ compte au plus un élément. Par conséquent, il en compte un exactement, pour chaque $x \in E$, ce qui montre la proposition.

Avec les notations précédentes, l'application u se note également $E \xrightarrow{u} F$ ou $u : E \longrightarrow F$.

Définition 3.4 – Ensemble image d'une application

Si f est une application de E vers F , le sous-ensemble $f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$ de F est appelé *image* de f et est noté $\text{Im}(f)$.

Comme conséquence de la définition 3.3, on déduit que l'égalité de deux applications u et v signifie :

- (i) l'égalité des ensembles de départ de u et de v ,
- (ii) l'égalité des ensembles d'arrivée de u et de v ,
- (iii) l'égalité $u(x) = v(x)$ pour tout x de l'ensemble de départ commun.

Notation L'ensemble des applications, ou des fonctions, d'un ensemble E dans un ensemble F se note $\mathcal{F}(E, F)$ ou encore F^E . Cette dernière notation est justifiée par le fait que, pour E et F finis, on a $\text{Card}(F^E) = (\text{Card}(F))^{\text{Card}(E)}$.

3.1.4 Restrictions et prolongements

Définition 3.5 – Restriction, prolongement

- Soit f une application de E dans F et soit A une partie non vide de E . On appelle *restriction* de f à A , ce que l'on note $f|_A$, l'application

$$f|_A \left| \begin{array}{ll} A & \longrightarrow F \\ x & \longmapsto f(x) \end{array} \right.$$

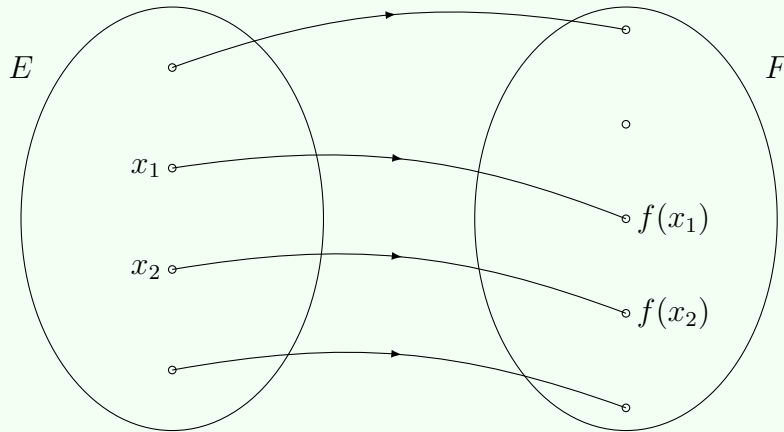
- Soient $f : E \longrightarrow G$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. On dit que g est un *prolongement* de f si
 - $E \subset F$
 - f et g coïncident sur $E : \forall x \in E, f(x) = g(x)$.

3.2 Applications injectives, surjectives et bijectives

Définition 3.6 – Application injective

Une application $f : E \longrightarrow F$ est *injective* (ou est une *injection*) si

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$



Proposition 3.2 – Caractérisation des injections

Soit $f \in F^E$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'application f est injective.
- (ii) Tout élément de F possède au plus un antécédent par f .
- (iii) Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède au plus une solution.
- (iv) $\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad (f(x_1) = f(x_2)) \implies x_1 = x_2$.

Démonstration

À démontrer en exercice.

Exemple 3.1

L'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{x-1} \end{array} \right.$$

est injective.

En effet, pour tous $x_1 \neq 1$ et $x_2 \neq 1$:

$$f(x_1) = f(x_2) \implies \frac{x_1}{x_1 - 1} = \frac{x_2}{x_2 - 1}.$$

En multipliant par le même nombre non nul $(x_1 - 1)(x_2 - 1)$, on obtient

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\implies x_1(x_2 - 1) = x_2(x_1 - 1) \\ &\implies x_1x_2 - x_1 = x_2x_1 - x_2 \\ &\implies x_1 = x_2. \end{aligned}$$

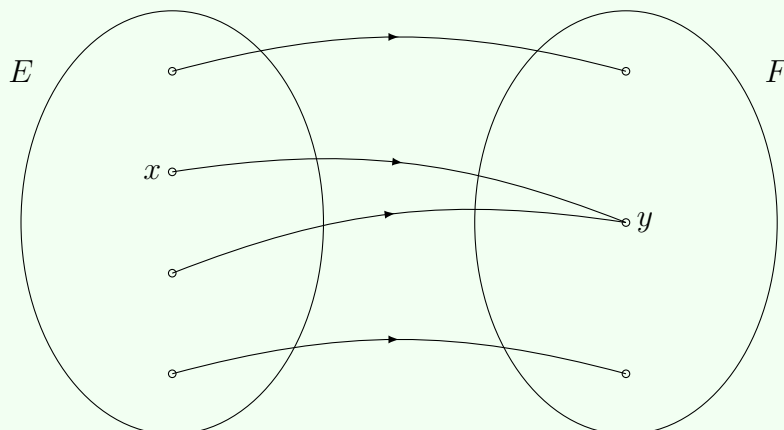
Méthode 3.1

- En général, c'est la propriété (iv) de la proposition 3.2 qu'on utilise pour prouver l'injectivité.
- Si X est une partie de \mathbb{R} , pour $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, fonction réelle d'une variable réelle, l'injectivité se justifie souvent en prouvant que f est strictement monotone.
- Pour prouver que f n'est pas injective, il suffit d'exhiber $x_1 \in E$ et $x_2 \in E$ tels que $x_1 \neq x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$.

Définition 3.7 – Application surjective

Une application $f : E \longrightarrow F$ est *surjective* (ou est une *surjection*) si

$$\forall y \in F, \exists x \in E, \quad y = f(x).$$



Proposition 3.3 – Caractérisation des surjections

Soit $f \in F^E$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'application f est surjective.
- (ii) Tout élément de F a au moins un antécédent par f .
- (iii) Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède au moins une solution.
- (iv) $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$.

Démonstration

À démontrer en exercice.

Exemple 3.2

L'application

$$f \left| \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto x^2 \end{array} \right.$$

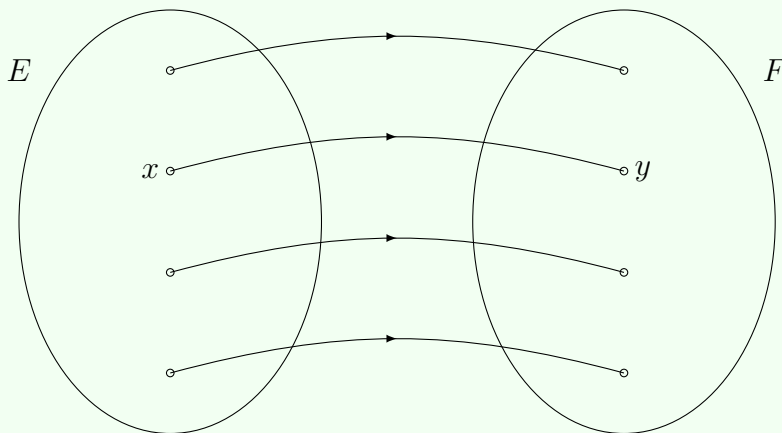
est surjective.

Méthode 3.2

Pour prouver que f n'est pas surjective, on utilise la négation des propriétés de la proposition 3.3 : il suffit donc d'exhiber un $y \in F$ qui n'a pas d'antécédent.

Définition 3.8 – Application bijective

Une application $f : E \longrightarrow F$ est *bijective* si elle est à la fois injective et surjective.

**Exemple 3.3**

L'application

$$f \left| \begin{array}{ll} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow [-1, 1] \\ x & \longmapsto \sin(x) \end{array} \right.$$

est bijective.

Proposition 3.4 – Caractérisation des bijections

Soit $f \in F^E$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'application f est bijective.
- (ii) Tout élément de F a un et un seul antécédent par f .
- (iii) Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède une unique solution.
- (iv) $\forall y \in F, \exists !x \in E, y = f(x)$.

Démonstration

À démontrer en exercice.

Méthode 3.3

Pour prouver qu'une application est bijective, le plus élémentaire est de prouver qu'elle est injective et qu'elle est surjective.

3.3 Composition des applications

Définition 3.9 – Composition d'applications

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

L'application $h : E \longrightarrow G$ définie par :

$$\forall x \in E, \quad h(x) = g[f(x)]$$

est appelée *composée* de f par g et notée $g \circ f$.

Exemple 3.4

On considère les applications

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 + 1 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right. .$$

Puisque, pour tout x réel, on a $x^2 + 1 \in \mathbb{R}_+$, la composée $g \circ f$ est parfaitement définie et, pour tout réel x , on a :

$$g \circ f(x) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Exemple 3.5

Si $t_{\vec{u}}$ désigne la translation du plan (affine) de vecteur \vec{u} , on a :

$$t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u} + \vec{v}}.$$

Proposition 3.5 – Associativité de la composition d'applications

La composition des applications est *associative* : si $f \in \mathcal{F}(G, H)$, $g \in \mathcal{F}(F, G)$ et $h \in \mathcal{F}(E, F)$, alors

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Démonstration

Les deux applications

$$(f \circ g) \circ h : E \xrightarrow{h} F \xrightarrow{f \circ g} H \quad \text{et} \quad f \circ (g \circ h) : E \xrightarrow{g \circ h} G \xrightarrow{f} H$$

ont même ensemble de départ E , même ensemble d'arrivée H , et pour $x \in E$, on a :

$$(f \circ g) \circ h(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = f((g \circ h)(x)) = f \circ (g \circ h)(x).$$

Par suite, ces applications sont égales.

Remarque

Si $f : E \rightarrow E$ et $g : E \rightarrow E$, en général, $g \circ f \neq f \circ g$ (la composition n'est pas *commutative* en général).

Exemple 3.6

Si I et J sont deux points distincts du plan \mathcal{P} et si l'on désigne par s_I (resp. s_J) la symétrie centrale de centre I (resp. J), alors $s_I \circ s_J \neq s_J \circ s_I$ puisque la composée $s_J \circ s_I$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{IJ}$.

Proposition 3.6 – Composée d'applications injectives/surjectives/bijectives

Soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$.

1. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Si f et g sont surjective, alors $g \circ f$ est surjective.
3. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

Démonstration

1. Supposons f et g injectives. Soit $x, x' \in E$ tels que $g(f(x)) = g(f(x'))$. Grâce à l'injectivité de g , on a $f(x) = f(x')$. L'injectivité de f donne alors $x = x'$, ce qui prouve l'injectivité de $g \circ f$.
2. Supposons f et g surjectives. Soit z un élément de G . Grâce à la surjectivité de g , on sait qu'il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$. Comme f est surjective, on peut aussi considérer un $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
On a alors $z = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$, ce qui prouve la surjectivité de $g \circ f$.
3. Conséquence immédiate de ce qui précède.

Proposition 3.7

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ des applications.

1. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

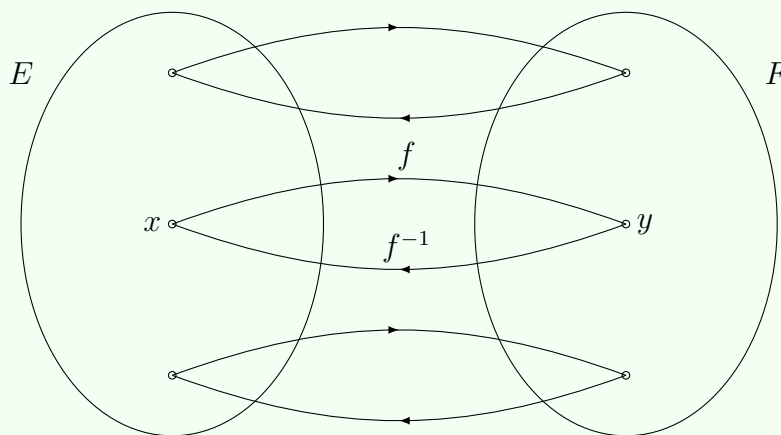
Démonstration

1. Supposons $g \circ f$ injective. Soit $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. En appliquant g à cette égalité, on obtient $g(f(x)) = g(f(x'))$, c'est-à-dire $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. L'injectivité de $g \circ f$ donne alors $x = x'$, ce qui prouve l'injectivité de f .
2. Supposons $g \circ f$ surjective. Soit z un élément de G . Grâce à la surjectivité de $g \circ f$, on sait qu'il existe $x \in E$ tel que $z = (g \circ f)(x)$. En posant $y = f(x)$, on obtient $z = g(y)$, ce qui prouve la surjectivité de g .

3.4 Application réciproque

Définition 3.10 – Application réciproque

Soit f une bijection de E dans F . Alors, pour tout $y \in F$, il existe un unique élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On définit ainsi une application $f^{-1} : F \longrightarrow E$ qui est aussi bijective, et qu'on appelle *application réciproque* de f .

**Exemple 3.7**

La fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ t & \longmapsto & t^2 \end{array} \right.$$

est bijective et sa fonction réciproque est l'application

$$f^{-1} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ t & \longmapsto & \sqrt{t} \end{array} \right. .$$

Méthode 3.4 – Pour montrer que f est bijective et donner f^{-1}

Soit $f : E \longrightarrow F$. Si, pour tout $y \in F$, on peut montrer que l'équation $f(x) = y$ possède une unique solution sur E et en donner l'expression en fonction de y , alors cette expression nous donne l'application réciproque f^{-1} .

Exemple 3.8

Soit l'application

$$u \left| \begin{array}{ll} [2, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto \sqrt{x+2} \end{array} \right. .$$

Pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, l'équation $\sqrt{x+2} = y$ possède une unique solution, $x = y^2 - 2$. Par suite, l'application u est bijective, et

$$u^{-1} \left| \begin{array}{ll} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow [2, +\infty[\\ y & \longmapsto y^2 - 2 \end{array} \right. .$$

Définition 3.11 – Application identité

Soit E un ensemble. On appelle *application identité*, et on note Id_E , l'application définie par :

$$\text{Id}_E \left| \begin{array}{ll} E & \longrightarrow E \\ x & \longmapsto x \end{array} \right. .$$

Le graphe de l'application identité de E est appelé la *diagonale* du produit cartésien $E \times E$.

Proposition 3.8

Si f est une application bijective de E dans F , alors on a :

$$f^{-1} \circ f = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = \text{Id}_F .$$

Démonstration

À démontrer en exercice. Il s'agit essentiellement de vérifier (deux fois) l'égalité de deux applications, comme vu à la fin de la section 3.1.3.

Proposition 3.9

Si $f \in F^E$ et $g \in E^F$ vérifient $f \circ g = \text{Id}_F$ et $g \circ f = \text{Id}_E$, alors elles sont toutes deux bijectives et réciproques l'une de l'autre.

Démonstration

- Supposons qu'il existe une application $g \in \mathcal{F}(F, E)$ telle que $g \circ f = \text{Id}_E$, et montrons que f est injective.

Soit donc x et x' deux éléments de E tels que $f(x) = f(x')$. Alors, on a $g(f(x)) = g(f(x'))$, et donc $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Comme $g \circ f = \text{Id}_E$, on en déduit $x = x'$, ce qui prouve l'injectivité de f .

- L'existence d'une application $g \in \mathcal{F}(F, E)$ telle que $f \circ g = \text{Id}_F$ entraîne que f est surjective.

En effet, pour tout $y \in F$, si l'on pose $x = g(y)$, alors on a $f(x) = y$ car $f \circ g = \text{Id}_F$, ce qui prouve que f est surjective.

Par suite, l'application f est bijective. On peut alors écrire :

$$g = \text{Id}_E \circ g = f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ \text{Id}_F = f^{-1}.$$

Par symétrie, on en déduit que g est bijective, et que $g^{-1} = f$.

Remarque

On peut très bien avoir l'une des égalités $f \circ g = \text{Id}_F$ ou $g \circ f = \text{Id}_E$ sans que les applications f et g soient bijectives (cf. TD1 exercice 11).

Corollaire 3.10

1. Si $u \in F^E$ est bijective, alors u^{-1} est bijective et $(u^{-1})^{-1} = u$.
2. Si $u \in F^E$ et $v \in G^F$ sont deux applications bijectives, alors $(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}$.

Démonstration

1. Conséquence de la proposition 3.9 puisque u et u^{-1} vérifient

$$u^{-1} \circ u = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad u \circ u^{-1} = \text{Id}_F.$$

2. L'associativité de la composition nous donne

$$(u^{-1} \circ v^{-1}) \circ (v \circ u) = u^{-1} \circ (v^{-1} \circ v) \circ u = u^{-1} \circ \text{Id}_F \circ u = u^{-1} \circ u = \text{Id}_E,$$

$$(v \circ u) \circ (u^{-1} \circ v^{-1}) = v \circ (u \circ u^{-1}) \circ v^{-1} = v \circ \text{Id}_F \circ v^{-1} = v \circ v^{-1} = \text{Id}_G.$$

La proposition 3.9 nous permet alors de conclure.

3.5 Images directes et réciproques d'ensembles

Définition 3.12 – Image directe/réciproque d'un ensemble

Soit $f \in F^E$.

- Pour toute partie A de E , le sous-ensemble de F

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in A\}$$

est appelé *image directe* de A par f .

- Pour toute partie B de F , le sous-ensemble de E

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

est appelé *image réciproque* de B par f .

Proposition 3.11

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et soient A et B deux parties de E , C et D deux parties de F .

On a alors :

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
3. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
4. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
5. $f(f^{-1}(C)) \subset C$.
6. $f^{-1}(f(A)) \supset A$.

Démonstration

À démontrer en exercice.

Remarque

- L'application $f \in \mathcal{F}(E, F)$ est surjective si, et seulement si, $f(E) = F$.
- L'application $f \in \mathcal{F}(E, F)$ est :
 - * injective si, et seulement si, pour tout $y \in F$, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ a au plus un élément ;
 - * surjective si, et seulement si, pour tout $y \in F$, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ a au moins un élément ;
 - * bijective si, et seulement si, pour tout $y \in F$, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ a exactement un élément.

Remarque – Attention

- L'utilisation de $f^{-1}(B)$ ne suppose pas que f soit bijective.
- En revanche, lorsque f est bijective, $f^{-1}(B)$ représente aussi bien l'image directe de B par l'application f^{-1} que l'image réciproque de B par f .

3.6 Fonction indicatrice (ou caractéristique)**Définition 3.13 – Fonction indicatrice**

Soit $A \subset E$. La *fonction indicatrice* de A , ou encore *fonction caractéristique* de A , est la fonction de E dans $\{0,1\}$, notée $\mathbb{1}_A$ et définie par :

$$\mathbb{1}_A = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Proposition 3.12

Si A et B sont deux parties de E , on a :

1. pour l'intersection : $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$,
2. pour la réunion : $\mathbb{1}_{A \cup B} = \sup(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$,
3. pour le complémentaire : $\mathbb{1}_{\complement_E A} = 1 - \mathbb{1}_A$.

Démonstration

Les relations (1.) et (3.), ainsi que la première égalité de (2.) sont évidentes. Comme $\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$, on en déduit :

$$\mathbb{1}_{A \cup B} = 1 - \mathbb{1}_{\complement_E(A \cap B)} = \mathbb{1}_{\complement_E A \cap \complement_E B} = 1 - \mathbb{1}_{\complement_E A} \times \mathbb{1}_{\complement_E B}.$$

En transformant $\mathbb{1}_{\complement_E A}$ et $\mathbb{1}_{\complement_E B}$, on obtient :

$$\mathbb{1}_{A \cup B} = 1 - (1 - \mathbb{1}_A) \times (1 - \mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B},$$

ce qui prouve la dernière égalité.

Remarque

Si E ne possède qu'un nombre fini d'éléments, alors :

$$\sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x) = \text{Card}(A).$$

Définition 3.14 – Ensemble des parties d'un ensemble

L'ensemble des parties de E est l'ensemble, noté $\mathcal{P}(E)$, dont les éléments sont les sous-ensembles de E :

$$A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subseteq E.$$

Proposition 3.13

L'application

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{F}(E, \{0,1\}) \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A \end{array} \right.$$

est une bijection.

Démonstration

Soient les applications

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{F}(E, \{0,1\}) \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A \end{array} \right. \quad \text{et} \quad v \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(E, \{0,1\}) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ f & \longmapsto & f^{-1}(\{1\}) \end{array} \right. .$$

- Par construction, on a :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad (v \circ u)(A) = v(\mathbb{1}_A) = \mathbb{1}_A^{-1}(\{1\}) = A.$$

On en déduit $v \circ u = \text{Id}_{\mathcal{P}(E)}$.

- Soit $f \in \mathcal{F}(E, \{0,1\})$. Posons $A = v(f) = f^{-1}(\{1\})$. Alors :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = 1 \iff x \in A.$$

Comme f ne prend que deux valeurs, on en déduit $u(A) = f$, et donc $u \circ v = \text{Id}_{\mathcal{F}(E, \{0,1\})}$.

Les deux relations $v \circ u = \text{Id}_{\mathcal{P}(E)}$ et $u \circ v = \text{Id}_{\mathcal{F}(E, \{0,1\})}$, entraînent que u est bijective (cf. proposition 3.9).

3.7 Familles indexées

Définition 3.15 – Famille d'éléments

Si I est un ensemble quelconque, une application de I dans E est aussi appelée *famille d'éléments* de E indexée par I .

Remarque

Une famille d'éléments de E indexée par I est donc un élément de E^I , mais l'utilisation du terme famille sous-entend que l'on utilise la notation indexée $(x_i)_{i \in I}$ au lieu de la notation fonctionnelle $\left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ i & \longmapsto & x(i) \end{array} \right.$.

Exemple 3.9

Une suite d'éléments de E est une famille d'éléments de E indexée par \mathbb{N} ou par une partie de \mathbb{N} de la forme $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$.

Définition 3.16 – Familles finies, p -uplets

Si p est un entier strictement positif et $I = \llbracket 1, p \rrbracket$, alors une famille d'éléments de E indexée par I est aussi appelée p -liste ou p -uplet. La famille $(x_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ se note alors couramment (x_1, \dots, x_p) , et l'ensemble $\mathbb{R}^I = \mathbb{R}^{\llbracket 1, p \rrbracket}$ se note plus simplement \mathbb{R}^p .

Définition 3.17 – Sous-famille

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille indexée par un ensemble I et soit J une partie de I . La famille $(x_i)_{i \in J}$ est appelée *sous-famille* de $(x_i)_{i \in I}$.

Pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E , c'est-à-dire toute famille d'éléments de $\mathcal{P}(E)$, on généralise les notions d'intersection et de réunion en posant :

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\} \quad \text{et} \quad \bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, x \in A_i\}.$$

Si I_1 et I_2 sont deux parties de I , on a :

$$\left(\bigcap_{i \in I_1} A_i \right) \cap \left(\bigcap_{i \in I_2} A_i \right) = \bigcap_{i \in I_1 \cup I_2} A_i \quad \text{et} \quad \left(\bigcup_{i \in I_1} A_i \right) \cup \left(\bigcup_{i \in I_2} A_i \right) = \bigcup_{i \in I_1 \cup I_2} A_i,$$

ainsi que :

$$\mathcal{C}_E \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_E A_i \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_E \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{C}_E A_i.$$

De même, si $u \in F^E$ et si $(B_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de F , on a :

$$f^{-1} \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \quad \text{et} \quad f^{-1} \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i).$$

Chapitre 4

Relations

Sommaire

4.1	Relations binaires	34
4.2	Relations d'équivalence	34
4.3	Relations d'ordre	37
4.3.1	Définitions	37
4.3.2	Majorants, minorants	37
4.3.3	Plus petit, plus grand élément	38
4.3.4	Borne supérieure	39

Dans ce chapitre, E désigne un ensemble quelconque.

4.1 Relations binaires

Définition 4.1 – Relation binaire

On appelle *relation binaire* \mathcal{R} sur un ensemble E tout prédicat à deux variables défini sur l'ensemble $E \times E$.

Exemple 4.1

- Dans \mathbb{R} , on a rencontré la relation $x \leq y$ ou la relation $x = y$.
- Dans $\mathcal{P}(E)$, on a déjà utilisé l'inclusion $X \subset Y$.

Définition 4.2

On dit qu'une relation binaire \mathcal{R} sur un ensemble E est :

(R) *réflexive* si elle vérifie :

$$\forall x \in E, \quad x\mathcal{R}x.$$

(S) *symétrique* si elle vérifie :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad (x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x).$$

(AS) *antisymétrique* si elle vérifie :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \left(\begin{array}{c} x\mathcal{R}y \\ \text{et} \\ y\mathcal{R}x \end{array} \implies x = y \right).$$

(T) *transitive* si elle vérifie :

$$\forall (x,y,z) \in E^3, \quad \left(\begin{array}{c} x\mathcal{R}y \\ \text{et} \\ y\mathcal{R}z \end{array} \implies x\mathcal{R}z \right).$$

4.2 Relations d'équivalence

Définition 4.3

Soit \mathcal{R} une relation binaire sur un ensemble E .

On dit que \mathcal{R} est une *relation d'équivalence* si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exemple 4.2

Sur tout ensemble E , l'égalité est évidemment une relation d'équivalence.

Exemple 4.3 – Relation de congruence

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La relation définie sur \mathbb{R} par :

$$x \mathcal{R} y \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x - y = k\alpha$$

est une relation d'équivalence sur \mathbb{R} appelée *congruence modulo α* .

Si x et y sont deux réels en relation pour la congruence modulo α , on dit que x est congru à y modulo α , et l'on écrit $x \equiv y [\alpha]$.

En trigonométrie, on a vu que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$(\cos(x) = \cos(y) \text{ et } \sin(x) = \sin(y)) \iff x \equiv y [2\pi].$$

Exemple 4.4 – Relation d'équipollence

\mathcal{E} désigne l'espace affine usuel de dimension 3.

On définit une relation d'équivalence \mathcal{R} dans \mathcal{E}^2 comme suit

$$(A, B) \mathcal{R} (A', B') \iff ([AB'] \text{ et } [A'B] \text{ on même milieu}),$$

appelée *relation d'équipollence*.

Définition 4.4 – Classe d'équivalence, ensemble quotient

Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur un ensemble E .

- Pour tout $x \in E$, on appelle *classe d'équivalence* de x suivant \mathcal{R} l'ensemble

$$\tilde{x} = \{y \in E \mid x \mathcal{R} y\}.$$

Une partie X de E est une *classe d'équivalence* s'il existe un $x \in E$ tel que $X = \tilde{x}$; un tel x est alors appelé un *représentant* de X .

- Le sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ constitué par les classes d'équivalence suivant \mathcal{R} s'appelle l'*ensemble quotient* de E par \mathcal{R} et est noté E/\mathcal{R} .

Exemple 4.5 – L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Si l'on considère la relation de congruence modulo n (pour $n \geq 2$) dans \mathbb{Z} qui est une relation d'équivalence, on obtient n classes d'équivalence $\widetilde{0}, \widetilde{1}, \dots, \widetilde{n-1}$.

L'ensemble quotient est

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\widetilde{0}, \widetilde{1}, \dots, \widetilde{n-1}\}.$$

Proposition 4.1

Étant donné une relation d'équivalence \mathcal{R} sur un ensemble E , ainsi que deux éléments x et y de E , les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(i) \ x \mathcal{R} y \quad (ii) \ y \in \tilde{x} \quad (iii) \ \tilde{x} = \tilde{y}.$$

Démonstration

- Par définition des classes d'équivalence, les propriétés (i) et (ii) sont équivalentes.
- Supposons (i) et prouvons (iii).
 - * Soit $z \in \tilde{x}$. On a alors $x\mathcal{R}z$ et, comme $x\mathcal{R}y$, par symétrie et transitivité, on en déduit $z\mathcal{R}y$. Ainsi, $\tilde{x} \subset \tilde{y}$.
 - * Comme x et y jouent des rôles symétriques, on a aussi $\tilde{y} \subset \tilde{x}$.
 On en déduit $\tilde{x} = \tilde{y}$.
- Réciproquement, supposons (iii), c'est-à-dire $\tilde{x} = \tilde{y}$. Alors, comme $y \in \tilde{y}$, on a $y \in \tilde{x}$, ce qui montre (ii).

La notion de classe d'équivalence est intimement liée à celle de partition.

Définition 4.5 – Partition

On appelle *partition* d'un ensemble E , tout ensemble de parties de E non vides, deux à deux disjointes et dont la réunion est égale à E . Autrement dit, c'est une partie \mathcal{U} de E telle que :

- $\forall A \in \mathcal{U}, \quad A \neq \emptyset,$
- $\forall (A, B) \in \mathcal{U}^2, \quad A \neq B \implies A \cap B = \emptyset,$
- $\bigcup_{A \in \mathcal{U}} A = E.$

Exemple 4.6

1. Si $E = \llbracket 1, 7 \rrbracket$, alors $\{\{1, 3\}, \{2, 6, 7\}, \{4, 5\}\}$ est une partition de E .
2. Si $E = \llbracket 1, 7 \rrbracket$, alors $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 6, 7\}, \{4, 5\}\}$ n'est pas une partition de E .
3. L'ensemble des nombres pairs et l'ensemble des nombres impairs forment une partition de l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} .

Théorème 4.2 – Relation d'équivalence et partition

Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur un ensemble E . Alors E/\mathcal{R} est une partition de E .

Démonstration

Tout d'abord, étant donné que, pour tout $x \in E$, on a $x \in \tilde{x}$ (réflexivité de la relation d'équivalence), on en déduit qu'aucune classe d'équivalence n'est vide et que la réunion de toutes ces classes est égale à E .

Ensuite, si A et B sont deux classes d'équivalence telles que $A \cap B \neq \emptyset$, alors on peut trouver $x \in E$ tel que $x \in A$ et $x \in B$; la proposition 4.1 nous donne alors $A = \tilde{x} = B$. Par contraposée, on en déduit : $A \neq B \implies A \cap B = \emptyset$.

4.3 Relations d'ordre

4.3.1 Définitions

Définition 4.6 – Relation d'ordre

Soit \mathcal{R} une relation binaire sur un ensemble E .

On dit que \mathcal{R} est une *relation d'ordre* si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Exemple 4.7

Les relations d'infériorité (au sens large) dans \mathbb{R} , d'inclusion (au sens large) dans l'ensemble et de divisibilité dans \mathbb{Z} sont des relations d'ordre.

Définition 4.7

On appelle *ensemble ordonné* tout couple (E, \preceq) où E est un ensemble non vide et où \preceq est une relation d'ordre sur cet ensemble.

On note $x \prec y$ la relation $(x \preceq y) \wedge (x \neq y)$.

Un ordre est dit

— *total* si

$$(x \neq y) \implies ((x \prec y) \vee (x \succ y))$$

— *partiel* dans le cas contraire.

Exemple 4.8 – Relations d'ordre dans les ensembles de nombres

- Dans \mathbb{R} , la relation \leq est une relation d'ordre total.
- Dans \mathbb{N}^* , la relation de divisibilité est une relation d'ordre partiel.

4.3.2 Majorants, minorants

Définition 4.8 – Majorant, minorant

Soit (E, \preceq) un ensemble ordonné et A une partie non vide de E .

- Un élément $m \in E$ est dit *minorant* de A si, pour tout $a \in A$, on a $m \preceq a$.
- Un élément $M \in E$ est dit *majorant* de A si, pour tout $a \in A$, on a $a \preceq M$.
- A est dite *majorée* (resp. *minorée*) dans E s'il existe au moins un majorant (resp. un minorant) de A .

Exemple 4.9

L'intervalle réel $[0,1]$ est majoré par 2 et minoré par -1 .

Remarque – Attention

Si A est une partie donnée de E , bien distinguer :

- le premier énoncé « A est majorée par M », traduit par

$$\forall x \in A, \quad x \leq M,$$

qui est un prédicat en M ;

- et le second énoncé « A est majorée », qui, en ce qui le concerne, se traduit par

$$\exists M \in A, \quad \forall x \in A, \quad x \leq M,$$

où M est une variable muette.

4.3.3 Plus petit, plus grand élément**Définition 4.9 – Plus petit, plus grand élément**

Soit (E, \preceq) un ensemble ordonné.

- Un élément $m \in E$ est appelé *plus petit élément* (ou *minimum*) de E si, pour tout $x \in E$, $m \preceq x$.

Quand il existe, le minimum de E se note $\min(E)$ ou $\min E$.

- Un élément $M \in E$ est appelé *plus grand élément* (ou *maximum*) de E si, pour tout $x \in E$, $x \preceq M$.

Quand il existe, le maximum de E se note $\max(E)$ ou $\max E$.

Exemple 4.10

Le maximum de l'intervalle $[0,1]$ est 1, tandis que l'intervalle $[0,1[$ ne possède pas de maximum.

Remarque

Une partie A de E possède un maximum (resp. minimum) si, et seulement si, elle possède un majorant (resp. minorant) qui appartient à A .

Remarque

Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, les nombres réels $\max\{x,y\}$ et $\min\{x,y\}$ se notent respectivement $\max(x,y)$ et $\min(x,y)$.

4.3.4 Borne supérieure

Définition 4.10 – Borne supérieure

Soit (E, \preceq) un ensemble ordonné et A une partie non vide de E .

La *borne supérieure* de A dans E est le plus petit élément (s'il existe) de l'ensemble des majorants de A dans E .

On la note $\sup(A)$ ou $\sup_{x \in A}(x)$. On a, sous réserve d'existence :

$$\sup(A) = \min\{M \in E \mid \forall x \in A, x \preceq M\}$$

Exemple 4.11

Dans $E = \mathbb{R}$, on considère la partie $A = [0, 1[$.

Puisque $1 \notin [0, 1[$, $[0, 1[$ n'a pas de maximum. Le réel 1 est le plus petit des majorants de $[0, 1[$ dans \mathbb{R} (c'est le minimum de $[1, +\infty[$), c'est donc la borne supérieure de cet intervalle. Ainsi, $\sup([0, 1[) = 1$.

On définit de manière analogue la *borne inférieure*.

Définition 4.11 – Borne inférieure

Soit (E, \preceq) un ensemble ordonné et A une partie non vide de E .

La *borne inférieure* de A dans E est le plus grand élément (s'il existe) de l'ensemble des minorants de A dans E .

On la note $\inf(A)$ ou $\inf_{x \in A}(x)$. On a, sous réserve d'existence :

$$\inf(A) = \max\{m \in E \mid \forall x \in A, m \preceq x\}$$

Exemple 4.12

Dans $E = \mathbb{R}$, on considère la partie $A =]0, 1]$.

Puisque $0 \notin]0, 1]$, $]0, 1]$ n'a pas de minimum. Le réel 0 est le plus grand des minorants de $]0, 1]$ dans \mathbb{R} (c'est le maximum de $] -\infty, 0]$), c'est donc la borne inférieure de cet intervalle. Ainsi, $\inf(]0, 1]) = 0$.

Proposition 4.3 – Caractérisation de la borne supérieure

Soit A une partie non vide d'un ensemble E totalement ordonné pour la relation \preceq . Pour qu'un élément S de E soit la borne supérieure de A dans E , il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

1. $\forall a \in A, a \preceq S$;
2. $\forall b \in E : b \prec S \implies \exists a \in A : b \prec a$.

Démonstration

- Supposons que $S = \sup(A)$. On a donc, par définition de la borne supérieure, pour tout $a \in A$, $a \preceq S$ (1.). Par ailleurs, si $b \in E$ tel que $b \prec S$, comme S est le plus petit des majorants de A , b n'est pas un majorant de A . Par négation

de la définition de majorant, on obtient qu'il existe $a \in A$ tel que $b \prec a$, d'où **2.**

- Réciproquement, soit S un élément de E qui vérifie **1.** et **2.**. La contraposée de **2.** donne

$$\forall b \in E, \quad (\forall a \in A, a \preceq b) \implies S \preceq b.$$

Autrement dit, pour tout $b \in E$ un majorant de A , alors $S \preceq b$. S est donc plus petit que tous les majorants, et **1.** assure qu'il en est un. Ainsi, $S = \sup(A)$.

Les notions de borne supérieure et de borne inférieure étant duales, on n'explicitera pas la caractérisation pour la borne inférieure.

Théorème 4.4 – Propriété de la borne supérieure de \mathbb{R}

Toute partie non vide et majorée de l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} possède une borne supérieure.

On dit que \mathbb{R} possède la *propriété de la borne supérieure*.

Démonstration

Il s'agit d'un axiome de la théorie des ensembles, qui découle directement de la construction de l'ensemble des réels \mathbb{R} .

Chapitre 5

Structures

Sommaire

5.1	Lois de composition	42
5.1.1	Lois de composition internes	42
5.1.2	Lois de composition externes	44
5.2	Groupes	45
5.3	Anneaux	47
5.4	Corps	47
5.5	Espaces vectoriels	48
5.5.1	Structure d'espace vectoriel	48
5.5.2	Propriétés	50
5.5.3	Sous-espaces vectoriels	51
5.5.4	Bases d'un espace vectoriel	52
5.5.5	Applications linéaires	53

5.1 Lois de composition

5.1.1 Lois de composition internes

Définition 5.1 – Loi de composition interne

Soit E un ensemble non vide.

Une *loi de composition interne* dans E est une application $*$ définie par :

$$* \left| \begin{array}{ll} E \times E & \longrightarrow E \\ (x,y) & \longmapsto x * y \end{array} \right.$$

L'élément $x * y$ de E est appelé *composé* de x et de y .

Exemple 5.1

L'application

$$+ \left| \begin{array}{ll} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto x + y \end{array} \right.$$

est l'*addition* dans \mathbb{R} .

L'image par $+$ du couple (x,y) est le réel $x + y$ appelé *somme* des réels x et y .

Exemple 5.2

On peut munir \mathbb{R}^n (l'ensemble des familles de n réels) d'une loi de composition interne (l'addition) :

$$+ \left| \begin{array}{ll} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) & \longmapsto (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \end{array} \right.$$

Exemple 5.3

\mathcal{T} est l'ensemble des translations du plan (affine) \mathcal{P} . La composition des translations du plan

$$\circ \left| \begin{array}{ll} \mathcal{T} \times \mathcal{T} & \longrightarrow \mathcal{T} \\ (t_{\vec{u}}, t_{\vec{v}}) & \longmapsto t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u} + \vec{v}} \end{array} \right.$$

est une loi de composition interne dans \mathcal{T} .

Définition 5.2 – Propriétés d'une loi de composition interne

Soit un ensemble E muni de la loi de composition interne $*$, qu'on note $(E, *)$.

(A) La loi $*$ est *associative* si :

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \quad (x * y) * z = x * (y * z).$$

On convient de noter $x * y * z$ un tel élément.

(C) La loi $*$ est *commutative* si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x * y = y * x.$$

(N) Un élément e de E est dit *neutre* si :

$$\forall x \in E, \quad x * e = e * x = x.$$

(S) Si la loi $*$ possède un élément neutre e , on dit que l'élément x de E est symétrisable s'il existe un élément x' de E tel que :

$$x * x' = x' * x = e.$$

L'élément x' est appelé *symétrique* de x pour la loi $*$.

Exemple 5.4

L'addition dans \mathbb{R} est associative, commutative, possède un (unique) élément neutre 0, et, de plus, tout réel x a un (unique) symétrique pour l'addition qui n'est autre que son *opposé* $-x$.

Exemple 5.5

La composition des translations du plan (affine) \mathcal{P} est associative, commutative, possède un (unique) élément neutre $\text{Id}_{\mathcal{P}} = t_{\vec{0}}$ et, de plus, toute translation $t_{\vec{u}}$ a un (unique) symétrique pour la composition, qui n'est autre que la translation $t_{-\vec{u}}$.

Définition 5.3 – Morphisme

Soient $(E,*)$ et (F,\top) deux ensembles non vides munis des lois de composition internes respectives $*$ et \top .

On dit qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est un *morphisme* pour les lois $*$ et \top si

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad f(x * y) = f(x) \top f(y).$$

- Si, de plus, f est bijective et si f^{-1} est aussi un morphisme, on dit alors que f est un *isomorphisme* de $(E,*)$ sur (F,\top) .
- Un morphisme de $(E,*)$ sur lui-même est appelé *endomorphisme* de $(E,*)$.
- Un endomorphisme de $(E,*)$ qui est aussi un isomorphisme est appelé *automorphisme* de $(E,*)$.

Notation On désigne par :

- $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des morphismes de E dans F ,
- $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$ l'ensemble des endomorphismes de E ,
- $\text{Aut}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E .

Exemple 5.6

La fonction exponentielle (\exp) est un isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ dans (\mathbb{R}_+^*,\times) .

Définition 5.4 – Distributivité

Soit E un ensemble non vide muni de deux lois de composition internes $*$ et \top .
On dit que \top est *distributive (à gauche)*^a si

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \quad x \top (y * z) = (x \top y) * (x \top z).$$

^a. On définit de manière analogue la distributivité à droite.

Exemple 5.7

Dans \mathbb{R} , la multiplication est distributive (à gauche et à droite) par rapport à l'addition.

5.1.2 Lois de composition externes

Dans la suite, \mathbb{K} est un corps (cf. section 5.4) quelconque.

Définition 5.5 – Loi de composition externe

Soit E un ensemble non vide.

Une *loi de composition externe* dans E est une application

$$\cdot \left| \begin{array}{ll} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow E \\ (\alpha, x) & \longmapsto \alpha \cdot x \end{array} \right.$$

Exemple 5.8

\mathbb{R}^n peut être muni de la multiplication par un réel :

$$\cdot \left| \begin{array}{ll} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\alpha, (x_1, \dots, x_n)) & \longmapsto (\alpha \cdot x_1, \dots, \alpha \cdot x_n) \end{array} \right.$$

qui est une loi de composition externe sur \mathbb{R}^n .

Exemple 5.9

L'ensemble \mathcal{V} des vecteurs du plan peut être muni de la multiplication par un réel

$$\cdot \left| \begin{array}{ll} \mathbb{R} \times \mathcal{V} & \longrightarrow \mathcal{V} \\ (\alpha, \vec{u}) & \longmapsto \alpha \cdot \vec{u} \end{array} \right.$$

qui est une loi de composition externe sur \mathcal{V} .

5.2 Groupes

La structure de groupe correspond aux propriétés que doit posséder la loi de composition interne $*$ dans un ensemble G pour que l'équation (d'inconnue x) $a * x = b$ ait une unique solution¹ dans G .

Définition 5.6 – Groupe

Un couple $(G, *)$ où G est un ensemble non vide et $*$ une loi de composition interne dans G , est un *groupe* si la loi $*$

(A) est associative,

(N) possède un élément neutre,

(S) est telle que tout élément de G admet un symétrique.

Le groupe est dit *abélien* si, de plus, la loi de composition interne est commutative. On notera e le neutre du groupe et x^{-1} le symétrique d'un élément x du groupe.

Exemple 5.10

$(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien de neutre 0. Le symétrique pour l'addition d'un entier relatif $x \in \mathbb{Z}$ est l'opposé $-x$ qui est encore un entier relatif.

Par contre, $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe puisque tout élément de \mathbb{N} ne possède pas de symétrique dans \mathbb{N} pour l'addition.

Exemple 5.11

(\mathbb{R}_+^*, \times) est un groupe abélien de neutre 1. Le symétrique pour la multiplication d'un réel strictement positif x est son inverse $\frac{1}{x}$ qui est encore un réel strictement positif.

Exemple 5.12 – Groupe \mathbb{U} des complexes unimodulaires

(\mathbb{U}, \times) où \mathbb{U} désigne l'ensemble des complexes^a de module 1 (complexes unimodulaires) est un groupe abélien (le neutre est $1 = e^{i \times 0}$ et le symétrique de $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$ est $e^{-i\theta} \in \mathbb{U}$).

a. Cf. chapitre 24 : Complexes.

$$\begin{array}{llll}
 a * x = b & \Longleftrightarrow & a' * (a * x) = a' * b & \text{(S)} \\
 1. & & \Longleftrightarrow (a' * a) * x = a' * b & \text{(A)} \\
 & & \Longleftrightarrow e * x = a' * b & \text{(S)} \\
 & & \Longleftrightarrow x = a' * b & \text{(N)}
 \end{array}$$

Exemple 5.13 – Groupe \mathbb{U}_n des racines n -ièmes de l'unité

L'ensemble \mathbb{U}_n des racines n -ièmes de l'unité, i.e. l'ensemble des solutions dans \mathbb{C} de l'équation $z^n = 1$, est

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}.$$

\mathbb{U}_n est un groupe abélien pour la multiplication (démonstration en exercice).

Exemple 5.14 – Groupe des permutations d'un ensemble

Soit E un ensemble non vide. $\mathfrak{S}(E)$ désigne l'ensemble des bijections de E sur E muni de la composition d'applications (la loi \circ). $\mathfrak{S}(E)$, appelé groupe symétrique de E , ou ensemble des permutations de E , a une structure de groupe pour la loi \circ .

Définition 5.7 – Sous-groupe

Soit $(G, *)$ un groupe.

Une partie non vide H de G est un *sous-groupe* si c'est un groupe pour les lois induites.

Proposition 5.1 – Caractérisation d'un sous-groupe

Soit $(G, *)$ un groupe de neutre e .

Une partie non vide H de G est un sous-groupe si, et seulement si

- $e \in H$;
- $\forall (x, y) \in H^2, x * y^{-1} \in H$.

Exemple 5.15

$(\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

Exemple 5.16

Le groupe (\mathbb{U}_n, \times) des racines n -ièmes de l'unité est un sous-groupe du groupe (\mathbb{U}, \times) des racines unimodulaires.

Définition 5.8 – Morphisme de groupes

Soient $(G, *)$ et $(G', *')$ deux groupes.

Une application $f : G \longrightarrow G'$ est un morphisme de groupes si

$$\forall (g_1, g_2) \in G^2, \quad f(g_1 * g_2) = f(g_1) *' f(g_2).$$

On définit aisément les notions d'isomorphismes et d'automorphismes de groupes.

Exemple 5.17

La fonction exponentielle \exp est un isomorphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe (\mathbb{R}_+^*, \times) .

5.3 Anneaux

Définition 5.9 – Anneau

Soit un ensemble non vide A muni de deux lois de composition internes $*$ et \top . On dit que $(A, *, \top)$ est un *anneau* si

- $(A, *)$ est un groupe abélien (de neutre noté 0) ;
- la loi \top est associative et possède un élément neutre (noté 1) ;
- la loi \top est distributive par rapport à la loi $*$.

Si de plus la loi \top est commutative, l'anneau est dit *commutatif*.

Exemple 5.18

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif.

Exemple 5.19

L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels est un anneau pour l'addition et la multiplication des matrices.

Il n'est pas commutatif si $n \geq 2$.

On définirait de manière analogue à la section précédente les notions de sous-anneau et de morphisme d'anneaux.

Exemple 5.20

L'ensemble $2\mathbb{Z}$ des entiers pairs est un sous-anneau de $(\mathbb{Z}, +, \times)$.

5.4 Corps

Définition 5.10 – Corps

Un ensemble non vide \mathbb{K} muni de deux lois de composition internes $*$ et \top est un *corps* si

- \mathbb{K} est un anneau ;
- tout élément de \mathbb{K} distinct de 0 (neutre pour la première loi $*$) admet un symétrique pour la seconde loi \top .

Exemple 5.21

\mathbb{Q} , \mathbb{R} et \mathbb{C} sont des corps commutatifs pour l'addition et la multiplication.

Exemple 5.22

Si $p \in \mathbb{P}$ (ensemble des nombres premiers), l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps commutatif pour l'addition et la multiplication des classes d'équivalence modulo p .

Ici aussi, les notions de sous-corps et de morphisme de corps peuvent être définies.

Exemple 5.23

L'ensemble \mathbb{Q} des nombres rationnels est un sous-corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

5.5 Espaces vectoriels

5.5.1 Structure d'espace vectoriel

Définition 5.11 – Espace vectoriel

Soit E un ensemble non vide muni

- d'une loi de composition interne notée $+$
- d'une loi de composition externe notée \cdot

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -*espace vectoriel* si les axiomes suivants sont vérifiés :

(EV1) Associativité de $+$:

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \quad x + (y + z) = (x + y) + z.$$

(EV2) Existence d'un neutre :

$$\exists 0_E \in E : \forall x \in E, \quad x + 0_E = 0_E + x = x.$$

(EV3) Existence d'un opposé :

$$\forall x \in E, \quad \exists x' \in E : x + x' = x' + x = 0_E.$$

(EV4) Commutativité :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x + y = y + x.$$

(EV5) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, \quad \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y.$

(EV6) $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, \quad (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x.$

$$(\mathbf{EV7}) \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, \quad \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x.$$

$$(\mathbf{EV8}) \quad \forall x \in E, \quad 1 \cdot x = x.$$

On appelle alors *vecteurs* les éléments de E et *scalaires* les éléments de \mathbb{K} .

Remarque

Pour la loi externe, toujours écrire le scalaire à gauche.

Notations

- Si $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, on écrit aussi αx au lieu de $\alpha \cdot x$.
- Si $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et $x \in E$, on note $\frac{x}{\alpha}$ le vecteur $\frac{1}{\alpha}x$.
- Pour l'instant, et pour éviter toute ambiguïté, nous notons différemment 0_E le vecteur nul de E et $0_{\mathbb{K}}$ l'élément nul de \mathbb{K} . Mais, assez vite, nous les noterons indistinctement 0 , le contexte étant suffisant à la compréhension.

Remarque

Au vu des propriétés des lois définissant une structure de \mathbb{K} -espace vectoriel, si $n \in \mathbb{N}^*$, et si (x_1, \dots, x_n) est une famille de n vecteurs de E , alors on peut définir la notation :

$$\sum_{k=1}^n x_k = x_1 + \dots + x_n$$

dont les règles d'utilisation sont analogues à celles de la sommation usuelle.

Exemple 5.24

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$, ensemble des complexes, est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Exemple 5.25

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, \mathbb{R}^n , ensemble des n -uplets de réels, est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Exemple 5.26

Soit \mathcal{A} l'ensemble des fonctions affines, i.e. de la forme

$$f_{a,b} \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto ax + b \end{array} \right. .$$

\mathcal{A} muni de l'addition (où $f_{a,b} + f_{a',b'} = f_{a+a',b+b'}$) et de la multiplication par les réels (où $\alpha \cdot f_{a,b} = f_{\alpha a, \alpha b}$), a une structure de \mathbb{R} -espace vectoriel.

Exemple 5.27 – Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soient a et b deux réels où $b \neq 0$. L'ensemble $S_{a,b}$ des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels telles

que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

a une structure de \mathbb{R} -espace vectoriel.

5.5.2 Propriétés

Proposition 5.2

Pour $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, on a :

$$((\alpha = 0_{\mathbb{K}}) \vee (x = 0_E)) \iff \alpha \cdot x = 0_E.$$

Démonstration

- (\implies) Comme $0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}$, la propriété **(EV6)** donne :

$$0_{\mathbb{K}} \cdot x = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) \cdot x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x + 0_{\mathbb{K}} \cdot x.$$

En ajoutant aux deux membres l'opposé de $0_{\mathbb{K}} \cdot x$, qui existe d'après **(EV3)**, on obtient $0_E = 0_{\mathbb{K}} \cdot x$.

Comme $0_E = 0_E + 0_E$, la propriété **(EV5)** donne :

$$\alpha \cdot 0_E = \alpha \cdot (0_E + 0_E) = \alpha \cdot 0_E + \alpha \cdot 0_E.$$

En ajoutant aux deux membres l'opposé de $\alpha \cdot 0_E$, on obtient $0_E = \alpha \cdot 0_E$.

Par suite, on a montré la première implication.

- (\impliedby) Supposons $\alpha \cdot x = 0_E$.

Si $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$, alors on sait que le scalaire α est inversible et l'on en déduit :

$$x = 1 \cdot x = (\alpha^{-1}\alpha) \cdot x = \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot x) = \alpha^{-1} \cdot 0_E = 0_E.$$

Par suite, on a $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$, ce qui prouve l'implication réciproque.

Proposition 5.3 – Règles de calcul

Pour $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, on a :

$$\alpha \cdot (-x) = -(\alpha \cdot x) = (-\alpha) \cdot x.$$

Démonstration

Comme

$$\alpha \cdot x + (-\alpha) \cdot x = (\alpha - \alpha) \cdot x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E,$$

on en déduit que $(-\alpha) \cdot x$ est l'opposé de $\alpha \cdot x$ et donc $(-\alpha) \cdot x = -(\alpha \cdot x)$.

Démonstration analogue pour l'autre relation en partant de :

$$\alpha \cdot (-x) + \alpha \cdot x = \alpha \cdot (-x + x) = \alpha \cdot 0_E = 0_E.$$

5.5.3 Sous-espaces vectoriels

Définition 5.12 – Combinaison linéaire

Soit $(x, y) \in E^2$. On dit que $z \in E$ est une *combinaison linéaire* des vecteurs x et y s'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tels que $z = \lambda x + \mu y$.

Définition 5.13 – Sous-espace vectoriel

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit F une partie non vide de E . On dit que F est un *sous-espace vectoriel* de E s'il est stable par combinaisons linéaires et contient 0_E , c'est à dire :

$$0_E \in F \quad \text{et} \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in F^2, \quad \alpha x + \beta y \in F.$$

Remarque

E et $\{0_E\}$ sont évidemment des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E : ce sont les *sous-espaces vectoriels triviaux* de E .

Remarque – Attention

Pour prouver que F est un sous-espace vectoriel de E , ne pas oublier de vérifier $F \subset E$ et $0 \in F$ avant de vérifier que F est stable par combinaisons linéaires.

Exemple 5.28

Le sous-ensemble $\mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ de \mathbb{R}^2 est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

Exemple 5.29

L'ensemble des fonctions affines \mathcal{A} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, espace vectoriel des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , muni de l'addition des fonctions et de la multiplication des fonctions par un réel.

Exemple 5.30

L'ensemble $S_{a,b}$ des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 vu à l'exemple 5.27 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles.

Proposition 5.4 – Caractérisation d'un sous-espace vectoriel

Muni des lois induites, tout sous-espace vectoriel du \mathbb{K} -espace vectoriel E est lui-même un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Démonstration

Soit F un sous-espace vectoriel de E .

Les propriétés (EV1), (EV2), et (EV4) à (EV8) étant immédiates, il nous reste

à montrer que F vérifie la propriété **(EV3)** :

Comme pour tout $x \in F$, on a $-x = (-1) \cdot x \in F$ (car F est stable par combinaisons linéaires), on en déduit que tout élément de F possède un opposé qui appartient aussi à F .

Ainsi, F possède une structure de \mathbb{K} -espace vectoriel.

5.5.4 Bases d'un espace vectoriel

Définition 5.14 – Base

Soient $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel.

On dit qu'une famille finie (a_1, \dots, a_n) de $n \in \mathbb{N}$ vecteurs de E est une *base* de E si tout vecteur de E peut être écrit comme combinaison linéaire de manière unique des vecteurs de cette famille :

$$\forall x \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad x = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i.$$

L'entier naturel n est appelé *dimension* de l'espace vectoriel E et est noté $\dim(E)$.

Remarque

Un espace vectoriel n'admet pas nécessairement une base constituée d'un nombre fini de vecteurs ; par exemple, l'espace vectoriel des polynômes $\mathbb{K}[X]$ (suites presque nulles) n'est pas de dimension finie.

Remarque

Un espace vectoriel de dimension 1 (resp. 2) est appelé *droite vectorielle* (resp. *plan vectoriel*).

Exemple 5.31 – Base canonique de \mathbb{R}^2

$(e_1, e_2) = ((1,0), (0,1))$ est une base (appelée *base canonique*) de l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ car tout couple (x, y) de réels s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs e_1 et e_2 :

$$(x, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1).$$

On a alors $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

5.5.5 Applications linéaires

Définition 5.15 – Application linéaire

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels.

Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite *linéaire* si, et seulement si, elle vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \quad f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Exemple 5.32 – Applications linéaires de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

L'ensemble des réels est ici muni de l'addition et de la multiplication, lois qui lui confèrent une structure de \mathbb{R} -espace vectoriel.

On retrouve alors l'ensemble des applications linéaires qui sont ici de la forme $x \longmapsto a \cdot x$ où a est un réel constant.

Exemple 5.33 – Homothétie vectorielle

Si l'on désigne par \mathcal{V} l'espace vectoriel (de dimension 3) des vecteurs de l'espace, l'homothétie vectorielle de rapport k ($k \neq 0$) $h_k : \vec{u} \longmapsto k \cdot \vec{u}$ est une application linéaire.

Exemple 5.34 – Projection vectorielle

Soit E un espace vectoriel et soient deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 *supplémentaires*, i.e. tout vecteur \vec{u} de E s'écrit de manière unique comme somme^a d'un vecteur \vec{u}_1 de E_1 et \vec{u}_2 de E_2 : $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$.

La *projection vectorielle* sur E_1 selon la direction E_2 est l'application p_1 de E dans E qui à \vec{u} associe \vec{u}_1 . Cette projection vectorielle est une application linéaire.

a. On écrit alors $E = E_1 \oplus E_2$.

Remarque – Application

Cette notion est utilisée en cinématique pour décomposer le vecteur vitesse suivant deux directions perpendiculaires ainsi qu'en dynamique pour décomposer une force selon la direction du mouvement et la direction perpendiculaire.

Définition 5.16 – Noyau d'une application linéaire

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et soit f une application linéaire de E dans F .

On appelle *noyau* de f , et on note $\text{Ker}(f)$ ^a, l'ensemble des vecteurs x de E dont l'image par l'application linéaire f est nulle.

$$\text{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_E\} = f^{-1}(\{0_E\}).$$

a. De l'allemand *Kern* : noyau.

Exemple 5.35

Le noyau de la projection vectorielle p_1 définie à l'exemple 5.34 est le sous-espace vectoriel E_2 .

Définition 5.17 – Image d'une application linéaire

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et soit f une application linéaire de E dans F .

On appelle *image* de f , et on note $\text{Im}(f)$, le sous-ensemble $f(E)$ de F .

$$\text{Im}(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in E\}.$$

Exemple 5.36

L'image de la projection vectorielle p_1 définie à l'exemple 5.34 est le sous-espace vectoriel E_1 .

Proposition 5.5

Si E et F sont deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et si f est une application linéaire de E dans F , alors :

- $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E .
- $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F .

Deuxième partie

Analyse

Chapitre 6

Récurrrence

Sommaire

6.1	L'ensemble \mathbb{N}	58
6.2	Principe de récurrence	58
6.3	Raisonnement par récurrence	59
6.4	Récurrrences fortes	63

6.1 L'ensemble \mathbb{N}

La notion d'entier naturel nous est familière depuis notre enfance puisque c'est avec les nombres 1, 2, 3... que l'apprentissage numérique débute en CP ou en grande section de maternelle. Jusqu'au XIX^e siècle, cette perception intuitive des entiers suffisait au mathématicien.

Avec l'invention de la théorie des ensembles, le mathématicien Richard Dedekind (1831–1916) et le mathématicien logicien Guiseppe Peano (1858–1932) ont établi une définition axiomatique et une construction rigoureuse de l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels, notamment grâce aux axiomes de Peano :

Proposition 6.1 – Axiomes de Peano

Il existe un ensemble, noté \mathbb{N} , dont les éléments sont appelés entiers naturels, et une fonction appelée *successeur* définie sur cet ensemble, vérifiant les axiomes suivants :

- (N1) Tout entier naturel n admet un successeur qui est $n + 1$.
- (N2) 0 est un entier naturel.
- (N3) 0 n'est le successeur d'aucun entier naturel.
- (N4) Deux entiers naturels ayant le même successeur sont égaux.
- (N5) \mathbb{N} n'a pas de plus grand élément.
- (N6) Toute partie non vide de \mathbb{N} admet un plus petit élément.

6.2 Principe de récurrence

Le *principe de récurrence* repose sur la propriété axiomatique du plus petit élément des entiers naturels (N6) citée ci-dessus, dont l'énoncé plus précis est :

Proposition 6.2 – Axiome du plus petit élément

Toute partie B non vide de \mathbb{N} admet un plus petit élément p , ce qui signifie

$$\exists p \in \mathbb{N}, \forall b \in B, \quad (b \geq p) \wedge (p \in B).$$

Théorème 6.3 – Principe de récurrence

Si A est une partie de \mathbb{N} satisfaisant aux deux conditions suivantes :

- $0 \in A$,
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \in A \implies n + 1 \in A)$,

alors $A = \mathbb{N}$.

Démonstration

Nous supposons par l'absurde que $A \neq \mathbb{N}$.

Considérons, dans ce cas,

$$B = \mathbb{C}_{\mathbb{N}} A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A\}.$$

On observe que :

- $B \neq \emptyset$ car sinon $A = \mathbb{N}$.
- $0 \notin B$ car $0 \in A$.

Par conséquent, B est une partie non vide de \mathbb{N} , donc B admet un plus petit élément $p \geq 1$. On en déduit que $p \in B$ et $p - 1 \notin B$.

Puisque $p - 1 \in \mathbb{N}$, nous avons $p - 1 \in A$. En appliquant la condition :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \in A \implies n + 1 \in A),$$

en particulier, pour $n = p - 1$, il vient

$$p \in A,$$

ce qui est contradictoire car $A \cap B = \emptyset$.

On conclut que $A = \mathbb{N}$.

6.3 Raisonnement par récurrence

Théorème 6.4 – Récurrence à partir du rang 0

Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n .

Si

$$\begin{cases} \mathcal{P}(0) \text{ est vraie} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n + 1) \end{cases}$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \text{ est vraie.}$$

Démonstration

Nous appliquons le principe de récurrence à

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{P}(n) \text{ vraie}\}.$$

Remarque

- La première condition est l'*initialisation* de la récurrence.
- La condition $\mathcal{P}(n)$ vraie, pour un entier naturel fixé, est fréquemment appelée *hypothèse de récurrence*, et notée \mathcal{H}_n ; il s'agit donc de prouver

$$\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}.$$

- La seconde condition signifie que la propriété est héréditaire.

Méthode 6.1 – Rédiger un raisonnement par récurrence

Une démonstration par récurrence comprend trois temps :

1. l'explicitation de la propriété $\mathcal{P}(n)$ que l'on souhaite prouver par récurrence ;
2. l'**initialisation**, c'est-à-dire le fait de montrer que $\mathcal{P}(0)$ est vraie ;

3. la preuve de l'**hérédité**, c'est-à-dire le fait de montrer que si $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain rang n , alors $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi.

Le raisonnement par récurrence est assez naturel, comme le montre l'illustration suivante :

« Je suis en bas de l'escalier du Lycée Saint Augustin, et je constate que les premières marches sont peintes en jaune. Rien ne me permet d'affirmer que toutes les marches sont peintes en jaune. Mais un professeur de maths bienveillant, qui sort de son cours avec la classe de Terminale, m'indique que l'escalier a été peint de telle sorte que si une marche est peinte en jaune, alors la suivante est peinte en jaune.

Nous en concluons que toutes les marches sont peintes en jaune. »

Proposition 6.5 – Récurrence à partir d'un rang n_0

Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n et soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

Si

$$\begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie} \\ \forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1) \end{cases}$$

alors

$$\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \text{ est vraie.}$$

Démonstration

On pose $k = n - n_0$, ainsi $k \in \mathbb{N}$.

Désignons par $\mathcal{Q}(k)$ la propriété définie sur \mathbb{N} par : « $\mathcal{P}(n_0 + k)$ est vraie ».

Initialisation : $\mathcal{Q}(0)$ est vraie puisque $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que pour $k \in \mathbb{N}$ quelconque mais fixé, on ait $\mathcal{Q}(k)$ vraie, ce qui signifie $\mathcal{P}(n_0 + k)$ vraie, soit $\mathcal{P}(n)$ vraie.

En appliquant l'hypothèse de récurrence, cela implique $\mathcal{P}(n+1)$ vraie, c'est-à-dire $\mathcal{P}(n_0 + k + 1)$ vraie, soit $\mathcal{Q}(k+1)$ vraie.

En appliquant la proposition précédente, par principe de récurrence, nous obtenons

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{Q}(k) \text{ vraie,}$$

c'est-à-dire

$$\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \text{ vraie.}$$

Exemple 6.1

Démontrons par récurrence l'égalité suivante communément admise :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}, |x^n| = |x|^n.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

Initialisation : Pour $n = 0$, nous avons

$$|x^0| = |1| = 1 = |x|^0,$$

ce qui justifie que l'égalité proposée est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Supposons que pour un entier naturel n fixé, on ait

$$|x^n| = |x|^n \quad (\text{HR}).$$

Il s'agit de montrer que $|x^{n+1}| = |x|^{n+1}$.

Or, on a

$$|x^{n+1}| = |x^n \times x| = |x^n||x|,$$

ce qui donne, en appliquant l'hypothèse de récurrence (HR),

$$|x^{n+1}| = |x|^n|x| = |x|^{n+1}.$$

Ainsi, l'égalité attendue est héréditaire.

Par principe de récurrence, on conclut :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |x^n| = |x|^n$$

Exemple 6.2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on souhaite prouver par récurrence l'égalité exprimant la somme des n premiers carrés :

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Initialisation : Pour $n = 1$, nous avons d'une part

$$\frac{1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1)}{6} = \frac{6}{6} = 1,$$

et d'autre part

$$1^2 = 1.$$

L'égalité est vraie au rang $n = 1$.

Hérédité : Supposons que pour un entier n non nul fixé, on ait

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (\text{HR}).$$

Il s'agit de montrer que

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence (HR), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=1}^n i^2 + (n+1)^2 \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad \text{d'après (HR)} \\
 &= (n+1) \left[\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1) \right] \\
 &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}.
 \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$$(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6,$$

ce qui donne :

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

vérifiant que l'égalité attendue est vraie au rang $n+1$.

Par principe de récurrence, on conclut :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exemple 6.3 – Proposition fausse mais héréditaire

Considérons la proposition

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 9 \mid (10^n + 1).$$

Au rang $n = 0$, cette proposition est fausse, pourtant elle est héréditaire ! En effet, supposons que pour un entier naturel n fixé, 9 divise $10^n + 1$, i.e. :

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \quad 10^n + 1 = 9k.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
 10^{n+1} + 1 &= 10^n \times (9 + 1) + 1 \\
 &= 10^n \times 9 + (10^n + 1) \\
 &= 10^n \times 9 + 9k \\
 &= 9(10^n + k).
 \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse ci-dessus, $10^{n+1} + 1$ est bien un multiple de 9 ; la propriété est donc héréditaire.

Nous retiendrons que l'étape d'initialisation est indissociable d'un raisonnement par récurrence.

6.4 Récurrences fortes

Corollaire 6.6 – Récurrence d'ordre 2

Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n .

Si

$$\begin{cases} \mathcal{P}(0) \text{ et } \mathcal{P}(1) \text{ sont vraies} \\ \forall n \geq 1, (\mathcal{P}(n-1) \wedge \mathcal{P}(n)) \implies \mathcal{P}(n+1) \end{cases}$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \text{ est vraie.}$$

Démonstration

On considère la propriété $\mathcal{Q}(n)$ définie sur \mathbb{N}^* par :

$$\ll \mathcal{P}(n-1) \text{ et } \mathcal{P}(n) \text{ vraies} \gg.$$

- $\mathcal{Q}(1)$ est vraie car $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.
- On suppose que, pour un entier $n \geq 1$ fixé, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie, ce qui implique que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Il en résulte que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies, c'est-à-dire $\mathcal{Q}(n+1)$ vraie. En appliquant le principe de récurrence, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{Q}(n) \text{ est vraie,}$$

ce qui signifie

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n-1) \text{ et } \mathcal{P}(n) \text{ sont vraies.}$$

Par suite, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Puisque $\mathcal{P}(0)$ est vraie, nous obtenons finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \text{ est vraie.}$$

Remarque

1. Dans le cas d'utilisation de cette forme de récurrence, il ne faut surtout pas oublier de procéder à la double initialisation $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$.
2. On peut, comme pour la récurrence simple, démontrer par récurrence double que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n \geq n_0$. Il faut procéder à la double initialisation aux rangs n_0 et $n_0 + 1$.

Exemple 6.4

Considérons la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par ses deux premiers termes $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et par la relation de récurrence double :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}.$$

Nous pouvons calculer directement les premiers termes de cette suite mais pour s'entraîner nous proposons un programme en Python de façon à conjecturer u_n en

fonction de l'entier n .

```

1 n=int(input("n="))
2 a,b=1,3
3 L=[]
4 for i in range(2,n+1) :
5     u = 2*b - a
6     a,b = b,u
7     L.append(u)
8
9 print(L)

```

Pour $n = 20$, nous obtenons :

```
>>> [5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31,33,35,37,39,41]
```

Pour tout entier naturel n , nous conjecturons que $u_n = 2n + 1$. Démontrons cette conjecture en appliquant la proposition de récurrence d'ordre 2 établie précédemment.

Initialisation : Nous avons $u_0 = 1 = 2 \times 0 + 1$ et $u_1 = 3 = 2 \times 1 + 1$, ce qui prouve que l'égalité attendue est vraie au rang $n = 0$ et $n = 1$.

Hérédité : Supposons qu'aux rangs $n - 1$ et n avec $n \geq 1$, nous disposons des égalités :

$$u_n = 2n + 1 \quad \text{et} \quad u_{n-1} = 2(n - 1) + 1 = 2n - 1.$$

Montrons que $u_{n+1} = 2(n + 1) + 1 = 2n + 3$.

En appliquant l'hypothèse de récurrence, il vient

$$u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} = 2(2n + 1) - (2n - 1) = 2n + 3,$$

ce qui justifie que l'égalité attendue est vraie au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence, on conclut :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2n + 1.$$

Théorème 6.7 – Récurrence forte

Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n .

Si

$$\begin{cases} \mathcal{P}(0) \text{ est vraie} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (\mathcal{P}(0) \wedge \mathcal{P}(1) \wedge \cdots \wedge \mathcal{P}(n - 1) \wedge \mathcal{P}(n)) \implies \mathcal{P}(n + 1) \end{cases}$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(n) \text{ est vraie.}$$

Démonstration

Supposons

$$\begin{cases} \mathcal{P}(0) \text{ est vraie} \\ \forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{P}(0) \wedge \mathcal{P}(1) \wedge \dots \wedge \mathcal{P}(n-1) \wedge \mathcal{P}(n)) \implies \mathcal{P}(n+1) \end{cases} \quad (H)$$

Considérons alors la propriété $\mathcal{Q}(n)$ définie sur \mathbb{N} par :

$$\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2), \dots, \mathcal{P}(n) \text{ vraies.}$$

Initialisation : $\mathcal{Q}(0)$ est vraie car $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que, pour un entier naturel n quelconque fixé, on ait $\mathcal{Q}(n)$ vraie au rang n .

Alors, cela signifie que $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2), \dots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies, ce qui implique $\mathcal{P}(n+1)$ vraie d'après l'hypothèse de base (H) .

On a donc $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2), \dots, \mathcal{P}(n), \mathcal{P}(n+1)$ vraies, ce qui correspond à $\mathcal{Q}(n+1)$ vraie.

Nous pouvons donc appliquer le principe de récurrence simple, ce qui donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{Q}(n) \text{ vraie.}$$

Nous en déduisons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2), \dots, \mathcal{P}(n) \text{ sont vraies,}$$

ce qui permet de conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(n) \text{ est vraie.}$$

Exemple 6.5

Démontrons par récurrence que tout entier supérieur ou égal à 2 s'écrit comme produit d'un ou plusieurs nombres premiers.

Soit, pour $n \geq 2$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: « L'entier n s'écrit comme produit d'un ou plusieurs nombres premiers. »

Initialisation : La propriété $\mathcal{P}(2)$ est vraie, puisque 2 est premier lui-même.

Hérédité : Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Supposons la propriété vraie jusqu'au rang n , c'est-à-dire supposons $\mathcal{P}(2), \mathcal{P}(3), \dots, \mathcal{P}(n)$. Il y a deux cas possibles pour l'entier $n+1$:

- Soit $n+1$ est premier, alors l'entier $n+1$ s'écrit comme produit d'un nombre premier : lui-même.
- Soit $n+1$ n'est pas premier, alors il existe deux entiers a et b , strictement compris entre 1 et $n+1$, tels que $n+1 = ab$. Puisque a et b appartiennent à $[2, n]$, on sait d'après l'hypothèse de récurrence que $\mathcal{P}(a)$ est vraie et que $\mathcal{P}(b)$ est vraie. Ainsi, les entiers a et b s'écrivent chacun comme produit de nombres premiers. Leur produit $n+1 = ab$ est alors aussi produit de nombres

premiers.

Dans chacun des cas, l'entier $n + 1$ est produit d'un ou plusieurs nombres premiers, ce qui signifie que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

Chapitre 7

Combinatoire – Dénombrement

Sommaire

7.1	Ensembles finis	68
7.2	Principe additif	69
7.3	Produit cartésien (rappels)	72
7.4	Principe multiplicatif	73
7.5	Listes avec répétitions	76
7.6	Listes sans répétition	77
7.7	Permutations	79
7.8	Combinaisons	80
7.8.1	Coefficients binomiaux	80
7.8.2	Propriétés des coefficients binomiaux	83
7.8.3	Triangle de Pascal	85
7.9	Binôme de Newton	86

Lorsqu'un ensemble a peu d'éléments, comme par exemple l'ensemble des 2 faces numérotées 0 ou 1 d'un jeton, il est possible de dénombrer « à la main » les issues possibles d'une expérience aléatoire définie à partir de cet ensemble. Ainsi, en nous intéressant au nombre de façons de jeter notre jeton 2 fois de suite et en notant dans l'ordre le numéro de la face obtenue, il est clair que la liste des choix possibles est : 00, 01, 10, 11.

Mais dès que le nombre d'éléments de l'ensemble fini de référence est grand, les méthodes de comptage, comme l'utilisation d'une arborescence, ne sont plus possibles à mettre en œuvre. La *combinatoire* (ou l'*analyse combinatoire*) intervient alors en proposant des outils qui permettent de calculer le nombre de choix possibles lors d'une expérience aléatoire dont les issues sont clairement définies.

Par exemple, quel est le nombre de façons de prélever simultanément 10 boules dans une urne qui contient 25 boules dont 15 sont rouges, les 10 autres étant noires ? Il est inutile de tenter d'en donner toutes les issues possibles car nous prouverons dans ce chapitre qu'elles sont au nombre de 3 268 760. Historiquement, l'analyse combinatoire est apparue avec les mathématiques arabes et chinoises entre le IX^e et le XIII^e siècle. En Europe, la combinatoire est née de l'étude des jeux de hasard avec Blaise Pascal (1623–1663) et sa correspondance avec Pierre Fermat (1601–1665).

De nos jours, l'analyse combinatoire irrigue de nombreuses branches des mathématiques comme par exemple les probabilités. Elle est également appliquée dans d'autres sciences comme l'informatique, la biologie...

7.1 Ensembles finis

Définition 7.1 – Ensemble fini et cardinal

- Un ensemble E non vide est dit *fini* s'il existe un entier naturel n non nul et une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur E .
- Nous admettrons qu'un tel entier n , s'il existe, est unique. Il est appelé le *cardinal* de E et correspond au nombre d'éléments de E . On le note $\text{Card}(E)$ ou $|E|$.
- Par convention, on a en particulier $\text{Card } \emptyset = 0$.
- Un ensemble est dit *infini* s'il n'est pas fini.

Remarque

1. Soit E un ensemble fini, de cardinal $n \geq 1$.
Une bijection $i \mapsto a_i$ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur E permet de numérotter les éléments de E et d'écrire $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.
2. L'ensemble vide est le seul ensemble de cardinal nul.
3. On appelle *singleton*, tout ensemble de cardinal 1.

Exemple 7.1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ est fini de cardinal n car l'application identité est une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Proposition 7.1

Si E est un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$ et si F est un ensemble qui peut être mis en bijection avec E , alors F est aussi fini de cardinal n .

Démonstration

Par définition du cardinal, il existe une bijection f de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur E . D'autre part, par hypothèse, il existe une bijection φ de E sur F . La composée $\varphi \circ f$ est alors une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur F .

Remarque

On en déduit que si E est un ensemble infini et si F peut être mis en bijection avec E , alors F est infini.

7.2 Principe additif

Proposition 7.2 – Principe additif

Soient A et B deux ensembles finis disjoints. Nous disposons de l'égalité

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B.$$

Démonstration

Soient A et B deux ensembles finis disjoints, n et p deux entiers naturels tels que $\text{Card } A = n$ et $\text{Card } B = p$. Posons

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\},$$

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_p\}.$$

Puisque $A \cap B = \emptyset$, nous en déduisons

$$A \cup B = \{a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_p\},$$

ce qui donne

$$\text{Card}(A \cup B) = n + p = \text{Card } A + \text{Card } B.$$

Corollaire 7.3

Soient E un ensemble fini et A un sous-ensemble de E . En désignant par \overline{A} le complémentaire de A relativement à E , nous avons

$$\text{Card } \overline{A} = \text{Card } E - \text{Card } A.$$

Démonstration

Soient E un ensemble fini et A un sous-ensemble de E . On pose $B = \overline{A}$. On a donc $A \cup B = E$ et A et B disjoints. D'après le principe additif :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } E = \text{Card } A + \text{Card } B = \text{Card } A + \text{Card } \overline{A},$$

d'où le résultat.

Proposition 7.4 – Cas général

Soient un entier $n \geq 2$ et A_1, A_2, \dots, A_n , n ensembles finis disjoints deux à deux. Nous disposons de l'égalité

$$\text{Card} \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) = \sum_{k=1}^n \text{Card } A_k.$$

Démonstration

On procède par récurrence. Soit \mathcal{P} le prédicat à une variable défini sur $\mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : \text{Card} \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) = \sum_{k=1}^n \text{Card } A_k.$$

Initialisation

En appliquant la proposition 7.2 au rang $n = 2$, puisque $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, nous avons

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2) = \text{Card } A_1 + \text{Card } A_2.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(2)$ est vrai.

Hérédité

Supposons $\mathcal{P}(n)$ vrai au rang $n \geq 2$ par hypothèse de récurrence. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai.

Il vient

$$\text{Card} \left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k \right) = \text{Card} \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \cup A_{n+1} \right).$$

Or les ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ sont disjoints deux à deux. Il en résulte

$$\left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) \cap A_{n+1} = \bigcup_{k=1}^n (A_k \cap A_{n+1}) = \emptyset.$$

En appliquant la proposition 7.2 avec $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$ et $B = A_{n+1}$, puis l'hypothèse de récurrence, nous obtenons

$$\begin{aligned} \text{Card} \left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k \right) &= \sum_{k=1}^n \text{Card } A_k + \text{Card } A_{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \text{Card } A_k. \end{aligned}$$

Le prédicat \mathcal{P} est donc héréditaire.

En appliquant le principe de récurrence, nous en concluons que $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \geq 2$.

Ainsi :

$$\forall n \geq 2, \quad \text{Card} \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) = \sum_{k=1}^n \text{Card } A_k.$$

Proposition 7.5 – Cas général, lorsque $A \cap B \neq \emptyset$

Soient A et B deux ensembles finis. Nous disposons de l'égalité

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card}(A \cap B).$$

Démonstration

On suppose que $A \cap B \neq \emptyset$.

Soit $A_1 = A \setminus B$, l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à $A \cap B$.

D'une part, on a :

$$A_1 \cap (A \cap B) = \emptyset \quad \text{et} \quad A_1 \cup (A \cap B) = A.$$

En appliquant le principe d'additivité, il vient :

$$\text{Card}(A_1) + \text{Card}(A \cap B) = \text{Card}(A),$$

ce qui donne

$$\text{Card}(A_1) = \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B).$$

D'autre part, on remarque que

$$A_1 \cup B = A \cup B, \quad \text{avec} \quad A_1 \cap B = \emptyset.$$

À nouveau, par additivité, il vient :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A_1 \cup B) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(B),$$

ce qui donne

$$\text{Card}(A_1) = \text{Card}(A \cup B) - \text{Card}(B).$$

Des deux expressions de $\text{Card } A_1$, on déduit :

$$\text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B) = \text{Card}(A \cup B) - \text{Card}(B).$$

Ainsi, on conclut que

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card}(A \cap B).$$

Exemple 7.2

Au cours d'un sondage pour un référendum local, deux questions sont posées à une centaine de personnes :

- 65 personnes répondent « Oui » à la première question.
- 51 personnes répondent « Oui » à la seconde question.
- 46 personnes répondent « Oui » aux deux questions.

Combien de personnes répondent « Oui » à l'une ou l'autre des deux questions ?

Considérons les deux ensembles finis suivants :

A : l'ensemble des personnes qui répondent « Oui » à la première question,

B : l'ensemble des personnes qui répondent « Oui » à la seconde question.

Il s'agit de calculer $\text{Card}(A \cup B)$. Il vient :

$$\begin{aligned} \text{Card}(A \cup B) &= \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) \\ &= 65 + 51 - 46 \\ &= 70. \end{aligned}$$

Ainsi, 70 personnes ont répondu « Oui » à au moins une question.

7.3 Produit cartésien (rappels)

Définition 7.2 – Couple

Soient A et B deux ensembles, $a \in A$ et $b \in B$.

Le *couple* formé par les éléments a et b , noté (a,b) , est la donnée de a et b dans cet ordre.

Remarque

Cela signifie qu'en général :

$$(a,b) \neq (b,a).$$

Définition 7.3 – Produit cartésien

Soient A et B deux ensembles.

Le *produit cartésien* de ces deux ensembles, noté $A \times B$, est l'ensemble des couples (a,b) tels que $a \in A$ et $b \in B$. En d'autres termes :

$$A \times B = \{(a,b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\}.$$

Remarque

- $A \times \emptyset = \emptyset$.
- Pour tous les ensembles A et B , $A \times B \neq B \times A$.

Définition 7.4 – n -uplet

Soient un entier $n \geq 2$ et A_1, A_2, \dots, A_n n ensembles.

Le *n -uplet* formé par les éléments $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$, noté (a_1, a_2, \dots, a_n) est la donnée de a_1, a_2, \dots, a_n dans cet ordre.

Définition 7.5 – Produit cartésien de n ensembles

Soient un entier $n \geq 2$ et A_1, A_2, \dots, A_n n ensembles.

Le produit cartésien de ces n ensembles, noté

$$\prod_{k=1}^n A_k = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n,$$

est l'ensemble des n -uplets (a_1, a_2, \dots, a_n) tels que $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$. En d'autres termes :

$$\prod_{k=1}^n A_k = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid (a_1 \in A_1) \wedge (a_2 \in A_2) \wedge \dots \wedge (a_n \in A_n)\}.$$

Définition 7.6

Soient un entier $n \geq 2$ et A un ensemble non vide.

On pose :

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}.$$

7.4 Principe multiplicatif

Proposition 7.6 – Principe multiplicatif

Soient A et B deux ensembles finis.

Nous disposons de l'égalité

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B).$$

Démonstration

Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. On pose $\text{Card}(A) = a$ et $\text{Card}(B) = b$.

Il y a donc a choix possibles pour la première composante d'un couple de $A \times B$, et b choix pour la seconde composante de ce couple.

Ainsi, pour chaque choix de la première composante, il y a b choix possibles pour la seconde composante. Puisqu'on répète ce choix a fois, il y a $a \times b$ couples possibles dans $A \times B$.

D'où :

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B).$$

Proposition 7.7 – Cas général

Soient un entier $n \geq 2$ et A_1, A_2, \dots, A_n n ensembles. Nous disposons de l'égalité

$$\text{Card} \left(\prod_{k=1}^n A_k \right) = \prod_{k=1}^n \text{Card}(A_k).$$

Démonstration

On procède par récurrence. Soit \mathcal{P} le prédicat de la variable n défini sur $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : \text{Card} \left(\prod_{k=1}^n A_k \right) = \prod_{k=1}^n \text{Card}(A_k).$$

Initialisation

En appliquant la proposition 7.6 au rang $n = 2$, nous avons

$$\text{Card}(A_1 \times A_2) = \text{Card}(A_1) \times \text{Card}(A_2).$$

Ainsi, $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

Hérédité

Soit $n \geq 2$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie (hypothèse de récurrence). Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Il vient

$$\text{Card} \left(\prod_{k=1}^{n+1} A_k \right) = \text{Card} \left(\left(\prod_{k=1}^n A_k \right) \times A_{n+1} \right).$$

En appliquant la proposition 7.6 avec $A = \prod_{k=1}^n A_k$ et $B = A_{n+1}$, puis l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Card} \left(\prod_{k=1}^{n+1} A_k \right) &= \text{Card} \left(\prod_{k=1}^n A_k \right) \times \text{Card}(A_{n+1}) \\ &= \prod_{k=1}^n \text{Card}(A_k) \times \text{Card}(A_{n+1}) \quad (\text{d'après } \mathcal{P}(n)) \\ &= \prod_{k=1}^{n+1} \text{Card}(A_k) \end{aligned}$$

Le prédicat \mathcal{P} est donc héréditaire.

En appliquant le principe de récurrence, nous en concluons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 2$.

Ainsi :

$$\forall n \geq 2, \quad \text{Card} \left(\prod_{k=1}^n A_k \right) = \prod_{k=1}^n \text{Card}(A_k).$$

Remarque

Le principe multiplicatif peut être énoncé de la façon suivante : si une situation aléatoire comporte n choix, chaque choix ayant respectivement a_1, a_2, \dots, a_n possibilités, alors le nombre d'issues possibles est

$$a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n.$$

Exemple 7.3

Un chef cuisinier peut agrémenter deux recettes par le choix d'une épice parmi trois possibles. Dénombrons le nombre de plats différents que notre chef peut ainsi proposer.

Nous désignons par :

- $R = \{r_1, r_2\}$ l'ensemble des deux recettes,
- $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ l'ensemble des trois épices.

Pour effectuer la recette r_1 , nous disposons de trois choix pour choisir l'épice accompagnant cette première recette.

De même, pour effectuer la recette r_2 , nous disposons de trois choix pour choisir l'épice accompagnant cette seconde recette.

Clairement, nous dénombrons ainsi $2 \times 3 = 6$ plats possibles.

En d'autres termes, l'ensemble des plats possibles est le produit cartésien $R \times E$,

c'est-à-dire

$$R \times E = \{(r_1, e_1), (r_1, e_2), (r_1, e_3), (r_2, e_1), (r_2, e_2), (r_2, e_3)\}.$$

Nous observons que $\text{Card}(R \times E) = 6 = \text{Card}(R) \times \text{Card}(E)$.

Exemple 7.4

On souhaite compter combien on peut écrire de nombres de 8 chiffres avec les 10 chiffres du système décimal, le premier chiffre étant différent de 0.

- Pour le premier chiffre, nous disposons de 9 choix, puisque 0 est exclu.
- Du second au huitième chiffre, nous disposons pour chacun de 10 choix.

En appliquant le principe multiplicatif, nous dénombrons 9×10^7 nombres de huit chiffres, le premier chiffre étant non nul, c'est-à-dire 90 millions d'issues possibles ^a. Nous pouvons observer, dans cet exemple, que toute tentative d'obtention de tous les 8-uplets par une arborescence est vouée à l'échec.

Nous pouvons être plus restrictif en se demandant combien on peut écrire de nombres de 8 chiffres distincts avec les 10 chiffres du système décimal, le premier chiffre étant différent de 0. Ainsi pour :

- le premier chiffre, nous disposons de 9 choix, en excluant 0,
- le second chiffre, nous disposons encore de 9 choix car 0 est maintenant un choix possible,
- le troisième chiffre, il reste 8 choix,
- le quatrième chiffre, il reste 7 choix,
- etc.
- le huitième, il reste 3 choix.

En appliquant le principe multiplicatif, on obtient $9^2 \times 8 \times 7 \times \cdots \times 3 = 1\,632\,960$ nombres de huit chiffres distincts, le premier chiffre étant non nul.

^a. Nous pouvions aussi remarquer que les nombres à 8 chiffres dont le premier est différent de 0 sont les nombres compris entre 10 000 000 et 99 999 999, ce qui fait bien 90 millions de possibilités.

Proposition 7.8 – Cardinal de A^n

Soit A un ensemble fini. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\text{Card}(A^n) = (\text{Card}(A))^n.$$

Démonstration

Il suffit d'appliquer la proposition 7.7 avec $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$.

Exemple 7.5

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\text{Card}(\{0,1\}^n) = 2^n,$$

ce qui signifie qu'on dénombre 2^n n -uplets constitués de 0 ou 1.

7.5 Listes avec répétitions

Définition 7.7 – k -liste avec répétitions

Soient E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

Une k -liste avec répétitions d'éléments de E est une suite ordonnée de k éléments de E distincts ou non.

En d'autres termes, une k -liste avec répétitions d'éléments de E est un k -uplet d'éléments de E .

Remarque

- La contrainte « avec répétitions » permet d'avoir $k > n$.
- Une k -liste avec répétitions d'éléments est parfois appelée un *arrangement avec répétitions* de k éléments de E .

Exemple 7.6 – Tirage successif avec remise

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . Une 3-liste avec répétitions d'éléments de l'ensemble des ces n boules est un tirage successif de trois boules avec remise dans cette urne. Pour le choix de :

- la première boule, nous avons n possibilités,
- la seconde boule, nous avons encore n possibilités,
- la troisième boule, nous avons toujours n possibilités.

Le principe multiplicatif induit que le nombre de 3-listes est n^3 .

Proposition 7.9 – Dénombrement des k -listes avec répétitions

Soient E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

Le nombre de k -listes avec répétitions d'éléments de E est n^k .

Démonstration

Pour choisir :

- le premier élément, nous disposons de n possibilités,
- le second élément, nous disposons encore de n possibilités,

⋮

- le k -ième élément, nous disposons toujours de n possibilités.

En appliquant le principe multiplicatif, le nombre de k -listes avec répétitions obtenues à partir des n éléments de E est

$$\underbrace{n \times n \times n \times \cdots \times n}_{k \text{ facteurs}} = n^k.$$

Remarque

- Une k -liste avec répétitions étant un k -uplet d'éléments de E , c'est-à-dire un élément de E^k , nous pouvons également dénombrer les k -uplets d'éléments de E , en appliquant la proposition 7.9, soit

$$\text{Card}(E^k) = (\text{Card } E)^k = n^k.$$

- Soient E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Une k -liste avec répétitions d'éléments de E est une fonction définie sur $\llbracket 1, k \rrbracket$ à valeurs dans E .

On dit aussi que cette k -liste est une application de $\llbracket 1, k \rrbracket$ dans E . Par conséquent le nombre d'applications de $\llbracket 1, k \rrbracket$ dans E est n^k .

Par exemple, une application de $\llbracket 1, 4 \rrbracket$ dans $E = \{a, b, c\}$ est définie par

$$f(1) = f(2) = a, f(3) = b \text{ et } f(4) = c,$$

ce qui donne la 4-liste avec répétitions (a, a, b, c) . Nous comptons $3^4 = 81$ applications de $\llbracket 1, 4 \rrbracket$ dans $E = \{a, b, c\}$.

7.6 Listes sans répétition

Définition 7.8 – k -liste sans répétition

Soient E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

Une k -liste sans répétition d'éléments de E est une suite ordonnée de k éléments distincts de E .

En d'autres termes, une k -liste sans répétition d'éléments de E est un k -uplet d'éléments distincts de E .

Remarque

- Sans répétition impose $k \leq n$.
- Une k -liste sans répétition d'éléments est aussi nommée arrangement de k éléments parmi les n éléments de E .
- Dans une urne contenant n boules, une k -liste sans répétition d'éléments de l'ensemble de ces n boules est un tirage successif de k boules sans remise dans cette urne.

Exemple 7.7

Une finale olympique du 10 000 m comporte 23 concurrents. Nous dénombrons le nombre de possibilités de monter sur le podium.

Un podium est une 3-liste sans répétition constituée par 3 coureurs parmi les 23 au départ.

Pour :

- le gagnant, nous avons 23 possibilités,

- le second, il reste 22 possibilités,
- le troisième, il nous reste 21 possibilités.

En appliquant le principe multiplicatif, le nombre de podium est

$$23 \times 22 \times 21 = 10\,626.$$

Proposition 7.10 – Dénombrement des k -listes sans répétition

Soient E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \leq n$.
Le nombre de k -listes sans répétition d'éléments de E , noté A_n^k , est

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \underbrace{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}_{k \text{ facteurs}}.$$

Démonstration

Soit une k -liste sans répétition d'éléments de E .

Pour le choix :

- du premier élément, nous disposons de n possibilités,
- du second élément, nous disposons de $n-1$ possibilités,
- du troisième élément, nous disposons de $n-2$ possibilités,
- du k -ième élément, nous disposons de $n-(k-1) = n-k+1$ possibilités.

En appliquant le principe multiplicatif, le nombre de k -listes sans répétition obtenues à partir des n éléments de E est :

$$\begin{aligned} A_n^k &= \underbrace{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}_{k \text{ facteurs}} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)(n-k)(n-k-1) \cdots \times 2 \times 1}{(n-k)(n-k-1) \cdots \times 2 \times 1} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

Remarque – k -listes sans répétition et application injective

Une k -liste sans répétition d'un ensemble E de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ est une application injective de $\llbracket 1, k \rrbracket$ dans E , ce qui signifie

$$\forall (a, b) \in \llbracket 1, k \rrbracket, \quad f(a) = f(b) \implies a = b.$$

Par exemple, une application injective de $\llbracket 1, 3 \rrbracket$ dans $E = \{a, b, c, d\}$ est définie par

$$f(1) = a, \quad f(2) = c \text{ et } f(3) = b,$$

ce qui donne la 3-liste sans répétition (a, c, b) . Nous dénombrons $A_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$ applications injectives (ou 3-listes sans répétition) dans ce cas.

Remarque – Algorithme restituant le calcul de A_n^k , les entiers n et k étant choisis par l'utilisateur.

```

1  def arrangement(n,k) :
2      if k > n :
3          a = 0
4      else :
5          a = 1
6      for i in range(1,k+1) :
7          a=a*(n-i+1)
8      return(a)

```

7.7 Permutations

Définition 7.9 – Permutation

Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Une *permutation* de E est une n -liste sans répétition des n éléments de E .

L'ensemble des permutations de E est noté $\mathfrak{S}(E)$.

Remarque

Une permutation de E est aussi :

- un arrangement de n éléments choisis parmi les n éléments de E ,
- une application injective de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans E .
- Plus précisément, puisque $\text{Card } E = \text{Card } \llbracket 1, n \rrbracket$, une permutation de E est une bijection f de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur E . Ainsi, $\mathfrak{S}(E)$ est l'ensemble des bijections de $E^{\llbracket 1, n \rrbracket}$.

Exemple 7.8

Combien y-a-t-il de façons de placer six invités autour d'une table comportant six chaises ?

Il s'agit de dénombrer les permutations d'un ensemble de cardinal 6, c'est-à-dire le nombre de 6-listes de cet ensemble, soit A_6^6 .

On obtient

$$A_6^6 = \frac{6!}{(6-6)!} = 6! = 720.$$

Cela revient également à déterminer le nombre de bijections de l'ensemble des six invités sur l'ensemble des six chaises. En d'autres termes, en désignant par \mathfrak{S}_6 l'ensemble des bijections de $\llbracket 1, 6 \rrbracket$ sur lui-même, nous en déduisons

$$\text{Card } \mathfrak{S}_6 = 720.$$

Notation Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des bijections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur lui-même, donc des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$, est noté \mathfrak{S}_n (donc $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}(\llbracket 1, n \rrbracket)$).

Proposition 7.11 – Cardinal de $\mathfrak{S}(E)$

Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

Le nombre de permutations de E est égal à $n!$. En d'autres termes :

$$\text{Card } \mathfrak{S}(E) = n!.$$

Démonstration

Le nombre de permutations des éléments de E est le nombre A_n^n des n -listes sans répétition des n éléments de E .

Ainsi, on obtient

$$\text{Card } \mathfrak{S}(E) = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!.$$

Exemple 7.9 – Anagrammes

Un mot, même sans signification, formé avec les lettres du prénom FRANÇOIS est un anagramme.

Un anagramme est donc une permutation de l'ensemble des 8 lettres

$$\{F, R, A, N, C, O, I, S\}.$$

Nous dénombrons $8! = 40\,320$ anagrammes du mot FRANÇOIS.

Nous observons que ce mot est formé de 3 voyelles A, O, I et de 5 consonnes F, R, N, C, S.

Nous dénombrons à présent les anagrammes qui commencent et se terminent par une voyelle.

Nous commençons par déterminer le nombre de choix dont nous disposons pour débiter et terminer par une voyelle, ce qui revient à évaluer le nombre d'arrangements de 2 voyelles parmi 3, soit

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 3! = 6.$$

Pour chaque choix de deux voyelles, nous avons $6! = 720$ façons de permuter les 6 lettres restantes.

En appliquant le principe multiplicatif, nous obtenons $6 \times 720 = 4320$ anagrammes du mot FRANÇOIS qui commencent et se terminent par une voyelle.

7.8 Combinaisons

7.8.1 Coefficients binomiaux

Définition 7.10 – Combinaison

Soient E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$.

Une *combinaison* de k éléments de E est une partie de E qui contient k éléments.

Exemple 7.10

Soit $E = \{a, b, c, d\}$ un ensemble de cardinal 4. Nous donnons les combinaisons de E composées de 3 éléments de E . Nous en comptons 4 qui sont

$$\{a, b, c\}; \{a, b, d\}; \{a, c, d\}; \{b, c, d\}.$$

Chaque combinaison à 3 éléments génère $3! = 6$ 3-listes sans répétition. En désignant par $\binom{4}{3}$ (lire « 3 parmi 4 ») le nombre de combinaisons ayant 3 éléments et en appliquant le principe multiplicatif, nous obtenons

$$A_4^3 = 3! \times \binom{4}{3}, \quad \text{soit} \quad \binom{4}{3} = \frac{A_4^3}{3!}.$$

Définition 7.11 – Nombre de combinaisons à k éléments

Soient E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$.

Le nombre de combinaisons de E composées de k éléments de E est noté $\binom{n}{k}$ (lire « k parmi n »).

Remarque

- $\binom{n}{k}$ est parfois noté \mathcal{C}_n^k .
- $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}^*$. Cet entier est appelé *coefficient binomial*, terminologie qui sera justifiée à la section 7.9.
- Pour tout entier naturel n , dans un ensemble de cardinal n , en dénombrant le nombre de parties ayant :
 - 1 élément, nous avons $\binom{n}{1} = n$,
 - n éléments, nous avons $\binom{n}{n} = 1$,
 - 0 élément, nous avons $\binom{n}{0} = 1$, car \emptyset est la seule partie de E n'ayant aucun élément.
- Dans une urne, il y a n boules. Une combinaison de k éléments de l'ensemble de ces n boules est un tirage simultané de k boules dans cette urne.
Nous dénombrons ainsi $\binom{n}{k}$ tirages simultanés de k boules dans l'urne.

Proposition 7.12 – Calcul des coefficients binomiaux

Soient E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$.

On a alors :

$$\binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Démonstration

On sait qu'il y a $\binom{n}{k}$ parties de E constituées de k éléments.

Pour $i \in \llbracket 1, \binom{n}{k} \rrbracket$, on appelle $E_{k,i}$ les parties de E constituées de k éléments.

Chacune de ces parties $E_{k,i}$ engendre d'après la proposition 7.11 $k!$ k -listes sans répétition des éléments de cette partie (ce sont les permutations de cette partie).

L'ensemble des k -listes sans répétition des éléments de E est donc l'union de toutes les permutations de chacune des parties $E_{k,i}$, soit :

$$\bigcup_{i=1}^{\binom{n}{k}} \mathfrak{S}(E_{k,i}).$$

En appliquant le principe additif, on obtient :

$$\begin{aligned} A_n^k &= \text{Card} \left(\bigcup_{i=1}^{\binom{n}{k}} \mathfrak{S}(E_{k,i}) \right) = \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} \text{Card} [\mathfrak{S}(E_{k,i})] = \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} k! \\ &= \binom{n}{k} \times k!. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!}.$$

Or, $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, ce qui donne enfin :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Exemple 7.11 – Combinaisons et probabilités.

Nous prélevons au hasard 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.

L'ensemble Ω des issues possibles est l'ensemble des combinaisons de 5 cartes parmi 32.

Le nombre de tirages possibles est

$$\text{Card } \Omega = \binom{32}{5} = 201\,376.$$

Considérons l'événement A : « tirer 5 cartes ne contenant aucun roi ».

Les issues qui réalisent A sont les tirages de 5 cartes parmi les 28 cartes non roi. Nous en déduisons que

$$\text{Card } A = \binom{28}{5} = 98\,280,$$

ce qui donne

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} \approx 0,49.$$

Nous en déduisons la probabilité de l'événement B : « tirer 5 cartes contenant au moins un roi » puisque

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) \approx 0,51.$$

7.8.2 Propriétés des coefficients binomiaux

Proposition 7.13 – Symétrie des coefficients binomiaux

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
On a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Démonstration

Soit E un ensemble de cardinal n .

À chaque partie E_k de E ayant k éléments, nous pouvons associer d'une façon unique son complémentaire $\overline{E_k}$ qui est un sous-ensemble de E de cardinal $n - k$. Le nombre de parties de E à k éléments est donc égal au nombre de parties de E ayant $n - k$ éléments, ce qui justifie l'égalité attendue, c'est-à-dire

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Remarque

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n.$$

- Il est possible de prouver cette propriété par un calcul direct. En effet, nous avons :

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Nous avons préféré passer par une approche ensembliste, qui nous semble plus intuitive.

Exemple 7.12

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2} = \sum_{k=1}^n k$$

On en déduit :

$$\sum_{k=1}^n k = \binom{n+1}{n+1-2} = \binom{n+1}{n-1}.$$

Proposition 7.14 – Relation de Pascal

Soient un entier $n \geq 2$ et k un entier naturel tel que $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Nous disposons de la relation

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Démonstration

Soient E un ensemble de cardinal $n \geq 2$, a un élément fixé de E et k un entier naturel tel que $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

Dans l'ensemble des parties de E ayant k éléments nous distinguons, par disjonction, deux cas.

1^{er} cas : les parties de E à k éléments qui *ne contiennent pas* a .

Ce sont les parties à k éléments choisis parmi les $n-1$ éléments de E distincts de a .

Nous en dénombrons $\binom{n-1}{k}$.

2^e cas : les parties de E à k éléments qui *contiennent* a .

L'élément a étant choisi, il s'agit des parties de E à $k-1$ éléments choisis parmi les $n-1$ éléments de E différents de a .

Nous en dénombrons $\binom{n-1}{k-1}$.

Nous avons ainsi défini une partition de l'ensemble des parties de E ayant k éléments.

En appliquant le principe additif, nous obtenons la relation de Pascal, soit

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Remarque

Nous pouvons aussi démontrer la relation de Pascal par un calcul direct.

7.8.3 Triangle de Pascal

La relation de Pascal permet d'obtenir le triangle de Pascal qui restitue numériquement les premiers coefficients binomiaux.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	...	$k-1$	k	...	$n-1$	n
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
\vdots	1	\vdots			\ddots	1					
$k-1$	1	$k-1$	$\binom{k-1}{2}$	$\binom{k-1}{3}$		$k-1$	1				
k	1	k	$\binom{k}{2}$	$\binom{k}{3}$	$\binom{k}{4}$...	k	1			
\vdots	1	\vdots						\ddots	1		
$n-1$	1	$n-1$	$\binom{n-1}{2}$	$\binom{n-1}{3}$	$\binom{n-1}{4}$...	$\binom{n-1}{k-1}$	$\binom{n-1}{k}$...	1	
n	1	n	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$...	$\binom{n}{k-1}$	$\binom{n}{k}$...	n	1

La case de ligne a et de colonne b correspond au coefficient binomial $\binom{a}{b}$. On observe que le tableau se construit ligne par ligne en utilisant la relation de Pascal et en ajoutant à chaque fois un nouveau « 1 » à droite.

On peut aussi construire le triangle de Pascal de manière pyramidale :

$$\begin{array}{ccccccc}
 n = 0 & & & & & & 1 \\
 n = 1 & & & & & 1 & 1 \\
 n = 2 & & & & 1 & 2 & 1 \\
 n = 3 & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 n = 4 & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 n = 5 & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 n = 6 & & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
 & & \vdots & & & & \vdots & &
 \end{array}$$

7.9 Binôme de Newton

Soient a et b deux réels. Nous savons que

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

On observe alors :

$$\begin{aligned}
 (a + b)^3 &= \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3 \\
 &= \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k}a^{3-k}b^k.
 \end{aligned}$$

Proposition 7.15 – Formule du binôme de Newton

Soient a et b deux réels. Pour tout entier naturel n , on a :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

Démonstration

Nous démontrons cette égalité par récurrence.

Soient a et b deux réels.

Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété définie sur \mathbb{N} par

$$\mathcal{P}(n) : (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

Initialisation

On a :

$$(a + b)^0 = 1 = \binom{0}{0}a^0b^0,$$

ce qui justifie la formule du binôme au rang $n = 0$.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie au rang n . Montrons que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie,

c'est-à-dire

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

On a $(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$.

En appliquant l'hypothèse de récurrence, il vient

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\ &= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + \binom{n}{n} b^{n+1} \end{aligned}$$

Dans la somme $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}$, nous effectuons un changement d'indice en posant $j = k + 1$ (on a donc $k = j - 1$). Comme les indices de sommation sont muets, il vient

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j-1} a^{n+1-j} b^j = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k.$$

Comme $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1}$, on a

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + \binom{n}{n} b^{n+1} \\ &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1}. \end{aligned}$$

En appliquant la relation de Pascal, on obtient :

$$\sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n+1-k} b^k = \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k,$$

qui nous permet de déduire

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k. \end{aligned}$$

On a donc $\mathcal{P}(n+1)$. La propriété est héréditaire.

D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Remarque

- Puisque $(a + b)^n = (b + a)^n$, la formule du binôme est symétrique par rapport aux réels a et b , c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

- Nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (a - b)^n = (a + (-b))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k a^{n-k} b^k.$$

Exemple 7.13 – Somme des coefficients binomiaux

Appliquons la formule du binôme dans le cas particulier $a = b = 1$. On obtient :

$$(1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k},$$

ce qui donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Proposition 7.16

Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$.
Nous disposons de l'égalité

$$\text{Card } \mathcal{P}(E) = 2^n.$$

Démonstration

Nous désignons par \mathcal{E}_k l'ensemble des parties de E ayant k éléments, avec $0 \leq k \leq n$.
Lorsque k décrit $\llbracket 0, n \rrbracket$, les ensembles \mathcal{E}_k forment une partition de $\mathcal{P}(E)$.
En appliquant le principe additif et le résultat de l'exemple 7.13, nous en déduisons

$$\text{Card } \mathcal{P}(E) = \sum_{k=0}^n \text{Card}(\mathcal{E}_k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Proposition 7.17 – Inégalité de Bernoulli

Pour tout entier naturel n et tout réel a positif, nous avons

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Démonstration

Nous avons déjà prouvé cette inégalité dans l'exercice 12 du TD6.

Nous en donnons une autre preuve en utilisant la formule du binôme.

Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$. Nous avons

$$(1 + a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k = 1 + na + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} a^k.$$

Puisque $a \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, nous en déduisons

$$(1 + a)^n - (1 + na) = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} a^k \geq 0,$$

ce qui prouve

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R}_+, \quad (1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Chapitre 8

Suites

Sommaire

8.1	Suites convergentes	93
8.1.1	Exemple introductif	93
8.1.2	Définitions d'une suite convergente	94
8.1.3	Unicité – Opérations sur les limites	96
8.1.4	Suites convergentes et inégalités	101
8.2	Suites divergentes vers l'infini	104
8.2.1	Exemple introductif	104
8.2.2	Définitions d'une suite divergente	105
8.2.3	Opérations sur les suites de limite finie ou infinie	107
8.2.4	Limites infinies et inégalités	109
8.3	Limite d'une suite géométrique	111
8.3.1	Limite de q^n	111
8.3.2	Limite de la somme des termes d'une suite géométrique	113
8.4	Limite et monotonie	114
8.4.1	Compléments sur l'ordre dans \mathbb{R}	114
8.4.2	Suite croissante majorée – décroissante minorée	115
8.4.3	Limite infinie et monotonie	116
8.5	Suites adjacentes	117

La notion de suite est essentielle puisque c'est un pré-requis à une branche importante des mathématiques que l'on nomme mathématiques « discrètes ». Le terme « discret » est proposé en opposition au terme « continu » comme par exemple une variable réelle.

Il s'agit donc de considérer une suite comme un « processus » qui dépend d'une variable entière, et plus précisément comme une fonction définie sur \mathbb{N} (ou sur une partie de \mathbb{N}).

Dès à présent, nous précisons que l'étude d'une suite est différente de l'étude d'une fonction d'une variable réelle. En effet, dans l'ensemble des entiers naturels, nous ne disposons pas de la notion d'intervalle de \mathbb{R} . Ainsi, la notion de limite en un point et de dérivabilité ne sont plus adaptées pour l'étude d'une suite. Nous conservons cependant, comme nous l'avons vu en classe de Première, des propriétés qualitatives d'une fonction comme celles qui sont liées à l'ordre dans \mathbb{N} , c'est-à-dire les notions de sens de variations, de majorant ou de minorant (comme étudié au chapitre 4).

En terme de limite, la seule observation qui a du sens, pour une variable entière n , est lorsque n tend vers $+\infty$.

Ceci sera pour nous une première incursion dans le langage des limites finies ou infinies lorsque n tend vers $+\infty$.

La notion de suites est ancienne puisque, par exemple, Archimède, au III^e siècle avant notre ère, a utilisé des suites pour encadrer π .

Au XVII^e, XVIII^e et XIX^e siècles, de nombreux mathématiciens se sont intéressés aux suites, mais c'est avec Cauchy (1789–1857) et Peano (1858–1932) que la théorie a été rigoureusement fondée telle que nous l'utilisons de nos jours.

Les suites sont utilisées dans de nombreux domaines. Citons par exemple :

- les sciences de la vie et de la terre, avec notamment la suite de Fibonacci ou la datation du carbone 14,
- en physique, la théorie du signal et la science du numérique,
- en démographie, l'étude de différents modèles d'évolution des populations,
- en théorie du chaos, avec le concept de fractales.

8.1 Suites convergentes

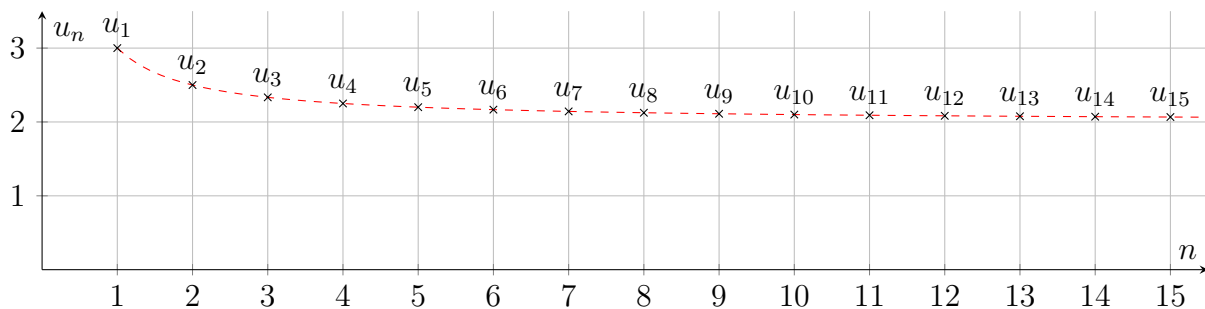
Dans ce paragraphe, pour alléger l'exposé, nous supposons, sauf mention contraire, que les suites considérées sont définies sur \mathbb{N} .

8.1.1 Exemple introductif

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 2 + \frac{1}{n}.$$

Représentons graphiquement cette suite :



On observe sur cette figure que lorsque n devient grand, le réel u_n se rapproche de 2.

Comme en mathématiques, la précision est en général de mise, nous allons estimer à partir de quelles valeurs de l'entier naturel n , nous pouvons affirmer que u_n est proche de 2 au dixième près.

Cela signifie que l'on souhaite prouver l'existence d'un entier naturel n_0 non nul tel que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$n \geq n_0 \implies 2 - \frac{1}{10} < u_n < 2 + \frac{1}{10}.$$

La difficulté est de comprendre ici qu'il s'agit de trouver une condition *suffisante* pour que $2 - \frac{1}{10} < u_n < 2 + \frac{1}{10}$.

Nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} 2 - \frac{1}{10} < u_n < 2 + \frac{1}{10} &\iff -\frac{1}{10} < u_n - 2 < \frac{1}{10} \\ &\iff -\frac{1}{10} < \frac{1}{n} < \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Puisque n est un entier strictement positif, nous avons :

$$\begin{aligned} 0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{10} &\iff n > 10 \\ &\iff n \geq 11. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour que $2 - \frac{1}{10} < u_n < 2 + \frac{1}{10}$, il suffit que $n \geq 11$. Ainsi, $n_0 = 11$ convient.

Pour terminer cet exemple, nous proposons trois remarques importantes.

- Si $n \geq 11$, alors $2 - \frac{1}{10} < u_n < 2 + \frac{1}{10}$, c'est-à-dire $|u_n - 2| < \frac{1}{10}$, ce qui signifie que la distance entre u_n et 2 est inférieure à $\frac{1}{10}$ dès que $n \geq 11$.
- Tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à l'intervalle ouvert $\left]2 - \frac{1}{10}, 2 + \frac{1}{10}\right[$, sauf un nombre fini d'entre eux car les termes u_1, u_2, \dots, u_{10} n'appartiennent pas à cet intervalle.
- Nous pouvons rendre u_n aussi proche de 2 que l'on veut, à partir d'un certain rang p , en choisissant le niveau de précision souhaité.

8.1.2 Définitions d'une suite convergente

Définition 8.1 – Suite convergente

Soient (u_n) une suite définie sur \mathbb{N} et ℓ un réel.

La suite (u_n) *converge* vers le réel ℓ si, et seulement si, tout intervalle ouvert I centré en ℓ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux.

On note dans ce cas :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell.$$

Remarque

Nous pouvons aussi énoncer cette définition par :

Tout intervalle ouvert I centré en ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Définition 8.2 – Suite convergente (formelle)

Formellement, la définition 8.1 s'écrit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Remarque

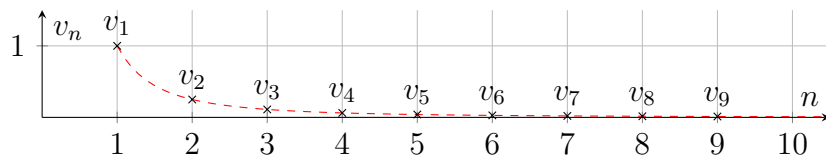
- Lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, nous pouvons préciser que ℓ est *la* limite de la suite (u_n) car cette limite est unique. Ce résultat est démontré dans la partie 8.1.3 qui suit.
- Dans les définitions théoriques ci-dessus, le choix de l'entier n_0 dépend de $\varepsilon > 0$, ce qui signifie aussi que n_0 est contrôlé par le réel $\varepsilon > 0$. Cette remarque est illustrée en détails dans l'exemple et la proposition qui suivent.

Exemple 8.1

Soit (v_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $v_n = \frac{1}{n^2}$.

Une représentation graphique de cette suite nous permet de conjecturer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 :$$



Démontrons-le.

Soit un réel $\varepsilon > 0$ donné. Pour tout entier naturel n non nul, $\frac{1}{n^2} > 0$.

$$\text{Ainsi, } |v_n| < \varepsilon \iff \frac{1}{n^2} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \iff n \geq \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rfloor + 1.$$

L'entier $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rfloor + 1$ convient.

Proposition 8.1 – Suites de référence de limite nulle en $+\infty$

On dispose des résultats suivants :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$, avec $k \in \mathbb{N}^*$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Démonstration

Le cas particulier où $k = 2$ est traité dans l'exemple précédent.

- Pour $k \in \mathbb{N}^*$, la preuve est la même à condition de remplacer les équivalences

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \iff n \geq \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rfloor + 1$$

par

$$\frac{1}{n^k} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}} \iff n \geq \left\lfloor \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}} \right\rfloor + 1.$$

L'entier $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}} \right\rfloor + 1$ convient alors.

- Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Soit un réel $\varepsilon > 0$ donné. Pour tout entier naturel n non nul,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon^2} \iff n \geq \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1.$$

L'entier $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$ convient.

En effet, pour tout entier naturel n non nul,

$$n \geq n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2} \implies \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon,$$

ce qui justifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

8.1.3 Unicité – Opérations sur les limites

Proposition 8.2 – Unicité de la limite

Soit (u_n) une suite définie sur \mathbb{N} .

Si cette suite converge vers un réel ℓ , alors cette limite est unique.

Démonstration

Supposons que la suite (u_n) converge vers deux réels distincts ℓ et ℓ' . Nous pouvons supposer par exemple que $\ell > \ell'$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons :

$$\begin{cases} \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon. \\ \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, |u_n - \ell'| < \varepsilon. \end{cases}$$

Nous observons, en appliquant l'inégalité triangulaire, que :

$$\ell - \ell' = |\ell - \ell'| = |(\ell - u_n) + (u_n - \ell')| \leq |u_n - \ell| + |u_n - \ell'|.$$

Nous en déduisons

$$n \geq \max\{n_0, n_1\} \implies \ell - \ell' < 2\varepsilon.$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est quelconque, choisissons par exemple :

$$\varepsilon = \frac{\ell - \ell'}{4} > 0.$$

Dans ce cas, nous avons

$$\ell - \ell' < \frac{\ell - \ell'}{2},$$

ce qui est absurde.

Par conséquent, si la suite (u_n) converge vers un réel, ce réel est unique.

Proposition 8.3 – Opérations sur les limites

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies sur \mathbb{N} qui convergent respectivement vers les réels ℓ et ℓ' . Nous avons

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'.$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha u_n = \alpha \ell$, où $\alpha \in \mathbb{R}.$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n = \ell \ell'.$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\ell}{\ell'}$, à condition que $\ell' \neq 0.$

Démonstration

- Pour tout réel $\varepsilon > 0$, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$, nous savons que :

$$\begin{cases} \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, pour tout entier n , nous obtenons :

$$|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| = |(u_n - \ell) + (v_n - \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'|.$$

Posons $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$.

Pour tout entier naturel $n \geq n_2$, nous avons

$$|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Nous en déduisons que, pour tout entier naturel $n \geq n_2$,

$$|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| < \varepsilon,$$

ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$.

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, nous savons que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}.$$

Or

$$|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|} \iff |\alpha||u_n - \ell| = |\alpha u_n - \alpha \ell| < \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout entier naturel $n \geq n_0$,

$$|\alpha u_n - \alpha \ell| < \varepsilon,$$

ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha u_n = \alpha \ell$.

- Pour tout réel $\varepsilon > 0$, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$, nous savons que :

$$\begin{cases} \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \\ \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, |v_n - \ell'| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \end{cases}$$

Par ailleurs, comme on a (d'après les points précédents) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ell' u_n + \ell v_n) = 2\ell\ell'$, on sait aussi que :

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2, |\ell' u_n + \ell v_n - 2\ell\ell'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, pour tout entier naturel n , nous avons

$$\begin{aligned} |u_n v_n - \ell \ell'| &= |(u_n - \ell)(v_n - \ell') + (\ell' u_n + \ell v_n - 2\ell \ell')| \\ &\leq |u_n - \ell| |v_n - \ell'| + |\ell' u_n + \ell v_n - 2\ell \ell'|. \end{aligned}$$

Posons $n_3 = \max\{n_0, n_1, n_2\}$.

Pour tout entier naturel $n \geq n_3$, nous avons

$$|u_n - \ell| |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |\ell' u_n + \ell v_n - 2\ell \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Nous en déduisons que, pour tout entier naturel $n \geq n_2$,

$$|u_n v_n - \ell \ell'| < \varepsilon,$$

ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = \ell \ell'$.

- Pour tout réel $\varepsilon > 0$, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell' \neq 0$, si $\ell \neq 0$ également, nous savons que :

$$\begin{cases} \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon |\ell'|}{4} \\ \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon \ell'^2}{4|\ell|} \end{cases}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell' \neq 0$, il existe un entier n_2 tel que pour tout $n \geq n_2$,

$$|v_n| \geq \frac{|\ell'|}{2} > 0,$$

ce qui justifie que v_n ne s'annule pas au-delà du rang n_2 .

Pour tout entier naturel n , nous avons :

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - \frac{\ell}{\ell'} \right| = \left| \frac{u_n \ell' - v_n \ell}{v_n \ell'} \right| = \frac{|u_n \ell' - v_n \ell|}{|v_n \ell'|}$$

Développons le numérateur :

$$u_n \ell' - v_n \ell = (u_n - \ell) \ell' + \ell (\ell' - v_n).$$

Donc, par inégalité triangulaire :

$$|u_n \ell' - v_n \ell| \leq |u_n - \ell| |\ell'| + |\ell| |v_n - \ell'|$$

Ainsi, nous avons :

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - \frac{\ell}{\ell'} \right| \leq \frac{|u_n - \ell| |\ell'| + |\ell| |v_n - \ell'|}{|v_n| |\ell'|}$$

Posons $n_3 = \max\{n_0, n_1, n_2\}$.

Pour tout entier naturel $n \geq n_2$, nous avons :

$$|v_n| \geq \frac{|\ell'|}{2} \iff \frac{1}{|v_n|} \leq \frac{2}{|\ell'|}$$

Nous déduisons que, pour tout entier naturel $n \geq n_2$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_n}{v_n} - \frac{\ell}{\ell'} \right| &\leq \frac{2}{\ell'^2} (|u_n - \ell||\ell'| + |\ell||v_n - \ell'|) \\ &< \frac{2}{\ell'^2} \left(\frac{\varepsilon \ell'^2}{4} + \frac{\varepsilon \ell'^2 |\ell|}{4|\ell|} \right) = \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\ell}{\ell'}$.

Jusqu'ici, on a supposé $\ell \neq 0$. Si $\ell = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, ce qui peut s'écrire, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| < \frac{\varepsilon |\ell'|}{2}.$$

Par ailleurs, on a :

$$\frac{|u_n - \ell||\ell'| + |\ell||v_n - \ell'|}{|v_n||\ell'|} = \left| \frac{u_n}{v_n} \right|.$$

Or, pour tout $n \geq n_2$, on a :

$$\frac{1}{|v_n|} \leq \frac{2}{|\ell'|}$$

Cela nous permet de conclure que, pour tout entier naturel $n \geq \max\{n_0, n_2\}$, nous avons :

$$\left| \frac{u_n}{v_n} \right| \leq \left| \frac{u_n}{v_n} \right| \leq \frac{2|u_n|}{|\ell'|} < \frac{2\varepsilon|\ell'|}{2|\ell'|} = \varepsilon,$$

ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0 = \frac{\ell}{\ell'}$.

Remarque

En utilisant les opérations sur les limites et les limites nulles des suites de référence en $+\infty$, nous pouvons déterminer la limite en $+\infty$ (si elle existe) de nombreuses suites définies explicitement, sans avoir à utiliser les définitions formelles (ε, n_0) . Les exemples qui suivent illustrent cette remarque.

Exemple 8.2 – Forme indéterminée 1

Nous considérons la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par

$$u_n = \frac{2n-1}{n+1}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, nous observons une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Pour lever cette indétermination, nous mettons en facteur n , au numérateur et au dénominateur de l'expression de u_n .

Pour $n \geq 1$, il vient

$$u_n = \frac{n\left(2 - \frac{1}{n}\right)}{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{2 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}}.$$

Puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{n} = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1 \neq 0,$$

par quotient de ces deux limites, nous en déduisons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2.$$

Exemple 8.3

Soit la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geq 2$ par

$$v_n = \frac{2n-1}{n^2-1}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, nous observons une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Pour lever cette indétermination, nous mettons en facteur n au numérateur et n^2 au dénominateur de l'expression de v_n .

Pour $n \geq 2$, il vient

$$v_n = \frac{n\left(2 - \frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{2 - \frac{1}{n}}{n\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{n} \frac{2 - \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n^2}}.$$

Puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{n} = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n^2} = 1,$$

par quotient et produit de ces limites, nous en déduisons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.$$

8.1.4 Suites convergentes et inégalités

Théorème 8.4 – Théorème d'encadrement (ou des gendarmes)

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites définies sur \mathbb{N} et ℓ un réel.

Si

- les suites (v_n) et (w_n) convergent vers ℓ ,
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \leq u_n \leq w_n$,

alors la suite (u_n) converge vers ℓ .

En d'autres termes,

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell \right) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \leq u_n \leq w_n) \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

Démonstration

Puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell,$$

nous pouvons affirmer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad v_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[,$$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, \quad w_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[.$$

Il en résulte que pour $n \geq \max(n_0, n_1)$, nous obtenons

$$\ell - \varepsilon < v_n \leq u_n \leq w_n < \ell + \varepsilon.$$

Par conséquent, pour tout entier naturel $n \geq \max(n_0, n_1)$:

$$\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon \iff |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Nous en concluons que la suite (u_n) converge vers le réel ℓ .

Remarque

Le théorème demeure vrai en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

Exemple 8.4

Nous considérons la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

Nous ne pouvons pas utiliser les opérations sur les limites car la suite $((-1)^n)$ ne converge pas.

D'où l'efficacité dans ce cas du théorème d'encadrement.

Pour tout entier $n \geq 1$, nous avons

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1.$$

Comme $n > 0$, nous en déduisons :

$$-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, nous en concluons, par encadrement, que la suite (u_n) converge vers 0.

Corollaire 8.5

Soient (u_n) , (v_n) deux suites définies sur \mathbb{N} et ℓ un réel.

Si

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0,$$

alors la suite (u_n) converge vers ℓ .

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous avons

$$|u_n - \ell| \leq v_n \iff -v_n \leq u_n - \ell \leq v_n \iff \ell - v_n \leq u_n \leq \ell + v_n.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, nous en déduisons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell - v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell + v_n = \ell,$$

ce qui prouve, en appliquant le théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

Théorème 8.6 – Passage à la limite sur une inégalité

Soient (u_n) une suite définie sur \mathbb{N} , et ℓ un réel.

Si

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$,
- (u_n) converge vers ℓ ,

alors $\ell \geq 0$.

Démonstration

Nous supposons par l'absurde que $\ell < 0$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[.$$

En choisissant $\varepsilon = -\ell > 0$, nous obtenons, pour tout entier naturel $n \geq n_0$:

$$u_n \in]2\ell, 0[.$$

ce qui contredit la condition

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0.$$

Nous en concluons que $\ell \geq 0$.

Remarque

Nous retiendrons que le passage à la limite sur une inégalité stricte restitue une inégalité large.

Corollaire 8.7

Soient (u_n) , (v_n) deux suites définies sur \mathbb{N} , ℓ et ℓ' deux réels.

Si

- les suites (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers ℓ et ℓ' ,
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > v_n$,

alors $\ell \geq \ell'$.

Démonstration

Nous appliquons la proposition précédente à la suite (w_n) définie sur \mathbb{N} par $w_n = u_n - v_n$.

Théorème 8.8

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration

Soit (u_n) une suite définie sur \mathbb{N} .

- Nous supposons dans un premier temps que la suite (u_n) converge vers 0. En choisissant, en particulier $\varepsilon = 1$ dans la définition de la convergence vers 0, nous obtenons

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad |u_n| < 1.$$

Soit M le réel défini par $M = \max\{|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{n_0}|, 1\}$.

Nous en déduisons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M,$$

ce qui justifie qu'une suite qui converge vers 0 est bornée.

- Nous considérons à présent une suite (u_n) qui converge vers un réel ℓ . Puisque la suite $(u_n - \ell)$ converge vers 0, cette dernière est bornée. Par conséquent, nous avons

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leq M.$$

En appliquant l'inégalité triangulaire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il vient

$$|u_n| = |(u_n - \ell) + \ell| \leq |u_n - \ell| + |\ell| \leq M + |\ell|$$

ce qui prouve qu'une suite qui converge vers un réel ℓ est bornée.

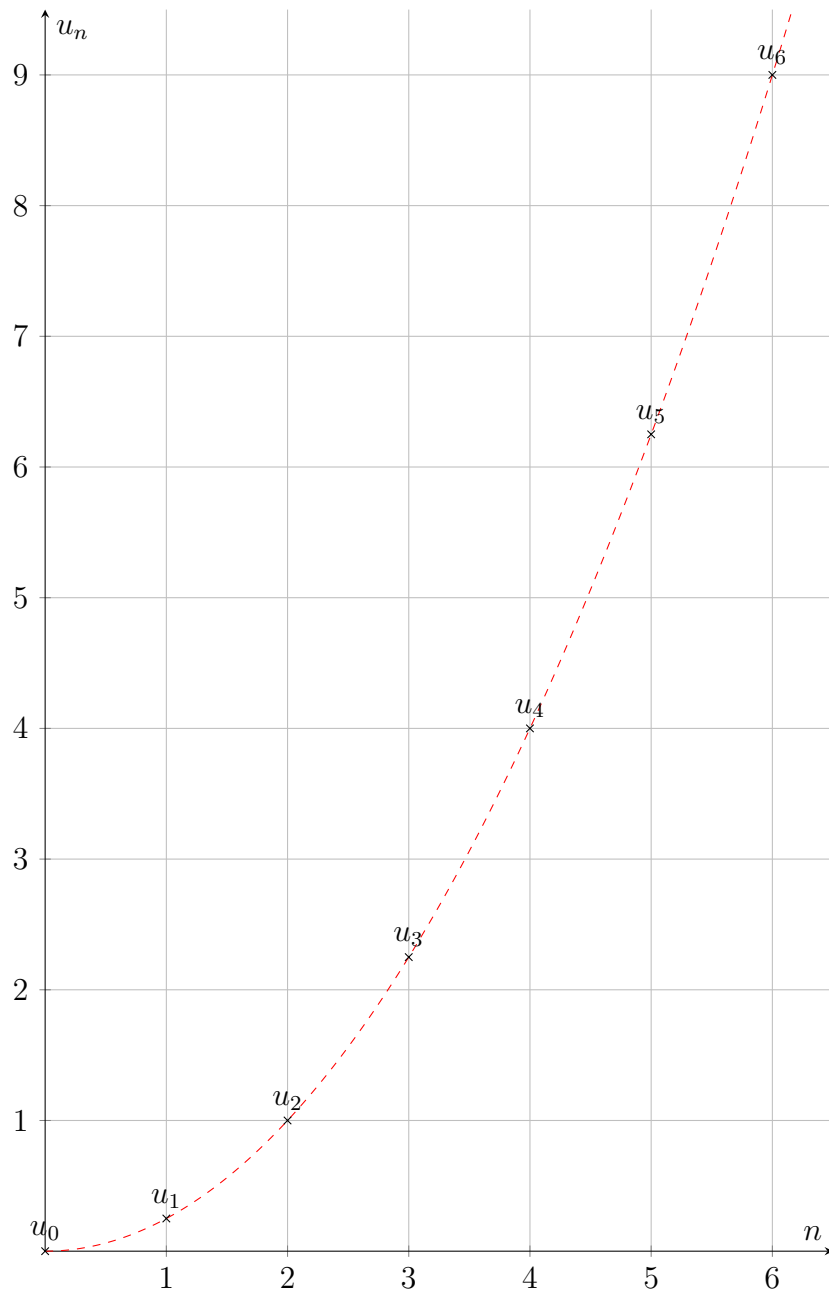
Remarque

La réciproque est fausse. Contre exemple : la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = (-1)^n$, est bornée par -1 et 1 mais elle diverge puisque cette suite n'a pas de limite en $+\infty$.

8.2 Suites divergentes vers l'infini

8.2.1 Exemple introductif

Nous considérons la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = \frac{1}{4}n^2$. Graphiquement, nous obtenons :



Nous observons sur cette figure que lorsque n devient grand, le réel u_n est également grand.

Dans le langage des limites, on dit que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui se note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Pour préciser cette notion de limite infinie, nous allons prouver que, un réel $a > 0$ étant donné, tous les termes de la suite, à partir d'un certain rang, appartiennent à l'intervalle $]a, +\infty[$.

En effet, $a > 0$ étant donné, pour que $u_n \in]a, +\infty[$, il suffit que

$$\frac{1}{4}n^2 > a \iff n > 2\sqrt{a}.$$

En posant $n_0 = \lfloor 2\sqrt{a} \rfloor + 1$, nous en déduisons, pour tout entier naturel $n \geq n_0 > 2\sqrt{a}$:

$$u_n \in]a, +\infty[.$$

8.2.2 Définitions d'une suite divergente

Définition 8.3 – Divergence vers $+\infty$

Soit (u_n) une suite définie sur \mathbb{N} .

On dit que cette suite admet pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, ou *diverge* vers $+\infty$, si et seulement si, quel que soit le réel $a > 0$, tous les termes de la suite, à partir d'un certain rang, appartiennent à l'intervalle $]a, +\infty[$.

Dans ce cas, on note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

En d'autres termes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ équivaut à

$$\forall a > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad u_n \in]a, +\infty[.$$

Définition 8.4 – Divergence vers $-\infty$

Soit (u_n) une suite définie sur \mathbb{N} .

On dit que cette suite admet pour limite $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$, ou *diverge* vers $-\infty$, si et seulement si, quel que soit le réel $a > 0$, tous les termes de la suite, à partir d'un certain rang, appartiennent à l'intervalle $] -\infty, -a[$.

Dans ce cas, on note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty.$$

En d'autres termes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ équivaut à

$$\forall a > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad u_n \in] -\infty, -a[.$$

Remarque

Nous disposons de l'équivalence suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = -\infty.$$

Proposition 8.9 – Suites de référence de limite infinie en $+\infty$

Nous disposons des résultats suivants :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$, avec $k \in \mathbb{N}^*$,
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Démonstration

- Preuve de $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$, avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Soit un réel $a > 0$.

Pour que $n^k > a$, il suffit que $n > \sqrt[k]{a}$.

En posant $n_0 = \lfloor \sqrt[k]{a} \rfloor + 1$, nous en déduisons, pour tout $n \geq n_0 > \sqrt[k]{a}$:

$$n^k \in]a, +\infty[,$$

ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$, avec $k \in \mathbb{N}^*$.

- Preuve de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Soit un réel $a > 0$.

Pour que $\sqrt{n} > a$, il suffit que $n > a^2$. En posant $n_0 = \lfloor a^2 \rfloor + 1$, nous en déduisons, pour tout $n \geq n_0 > a^2$:

$$\sqrt{n} \in]a, +\infty[,$$

ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

8.2.3 Opérations sur les suites de limite finie ou infinie

Pour déterminer la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de deux suites, nous disposons des tableaux ci-après.

Attention, dans les trois tableaux qui suivent, les « ? » signifient la présence d'une forme indéterminée.

- Limite d'une somme

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$?

- Limite d'un produit

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n)$
ℓ	ℓ'	$\ell \ell'$
$\ell > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$\ell < 0$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	0	?
$-\infty$	0	?

- Limite d'un quotient

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
ℓ	∞	0
$+\infty$	$\ell' > 0$	$+\infty$
$+\infty$	$\ell' < 0$	$-\infty$
$-\infty$	$\ell' > 0$	$-\infty$
$-\infty$	$\ell' < 0$	$+\infty$
∞	∞	?
$\ell > 0$ ou $+\infty$	0^+	$+\infty$
$\ell > 0$ ou $+\infty$	0^-	$-\infty$
$\ell < 0$ ou $-\infty$	0^+	$-\infty$
$\ell < 0$ ou $-\infty$	0^-	$+\infty$
0	0	?

Exemple 8.5 – Cas d'indétermination 1

Nous considérons la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par

$$u_n = 2n^2 - 3n + 1.$$

Il s'agit ici d'un trinôme du second degré défini sur \mathbb{N} .

Lorsque n tend vers $+\infty$, nous observons une forme indéterminée du type « $+\infty - \infty$ ».

Pour lever cette indétermination, nous mettons en facteur n^2 dans l'expression de u_n .

Pour $n \geq 1$, il vient

$$u_n = n^2 \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right).$$

Puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty,$$

par produit de ces deux limites, nous en déduisons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Exemple 8.6 – Cas d'indétermination 2

Nous considérons la suite (v_n) définie à partir du rang 3 par

$$v_n = \frac{2n^3 - 1}{n - 2}.$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, nous observons une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$.

Pour lever cette indétermination, nous mettons en facteur n^3 au numérateur et n au dénominateur, dans l'expression de v_n .

Pour $n \geq 3$, il vient

$$v_n = \frac{n^3 \left(2 - \frac{1}{n^3}\right)}{n \left(1 - \frac{2}{n}\right)} = n^2 \frac{2 - \frac{1}{n^3}}{1 - \frac{2}{n}}.$$

Puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{n^3} = 2, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{2}{n} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty.$$

par quotient et produit de ces limites, nous en déduisons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

Exemple 8.7 – Cas d'indétermination 3

Nous considérons la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par

$$u_n = n - \sqrt{n}.$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, nous observons une forme indéterminée du type « $+\infty - \infty$ ».

Pour lever cette indétermination, nous mettons en facteur n , dans l'expression de u_n .

Pour $n \geq 1$, il vient

$$u_n = n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty.$$

par produit de ces limites, nous en déduisons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

8.2.4 Limites infinies et inégalités

Théorème 8.10 – Théorème de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies sur \mathbb{N} telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n.$$

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration

- Nous supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, donc

$$\forall a > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad u_n \in]a, +\infty[.$$

Le réel $a > 0$ étant donné et puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n \leq v_n$, nous en déduisons, pour tout $n \geq n_0$:

$$a < u_n \leq v_n,$$

ce qui implique, pour tout $n \geq n_0$:

$$v_n \in]a, +\infty[,$$

ce qui justifie que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

- Nous supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, ce qui donne

$$\forall a > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad v_n \in]-\infty, -a[.$$

Le réel $a > 0$ étant donné et puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n \leq v_n$, nous en déduisons, pour tout $n \geq n_0$:

$$u_n \leq v_n < -a.$$

Par suite, nous obtenons

$$u_n \in]-\infty, -a[,$$

ce qui justifie que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

Exemple 8.8

Nous considérons la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = n^2 + (-1)^n$.

Nous ne pouvons pas utiliser les opérations sur les limites car la suite $((-1)^n)$ n'admet pas de limite.

Ainsi, nous procédons par encadrement et éventuellement par comparaison.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1,$$

ce qui donne

$$n^2 - 1 \leq u_n \leq n^2 + 1.$$

Nous n'employons pas ici le théorème d'encadrement car ce dernier ne concerne que des limites finies.

De la double inégalité ci-dessus, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, nous en déduisons

$$u_n \geq n^2 - 1.$$

Puisque de plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 1 = +\infty$ (par somme), nous appliquons le théorème de comparaison.

Nous en concluons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

8.3 Limite d'une suite géométrique

8.3.1 Limite de q^n

Théorème 8.11 – Limite de q^n

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Nous disposons de la disjonction suivante :

- si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- si $|q| < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- si $q < -1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite en $+\infty$.

Démonstration

Nous distinguons les trois cas par disjonction.

1^{er} cas. $q > 1$.

Nous posons $a = q - 1$. Ainsi nous avons

$$a > 0 \quad \text{et} \quad q = a + 1.$$

Nous en déduisons, en appliquant l'inégalité de Bernoulli (proposition 7.17)

$$q^n = (1 + a)^n \geq 1 + na \iff q^n \geq 1 + n(q - 1).$$

Puisque $q > 1$, nous avons $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + n(q - 1) = +\infty$, ce qui par comparaison donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty.$$

2^e cas. $|q| < 1$.

Si $q = 0$, alors $0^n = 0$, ce qui donne dans ce cas $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

Si $q \neq 0$, comme $|q| < 1$, nous avons

$$\frac{1}{|q|} > 1.$$

Du premier cas, il résulte

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{|q|} \right)^n = +\infty.$$

Nous en déduisons, en prenant la limite de l'inverse, que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |q|^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} |q^n| = 0.$$

Pour tout entier naturel n , nous disposons de l'encadrement :

$$-|q^n| \leq q^n \leq |q^n|,$$

ce qui, par le théorème d'encadrement, permet de conclure que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0.$$

3^e cas. $q < -1$.

Pour tout entier naturel n , posons $u_n = q^n$ et $q' = -q$.

Dans ce cas, nous avons $q' > 1$ et nous obtenons

$$q^n = (-q')^n = (-1)^n q'^n.$$

Nous considérons les deux suites (v_n) et (w_n) définie par

$$v_n = u_{2n} \quad \text{et} \quad w_n = u_{2n+1}.$$

Pour tout entier naturel n , nous en déduisons que

$$\begin{cases} v_n = (-1)^{2n} q'^{2n} = (q'^2)^n \\ w_n = (-1)^{2n+1} q'^{2n+1} = -q'^{2n+1} = -q' v_n \end{cases}$$

Puisque $q' > 1$ implique $q'^2 > 1$, nous obtenons (d'après le premier point, puis par produit et opposé) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$$

Nous en concluons que selon la parité de l'entier n , la suite (q^n) diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Nous admettons que dans cette configuration, la suite (q^n) diverge et n'a pas de limite.

Remarque

- Si $q = 1$, alors $q^n = 1^n = 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$.
- Si $q = -1$, alors $q^n = (-1)^n$. Nous savons que cette suite n'a pas de limite.
- Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ nous savons que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = u_0 q^n.$$

Nous en déduisons le tableau suivant :

$q < -1$	$ q < 1$	$q > 1$
(u_n) n'a pas de limite	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } u_0 > 0 \\ -\infty & \text{si } u_0 < 0 \end{cases}$

Exemple 8.9

Nous étudions, lorsque n tend vers $+\infty$, le comportement de la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par

$$u_n = \frac{3^n - 5^n}{3^n + 5^n}$$

Nous observons une forme indéterminée du type « $+\infty - \infty$ », au numérateur de l'expression de u_n .

Pour lever cette indétermination, nous mettons en facteur 5^n dans le numérateur et le dénominateur de l'expression de u_n .

Pour $n \in \mathbb{N}$, il vient :

$$u_n = \frac{5^n \left(\frac{3^n}{5^n} - 1 \right)}{5^n \left(\frac{3^n}{5^n} + 1 \right)} = \frac{\left(\frac{3}{5} \right)^n - 1}{\left(\frac{3}{5} \right)^n + 1}$$

Puisque $-1 < \frac{3}{5} < 1$, nous en déduisons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5} \right)^n = 0.$$

Par quotient de deux limites finies, nous en concluons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1.$$

8.3.2 Limite de la somme des termes d'une suite géométrique**Proposition 8.12**

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$. Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Démonstration

Pour tout entier naturel n et tout réel $x \neq 1$, nous avons

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Puisque $|x| < 1$, en appliquant le théorème 8.11, nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{n+1} = 0,$$

ce qui donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n x^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}.$$

Exemple 8.10

Nous avons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Exemple 8.11

Nous cherchons le nombre rationnel r dont le développement décimal illimité, de période 2, est $0,\underline{63} = 0,6363636363\dots$.

Pour tout entier $n \geq 1$, nous posons

$$r_n = 0, \underbrace{6363\dots 63}_{2n \text{ termes}}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} r_n &= 0,63 + 0,0063 + \dots + 0,00\dots 0063 \\ &= \frac{63}{100} + \frac{63}{100^2} + \dots + \frac{63}{100^n} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{63}{100^{k+1}} \\ &= \frac{63}{100} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{100}\right)^k \end{aligned}$$

Puisque $\left|\frac{1}{100}\right| < 1$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{63}{100} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{100}\right)^k = \frac{63}{100} \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}.$$

Or $r = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n$, donc

$$r = \frac{7}{11}.$$

8.4 Limite et monotonie

8.4.1 Compléments sur l'ordre dans \mathbb{R}

Les notions concernant l'ordre sur \mathbb{R} sont essentielles dans la suite de ce chapitre. Elles ont été étudiées au chapitre 4, dans la section « Relations d'ordre », et il sera utile de les revoir avant de poursuivre ce chapitre.

Il sera notamment important de maîtriser les notions de majorant, minorant, extrema (minimum ou maximum) et leur unicité, bornes supérieure et inférieure, axiome de la borne supérieure.

8.4.2 Suite croissante majorée – décroissante minorée

Théorème 8.13 – Théorème de la convergence monotone

Soit (u_n) une suite définie sur \mathbb{N} .

- Si (u_n) est croissante et majorée, alors (u_n) est convergente.
- Si (u_n) est décroissante et minorée, alors (u_n) est convergente.

Démonstration

- Soit (u_n) une suite croissante majorée.

Considérons le sous-ensemble A de \mathbb{R} tel que $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Puisque $u_0 \in A$, nous avons $A \neq \emptyset$.

Puisque (u_n) est une suite majorée, il en est de même de A .

Par conséquent, A est une partie non vide et majorée de \mathbb{R} . En vertu de l'axiome de la borne supérieure sur \mathbb{R} (propriété 4.4), nous pouvons affirmer que A admet une borne supérieure λ .

Ceci signifie que λ est le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A .

Il en résulte que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \lambda \quad (*)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad u_{n_0} > \lambda - \varepsilon \quad (**)$$

La suite (u_n) est croissante donc, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, nous avons $u_n \geq u_{n_0}$.

En utilisant l'assertion (**), $\varepsilon > 0$ étant donné, nous en déduisons que, pour tout entier naturel $n \geq n_0$:

$$u_n \geq u_{n_0} > \lambda - \varepsilon.$$

En utilisant cette fois la proposition (*), pour tout entier naturel $n \geq n_0$, il vient :

$$\lambda - \varepsilon < u_n \leq \lambda.$$

Puisque $\varepsilon > 0$, nous avons $\lambda < \lambda + \varepsilon$, nous en concluons

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad |u_n - \lambda| < \varepsilon,$$

ce qui prouve que la suite (u_n) converge et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lambda$.

- Soit (u_n) une suite décroissante et minorée. La suite $(-u_n)$ est croissante et majorée donc cette suite est convergente.

Il en est de même de la suite (u_n) .

Remarque

- Ce résultat est important car il permet de prouver l'existence implicite d'une limite ℓ , sans expliciter le réel ℓ .

C'est d'ailleurs souvent impossible d'exhiber une valeur exacte de ℓ .

- Les réciproques sont fausses comme le justifie le contre-exemple suivant :

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

La suite (u_n) n'est pas monotone. Mais :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n| \leq \frac{1}{n},$$

donc par encadrement, nous avons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

- Par contre, une suite convergente est bornée comme le prouve le théorème 8.8.

Exemple 8.12

Considérons la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

Nous admettons que cette suite est majorée par 3.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0,$$

ce qui justifie que cette suite est croissante.

En appliquant le théorème de convergence monotone, nous en concluons que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in [1, 3]$.

8.4.3 Limite infinie et monotonie**Théorème 8.14**

Soit (u_n) une suite définie sur \mathbb{N} .

- Si (u_n) est croissante et non majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.
- Si (u_n) est décroissante et non minorée, alors (u_n) diverge vers $-\infty$.

Démonstration

- Soient (u_n) une suite non majorée et croissante et un réel $A > 0$.
Puisque la suite (u_n) est non majorée, nous avons

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad u_{n_0} > A.$$

Puisque la suite (u_n) est croissante, pour tout entier $n \geq n_0$, nous avons

$$u_n \geq u_{n_0}.$$

Nous en déduisons

$$\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad u_n > A,$$

ce qui prouve que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

- Soit (u_n) une suite non minorée et décroissante. Dans ce cas, la suite $(-u_n)$ est majorée et croissante. Il en résulte

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = +\infty.$$

ce qui implique

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

Exemple 8.13

Avec ce théorème, nous prouverons dans l'exercice 6 du TD8, la divergence de la suite harmonique (h_n) définie sur \mathbb{N}^* par

$$h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

8.5 Suites adjacentes

Définition 8.5

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies sur \mathbb{N} .

On dit que ces deux suites sont *adjacentes* si et seulement si

$$\begin{cases} (u_n) \text{ est croissante et } (v_n) \text{ est décroissante.} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0. \end{cases}$$

Exemple 8.14

Nous considérons :

- la suite (d_n) des valeurs approchées par défaut de $\sqrt{2}$ à 10^{-n} près, avec $n \in \mathbb{N}^*$,
- la suite (e_n) des valeurs approchées par excès de $\sqrt{2}$ à 10^{-n} près, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Nous avons

$$d_1 = 1,4; d_2 = 1,41; d_3 = 1,414, \dots,$$

$$e_1 = 1,5; e_2 = 1,42; e_3 = 1,415, \dots$$

Clairement, la suite (d_n) est croissante et la suite (e_n) est décroissante.

De plus, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $e_n - d_n = 10^{-n}$, ce qui justifie que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n - d_n = 0.$$

Nous en concluons que ces deux suites sont adjacentes.

Proposition 8.15

Soient (u_n) croissante et (v_n) décroissante deux suites adjacentes définies sur \mathbb{N} . Nous disposons de l'inégalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n.$$

Démonstration

Nous supposons par l'absurde

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad u_{n_0} > v_{n_0}.$$

Posons $\varepsilon = u_{n_0} - v_{n_0}$. Ainsi, nous avons $\varepsilon > 0$.

Comme (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, pour tout entier $n \geq n_0$, il vient

$$\begin{aligned} u_n \geq u_{n_0} \text{ et } v_n \leq v_{n_0} &\implies u_n \geq u_{n_0} \text{ et } -v_n \geq -v_{n_0} \\ &\implies u_n - v_n \geq u_{n_0} - v_{n_0}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n - v_n \geq \varepsilon.$$

De plus, nous savons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$. Il en résulte que

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, \quad u_n - v_n < \varepsilon.$$

Par suite, pour $n \geq \max\{n_0, n_1\}$, nous obtenons simultanément

$$u_n - v_n \geq \varepsilon \quad \text{et} \quad u_n - v_n < \varepsilon,$$

ce qui est contradictoire.

Nous en concluons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n.$$

Théorème 8.16 – Propriétés des suites adjacentes

Soient (u_n) croissante et (v_n) décroissante, deux suites adjacentes définies sur \mathbb{N} . Nous disposons des propriétés suivantes :

- (u_n) et (v_n) convergent.
- Il existe un réel ℓ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \ell \leq v_n$.

Démonstration

- Nous savons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n.$$

De plus, puisque la suite (v_n) est décroissante, nous obtenons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \leq v_0$$

Par transitivité de la relation \leq , nous en déduisons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_0.$$

La suite (u_n) est croissante et majorée par v_0 . Nous en concluons, par application du théorème de convergence monotone, que cette suite est convergente.

De la même façon, nous avons, puisque (u_n) est croissante,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq u_0.$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \geq u_0.$$

La suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0 , il en résulte, par application du théorème de convergence monotone, que cette suite est convergente.

- Posons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$. D'une part, nous avons

$$\ell - \ell' = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n)$$

D'autre part, nous savons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Par unicité de la limite, nous obtenons $\ell - \ell' = 0$, donc $\ell = \ell'$, ce qui prouve que

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell.$$

- Soient n et p deux entiers naturels tels que $p \geq n$.

Puisque (u_n) est croissante, nous avons $u_p \geq u_n$.

Lorsque $p \rightarrow +\infty$, nous obtenons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ell \geq u_n.$$

De même, pour $p \geq n$ et puisque (v_n) est décroissante, nous avons $v_p \leq v_n$.

Lorsque $p \rightarrow +\infty$, nous obtenons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ell \leq v_n.$$

Les deux inégalités obtenues prouvent que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \ell \leq v_n.$$

Remarque

- Lorsque deux suites sont adjacentes, l'existence de leur limite commune est implicite.
- La double inégalité $u_n \leq \ell \leq v_n$ fournit une valeur approchée de ℓ .
- Lorsque les deux suites (u_n) et (v_n) adjacentes sont strictement monotones, nous disposons de la double inégalité stricte :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < \ell < v_n.$$

Exemple 8.15

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies sur \mathbb{N}^* par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

Nous souhaitons montrer que ces deux suites sont adjacentes.

La suite (u_n) est croissante. En effet, pour tout entier naturel n non nul, nous avons

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0,$$

ce qui justifie que la suite (u_n) est croissante.

De plus, pour tout entier naturel n non nul, nous avons

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n}{n(n+1)^2} + \frac{n(n+1)}{n(n+1)^2} - \frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que la suite (v_n) est décroissante.

Enfin, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Nous en concluons que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

En appliquant le théorème 8.16, nous pouvons affirmer que ces deux suites convergent vers un même réel L .

De plus, nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq L \leq v_n.$$

Nous en déduisons que

$$0 \leq L - u_n \leq v_n - u_n,$$

ce qui implique

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq L - u_n \leq \frac{1}{n},$$

ce qui permet de proposer un algorithme qui restitue un entier N et une valeur approchée de L à 10^{-p} près :

```
1  p=int(input("p="))
2  n = 1
3  u = 0
4  while 1/n > 10**(-p) :
5      u=u+1/(n**2)
6      n = n + 1
7  print ("n=",n)
8  print ("u=",u)
```


Chapitre 9

Limite d'une fonction

Sommaire

9.1	Limite finie en un point	125
9.1.1	Définitions	125
9.1.2	Opérations sur les limites	127
9.1.3	Limite à droite, limite à gauche	129
9.1.4	Limite finie et inégalités	130
9.2	Limite finie en $+\infty$ ou $-\infty$	132
9.2.1	Exemple introductif	132
9.2.2	Définitions	133
9.2.3	Asymptote horizontale	136
9.2.4	Limite finie en $-\infty$ ou $+\infty$ et inégalités	137
9.3	Limite infinie en $-\infty$ ou $+\infty$	141
9.3.1	Exemple introductif	141
9.3.2	Définitions	142
9.3.3	Limite infinie en $-\infty$ ou $+\infty$ et inégalités	144
9.3.4	Limite de la fonction exp en $+\infty$, en $-\infty$	146
9.3.5	Asymptote oblique	148
9.4	Limite infinie en un point	149
9.4.1	Exemple introductif	149
9.4.2	Définitions	151
9.4.3	Asymptote verticale	153
9.5	Opérations sur les limites	155
9.5.1	Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient	155
9.5.2	Limite de la composée de deux fonctions	159
9.6	Limite de la composée d'une suite par une fonction	161
9.7	Formes indéterminées exponentielles	163
9.7.1	Limite de $x \mapsto \frac{e^x}{x}$ en $+\infty$	163
9.7.2	Limite de $x \mapsto xe^x$ en $-\infty$	166
9.7.3	Limite de $x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$ en 0	168

La notion de limite d'une fonction généralise celle de limite d'une suite. En effet, il s'agit à présent d'étudier le comportement d'une fonction pour des valeurs de la variable

qui sont voisines des bornes de son ensemble de définition, mais aussi en un point où elle est définie, ce qui introduit le concept de continuité qui sera développé au chapitre suivant.

En ce qui concerne le cas d'une limite finie en un point, son étude a déjà été développée en Première, au chapitre sur les nombres dérivés.

Dans ce chapitre, nous présentons, en approfondissant, les points suivants :

- limite finie en l'infini,
- limite infinie en l'infini,
- limite infinie en un point.

Nous pouvons retenir que ce concept de limite est une première incursion dans ce qui est appelé une étude locale d'une fonction, par opposition à une propriété globale, comme par exemple le sens de variations d'une fonction sur un intervalle.

Nous insistons sur l'importance qu'il y a à dominer les connaissances sur la valeur absolue afin de bien assimiler les approfondissements qui suivent.

Aux XVII^e et XVIII^e siècles, la notion de limite est utilisée par les mathématiciens de façon intuitive. C'est au XIX^e siècle que le mathématicien français Louis-Augustin Cauchy (1789–1857) et le mathématicien Karl Weierstrass (1815–1897) en proposent une définition rigoureuse qui est celle que nous utilisons de nos jours.

9.1 Limite finie en un point

La notion de limite finie en un point a déjà été abordée en Première, en particulier dans le cadre du calcul du nombre dérivé. Nous avons principalement étudié la limite en 0 d'une fonction. Nous approfondissons ici cette étude en l'étendant à n'importe quel point.

9.1.1 Définitions

Définition 9.1 – Limite finie en un point

Soit f une fonction définie sur une partie D de \mathbb{R} et a un réel tel que $D \cup \{a\}$ contient un intervalle I tel que $a \in I$.

On dit que f admet pour limite ℓ en a si et seulement si

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - \ell) = 0.$$

Dans ce cas, nous notons

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell.$$

Remarque

La condition sur f dans la définition ci-dessus signifie que si f n'est pas définie en a , alors cette fonction est définie pour tout réel proche de a .

Définition 9.2 – Limite finie en un point (formelle)

Soient a et ℓ deux réels.

Une fonction f définie sur une partie D de \mathbb{R} a pour limite ℓ quand x tend vers a , ce que l'on note

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell,$$

si, et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall x \in D, |x - a| < r \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Proposition 9.1

Avec les données de la définition, si la fonction f admet une limite ℓ en a et si f est définie en a , alors $\ell = f(a)$.

Démonstration

Puisque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $r > 0$ tel que

$$\forall x \in D, |x - a| < r \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

En particulier pour $x = a \in D$, nous avons $a - a = 0 < r$, ce qui implique

$$\forall \varepsilon > 0, |f(a) - \ell| < \varepsilon.$$

Par l'absurde, supposons que $f(a) \neq \ell$.

En particulier, pour $\varepsilon = \frac{|f(a) - \ell|}{2} > 0$, nous obtenons

$$|f(a) - \ell| < \frac{|f(a) - \ell|}{2},$$

ce qui est impossible.

Nous en concluons que $\ell = f(a)$.

Remarque

- Lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, on dit que la fonction f est continue en a . La notion de continuité, fondamentale en Analyse, sera l'objet du chapitre 10 de ce cours.
- Une fonction définie en $a \in D$ peut ne pas admettre de limite en a . Nous en donnerons un contre-exemple après la mise en place de la notion de limite à droite ou à gauche en a .

Exemple 9.1

Nous considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Nous étudions la limite en 1 de cette fonction.

Pour $h \neq 0$, nous avons

$$f(1+h) = \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \frac{h(2+h)}{h} = 2+h.$$

Nous en déduisons que $f(1+h) - 2 = h$.

Par conséquent, $\varepsilon > 0$ étant donné, pour que $|f(1+h) - 2| < \varepsilon$, il suffit que $|h| < \varepsilon$.

Nous en concluons que $r = \varepsilon$ convient, et par suite :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2.$$

Remarque

En pratique, lorsque les résultats sur la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient seront acquis, la détermination de la limite de cette fonction sera plus immédiate, sans avoir à travailler avec « (ε, r) ».

Proposition 9.2 – Unicité de la limite

Avec les données de la définition, si la fonction f admet une limite ℓ en a , cette limite est unique.

Démonstration

Nous supposons par l'absurde que la fonction f admet en a deux limites ℓ et ℓ' telles que $\ell \neq \ell'$.

Le réel $\varepsilon > 0$ étant donné, nous en déduisons

$$\exists r > 0, \forall x \in D, |x - a| < r \implies |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\exists r' > 0, \forall x \in D, |x - a| < r' \implies |f(x) - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour tout réel $x \in D$, en appliquant l'inégalité triangulaire, il vient

$$|\ell - \ell'| = |(\ell - f(x)) + (f(x) - \ell')| \leq |f(x) - \ell| + |f(x) - \ell'|.$$

Pour $|x - a| < \min(r, r')$, nous obtenons simultanément

$$|f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |f(x) - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Il en résulte :

$$|x - a| < \min(r, r') \implies |\ell - \ell'| < \varepsilon$$

En particulier, pour $\varepsilon = \frac{|\ell - \ell'|}{2} > 0$, il vient

$$|\ell - \ell'| < \frac{|\ell - \ell'|}{2},$$

ce qui est contradictoire.

Par l'absurde, nous en concluons que $\ell = \ell'$.

9.1.2 Opérations sur les limites

Proposition 9.3

Soient a, ℓ et ℓ' trois réels. On considère deux fonctions f et g définies sur une partie D de \mathbb{R} tel que $D \cup \{a\}$ contient un intervalle I tel que $a \in I$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'$, alors :

- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \ell + \ell'.$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow a} \lambda f(x) = \lambda \ell.$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \ell \ell'.$
- Si $\ell' \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{\ell'}.$

Démonstration

Nous prouvons ici les deux premiers points. Les trois suivants sont laissés au lecteur motivé.

Soit un réel $\varepsilon > 0$ donné.

- Limite d'une somme de deux fonctions.

Puisque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, on a

$$\exists r > 0, \forall x \in D, |x - a| < r \implies |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De même, puisque $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'$, on a

$$\exists r' > 0, \forall x \in D, |x - a| < r' \implies |g(x) - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour tout réel $x \in D$, en appliquant l'inégalité triangulaire, il vient

$$|(f(x) + g(x)) - (\ell + \ell')| = |(f(x) - \ell) + (g(x) - \ell')| \leq |f(x) - \ell| + |g(x) - \ell'|.$$

En choisissant $\alpha = \min(r, r')$, nous obtenons simultanément

$$|x - a| < \alpha \implies |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |x - a| < \alpha \implies |g(x) - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nous en déduisons

$$\forall x \in D, |x - a| < \alpha \implies |(f(x) + g(x)) - (\ell + \ell')| < \varepsilon,$$

ce qui prouve que

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \ell + \ell'.$$

- Limite du produit d'un réel par une fonction.

1^{er} cas : $\lambda = 0$.

L'égalité attendue est immédiate dans ce cas car $\lim_{x \rightarrow a} 0 = 0$.

2^e cas : $\lambda \neq 0$. Puisque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, nous avons

$$\exists r > 0, \forall x \in D, |x - a| < r \implies |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}.$$

Pour tout réel $x \in D$, nous avons

$$|\lambda f(x) - \lambda \ell| = |\lambda(f(x) - \ell)| = |\lambda| |f(x) - \ell|.$$

Nous en déduisons que

$$|x - a| < r \implies |\lambda f(x) - \lambda \ell| < |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon,$$

ce qui prouve que

$$\lim_{x \rightarrow a} \lambda f(x) = \lambda \ell.$$

9.1.3 Limite à droite, limite à gauche

Définition 9.3

Soit f une fonction définie sur une partie D de \mathbb{R} et a un réel tel que $D \cup \{a\}$ contient un intervalle I tel que $a \in I$.

- Un réel ℓ est la *limite à droite* (ou *par valeurs supérieures*) de f en a si, et seulement si, la restriction de f à $D \cap]a, +\infty[$ admet ℓ pour limite en a .

Cette limite à droite est notée

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \ell.$$

En d'autres termes

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall x \in D, 0 < x - a < r \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

- Un réel ℓ est la *limite à gauche* (ou *par valeurs inférieures*) de f en a si, et seulement si, la restriction de f à $D \cap]-\infty, a[$ admet ℓ pour limite en a .

Cette limite à gauche est notée

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \ell.$$

En d'autres termes

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall x \in D, -r < x - a < 0 \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Proposition 9.4

Avec les données de la définition, les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$

Démonstration

Cette équivalence est immédiate en vertu des définitions précédentes.

Remarque

- Si f est définie en a , alors nous obtenons

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell = f(a).$$

- La négation de (ii) permet de justifier facilement qu'une fonction n'a pas de limite en a .

Exemple 9.2 – Échelon unité

Soit u la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Nous avons immédiatement

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t) = 1 = u(0) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} u(t) = 0.$$

Nous observons que $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t) \neq \lim_{t \rightarrow 0^-} u(t)$, ce qui justifie que la fonction $t \mapsto u(t)$ n'a pas de limite en 0.

De plus, cette fonction est définie en 0, nous pouvons préciser donc que l'échelon unité est discontinu en 0.

9.1.4 Limite finie et inégalités**Théorème 9.5 – Théorème d'encadrement (ou des gendarmes)**

Soient ℓ un réel, f, g, h trois fonctions définies sur une partie D de \mathbb{R} et a un réel tel que $D \cup \{a\}$ contient un intervalle I tel que $a \in I$.

Si

- $\forall x \in D, g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$

alors la fonction f admet une limite en a et

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell.$$

Démonstration

Soit un réel $\varepsilon > 0$ donné.

Puisque $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$, nous en déduisons

$$\exists r > 0, \forall x \in D, |x - a| < r \implies \ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon,$$

$$\exists r' > 0, \forall x \in D, |x - a| < r' \implies \ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon.$$

Par conséquent, pour tout réel $x \in D$ tel que $|x - a| < \min(r, r')$, nous obtenons

$$\ell - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < \ell + \varepsilon,$$

ce qui implique

$$\forall x \in D, |x - a| < \min(r, r') \implies \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon,$$

ce qui démontre que la fonction f admet une limite en a et

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell.$$

Corollaire 9.6

Soient ℓ un réel, f et u deux fonctions définies sur une partie D de \mathbb{R} et a un réel tel que $D \cup \{a\}$ contient un intervalle I tel que $a \in I$.

Si

- $\forall x \in D, |f(x) - \ell| \leq u(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$

alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell.$$

Démonstration

Pour tout réel $x \in D$, l'inégalité $|f(x) - \ell| \leq u(x)$ équivaut à

$$-u(x) \leq f(x) - \ell \leq u(x),$$

soit

$$\ell - u(x) \leq f(x) \leq \ell + u(x).$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$, nous obtenons

$$\lim_{x \rightarrow a} \ell - u(x) = \lim_{x \rightarrow a} \ell + u(x) = \ell.$$

Par le théorème d'encadrement, nous en concluons que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell.$$

Remarque

- Ce théorème et son corollaire sont utilisés lorsque les résultats par le calcul algébrique des limites est en échec.
- Le corollaire est très pratique car il évite souvent l'utilisation de « (ε, r) » dans la détermination d'une limite finie en un point.
- Si les inégalités sont strictes, le théorème d'encadrement et son corollaire restent vrais.

Proposition 9.7 – Passage à la limite sur une inégalité

Soient ℓ un réel, f une fonction définie sur une partie D de \mathbb{R} et a un réel tel que $D \cup \{a\}$ contient un intervalle I tel que $a \in I$.

Si

- $\forall x \in D, f(x) > 0$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$

alors $\ell \geq 0$.

Démonstration

Par l'absurde, nous supposons que $\ell < 0$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, en choisissant en particulier $\varepsilon = -\ell > 0$, nous obtenons

$$\exists r > 0, \forall x \in D, |x - a| < r \implies -\varepsilon = \ell < f(x) - \ell < \varepsilon = -\ell.$$

Ainsi, pour tout réel $x \in D$ tel que $|x - a| < r$, nous obtenons

$$2\ell < f(x) < 0,$$

ce qui est contradictoire.

Nous en concluons que $\ell \geq 0$.

Remarque

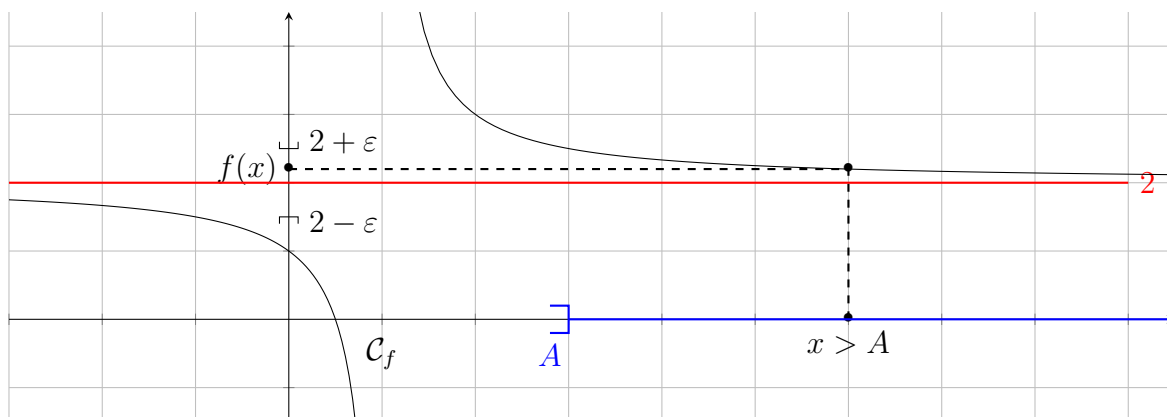
Nous retiendrons que le passage à la limite sur une inégalité stricte restitue une inégalité large.

9.2 Limite finie en $+\infty$ ou $-\infty$ **9.2.1 Exemple introductif**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f(x) = \frac{2x-1}{x-1}.$$

• Graphiquement, nous observons que le réel $f(x)$ est proche de 2, dès que x est suffisamment grand.



Plus précisément, pour tout réel $x \in]1, +\infty[$, nous évaluons la distance entre $f(x)$ et 2, c'est-à-dire, nous calculons

$$|f(x) - 2| = \left| \frac{2x-1}{x-1} - 2 \right| = \left| \frac{1}{x-1} \right| = \frac{1}{|x-1|},$$

ce qui donne, puisque $x > 1$,

$$|f(x) - 2| = \frac{1}{x-1}.$$

Ainsi, pour que $f(x)$ soit proche de 2, c'est-à-dire, le réel $\varepsilon > 0$ étant choisi « petit », pour que $|f(x) - 2| < \varepsilon$, il suffit que $\frac{1}{x-1} < \varepsilon$.

Or, pour $x > 1$, nous avons

$$\frac{1}{x-1} < \varepsilon \iff x-1 > \frac{1}{\varepsilon} \iff x > 1 + \frac{1}{\varepsilon}.$$

Par suite, en posant $A = 1 + \frac{1}{\varepsilon}$, la condition $x > A$ implique $|f(x) - 2| < \varepsilon$.

En d'autres termes, pour que $|f(x) - 2| < \varepsilon$, il suffit que $x > A$.

Dans ce cas, on dit que $f(x)$ tend vers 2 quand x tend vers $+\infty$, ce qui est noté, dans le langage des limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2$.

De manière équivalente, nous remarquons,

$$\begin{aligned} x > A &\implies -\varepsilon < f(x) - 2 < \varepsilon \\ &\implies 2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon \end{aligned}$$

C'est cette dernière implication qui est visualisée sur la figure précédente.

- De même, pour tout réel $x < 1$, nous avons

$$|f(x) - 2| = \frac{1}{1-x}.$$

Par conséquent, pour que $|f(x) - 2| < \varepsilon$, il suffit que

$$\frac{1}{1-x} < \varepsilon, \quad \text{soit } x < 1 - \frac{1}{\varepsilon}$$

Ainsi, en choisissant $0 < \varepsilon < 1$ et en posant $A = \frac{1}{\varepsilon} - 1 > 0$, il vient

$$x < -A \implies |f(x) - 2| < \varepsilon,$$

ce qui signifie, dans le langage des limites, que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 2$.

9.2.2 Définitions

Définition 9.4 – Limite finie en $+\infty$

Soient a et ℓ deux réels.

Une fonction f définie sur un intervalle I de la forme $[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$, a pour limite ℓ quand x tend vers $+\infty$, ce que l'on note

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell,$$

si, et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in I, \forall x \geq A, f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[,$$

ce qui équivaut à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in I, \forall x \geq A, |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Définition 9.5 – Limite finie en $-\infty$

Soient a et ℓ deux réels.

Une fonction f définie sur un intervalle I de la forme $] - \infty, a]$ ou $] - \infty, a[$, a pour limite ℓ quand x tend vers $-\infty$, ce que l'on note

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \ell,$$

si, et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in I, \forall x \leq A, f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[,$$

ce qui équivaut à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in I, \forall x \leq A, |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Proposition 9.8 – Unicité de la limite en $+\infty$ ou en $-\infty$

Si une fonction admet une limite finie en $+\infty$ (respectivement $-\infty$), alors cette limite est unique.

Démonstration

- Lorsque x tend vers $+\infty$, cette preuve est analogue à la démonstration de l'unicité de la limite d'une suite convergente (proposition 8.2).
- Nous en donnons une preuve lorsque x tend vers $-\infty$.

Étant donné un réel a , nous supposons par l'absurde que la fonction f définie sur un intervalle I de la forme $] - \infty, a[$ ou $] - \infty, a]$ admet en $-\infty$ deux limites ℓ et ℓ' telles que $\ell \neq \ell'$.

Le réel $\varepsilon > 0$ étant donné, nous en déduisons

$$\exists A \in I, \forall x \leq A, |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\exists A' \in I, \forall x \leq A', |f(x) - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour tout réel $x \in I$, en appliquant l'inégalité triangulaire, il vient

$$|\ell - \ell'| = |(\ell - f(x)) + (f(x) - \ell')| \leq |f(x) - \ell| + |f(x) - \ell'|.$$

Pour tout $x \leq \min(A, A')$, nous obtenons ainsi simultanément

$$|f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |f(x) - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il en résulte

$$|\ell - \ell'| < \varepsilon.$$

En particulier, pour $\varepsilon = \frac{|\ell - \ell'|}{2}$, il vient

$$|\ell - \ell'| < \frac{|\ell - \ell'|}{2}$$

ce qui est contradictoire.

Par l'absurde, nous en concluons que $\ell = \ell'$.

Proposition 9.9 – Limites nulles de référence en $-\infty$ ou $+\infty$

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Nous disposons des résultats suivants :

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x+a)^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(x+a)^n} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+a}} = 0.$$

- En particulier, pour $a = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

Démonstration

Montrons par exemple que :

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

Soient $x > 0$ et $\varepsilon > 0$. Pour que $\frac{1}{x^n} < \varepsilon$, il suffit que

$$x^n > \frac{1}{\varepsilon} \iff x > \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}},$$

ce qui justifie que $\frac{1}{x^n} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+a}} = 0.$$

Soient $x > -a$ et $\varepsilon > 0$.

Pour que $0 < \frac{1}{\sqrt{x+a}} < \varepsilon$, il suffit que

$$\sqrt{x+a} > \frac{1}{\varepsilon} \iff x > \frac{1}{\varepsilon^2} - a.$$

— **1^{er} cas** : $a < 0$.

Dans ce cas $A = -a > 0$ convient.

— **2^e cas** : $a > 0$.

En choisissant $\varepsilon \in \left] 0, \frac{1}{\sqrt{a}} \right[$, $A = \frac{1}{\varepsilon^2} - a > 0$ convient également.

Par conséquent, dans les deux cas, nous obtenons

$$x > A \implies \frac{1}{\sqrt{x+a}} < \varepsilon,$$

ce qui justifie que

$$\frac{1}{\sqrt{x+a}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

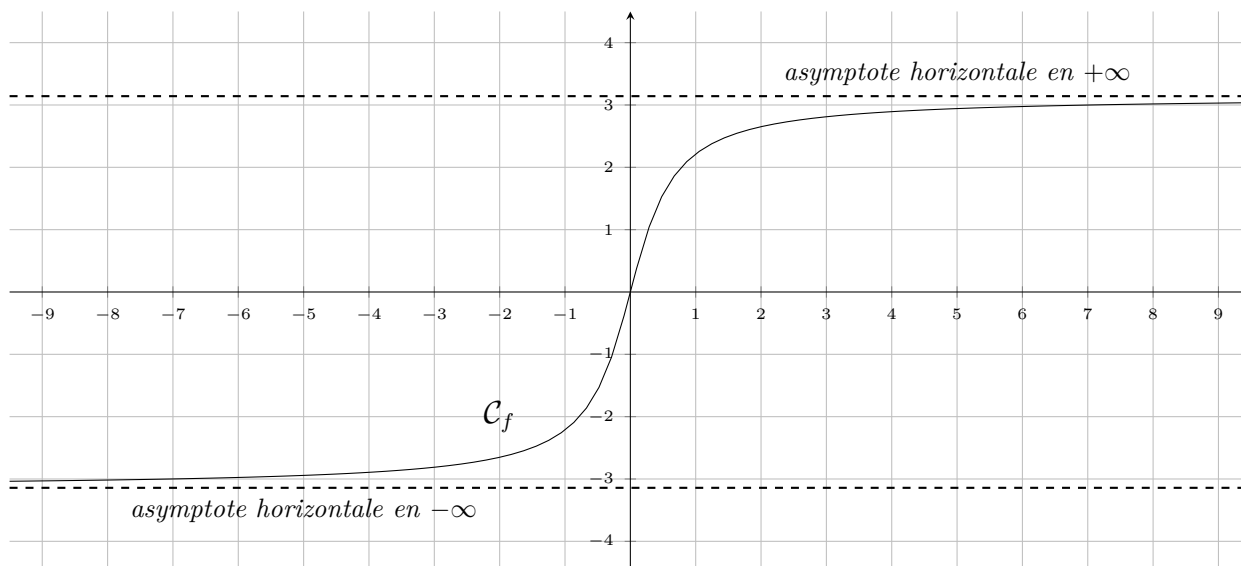
Remarque

En $-\infty$ ou en $+\infty$, les opérations sur les limites exposées dans le cas de limites finies en a restent vraies.

9.2.3 Asymptote horizontale**Définition 9.6 – Asymptote horizontale**

Soit \mathcal{C}_f la représentation graphique d'une fonction f relativement à un repère orthogonal.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$, alors la droite d'équation $y = \ell$ est une *asymptote horizontale* pour la courbe \mathcal{C}_f , en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).

**Remarque**

L'étude du signe de $f(x) - \ell$ détermine la position de \mathcal{C}_f par rapport à son asymptote horizontale.

Plus précisément :

- si $f(x) - \ell > 0$, alors \mathcal{C}_f est au-dessus de son asymptote horizontale,
- si $f(x) - \ell < 0$, alors \mathcal{C}_f est en-dessous de son asymptote horizontale.

Exemple 9.3

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + x + 1}.$$

En $+\infty$, nous observons une forme indéterminée du type « $\frac{+\infty}{+\infty}$ ».

Pour lever cette indétermination, pour tout réel $x > 0$, nous observons que :

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{2}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 1$, nous en déduisons, par quotient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2,$$

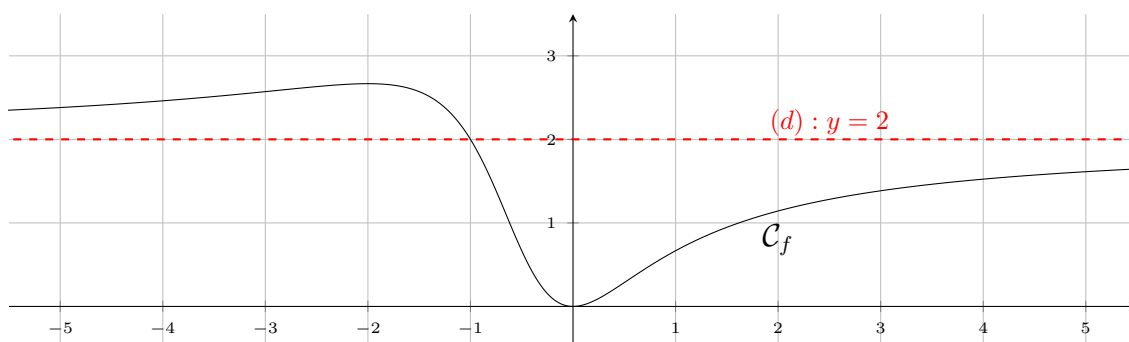
ce qui justifie que la droite (d) d'équation $y = 2$ est une asymptote pour la courbe \mathcal{C}_f , en $+\infty$.

De plus, pour tout réel $x > 0$, nous avons

$$f(x) - 2 = \frac{2x^2}{x^2 + x + 1} - 2 = \frac{-2(x+1)}{x^2 + x + 1} < 0,$$

ce qui prouve que \mathcal{C}_f est en-dessous de (d) , en $+\infty$.

De la même façon, nous justifions que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ et que la courbe (d) est située au-dessus de l'asymptote horizontale (d) , en $-\infty$.



9.2.4 Limite finie en $-\infty$ ou $+\infty$ et inégalités

Théorème 9.10 – Théorème d'encadrement (ou des gendarmes)

Soient ℓ et a deux réels, f , g et h trois fonctions définies sur un intervalle I de la forme $[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$.

Si

- $\forall x \in I, g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell$

alors la fonction f admet une limite en $+\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell.$$

Démonstration

Cette preuve est analogue à celle donnée dans le cas d'une limite finie en point. Nous la proposons cependant en raison de son exemplarité.

Soit un réel $\varepsilon > 0$ donné.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell$, nous en déduisons

$$\exists A \in I, \forall x > A, \ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon,$$

$$\exists A' \in I, \forall x > A', \ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon.$$

Par conséquent, pour tout réel $x \in I$ tel que $x > \max(A, A')$, nous obtenons

$$\ell - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < \ell + \varepsilon,$$

ce qui implique

$$\forall x > \max(A, A'), \quad \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon,$$

ce qui démontre que la fonction f admet une limite en $+\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell.$$

Remarque

Le théorème d'encadrement est également vrai quand x tend vers $-\infty$.

Dans la démonstration, la condition $x > \max(A, A')$ est remplacée par $x < \min(-A, -A')$.

Corollaire 9.11

Soient ℓ et a deux réels, f et u deux fonctions définies sur un intervalle I de la forme $[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$.

Si

- $\forall x \in I, |f(x) - \ell| \leq u(x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$

alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

Démonstration

Cette démonstration est analogue à celle donnée dans le cas d'une limite finie en a (corollaire 9.6).

Remarque

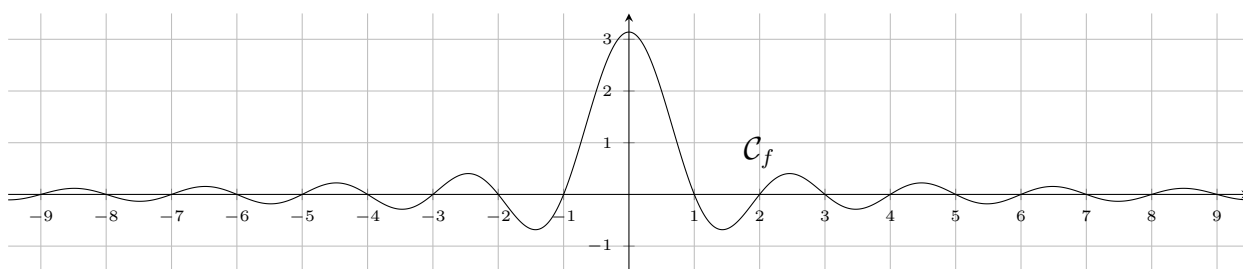
- Ce corollaire reste vrai en $-\infty$.
- Le théorème d'encadrement et son corollaire sont utilisés lorsque le calcul algébrique des limites est en échec.
- Ce corollaire est très pratique car il évite souvent l'utilisation de « (ε, A) » dans la détermination d'une limite finie en $+\infty$ ou $-\infty$.
- Si les inégalités sont strictes, le théorème d'encadrement et son corollaire restent vrais.

Exemple 9.4

Nous étudions la limite en $+\infty$, puis en $-\infty$ de la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x}.$$

Graphiquement, nous avons :



Pour tout réel x , $-1 \leq \sin(\pi x) \leq 1$, ce qui donne

- si $x > 0$, alors $-\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$.
- si $x < 0$, alors $\frac{1}{x} \leq f(x) \leq -\frac{1}{x}$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, en appliquant le théorème d'encadrement en $-\infty$ et en $+\infty$, nous en déduisons

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Il en résulte que la droite des abscisses est une asymptote horizontale pour la courbe \mathcal{C}_f , en $-\infty$ ou $+\infty$.

Nous remarquons que cette courbe présente une oscillation amortie par rapport à la droite des abscisses, en $-\infty$ ou $+\infty$.

Proposition 9.12 – Passage à la limite sur une inégalité

Soient ℓ et a deux réels, f une fonction définie sur un intervalle I de la forme $[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$.

Si

- $\forall x \in I, f(x) > 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$

alors $\ell \geqslant 0$.

Démonstration

Par l'absurde, nous supposons que $\ell < 0$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, en choisissant en particulier $\varepsilon = -\ell > 0$, nous obtenons

$$\exists A \in I, \forall x > A, -\varepsilon = \ell < f(x) - \ell < \varepsilon = -\ell.$$

Ainsi, pour tout réel $x \in I$ tel que $x > A$, nous obtenons

$$2\ell < f(x) < 0,$$

ce qui est contradictoire avec : $\forall x \in I, f(x) > 0$.

Nous en concluons que $\ell \geqslant 0$.

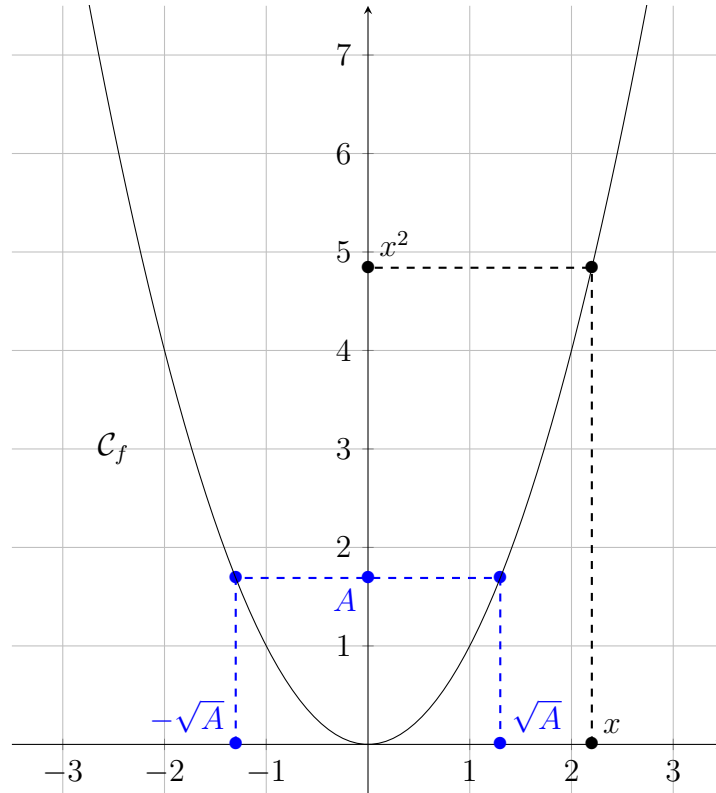
Remarque

- Cette proposition reste vraie en $-\infty$.
- Nous retiendrons que le passage à la limite sur une inégalité stricte restitue une inégalité large.

9.3 Limite infinie en $-\infty$ ou $+\infty$

9.3.1 Exemple introductif

Nous représentons graphiquement la fonction carré $x \mapsto x^2$.



Nous observons que, le réel $A > 0$ étant donné, pour que $x^2 > A$, il suffit que $x > \sqrt{A}$. Plus précisément, nous avons

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x > B, x^2 > A.$$

Ainsi, le réel $B = \sqrt{A} > 0$ convient.

On dit que x^2 tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, ce qui est noté

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad \text{ou} \quad x^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

De même, nous observons que, le réel $A > 0$ étant donné, pour que $x^2 > A$, il suffit que $x < -\sqrt{A}$.

Ainsi, en posant $B = -\sqrt{A}$, nous obtenons

$$\forall A > 0, \exists B < 0, \forall x < B, x^2 > A,$$

ce qui signifie que x^2 tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$, ce qui est noté

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad \text{ou} \quad x^2 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty.$$

9.3.2 Définitions

Définition 9.7 – Limite infinie en $+\infty$

Soit un réel a et f une fonction définie sur un intervalle I de la forme $[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$.

- La fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, ce que l'on note

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty,$$

si, et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists B \in I, \forall x > B, f(x) > A.$$

- La fonction f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$, ce que l'on note

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty,$$

si, et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists B \in I, \forall x > B, f(x) < -A.$$

Définition 9.8 – Limite infinie en $-\infty$

Soit un réel a et f une fonction définie sur un intervalle I de la forme $] -\infty, a]$ ou $] -\infty, a[$.

- La fonction f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$, ce que l'on note

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty,$$

si, et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists B \in I, \forall x < B, f(x) > A.$$

- La fonction f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$, ce que l'on note

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty,$$

si, et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists B \in I, \forall x < B, f(x) < -A.$$

Proposition 9.13 – Limites infinies de référence en l'infini

Pour tout entier naturel n non nul, nous avons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

Démonstration

- Le cas $n = 2$ est traité dans l'exemple introductif. Les cas $n \in \mathbb{N}^*$ sont analogues en remplaçant \sqrt{A} par $\sqrt[n]{A}$.
- Justifions que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Soit un réel $A > 0$. Quel que soit le réel $x \in \mathbb{R}_+$, pour que $\sqrt{x} > A$, il suffit que $x > A^2$.

Par suite, en posant $B = A^2$, nous avons montré

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x > B, \sqrt{x} > A,$$

ce qui justifie que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Proposition 9.14 – Limite d'une fonction polynomiale

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, le n -uplet (a_0, a_1, \dots, a_n) et $p : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$, avec $a_n \neq 0$, un polynôme de degré n .

Nous avons :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) &= \begin{cases} +\infty & \text{si } a_n > 0 \\ -\infty & \text{si } a_n < 0 \end{cases} \\ \bullet \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) &= \begin{cases} +\infty & \text{si } a_n > 0 \text{ et } n \text{ pair} \\ -\infty & \text{si } a_n > 0 \text{ et } n \text{ impair} \\ -\infty & \text{si } a_n < 0 \text{ et } n \text{ pair} \\ +\infty & \text{si } a_n < 0 \text{ et } n \text{ impair} \end{cases} \end{aligned}$$

Démonstration

Pour tout réel $x \neq 0$, nous avons

$$p(x) = x^n \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{x^{n-i}}.$$

Puisque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{x^{n-i}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{x^{n-i}} = a_n,$$

en appliquant la proposition 9.13, nous obtenons les résultats annoncés.

Remarque

Nous retiendrons cette proposition en se souvenant que la limite infinie d'un polynôme est la limite de son terme $a_n x^n$ de plus haut degré, en $-\infty$ ou $+\infty$.
On dit aussi qu'un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré, en $-\infty$ ou $+\infty$.

9.3.3 Limite infinie en $-\infty$ ou $+\infty$ et inégalités**Théorème 9.15 – Théorème de comparaison en $+\infty$**

Soient un réel a , f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de la forme $[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$.

Si

- $\forall x \in I, f(x) \geq g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Démonstration

Soit un réel $A > 0$. Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, nous avons

$$\exists B \in I, \forall x > B, g(x) > A.$$

Or, pour tout réel $x > B \in I$, nous savons que $f(x) \geq g(x)$.

Il en résulte que

$$\forall x > B, f(x) \geq g(x) > A,$$

ce qui implique

$$\exists B \in I, \forall x > B, f(x) > A.$$

Nous en concluons :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Remarque

Dans cette preuve, nous contrôlons le choix du réel $A > 0$ tel que $B \in I$.

Théorème 9.16 – Théorème de comparaison en $+\infty$

Soient un réel a , f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de la forme $[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$.

Si

- $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Démonstration

Cette preuve est analogue à la précédente, en remplaçant $g(x) > A$ par $g(x) < A$.

Remarque

Ces deux théorèmes de comparaison s'étendent aux limites infinies en $-\infty$.

Exemple 9.5

Nous considérons la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2x}{2 - \sin(2x)}.$$

Nous étudions la limite de f en $+\infty$, puis en $-\infty$.

Pour tout réel x , nous obtenons les encadrements successifs suivants :

$$\begin{aligned} -1 \leq \sin(2x) \leq 1 &\iff -1 \leq -\sin(2x) \leq 1 \\ &\iff 1 \leq 2 - \sin(2x) \leq 3 \\ &\iff \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \sin(2x)} \leq 1. \end{aligned}$$

— Si $x \geq 0$, il vient :

$$\frac{2x}{3} \leq f(x) \leq 2x,$$

ce qui implique

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \geq \frac{2x}{3}.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3} = +\infty$, par comparaison, nous en concluons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

— Si $x \leq 0$, alors nous avons :

$$\frac{2x}{3} \geq f(x) \geq 2x,$$

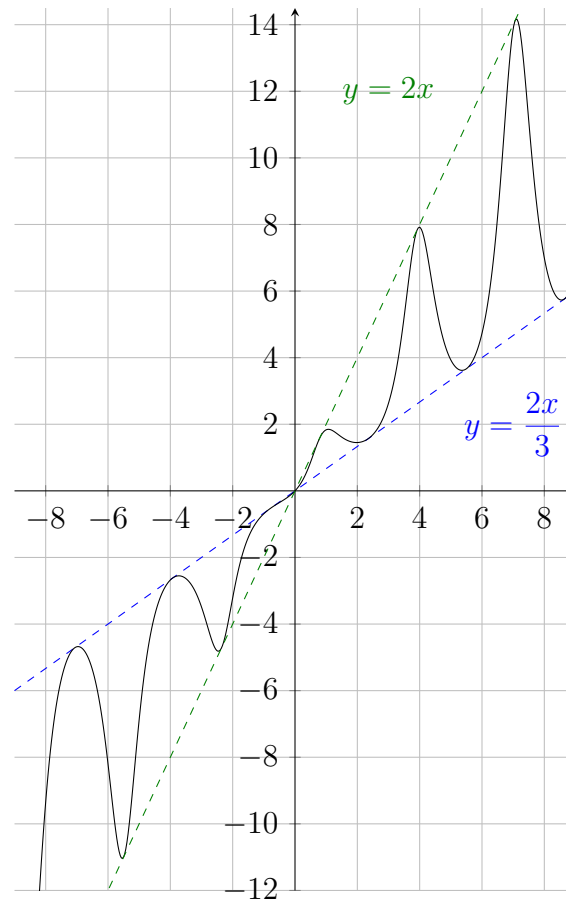
ce qui implique

$$\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad f(x) \leq \frac{2x}{3}.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{3} = -\infty$, par comparaison, nous en concluons

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Nous contrôlons graphiquement le comportement de f en $+\infty$ ou en $-\infty$:



9.3.4 Limite de la fonction exp en $+\infty$, en $-\infty$

Lemme 9.17

Nous disposons de l'inégalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad e^x > x.$$

Démonstration

Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = e^x - x.$$

Cette fonction est dérivable sur \mathbb{R}_+ par différence de fonctions dérivables sur \mathbb{R}_+ . Pour tout réel $x \geq 0$, nous avons

$$f'(x) = e^x - 1.$$

Puisque la fonction \exp est croissante sur \mathbb{R} , nous en déduisons

$$e^x \geq e^0 = 1.$$

Il en résulte

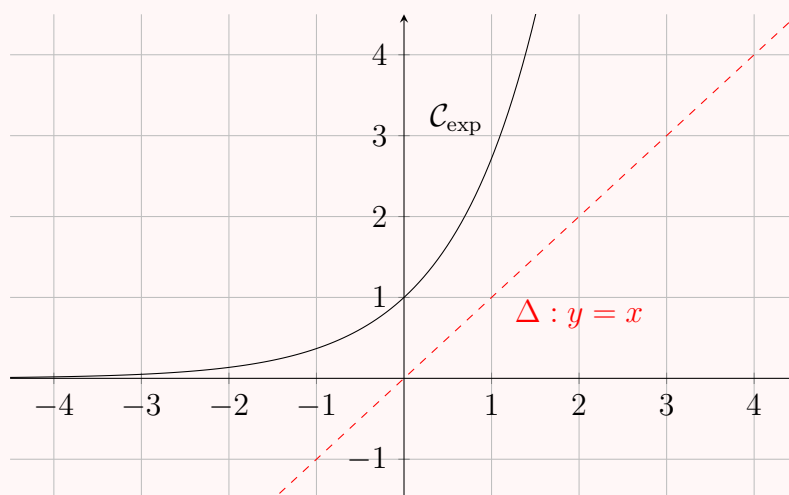
$$f'(x) \geq 0,$$

ce qui prouve que la fonction f est croissante sur \mathbb{R}_+ . Par conséquent, si $x \in \mathbb{R}_+$, alors $f(x) \geq f(0) = 1 > 0$, c'est-à-dire $f(x) > 0$.

Nous en déduisons que $e^x - x > 0$, ce qui permet de conclure en disposant de l'inégalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad e^x > x.$$

Nous contrôlons graphiquement cette inégalité :



Proposition 9.18 – Limite de \exp en $+\infty$

Nous disposons de la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

Démonstration

Nous savons que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad e^x \geq x \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty. \end{cases}$$

ce qui, par comparaison, permet de conclure par

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

Proposition 9.19 – Limite de \exp en $-\infty$

Nous disposons de la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

Démonstration

Posons $X = -x$. Ainsi, nous obtenons

$$e^x = e^{-X} = \frac{1}{e^X}.$$

Nous en déduisons

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^X} = 0.$$

Remarque

Le changement de variable $X = -x$ signifie que cette limite est déterminée par composition. Nous reviendrons en détail sur la notion de limite de la composée de deux fonctions au paragraphe 9.5.2.

9.3.5 Asymptote oblique**Définition 9.9 – Asymptote oblique**

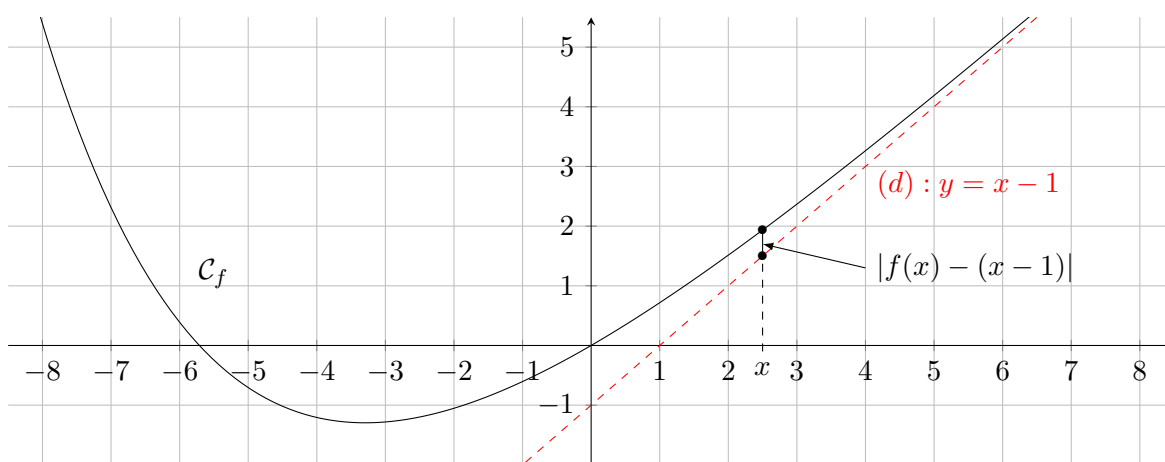
Soient a, b deux réels avec $a \neq 0$ et f une fonction admettant une limite infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$.

La droite $(d) : y = ax + b$ est une asymptote oblique pour la courbe \mathcal{C}_f en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si, et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \quad \left(\text{resp.} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \right).$$

Exemple 9.6

Nous considérons la représentation graphique d'une fonction f définie sur \mathbb{R} .



Graphiquement nous observons :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1)) = 0.$$

Dans cette configuration, la droite $(d) : y = x - 1$ est une asymptote oblique pour la courbe \mathcal{C}_f en $+\infty$.

Nous remarquons que, bien que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, la courbe \mathcal{C}_f , n'admet pas de droite asymptote oblique en $-\infty$.

Remarque

- Lorsque $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction ayant une limite infinie en $+\infty$ ou $-\infty$, \mathcal{C}_f n'admet pas obligatoirement une droite asymptote.
- La position de \mathcal{C}_f par rapport à son asymptote est déterminée dans chaque cas par l'étude du signe de $f(x) - (ax + b)$.
- La droite $(d) : y = ax + b$ est une asymptote oblique pour la courbe \mathcal{C}_f en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) si, et seulement si :

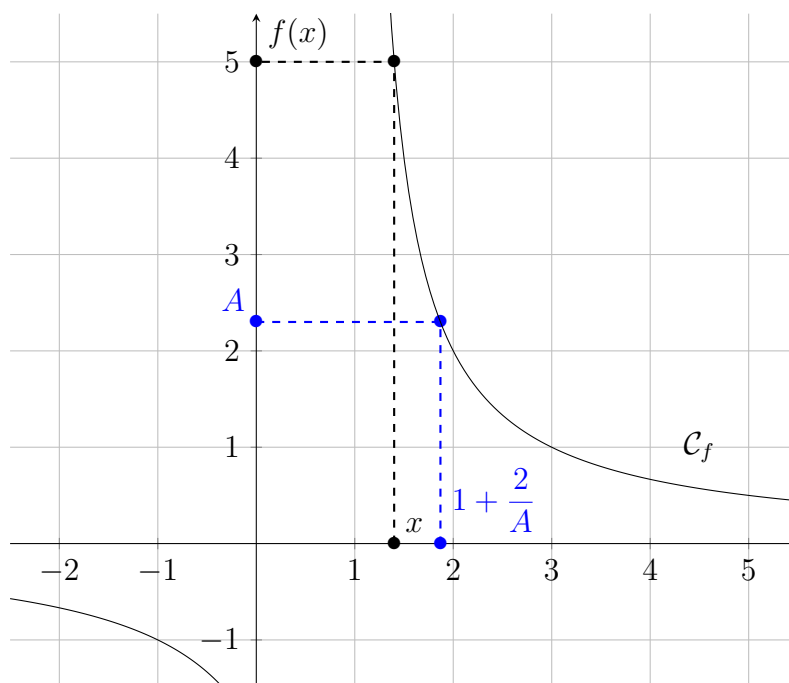
$$\forall x \in I, f(x) = ax + b + \varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0$ (resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varepsilon(x) = 0$).

9.4 Limite infinie en un point

9.4.1 Exemple introductif

Considérons la fonction $f : x \rightarrow \frac{2}{x-1}$, qui est définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et dont la représentation graphique est donnée ci-après :



Nous étudions le comportement de cette fonction pour des valeurs de la variable x proche de 1, en distinguant, par disjonction, les deux cas :

$$x > 1 \quad \text{ou} \quad x < 1.$$

1^{er} cas : $x > 1$.

Nous conjecturons graphiquement que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 1^+ .

Nous précisons à présent cette observation graphique.

Soient deux réels $x > 1$ et $A > 0$. Nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) > A > 0 &\iff \frac{2}{x-1} > A > 0 \\ &\iff \frac{x-1}{2} < \frac{1}{A} \\ &\iff x < 1 + \frac{2}{A} \end{aligned}$$

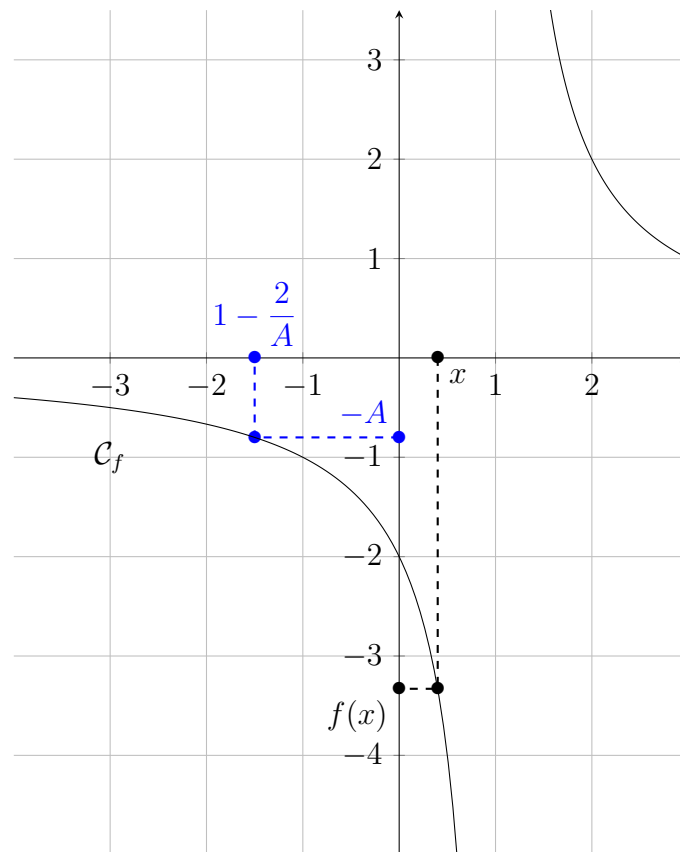
Nous en déduisons que, pour que $f(x) > A$, il suffit que $1 < x < 1 + \frac{2}{A}$, ce qui donne, en posant $h = \frac{2}{A} > 0$:

$$\forall A > 0, \exists h > 0, \forall x \in]1, 1+h[, f(x) > A.$$

Dans le langage des limites, on note $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.

2^e cas : $x < 1$.

Nous conjecturons graphiquement que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers 1^- .



En procédant comme dans le premier cas, pour $x < 1$ et $A > 0$, pour que $f(x) < -A$, il suffit que $1 - \frac{2}{A} < x < 1$.

En posant $h = \frac{2}{A} > 0$, nous obtenons

$$\forall A > 0, \exists h > 0, \forall x \in]1-h, 1[, f(x) < -A.$$

Dans le langage des limites, on note $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.

9.4.2 Définitions

Définition 9.10 – Limite infinie en un point

Soient un réel a et f une fonction définie sur un intervalle I ouvert en a .

- La fonction f a pour *limite* $+\infty$ en a à droite, notée $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$, si et seulement si

$$\forall A > 0, \exists h > 0, \forall x \in]a, a + h[, f(x) > A.$$

- La fonction f a pour *limite* $-\infty$ en a à droite, notée $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$, si et seulement si

$$\forall A > 0, \exists h > 0, \forall x \in]a, a + h[, f(x) < -A.$$

- La fonction f a pour *limite* $+\infty$ en a à gauche, notée $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$, si et seulement si

$$\forall A > 0, \exists h > 0, \forall x \in]a - h, a[, f(x) > A.$$

- La fonction f a pour *limite* $-\infty$ en a à gauche, notée $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$, si et seulement si

$$\forall A > 0, \exists h > 0, \forall x \in]a - h, a[, f(x) < -A.$$

Remarque

Avec les données des définitions ci-dessus,

- La fonction f a pour limite $+\infty$ en a , notée $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$.
- La fonction f a pour limite $-\infty$ en a , notée $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$.

Proposition 9.20 – Limites infinies de référence en un point

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Nous disposons des résultats suivants :

- $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{(x - a)^n} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{(x - a)^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{\sqrt{x - a}} = +\infty.$$

- En particulier, pour $a = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Démonstration

Nous justifions que $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{\sqrt{x-a}} = +\infty$, puis en particulier que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Les autres preuves sont laissées au soin du lecteur.

— Soient un réel $x > a$ et un réel $A > 0$.

Nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x-a}} > A > 0 &\iff 0 < \sqrt{x-a} < \frac{1}{A} \\ &\iff 0 < x-a < \frac{1}{A^2} \\ &\iff a < x < a + \frac{1}{A^2}. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour que $\frac{1}{\sqrt{x-a}} > A$, il suffit que $x \in]a, a + \frac{1}{A^2}[$, ce qui donne en posant $h = \frac{1}{A^2} > 0$:

$$\forall A > 0, \exists h > 0, \forall x \in]a, a + h[, \frac{1}{\sqrt{x-a}} > A,$$

ce qui justifie que :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{\sqrt{x-a}} = +\infty.$$

— Montrons que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Nous distinguons, par disjonction, deux cas.

1^{er} cas : $x > 0$.

Soit un réel $A > 0$. Pour que $\frac{1}{x^2} > A > 0$, il suffit que

$$x^2 < \frac{1}{A},$$

soit, puisque $x > 0$,

$$0 < x < \frac{1}{\sqrt{A}}.$$

Par suite, en posant $h = \frac{1}{\sqrt{A}} > 0$, nous obtenons

$$\forall A > 0, \exists h > 0, \forall x \in]0, h[, \frac{1}{x^2} > A,$$

ce qui prouve

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

2^e cas : $x < 0$.

Soit un réel $A > 0$. Pour que $\frac{1}{x^2} > A > 0$, il suffit que

$$x^2 < \frac{1}{A},$$

soit, puisque $x < 0$,

$$-\frac{1}{\sqrt{A}} < x < 0.$$

Par suite, en posant $h = \frac{1}{\sqrt{A}} > 0$, nous obtenons

$$\forall A > 0, \exists h > 0, \forall x \in]-h, 0[, \frac{1}{x^2} > A,$$

ce qui prouve

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Nous en concluons :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}.$$

9.4.3 Asymptote verticale

Définition 9.11 – Asymptote verticale

Soient un réel a et f une fonction définie sur un intervalle I ouvert en a .

La droite $(d) : x = a$ est une asymptote verticale pour la courbe \mathcal{C}_f si, et seulement si, au moins une de ces conditions est vérifiée :

- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$.

Exemple 9.7

Nous étudions le comportement de la fonction $f : x \mapsto -\frac{2e^{\frac{x}{10}}}{x-1}$ lorsque x tend vers 1. Nous distinguons, par disjonction, deux cas.

1^{er} cas : $x > 1$.

Nous avons

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} -2e^{\frac{x}{10}} = -2e^{\frac{1}{10}}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty.$$

En anticipant sur la section 9.5, par produit, nous obtenons

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty.$$

2^e cas : $x < 1$.

Nous avons

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} -2e^{\frac{x}{10}} = -2e^{\frac{1}{10}}$$

et

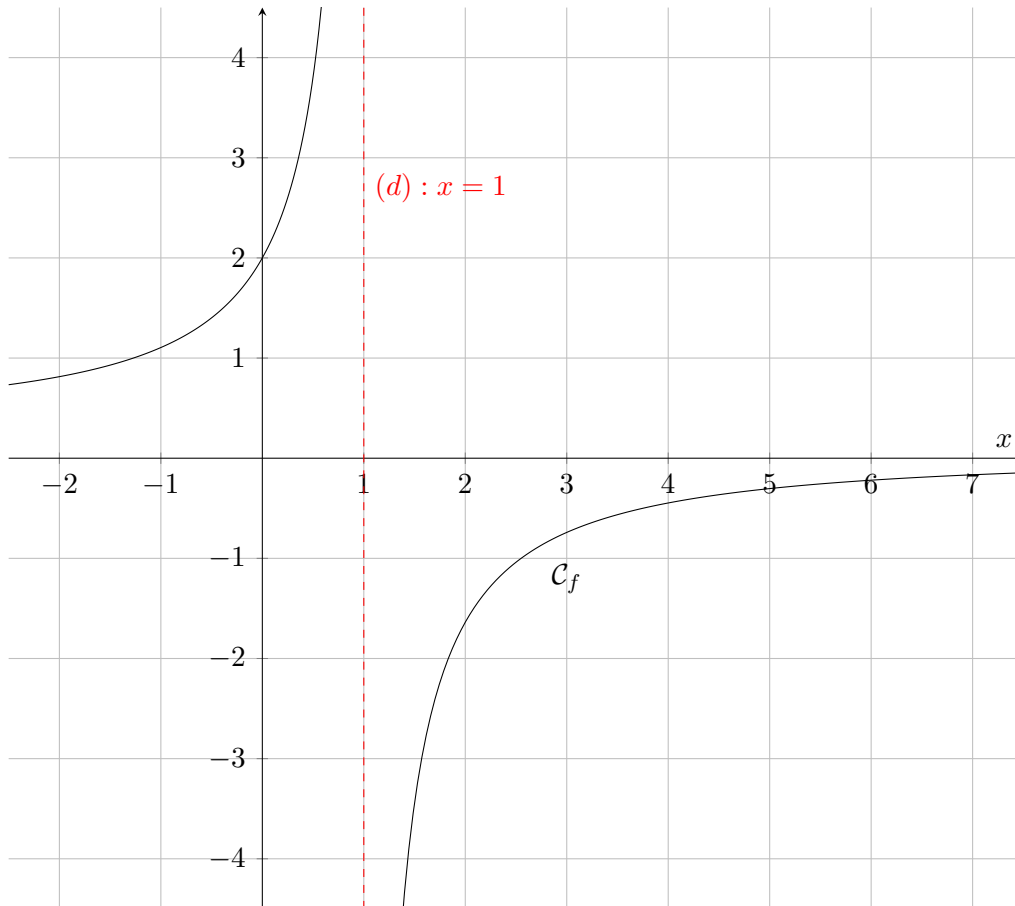
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty.$$

En anticipant à nouveau sur le paragraphe 9.5, par produit, nous obtenons :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty.$$

Nous en déduisons que la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale pour la courbe \mathcal{C}_f .

Nous contrôlons graphiquement les deux limites obtenues ci-dessus :



9.5 Opérations sur les limites

Dans cette section, $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Pour déterminer la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de deux fonctions, nous disposons des tableaux ci-après.

Lorsque $a \in \mathbb{R}$, la ligne concernant la somme a été justifiée au paragraphe 9.1.2.

Attention, dans les trois tableaux qui suivent, les « ? » signifient la présence d'une forme indéterminée.

9.5.1 Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient

- Limite d'une somme

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$?

- Limite d'un produit

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x))$
ℓ	ℓ'	$\ell \ell'$
$\ell > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$\ell < 0$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	0	?
$-\infty$	0	?

- Limite d'un quotient

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
ℓ	∞	0
$+\infty$	$\ell' > 0$	$+\infty$
$+\infty$	$\ell' < 0$	$-\infty$
$-\infty$	$\ell' > 0$	$-\infty$
$-\infty$	$\ell' < 0$	$+\infty$
∞	∞	?
$\ell > 0$ ou $+\infty$	0^+	$+\infty$
$\ell > 0$ ou $+\infty$	0^-	$-\infty$
$\ell < 0$ ou $-\infty$	0^+	$-\infty$
$\ell < 0$ ou $-\infty$	0^-	$+\infty$
0	0	?

Exemple 9.8

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x + 1}.$$

Nous déterminons la limite de f en $+\infty$, en $-\infty$.

- En $+\infty$, nous observons une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour lever cette indétermination, nous avons, pour tout réel x :

$$f(x) = \frac{e^x \left(2 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{2 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, nous en déduisons par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2.$$

Nous précisons que la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale pour la courbe \mathcal{C}_f en $+\infty$.

De plus, pour tout réel x , nous avons

$$f(x) - 2 = \frac{2e^x - 1}{e^x + 1} - 2 = \frac{-3}{e^x + 1} < 0,$$

ce qui justifie que \mathcal{C}_f est en-dessous de son asymptote horizontale d'équation $y = 2$.

- En $-\infty$, puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, nous ne sommes pas en présence d'une indétermination. Par quotient, nous obtenons :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1.$$

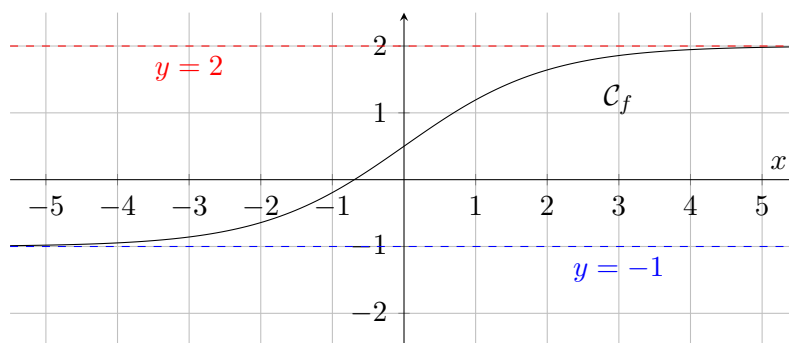
Nous précisons que la droite d'équation $y = -1$ est une asymptote horizontale pour la courbe \mathcal{C}_f en $-\infty$.

De plus, pour tout réel x , nous avons :

$$f(x) + 1 = \frac{2e^x - 1}{e^x + 1} + 1 = \frac{3e^x}{e^x + 1} > 0,$$

ce qui justifie que \mathcal{C}_f est au-dessus de son asymptote horizontale d'équation $y = -1$.

Contrôlons graphiquement :



Exemple 9.9

Nous considérons la fonction f définie sur $\mathcal{D}_f =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ par

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 4} - \sqrt{x^2 + 2}.$$

- En $+\infty$, nous observons une forme indéterminée du type « $+\infty - \infty$ ».
Pour lever cette indétermination, nous procédons par conjugaison, ce qui donne, pour tout réel $x \in \mathcal{D}_f$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(\sqrt{x^2 - 4} - \sqrt{x^2 + 2})(\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x^2 + 2})}{\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x^2 + 2}} \\ &= \frac{-6}{\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x^2 + 2}} \end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2 = +\infty,$$

et en anticipant sur le paragraphe 9.5.2, il vient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2} = +\infty.$$

Par somme, nous déduisons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x^2 + 2} = +\infty$. On conclut par quotient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

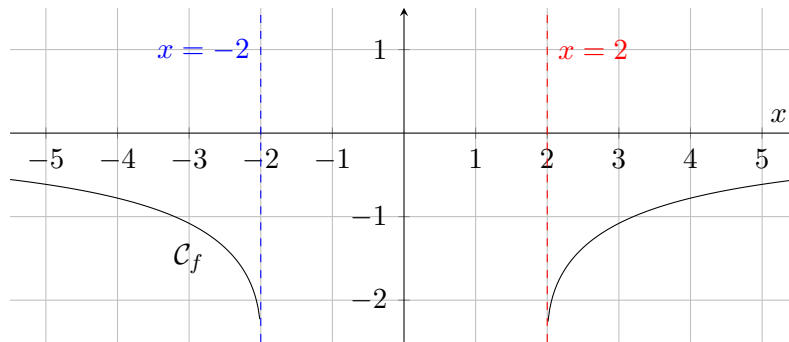
- En remarquant que la fonction f est paire, nous avons également

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

En effet, en posant $X = -x$, nous obtenons, par composition

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} f(-X) = \lim_{X \rightarrow +\infty} f(X) = 0.$$

Nous contrôlons graphiquement les deux limites obtenues :



Exemple 9.10

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$f(x) = x - 1 + \frac{x + \sqrt{x}}{x^2 + 1}.$$

En $+\infty$, en ce qui concerne le quotient $\frac{x + \sqrt{x}}{x^2 + 1}$, la forme est indéterminée du type « $\frac{+\infty}{+\infty}$ ».

- Pour tout réel $x > 0$, il vient

$$f(x) = x - 1 + \frac{x \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = x - 1 + \frac{1}{x} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{x^2}}.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, par quotient, produit et somme, nous en déduisons :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1.$$

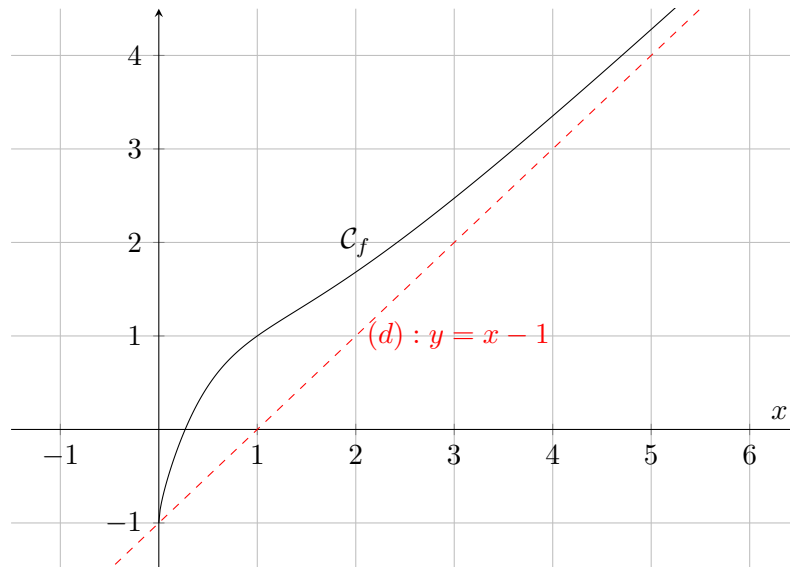
- De plus :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x^2 + 1} = 0,$$

ce qui prouve que la droite $(d) : y = x - 1$ est une asymptote pour la courbe \mathcal{C}_f en $+\infty$.

Puisque, pour tout réel $x \geq 0$, $f(x) - (x - 1) > 0$, nous en concluons que \mathcal{C}_f est au-dessus de (d) .

Graphiquement, nous obtenons :



9.5.2 Limite de la composée de deux fonctions

Théorème 9.21 – Composition de limites

Soient a , ℓ et ℓ' trois éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

Soient u une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J .

On suppose que la condition suivante est réalisée :

$$\forall x \in I, \quad u(x) \in J.$$

Si

$$\lim_{x \rightarrow a} u(x) = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow \ell} g(X) = \ell',$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow a} g(u(x)) = \lim_{x \rightarrow a} (g \circ u)(x) = \ell'.$$

Démonstration

Parmi les nombreux cas (27 cas) susceptibles d'être justifiés, nous proposons une preuve dans deux cas à titre d'exemple.

Les 25 autres preuves sont laissées au soin du lecteur « courageux ».

- $a \in \mathbb{R}$, $\ell = +\infty$ et $\ell' \in \mathbb{R}$.

Soit un réel $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim_{X \rightarrow +\infty} g(X) = \ell'$, nous avons :

$$\exists B > 0, \forall X \in J, \quad X > B \implies |g(X) - \ell'| < \varepsilon. \quad (*)$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = +\infty$, disposant du réel $B > 0$, nous obtenons

$$\exists h > 0, \forall x \in I, \quad |x - a| < h \implies u(x) > B.$$

En particulier, pour $X = u(x) \in J$ dans (*), nous en déduisons

$$|x - a| < h \implies |g \circ u(x) - \ell'| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists h > 0, \forall x \in I, \quad |x - a| < h \implies |(g \circ u)(x) - \ell'| < \varepsilon.$$

Nous en concluons

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ u)(x) = \ell'.$$

- $a = +\infty$, $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' = -\infty$.

Soit un réel $A > 0$. Puisque $\lim_{X \rightarrow \ell} g(X) = -\infty$, nous avons :

$$\exists h > 0, \forall X \in J, \quad |X - \ell| < h \implies g(X) < -A. \quad (**)$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \ell$, disposant du réel $h > 0$, nous obtenons

$$\exists B > 0, \forall x \in I, \quad x > B \implies |u(x) - \ell| < h.$$

En particulier, pour $X = u(x) \in J$ dans (**), nous en déduisons

$$x > B \implies g \circ u(x) < -A,$$

c'est-à-dire

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I, \quad x > B \implies (g \circ u)(x) < -A.$$

Nous en concluons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g \circ u)(x) = -\infty.$$

Exemple 9.11 – Facteur de Lorentz ^a

a. Physicien néerlandais : 1853–1929

Soit γ la fonction

$$v \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

définie sur $[0, c[$, où $c \simeq 3,00 \cdot 10^5 \text{ km.s}^{-1}$ désigne la vitesse de la lumière dans le vide.

Nous déterminons la limite de γ lorsque v tend vers c^- .

Nous posons $X = 1 - \frac{v^2}{c^2}$. Nous avons alors

$$\lim_{v \rightarrow c^-} X = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{X}} = +\infty.$$

Par composition, nous concluons :

$$\lim_{v \rightarrow c^-} \gamma(v) = +\infty.$$

9.6 Limite de la composée d'une suite par une fonction

Proposition 9.22

Soient ℓ et ℓ' deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, g une fonction définie sur un intervalle I , (u_n) une suite définie sur \mathbb{N} .

On suppose que la condition suivante est réalisée :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in I.$$

Si

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \quad \text{et} \quad g(X) \xrightarrow{X \rightarrow \ell} \ell',$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n) = \ell'.$$

Démonstration

En considérant la suite (u_n) comme une fonction de la variable n , nous appliquons le théorème 9.21 en remplaçant $u(x)$ par $u_n = u(n)$, pour $a = +\infty$, ℓ et ℓ' appartenant à $\overline{\mathbb{R}}$, ce qui donne la conclusion attendue :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n) = \ell'.$$

Exemple 9.12

Soit (v_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $v_n = n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Nous posons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{\pi}{n}$$

et

$$\forall X \in \mathbb{R}^*, \quad g(X) = \pi \frac{\sin X}{X}.$$

Nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \neq 0.$$

Nous vérifions :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad g(u_n) = v_n.$$

Puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

et

$$\lim_{X \rightarrow 0} g(X) = \pi \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} = \pi,$$

nous en concluons, par composition

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n) = \lim_{X \rightarrow 0} g(X) = \pi.$$

Remarque

- Relativement au résultat général de la limite de la composée de deux fonctions, $a = +\infty$ est fixé dans la détermination de la limite de la composée d'une suite par une fonction.

Il y a dans ce cas 3 choix pour la limite de (u_n) , puis trois choix pour la limite de la fonction g .

Nous dénombrons ainsi 9 preuves possibles pour justifier cette dernière proposition.

Le second exemple ($a = +\infty$, $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' = -\infty$) de la preuve du théorème 9.21 s'adapte immédiatement en remplaçant $u(x)$ par $u_n = u(n)$.

- La contraposition de cet énoncé permet de prouver qu'une fonction n'a pas de limite.

Avec les notations de l'énoncé, la forme contraposée est :

Si $g(u_n)$ n'a pas de limite, alors (u_n) n'a pas de limite en $+\infty$ ou la fonction g n'a pas de limite en ℓ .

L'exemple qui suit illustre cette dernière remarque.

Exemple 9.13

Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ n'ont pas de limite en $+\infty$.

Ce résultat est communément admis. Démontrons-le.

- Nous posons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n\pi$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \cos x.$$

Nous avons $g(u_n) = \cos(n\pi) = (-1)^n$, donc la suite $(g(u_n))$ n'a pas de limite bien que (u_n) tende vers $+\infty$. Nous en concluons que la fonction $g : x \mapsto \cos x$ n'a pas de limite quand x tend vers $+\infty$.

- Nous posons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n\pi + \frac{\pi}{2}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sin x.$$

Nous avons $g(u_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n$, donc la suite $(g(u_n))$ n'a pas de limite bien que (u_n) tende vers $+\infty$. Nous en concluons que la fonction $g : x \mapsto \sin x$ n'a pas de limite quand x tend vers $+\infty$.

9.7 Formes indéterminées exponentielles

9.7.1 Limite de $x \mapsto \frac{e^x}{x}$ en $+\infty$

Lemme 9.23

Nous disposons de l'inégalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad e^x > \frac{x^2}{2}.$$

Démonstration

Nous considérons la fonction g définie sur \mathbb{R}_+ par

$$g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}.$$

Cette fonction est dérivable sur \mathbb{R}_+ par différence de fonctions dérivables. Pour tout réel $x \geq 0$, nous avons

$$g(x) = e^x - x.$$

Du lemme 9.17, nous déduisons

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g'(x) \geq 0,$$

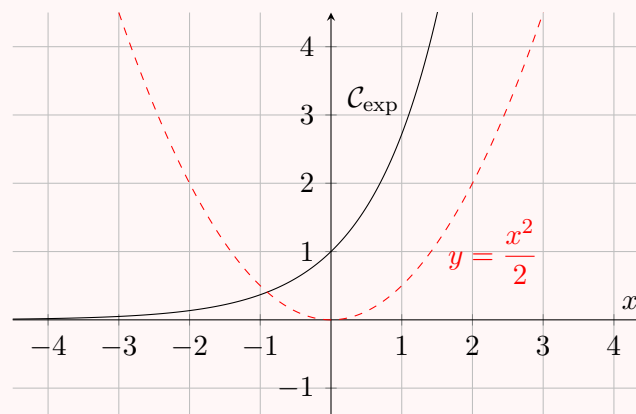
ce qui prouve que la fonction g est croissante sur \mathbb{R}_+ .

Par conséquent, si $x \geq 0$, alors $g(x) \geq g(0)$, c'est-à-dire $g(x) \geq 1$.

Nous en déduisons que $g(x) > 0$, ce qui permet de conclure

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x > \frac{x^2}{2}.$$

Nous contrôlons graphiquement cette inégalité :



Proposition 9.24

Nous disposons de la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

Démonstration

Nous observons une forme indéterminée du type « $\frac{+\infty}{+\infty}$ ». Pour lever cette indétermination, nous utilisons l'inégalité du lemme 9.23 pour tout réel $x > 0$.

En divisant les deux membres de cette dernière par $x > 0$, nous obtenons

$$\forall x > 0, \quad \frac{e^x}{x} > \frac{x}{2},$$

ce qui donne, puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ et par comparaison :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

Remarque

- Graphiquement, cette limite signifie que, x étant un réel suffisamment grand, la pente de la droite passant par les points d'abscisses x sur la droite d'équation $y = x$ et sur la courbe \mathcal{C}_{\exp} est aussi grande que l'on veut.

On dit dans ce cas que la courbe \mathcal{C}_{\exp} admet une *branche parabolique* de direction (Oy) , en $+\infty$.

- Nous interprétons aussi cette limite par croissance comparée, ce qui signifie que la fonction $x \mapsto e^x$ a une croissance « beaucoup » plus rapide que la fonction $x \mapsto x$, et par conséquent « l'emporte sur x », en $+\infty$.
- Nous retiendrons que par inverse, nous disposons également de la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

- Sans indétermination, nous avons par quotient :

$$\begin{aligned} & \text{— } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0 \\ & \text{— } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty \\ & \text{— } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty \end{aligned}$$

Proposition 9.25 – Croissance comparée de la fonction exp avec $x \mapsto x^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous avons :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

Démonstration

Pour tout réel $x > 0$, nous posons $X = \frac{x}{n}$.

Il vient

$$\begin{aligned}\frac{e^x}{x^n} &= \frac{e^{nX}}{(nX)^n} \\ &= \frac{1}{n^n} \times \frac{e^{nX}}{X^n} \\ &= \frac{1}{n^n} \times \left(\frac{e^X}{X}\right)^n.\end{aligned}$$

Puisque $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$, par composition avec la fonction $x \mapsto x^n$, nous en déduisons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^n} \times \left(\frac{e^X}{X}\right)^n = +\infty.$$

En prenant la limite de l'inverse, nous obtenons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

Remarque

Nous interprétons aussi cette limite par croissance comparée, car la fonction $x \mapsto e^x$ a une croissance « beaucoup » plus rapide que la fonction $x \mapsto x^n$ et par conséquent, la fonction exp « l'emporte » sur les fonctions puissances, en $+\infty$.

Exemple 9.14

Déterminons la limite en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto e^x - 2x$.
Nous observons une forme indéterminée du type « $+\infty - \infty$ ».
Pour tout réel $x > 0$, il vient

$$f(x) = x \left(\frac{e^x}{x} - 2 \right).$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, nous en déduisons par produit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Exemple 9.15

Déterminons la limite en $+\infty$ de la fonction $g : x \mapsto \frac{4x^2 + x}{e^{2x}}$.

Cette fois, nous sommes en présence d'une forme indéterminée du type « $\frac{+\infty}{+\infty}$ ».

Pour tout réel $x > 0$, en posant $X = 2x$, nous obtenons :

$$g(x) = 2 \frac{4x^2}{e^{2x}} + \frac{1}{2} \frac{2x}{e^{2x}} = \frac{X^2}{e^X} + \frac{1}{2} \frac{X}{e^X}.$$

Puisque $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X^2}{e^X} = 0$, par composition et par somme, nous obtenons :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

Exemple 9.16

Nous étudions la limite en $+\infty$ de la suite (v_n) définie sur \mathbb{N}^* par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \exp \left(\frac{n^2}{n+1} \right).$$

La forme est indéterminée du type « $0 \times \infty$ ».

Pour tout entier n non nul :

$$v_n = \frac{n+1}{n^2} \exp \left(\frac{n^2}{n+1} \right).$$

Ainsi, nous posons $u_n = \frac{n^2}{n+1}$ et pour tout réel $x > 0$, $g(x) = \frac{e^x}{x}$. Il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n > 0 \quad \text{et} \quad v_n = g(u_n),$$

avec

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

Par composition, nous en concluons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

9.7.2 Limite de $x \mapsto xe^x$ en $-\infty$

Proposition 9.26

Nous disposons de la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0.$$

Démonstration

La forme est indéterminée du type « $0 \times -\infty$ ».

Nous posons $X = -x$, ce qui donne

$$xe^x = -Xe^{-X} = -\frac{X}{e^X}.$$

Par composition, nous obtenons

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{X}{e^X} = 0.$$

Remarque

- Sans indétermination, par produit, nous avons $\lim_{x \rightarrow +\infty} +\infty$.
- Nous retenons ce résultat en exprimant que, par croissance comparée, $x \mapsto e^x$ « l'emporte » sur x en $-\infty$.

Proposition 9.27 – Limite de $x \mapsto x^n e^x$ en $-\infty$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous disposons de la limite suivante

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0.$$

Démonstration

La forme est indéterminée du type « $\pm\infty \times 0$ ».

Nous posons $X = -x$, ce qui donne

$$x^n e^x = (-X)^n e^{-X} = (-1)^n \frac{X^n}{e^X}.$$

Par composition, nous obtenons

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = (-1)^n \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X^n}{e^X} = 0.$$

Remarque

Nous retenons ce résultat en exprimant que, par croissance comparée, l'exponentielle « l'emporte » sur les fonctions puissances, en $-\infty$.

Exemple 9.17

Déterminons la limite en $-\infty$ de la fonction $f : x \mapsto \left(x^2 - \frac{2}{x^2}\right) e^x + 2$.

Nous observons une forme indéterminée du type « $+\infty \times 0$ ».

Pour tout réel $x < 0$, nous avons

$$f(x) = x^2 e^x - \frac{2}{x^2} e^x + 2.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2} e^x = 0$, nous en déduisons par somme

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

9.7.3 Limite de $x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$ en 0

Proposition 9.28

Nous disposons de la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Démonstration

Il s'agit ici d'une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ».

Pour lever cette indétermination, nous observons que la fonction exp est dérivable en 0, ce qui donne

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \exp'(0) = 1.$$

Remarque

En posant, pour tout réel $x \neq 0$,

$$\varepsilon(x) = \frac{e^x - 1}{x} - 1,$$

nous en déduisons

$$e^x = 1 + x + x\varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0,$$

ce qui restitue la fonction $x \mapsto x + 1$ qui est l'approximation affine tangente en 0 de la fonction exp.

On dit aussi que $x \mapsto x + 1$ est le développement limité d'ordre 1 en 0 ($DL_1(0)$) de la fonction exp.

Exemple 9.18

Déterminons la limite en 0 de $f : x \mapsto \frac{1 - e^x}{2x}$.

Pour tout réel $x \neq 0$, nous avons

$$f(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{e^x - 1}{x}.$$

Nous en concluons

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{1}{2}.$$

Exemple 9.19

Déterminons la limite en $+\infty$ de $g : x \mapsto x \left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right)$.

Pour tout réel $x \neq 0$, nous posons $X = \frac{1}{x}$. Il vient :

$$g(x) = g\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{e^X - 1}{X}.$$

Par composition, nous obtenons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1.$$

Chapitre 10

Continuité

Sommaire

10.1 Continuité d'une fonction en un point	173
10.1.1 Définitions	173
10.1.2 Exemples et contre-exemples	174
10.1.3 Continuité et dérivabilité en un point	175
10.1.4 Opérations sur les fonctions continues en un point	177
10.1.5 Composée d'une suite par une fonction continue en un point	179
10.1.6 Suite récurrente et fonction continue en un point	180
10.2 Continuité sur un intervalle	182
10.2.1 Définitions	182
10.2.2 Propriétés des valeurs intermédiaires	184
10.2.3 Action d'une fonction continue sur un intervalle	192
10.2.4 Continuité et monotonie stricte sur un intervalle	196
10.3 Fonction racine n-ième	199

La notion de continuité est en apparence plus simple que celle de limite d'une fonction puisqu'il s'agit d'étudier la limite de cette dernière en un point où elle est définie. En fait, ce n'est pas aussi simple que cela lorsque l'étude de discontinuités s'impose, ce qui est fréquent en mathématiques mais aussi en physique comme par exemple en théorie du signal. Nous précisons aussi que la continuité d'une fonction en un point n'est pas toujours conservée par certains passages à la limite, idée que nous aborderons comme approfondissement dans l'exercice 7 du TD 10.

De plus, ce concept est très fécond dès qu'il concerne la continuité d'une fonction sur un intervalle. Dans ce cadre, un résultat fondamental en analyse comme la propriété des valeurs intermédiaires est explicitée et démontrée. Ce résultat permet, lorsque les méthodes algébriques ne sont pas utilisables, une résolution approchée et algorithmique d'une équation du type $f(x) = 0$.

La continuité, couplée avec la monotonie sur un intervalle, permet de dégager la possibilité de construire de nouvelles fonctions comme par exemple la fonction logarithme népérien qui sera étudiée au chapitre 12.

On illustre souvent la continuité d'une fonction sur un intervalle en disant que sa représentation graphique peut être dessinée sans « lever le crayon ». Jusqu'au début du XIX^e siècle, c'est cette image qui prédomine et la propriété des valeurs intermédiaires était considérée comme une évidence géométrique.

C'est le mathématicien tchèque Bernhard Bolzano (1781–1848) qui proposa une démonstration rigoureuse de cette propriété. Le mathématicien allemand Karl Weierstrass (1815–1897) donna une définition de la continuité qui est celle que nous utilisons de nos jours.

10.1 Continuité d'une fonction en un point

10.1.1 Définitions

Définition 10.1 – Continuité

Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est *continue en un réel* $a \in I$ si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Remarque

- Retenir que la continuité en a impose que la fonction f est *définie* en a .
- Si l'intervalle I est fermé, par exemple $I = [a, b]$, on dit que
 - f est continue à droite en a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$,
 - f est continue à gauche en b si et seulement si $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.
- f est continue en a si et seulement si f est *continue à droite et à gauche en* a . La négation de cette remarque est importante pour justifier notamment la discontinuité d'une fonction en un point comme nous le verrons dans des exemples ci-après.

Proposition 10.1

Dans les conditions de la définition ci-dessus, les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est continue en a ,
- (ii) $\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a)$,
- (iii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| < \eta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Démonstration

Pour justifier l'équivalence de ces trois propositions, nous utilisons la méthode « circulaire » suivante :

$$(i) \implies (ii) \implies (iii) \implies (i).$$

- $(i) \implies (ii)$

Nous supposons que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

En posant $h = x - a$, il vient par composition

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

ce qui prouve (ii) .

- $(ii) \implies (iii)$

Nous supposons $\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a)$.

Il en résulte :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall h \in \mathbb{R}, a + h \in I, |h| < \eta \implies |f(a + h) - f(a)| < \varepsilon.$$

En posant $x = a + h \in I$, nous obtenons :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \quad |x - a| < \eta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire (iii).

- (iii) \implies (i)
(iii) signifie par définition que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, ce qui prouve que f est continue en a .

10.1.2 Exemples et contre-exemples

Proposition 10.2 – Continuité des fonctions de référence

Les fonctions de références c'est-à-dire les fonctions constantes, linéaires, carré, inverse, racine carrée, cosinus, sinus, tangente et exponentielle sont continues en tout point où elles sont définies.

Démonstration

En effet, en tout point où elles sont définies, ces fonctions de références satisfont à la définition de la continuité en point.

Proposition 10.3 – Continuité sur \mathbb{R} de la valeur absolue

Quel que soit le réel a , la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue en a .

Démonstration

Soient x et a deux réels. Nous rappelons l'inégalité

$$||x| - |a|| \leq |x - a|.$$

Par conséquent, le réel $\varepsilon > 0$ étant donné, pour que $||x| - |a|| < \varepsilon$, il suffit que $|x - a| < \varepsilon$.

En posant $\eta = \varepsilon$, nous obtenons

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x - a| < \eta \implies ||x| - |a|| < \varepsilon,$$

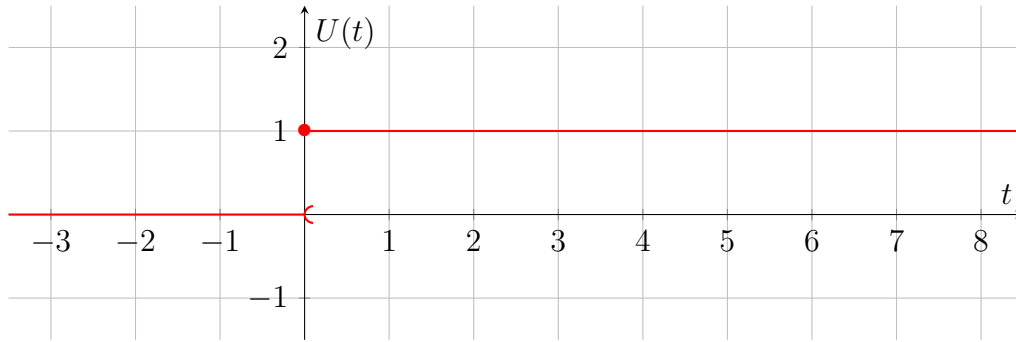
ce qui prouve la continuité de $x \mapsto |x|$ en a .

Exemple 10.1 – Discontinuité de la fonction échelon unité en 0

La fonction échelon unité U est définie sur \mathbb{R} par

$$U(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Graphiquement, il vient :



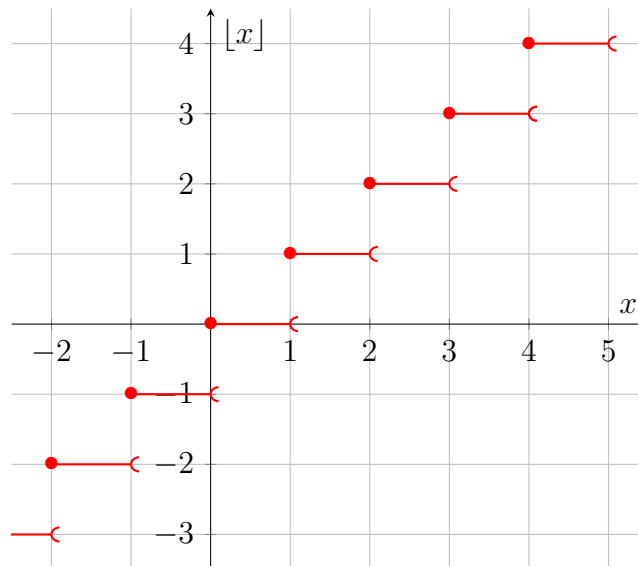
Nous avons

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} U(t) = 1 = U(0) \neq \lim_{t \rightarrow 0^-} U(t) = 0,$$

ce qui justifie que cette fonction est discontinue en 0.

Exemple 10.2 – Discontinuité de la fonction partie entière en $n \in \mathbb{Z}$

Nous représentons graphiquement la fonction partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$:



Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, nous avons

$$\lim_{x \rightarrow n^+} \lfloor x \rfloor = n = \lfloor n \rfloor \neq \lim_{x \rightarrow n^-} \lfloor x \rfloor = n - 1,$$

ce qui justifie que la fonction partie entière est discontinue en $n \in \mathbb{Z}$.

10.1.3 Continuité et dérivabilité en un point

Notation L'ensemble des fonctions continues sur un intervalle I est noté $\mathcal{C}^0(I)$.
L'ensemble des fonctions dérivables sur I est noté $\mathcal{D}^1(I)$.

Plus généralement, si $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des fonctions définies sur I dont la dérivée n -ième existe et est continue sur I est noté $\mathcal{C}^n(I)$.

L'ensemble des fonctions dérivables n fois sur I est noté $\mathcal{D}^n(I)$.

L'ensemble des fonctions dérivables à l'infini sur I est noté $\mathcal{C}^\infty(I)$.

Lorsque $f \in \mathcal{C}^n(I)$, on dit que « la fonction f est de classe \mathcal{C}^n sur I ».

Proposition 10.4

Soient f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et un réel $a \in I$.

Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Autrement dit :

$$\mathcal{D}^1(I) \subset \mathcal{C}^0(I).$$

Démonstration

Puisque f est dérivable en a , cette fonction admet en a une approximation affine, ce qui signifie que, pour tout réel h tel que $a+h \in I$, il existe une fonction φ définie au voisinage de 0 telle que

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varphi(h), \quad \text{avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0.$$

Par somme des limites en 0, nous en déduisons

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) &= \lim_{h \rightarrow 0} (f(a) + hf'(a) + h\varphi(h)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(a) + \lim_{h \rightarrow 0} hf'(a) + \lim_{h \rightarrow 0} h\varphi(h) \\ &= f(a), \end{aligned}$$

ce qui prouve que f est continue en a .

Remarque

Attention ! La réciproque est fausse. Le contre-exemple qui suit est à retenir.

La fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0. Étudions sa dérivabilité en 0.

Pour tout réel $x \neq 0$, nous avons

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Il en résulte

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1,$$

ce qui prouve que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

En d'autres termes, la représentation graphique de la fonction $x \mapsto |x|$ admet à l'origine du repère deux demi-tangentes de pente 1 pour $x > 0$ et de pente -1 pour $x < 0$.

Remarque

Nous disposons de la relation par récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{C}^{n+1}(I) \subset \mathcal{D}^{n+1}(I) \subset \mathcal{C}^n(I).$$

Autrement dit, une fonction dont la dérivée $n + 1$ est continue sur I est nécessairement dérivable $n + 1$ fois sur I , et comme une fonction dérivable sur I est continue sur I , alors la dérivée n -ième de la fonction est continue.

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les ensembles $\mathcal{C}^n(I)$ et $\mathcal{D}^n(I)$ sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel des fonctions continues $\mathcal{C}^0(I)$, ce qui par propriétés des espaces vectoriels, entraîne le paragraphe qui suit.

10.1.4 Opérations sur les fonctions continues en un point**Proposition 10.5**

Soient un réel λ , u et v deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I , continues en $a \in I$.

Les fonctions

- $u + v$
- λu
- $u \cdot v$
- $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$, avec $v(a) \neq 0$

sont continues en a .

Démonstration

La continuité de chacune de ces fonctions est acquise en appliquant les opérations sur les limites en a (et pour les deux premières par propriétés de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0(I)$).

Corollaire 10.6

Les fonctions polynômes et rationnelles sont continues en tout point où elles sont définies.

Démonstration

Nous utilisons la proposition précédente.

- Par multiplication par un réel de fonctions puissances puis par addition, un polynôme est continu en tout point où il est défini.
- Par quotient de deux polynômes, une fonction rationnelle est continue en tout point où elle est définie.

Proposition 10.7 – Composition et continuité en un point

Soient u une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$, g une fonction définie sur un intervalle J .

Nous supposons que $u(a) \in J$.

Si u est continue en a et g est continue en $u(a)$, alors $g \circ u$ est continue en a .

Autrement dit, si $u(I) \subset J$:

$$(u \in \mathcal{C}^0(I)) \wedge (g \in \mathcal{C}^0(J)) \implies g \circ u \in \mathcal{C}^0(I).$$

Démonstration

Puisque u est continue en a et g est continue en $u(a)$, nous avons

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow u(a)} g(X) = g(u(a)).$$

Par composition, en appliquant le théorème 9.21, nous en déduisons

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ u)(x) = g(u(a)) = (g \circ u)(a),$$

ce qui justifie la continuité de $g \circ u$ en a .

Corollaire 10.8

Soit u une fonction définie sur un intervalle ouvert et continue en $a \in I$.

Sous réserve d'être définies en a , les fonctions

$$x \mapsto u^n(x), \text{ avec } n \in \mathbb{Z},$$

$$x \mapsto \sqrt{u(x)},$$

$$x \mapsto \cos(u(x)),$$

$$x \mapsto \sin(u(x)),$$

$$x \mapsto \tan(u(x)),$$

$$x \mapsto \exp(u(x)),$$

sont continues en a .

Démonstration

Cela résulte immédiatement par composition, en appliquant la proposition précédente.

10.1.5 Composée d'une suite par une fonction continue en un point

Proposition 10.9

Soient g une fonction définie sur un intervalle ouvert I , (u_n) une suite définie sur \mathbb{N} et un réel $\ell \in I$.

On suppose que la condition suivante est réalisée

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in I.$$

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et g est continue en ℓ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n) = g(\ell) = g\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right).$$

Démonstration

Puisque g est continue en ℓ , nous avons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow \ell} g(X) = g(\ell).$$

En appliquant la proposition 9.22 sur la limite de la composée d'une suite par une fonction, nous en concluons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n) = g(\ell) = g\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right).$$

Corollaire 10.10

Les données sont celles de la proposition précédente.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)^p = \ell^p$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{\ell} \quad \text{avec } u_n \geq 0, \ell \geq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = |\ell|$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(u_n)^p} = \frac{1}{\ell^p} \quad \text{avec } u_n \neq 0, \ell \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos u_n = \cos \ell$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin u_n = \sin \ell$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tan u_n = \tan \ell$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp(u_n) = e^\ell$$

Démonstration

Ce corollaire résulte de la proposition précédente en composant une suite par une fonction de référence continue en un point où elle est définie.

Remarque

Nous admettons que la réciproque de cette proposition est vraie. Cette équivalence est nommée « caractérisation séquentielle ^a » d'une fonction continue en un point.

^a. L'adjectif “séquentielle” est issu du mot anglais “sequence” dont la traduction est “suite” en français.

10.1.6 Suite récurrente et fonction continue en un point**Proposition 10.11**

Soient g une fonction définie sur un intervalle ouvert I et un réel $\ell \in I$.

Étant donnée une suite (u_n) définie sur \mathbb{N} satisfaisant à

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$
- u_0 est donné
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$.

Si (u_n) converge vers ℓ et si g est continue en ℓ , alors $\ell = g(\ell)$.

Démonstration

- D'une part, en appliquant la proposition 10.9, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et g est continue en ℓ , alors nous savons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n) = g(\ell)$$

- D'autre part, montrons que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$.

En effet, un réel $\varepsilon > 0$ étant donné, puisque (u_n) converge vers le réel ℓ , il vient

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Or, $n \geq N$ implique $n + 1 \geq N$, ce qui prouve que $|u_{n+1} - \ell| < \varepsilon$.

Par suite, nous avons montré que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$.

- Comme, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = g(u_n)$, par unicité de la limite, nous en concluons

$$g(\ell) = \ell.$$

Remarque

- Avec les données de la proposition, le réel ℓ est une solution dans l'intervalle I de l'équation $g(x) = x$.
- La réciproque est fausse, c'est-à-dire l'équation $g(x) = x$ peut avoir un ensemble non vide de solutions bien que la suite (u_n) diverge.
Comme contre-exemple, nous considérons la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2u_n + 2$, qui diverge par récurrence immédiate.
Mais l'équation $2x + 2 = x$ a pour solution $x = -2$.
- Par négation de la proposition précédente, si l'équation $g(x) = x$ n'a pas de solution dans l'intervalle I , alors la suite (u_n) diverge.

Exemple 10.3

Nous considérons la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par

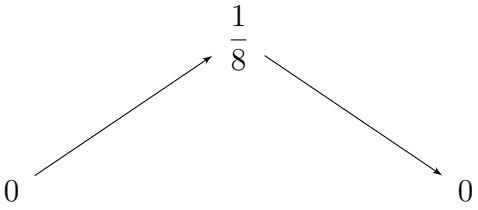
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{5} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1 - u_n) \end{cases}$$

Nous observons que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}x(1 - x)$ génère la suite (u_n) , c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n),$$

Nous déterminons les variations de cette fonction sur l'intervalle $[0,1]$.

Puisque, pour tout réel $x \in [0,1]$, nous avons $f'(x) = \frac{1}{2} - x$, nous obtenons son tableau de variations :

x	0	$\frac{1}{2}$	1
f'	+	0	-
f			

Nous en déduisons

$$\forall x \in [0,1], \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{8} \leq 1,$$

ce qui permet d'affirmer, par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq 1.$$

De plus, pour tout entier naturel n , nous avons

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n(1 - u_n) - u_n = -\frac{1}{2}(u_n^2 + u_n) < 0.$$

Nous en déduisons que cette suite est décroissante et puisqu'elle est minorée par 0, nous en concluons qu'elle converge vers un réel $\ell \in [0,1]$.

La fonction f est continue au point ℓ , donc en appliquant la proposition précédente, nous savons que ℓ est une solution de l'équation $f(x) = x$.

Il vient

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{1}{2}x(1-x) = x \\ &\iff -\frac{1}{2}x(1+x) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -1. \end{aligned}$$

Puisque $\ell \in [0,1]$, nous en concluons

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

10.2 Continuité sur un intervalle

10.2.1 Définitions

Définition 10.2

Une fonction f est *continue sur un intervalle ouvert* I si et seulement si quel que soit le réel $a \in I$, f est continue en a .

Remarque

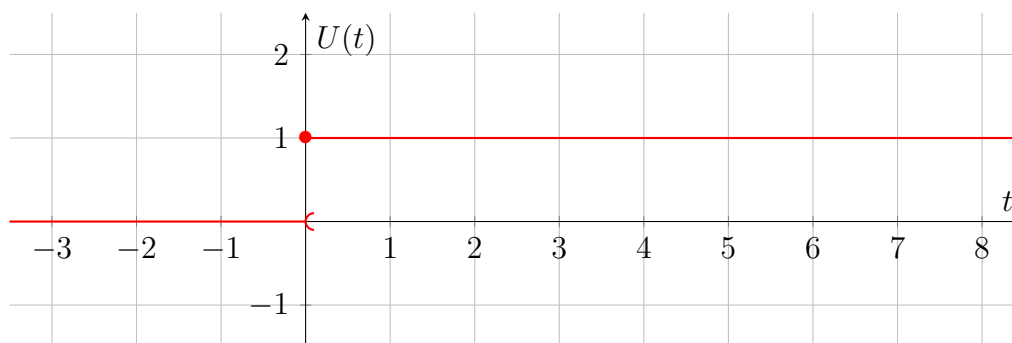
- Si I est semi-fermé ou fermé, par exemple $I = [\alpha, \beta]$, f est continue sur I si et seulement si
 - f est continue sur $] \alpha, \beta[$,
 - f est continue à droite en α ,
 - f est continue à gauche en β .
- D'une façon imagée, f est continue sur un intervalle I signifie que sa courbe représentative \mathcal{C}_f peut être dessinée, « sans lever le crayon ».
- La suite de ce chapitre a pour finalité l'étude de l'action d'une fonction continue sur un intervalle.

Nous donnons ci-après quelques exemples d'images d'intervalles selon que la fonction est ou n'est pas continue.

Exemple 10.4

Nous donnons la représentation graphique de la fonction échelon unité U définie sur \mathbb{R} par

$$U(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$



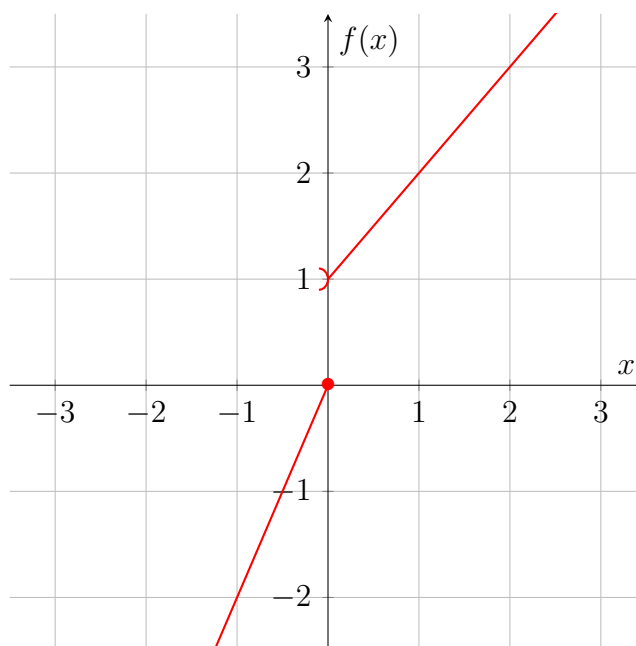
L'image de l'intervalle $[-1, 2]$ par la fonction U est $\{0, 1\}$. Autrement dit :

$$U([-1, 2]) = \{0, 1\}.$$

Nous observons graphiquement que $U([-1, 2])$ n'est pas un intervalle.

Exemple 10.5

Nous donnons la courbe représentative d'une fonction f qui n'est pas continue en 0 :



L'image de l'intervalle $[-1, 2]$ par la fonction f est $[-2, 0[\cup]1, 3]$. Autrement dit :

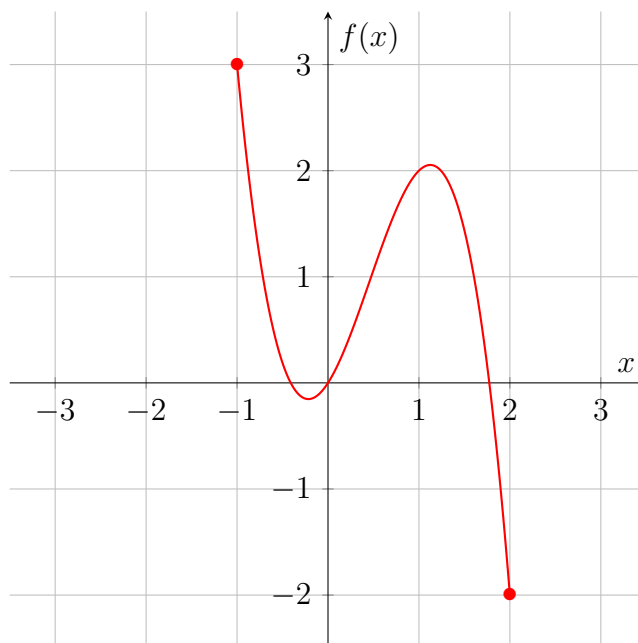
$$f([-1, 2]) = [-2, 0[\cup]1, 3].$$

Nous observons graphiquement que $f([-1, 2])$ n'est pas un intervalle.

De plus, quel que soit le réel $k \in [0, 1]$, l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solution.

Exemple 10.6

Nous donnons la courbe représentative d'une fonction f qui cette fois est continue sur l'intervalle $[-1, 2]$:



L'image de l'intervalle $[-1, 2]$ par la fonction f est $[-2, 3]$. Autrement dit :

$$f([-1, 2]) = [-2, 3].$$

Nous observons graphiquement que $f([-1, 2])$ est un intervalle.

De plus, quel que soit le réel $k \in [-2, 3]$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1; 2]$.

10.2.2 Propriétés des valeurs intermédiaires**Proposition 10.12 – Méthode de dichotomie (ou Théorème de Bolzano)**

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$.

Si $f(a)f(b) \leq 0$, alors

$$\exists c \in [a, b], \quad f(c) = 0.$$

En d'autres termes, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a, b]$.

Démonstration

Cette preuve est difficile mais édifiante par les outils sur les suites qu'elle mobilise. C'est pour cette raison que nous vous la proposons en détail et qu'elle sera une démonstration importante au programme de colle. Elle comporte 7 étapes.

[1] Cas particuliers et définitions de deux suites.

- Si $f(a) = 0$ (respectivement $f(b) = 0$), alors $c = a$ (respectivement $c = b$) répond à la question.

Pour fixer les idées, nous supposons que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.

- Nous considérons les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur \mathbb{N} par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b, \end{cases}$$

et, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} \text{— si } f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) &\geq 0, \text{ alors } \begin{cases} u_{n+1} = u_n \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \\ \text{— si } f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) &< 0, \text{ alors } \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = v_n \end{cases} \end{aligned}$$

[2] Nous prouvons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n - v_n}{2}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Si $f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) \geq 0$, alors

$$u_{n+1} - v_{n+1} = u_n - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{u_n - v_n}{2}.$$

- Si $f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) < 0$, alors

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2}.$$

Nous en concluons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n - v_n}{2}.$$

[3] Nous déduisons de [2]

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n,$$

En effet, l'étape [2] signifie que la suite $(u_n - v_n)$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 - v_0 = a - b$.

Il en résulte, pour tout entier naturel n ,

$$u_n - v_n = (u_0 - v_0)q^n = (a - b)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{a - b}{2^n}.$$

Puisque $a < b$, nous en déduisons $u_n - v_n < 0$, ce qui implique

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n.$$

[4] Variations des suites (u_n) et (v_n) .

- Variations de (u_n) .

— Si $f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) \geq 0$, alors

$$u_{n+1} - u_n = u_n - u_n = 0, \quad \text{donc } u_{n+1} \geq u_n.$$

— Si $f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) < 0$, alors

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2},$$

ce qui prouve, en appliquant l'inégalité [3],

$$u_{n+1} - u_n \geq 0, \quad \text{soit } u_{n+1} \geq u_n.$$

Nous en concluons que la suite (u_n) est croissante.

- Variations de (v_n) .

— Si $f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) \geq 0$, alors

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2},$$

ce qui prouve, en appliquant l'inégalité [3],

$$v_{n+1} - v_n \leq 0, \quad \text{soit } v_{n+1} \leq v_n.$$

— Si $f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) < 0$, alors

$$v_{n+1} - v_n = v_n - v_n = 0, \quad \text{donc } v_{n+1} \leq v_n.$$

Nous en concluons que la suite (v_n) est décroissante.

[5] Limite de $f(u_n)$ et de $f(v_n)$.

- De [3], nous déduisons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a - b}{2^n} = 0.$$

Comme de plus, d'après [4], la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante, nous en concluons que ces deux suites sont adjacentes et par suite elles convergent vers un même réel c .

- Toujours d'après [4], pour tout entier naturel n , nous avons

$$u_n \geq u_0 \quad \text{et} \quad v_n \leq v_0,$$

c'est-à-dire, en utilisant l'inégalité [3],

$$a \leq u_n \leq v_n \leq b,$$

soit

$$u_n \in [a, b] \quad \text{et} \quad v_n \in [a, b].$$

En passant à la limite sur ces deux doubles inégalités, nous en déduisons

$$c \in [a, b].$$

- Puisque f est continue en $c \in [a, b]$, nous appliquons la proposition 10.9 aux suites (u_n) et (v_n) , ce qui donne par composition

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(c) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n).$$

[6] Signe de $f(u_n)$ et $f(v_n)$.

- Montrons par récurrence la propriété définie sur \mathbb{N} par :

$$\mathcal{P}(n) : f(u_n) \leq 0.$$

Initialisation

$f(u_0) = f(a) \leq 0$, ce qui implique

$$f(u_0) \leq 0.$$

$\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, *i.e.* $f(u_n) \leq 0$.

— Si $f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) \geq 0$, alors :

$$u_{n+1} = u_n \quad \text{donc} \quad f(u_{n+1}) = f(u_n) \leq 0 \quad (\text{d'après } \mathcal{P}(n)),$$

ce qui prouve dans ce cas que l'inégalité proposée est héréditaire.

— Si $f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) < 0$, alors :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2},$$

donc

$$f(u_{n+1}) = f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) < 0$$

soit $f(u_{n+1}) \leq 0$, ce qui prouve dans ce second cas que l'inégalité proposée est héréditaire.

En appliquant le principe de récurrence, nous en concluons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(u_n) < 0.$$

- Montrons par récurrence la propriété définie sur \mathbb{N} par

$$\mathcal{Q}(n) : f(v_n) \geq 0.$$

Initialisation

$f(v_0) = f(b) \geq 0$, ce qui implique

$$f(v_0) \geq 0.$$

$\mathcal{Q}(0)$ est donc vraie.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{Q}(n)$ soit vraie, *i.e.* $f(v_n) \geq 0$.

— Si $f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) \geq 0$, alors :

$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2},$$

donc

$$f(v_{n+1}) = f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) \geq 0.$$

ce qui prouve dans ce cas que l'inégalité proposée est héréditaire.

— Si $f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) < 0$, alors :

$$v_{n+1} = v_n \quad \text{donc} \quad f(v_{n+1}) = f(v_n) \geq 0 \quad (\text{d'après } \mathcal{Q}(n)).$$

Dans ce second cas, l'inégalité proposée est aussi héréditaire.

En appliquant le principe de récurrence, nous en concluons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(v_n) \geq 0.$$

[7] Conclusion.

Puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(c) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(u_n) \leq 0,$$

nous en déduisons par conservation des inégalités par passage à la limite,

$$f(c) \leq 0.$$

De la même façon, puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = f(c) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(v_n) \geq 0,$$

nous obtenons

$$f(c) \geq 0.$$

Ainsi, nous en concluons

$$f(c) = 0.$$

Remarque

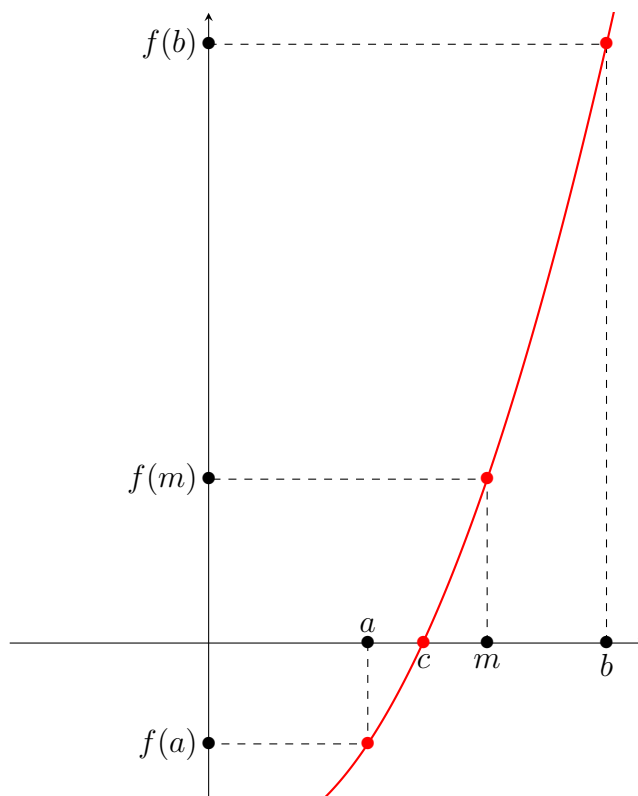
Les suites (u_n) et (v_n) fournissent un algorithme qui détermine, avec une précision donnée, une approximation d'une solution $c \in [a, b]$ de l'équation $f(x) = 0$. Cet algorithme est la méthode de dichotomie que nous décrivons ci-après.

Algorithme de dichotomie Pour fixer les idées, nous localisons la solution c de façon unique dans un intervalle $[a, b]$ sur lequel la fonction f est monotone, par exemple croissante.

Nous considérons le centre $m = \frac{a+b}{2}$ de l'intervalle $[a, b]$.

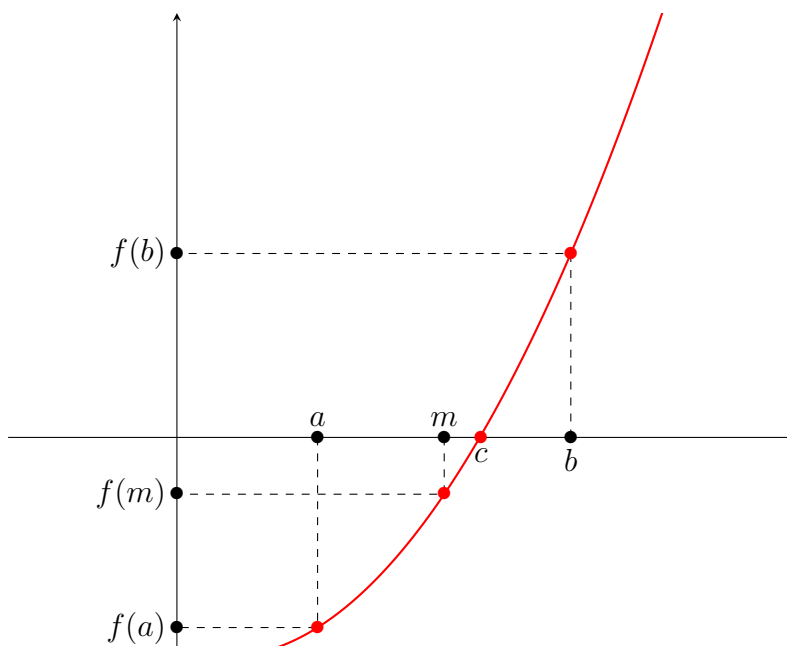
C'est le signe de $f(m)$ qui induit deux cas selon la position de m relativement à c .

1^{er} cas : $f(a)f(m) < 0$.



Dans ce cas, $c \in [a, m]$, nous réitérons le processus dans l'intervalle $[a, m]$ en affectant à b la valeur m .

2^e cas : $f(a)f(m) > 0$.



Dans ce cas, $c \in [m, b]$, nous réitérons le processus dans l'intervalle $[m, b]$ en affectant à a la valeur m .

La fonction f , les réels a et b ainsi que l'entier p étant choisis en entrée, l'algorithme qui suit restitue une valeur approchée à 10^{-p} près.

```

1 def dichot(f,a,b,p) :
2     while b-a > 10**(-p) :
3         m=(a+b)/2
4         if f(a)*f(m)<0 :
5             b=m
6         else :
7             a=m
8     return b

```

Exemple 10.7

Pour exécuter cet algorithme, nous considérons la fonction

$$f : x \longmapsto x^3 + x - 1.$$

Une observation graphique permet de localiser une solution $c \in [0,1]$ de l'équation $x^3 - x - 1 = 0$.

La fonction f est continue sur $[0,1]$.

De plus, nous avons :

$$f(0) = -1 \quad \text{et} \quad f(1) = 1.$$

La proposition précédente permet d'affirmer l'existence d'une solution $c \in [0,1]$ de l'équation $x^3 + x - 1 = 0$.

On définit la fonction f en Python :

```

1 def f(x) :
2     return(x**3+x-1)

```

En utilisant la fonction `dichot(f,0,1,3)` définie précédemment, on obtient :

```
>>>0.6826171875
```

ce qui donne $c \simeq 0,683$ au millième près.

Théorème 10.13 – Théorème des valeurs intermédiaires

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que

$$f(c) = k.$$

Démonstration

Nous distinguons par disjonction deux cas.

1^{er} cas. Si $f(a) = k$ (respectivement $f(b) = k$), alors $c = a$ convient (respectivement $c = b$).

2^e cas. Pour fixer les idées, nous supposons que $f(a) < k < f(b)$.

Nous considérons la fonction g définie sur $[a,b]$ par $g(x) = f(x) - k$.

- Les fonctions f et $x \longmapsto -k$ sont continues sur $[a,b]$, par somme, il en est de

même de la fonction g .

- De plus, puisque $f(a) < k < f(b)$, nous en déduisons

$$g(a)g(b) = (f(a) - k)(f(b) - k) < 0.$$

En appliquant la proposition 10.12 de dichotomie, nous obtenons

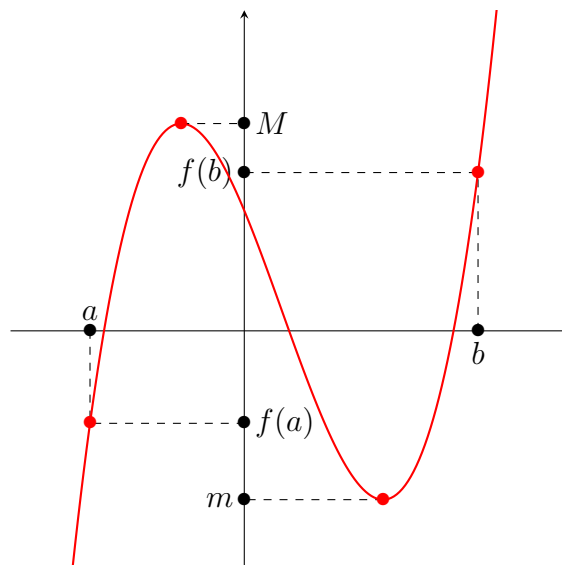
$$\exists c \in]a, b[, \quad g(c) = 0,$$

soit $f(c) = k$.

Pour conclure, pour tout $k \in [f(a), f(b)]$ (respectivement $k \in [f(b), f(a)]$), il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

Remarque

- Le théorème des valeurs intermédiaires (TVI) signifie que, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a, b]$ mais l'unicité de cette solution n'est pas garantie par ce théorème. On a donc la surjectivité de la restriction $f|_{[a, b]}$.
- Lorsque $k = 0$, nous retrouvons le théorème de Bolzano, qui est donc un cas particulier du TVI.
- Le théorème des valeurs intermédiaires donne une preuve de l'existence *implicite* d'au moins une solution de l'équation $f(x) = k$, ce qui signifie, en général, qu'une résolution algébrique de cette dernière est impossible. Une méthode comme la dichotomie est alors privilégiée. Elle permet d'approximer avec une précision donnée une solution localisée par les valeurs intermédiaires de l'équation $f(x) - k = 0$.
- La condition de continuité de f est essentielle pour appliquer le théorème des valeurs intermédiaires. L'exemple 10.4 en est un contre-exemple.
- Nous pouvons observer graphiquement que l'intervalle $[f(a), f(b)]$ (respectivement $[f(b), f(a)]$) est inclus dans $f([a, b]) = [m, M]$:



Remarque

L'unicité de la solution de l'équation $f(x) = k$ est assurée lorsque f est une bijection : cela constitue le *théorème de la bijection* (Théorème 10.18).

Exemple 10.8

Nous considérons sur l'intervalle $[0,1]$ la fonction $g : x \mapsto x + 3 - e^{2x}$ et l'équation $g(x) = 1$.

Cette fonction est continue par somme sur $[0,1]$.

De plus, nous avons

$$g(0) = 2 \quad \text{et} \quad g(1) = 4 - e^2 < 0,$$

donc $1 \in [g(1), g(0)]$.

Les conditions sont réunies pour appliquer le théorème des valeurs intermédiaires, ce qui justifie que l'équation $g(x) = 1$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0,1]$.

Graphiquement, nous observons que cette solution est unique dans cet intervalle.

Puisque $g(x) = 1 \iff x + 2 - e^{2x} = 0$, nous appliquons l'algorithme de dichotomie pour déterminer une valeur approchée de cette solution en considérant en entrée la fonction $f : x \mapsto x + 2 - e^{2x}$, ce qui donne, avec une précision de 10^{-3} :

```

1 from math import *
2
3 def f(x) :
4     return x+2-exp(2*x)
5
6 dico(f,0,1,3)
```

Une exécution de ce programme donne :

```
>>>0.4482421875.
```

10.2.3 Action d'une fonction continue sur un intervalle**Proposition 10.14 – Image d'un intervalle quelconque**

Si f est une fonction continue sur un intervalle I , alors $f(I)$ est un intervalle.

Démonstration

Soient $a \in I$ et $b \in I$ tels que $a < b$. On a donc $[a,b] \subset I$.

Supposons, pour fixer les idées, que $f(a) \leq f(b)$. En posant $y_1 = f(a)$ et $y_2 = f(b)$, nous avons

$$(y_1, y_2) \in f(I)^2.$$

La fonction f est continue sur I , elle l'est donc sur $[a,b]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $y \in [f(a), f(b)]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = y$.

Autrement dit :

$$\forall y \in [y_1, y_2], y \in f(I),$$

ce qui est la définition de $f(I)$ intervalle.

Remarque

Les intervalles I et $f(I)$ ne sont pas toujours de même nature.

Les exemples qui suivent en sont une illustration :

- Nous considérons la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$.
Graphiquement, nous observons que l'intervalle ouvert $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ a pour image par f l'intervalle semi-ouvert (ou semi-fermé) $]0, 2]$.
- $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ et $\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

Lemme 10.15 – Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

Soient A une partie non vide et majorée de \mathbb{R} et M un majorant de A .

Nous disposons de l'équivalence suivante :

$$M = \sup A \iff \exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = M.$$

Démonstration

D'après la propriété de la borne supérieure (théorème 4.4), A admet une borne supérieure.

\Rightarrow Supposons que $M = \sup A$, c'est-à-dire, par la caractérisation de la borne supérieure :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \quad M - \varepsilon < x.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

En posant $\varepsilon_n = \frac{1}{n+1}$, il vient :

$$\exists x_n \in A, \quad M - x_n < \varepsilon_n.$$

M étant un majorant (par définition), la suite (x_n) vérifie alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n - M| < \frac{1}{n+1}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = M.$$

La suite (x_n) ainsi construite convient donc.

\Leftarrow Supposons que

$$\exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = M.$$

Par définition :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - M| < \varepsilon,$$

ce qui implique, comme M est un majorant de A et (u_n) est une suite à valeur dans A :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \quad M - \varepsilon < x,$$

ce qui équivaut à $M = \sup A$.

Remarque

On dispose évidemment de la caractérisation équivalente pour la borne inférieure.

Proposition 10.16 – Image d'un intervalle fermé

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors $f([a, b])$ est un intervalle fermé.

Plus précisément, si f est continue sur $[a, b]$, alors $f([a, b]) = [m, M]$, où m est le minimum et M le maximum de f sur $[a, b]$.

Démonstration

- Montrons dans un premier temps que $f([a, b])$ est borné. Supposons par l'absurde le contraire.

Dans ce cas, il existe $c \in [a, b]$ tel que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty$.

Par conséquent, f n'est pas continue en $c \in [a, b]$, ce qui est contradictoire puisqu'elle est continue sur $[a, b]$.

Ainsi, les bornes inférieures et supérieures de $f([a, b])$ existent.

- Montrons maintenant que ces bornes sont les extrema de $f([a, b])$. Notons $m = \inf f([a, b])$ et $M = \sup f([a, b])$.

— D'après le lemme 10.15, il existe une suite $(y_n) \in f([a, b])^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = M$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons, comme $y_n \in f([a, b])$:

$$\exists x_n \in [a, b], \quad y_n = f(x_n).$$

La suite (x_n) ainsi définie est telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = M.$$

Posons $x_M = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [a, b]$, donc $a \leq x_n \leq b$.

Par passage à la limite dans cette inégalité, nous avons :

$$x_M \in [a, b].$$

La fonction f étant continue sur $[a, b]$, par composée (proposition 10.9), il vient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right) = f(x_M) = M.$$

Comme $x_M \in [a, b]$, $M = f(x_M) \in f([a, b])$.

M est donc le maximum de $f([a, b])$.

- Par un raisonnement analogue, nous montrons que m est le minimum de $f([a,b])$.

$f([a,b])$ étant un intervalle d'après la proposition 10.14, par définition du maximum et du minimum d'un ensemble, nous obtenons :

$$f([a,b]) = [m,M].$$

Remarque

- Nous rappelons que

- le minimum m est atteint par f sur $[a,b]$, c'est-à-dire :

$$\exists \alpha \in [a,b], \quad f(\alpha) = m.$$

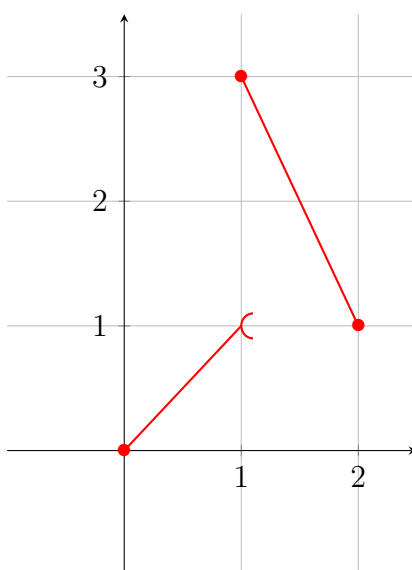
- le maximum M est atteint par f sur $[a,b]$, c'est-à-dire :

$$\exists \beta \in [a,b], \quad f(\beta) = M.$$

- La réciproque de cette proposition est fausse comme le montre le contre-exemple qui suit.

Nous représentons graphiquement la fonction f définie sur l'intervalle $[0,2]$ par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1[\\ -2x + 5 & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$$



Cette fonction est discontinue en $x = 1$ bien que l'image de l'intervalle fermé $[0,2]$ par f soit l'intervalle fermé $[0,3]$.

10.2.4 Continuité et monotonie stricte sur un intervalle

Proposition 10.17

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle $[a, b]$.

Nous disposons de la propriété suivante :

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = k.$$

Démonstration

Pour fixer les idées, nous supposons que f est croissante strictement sur $[a, b]$.

- Existence d'une solution.

Dans ce cas, nous avons $k \in [f(a), f(b)]$ et le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un solution $c \in [a, b]$ de l'équation $f(x) = k$.

- Unicité de la solution.

Nous supposons que l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions c et c' distinctes (par exemple $c < c'$) appartenant à l'intervalle $[a, b]$.

Puisque f est croissante strictement sur $[a, b]$, nous obtenons

$$f(c) < f(c'),$$

c'est-à-dire $k < k$, ce qui est contradictoire.

Par l'absurde, nous avons prouvé que $c = c'$.

Remarque

- Si f est continue et strictement croissante sur $[a, b]$, l'image de cet intervalle est l'intervalle fermé $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$.

Dans ce cas, la proposition précédente signifie également :

$$\forall k \in [f(a), f(b)], \exists! c \in [a, b], \quad f(c) = k,$$

ce qui correspond à la définition de $f|_{[a, b]}$ bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.

- Si f est strictement décroissante sur $[a, b]$, sa restriction à $[a, b]$, $f|_{[a, b]}$, est aussi une bijection, cette fois de $[a, b]$ sur $[f(b), f(a)]$.

Exemple 10.9

Nous étudions l'équation $x^3 - e^{-x} = 1$ dans l'intervalle $[0, 2]$.

- Pour cela, nous considérons sur $[0, 2]$ la fonction $f : x \mapsto x^3 - e^{-x}$.

Cette fonction est continue sur $[0, 2]$ par composition et différence.

De plus, nous avons

$$f(0) = -1 \quad \text{et} \quad f(2) = 8 - e^{-2},$$

donc $1 \in [f(0), f(2)]$, ce qui permet d'appliquer le théorème des valeurs inter-

médianes, qui assure que l'équation $g(x) = 1$ admet au moins une solution c dans l'intervalle $[0,2]$.

La fonction f est dérivable sur $[0,2]$ et nous avons

$$f'(x) = 3x^2 + e^{-x} > 0,$$

ce qui justifie que f est croissante strictement sur $[0,2]$.

L'unicité de la solution c de cette équation est ainsi acquise d'après la proposition précédente.

- Pour introduire la suite de ce chapitre, nous pouvons étudier par extension cette équation sur \mathbb{R} .

De la même façon, la fonction f est continue et croissante strictement sur \mathbb{R} .

En remarquant que par somme,

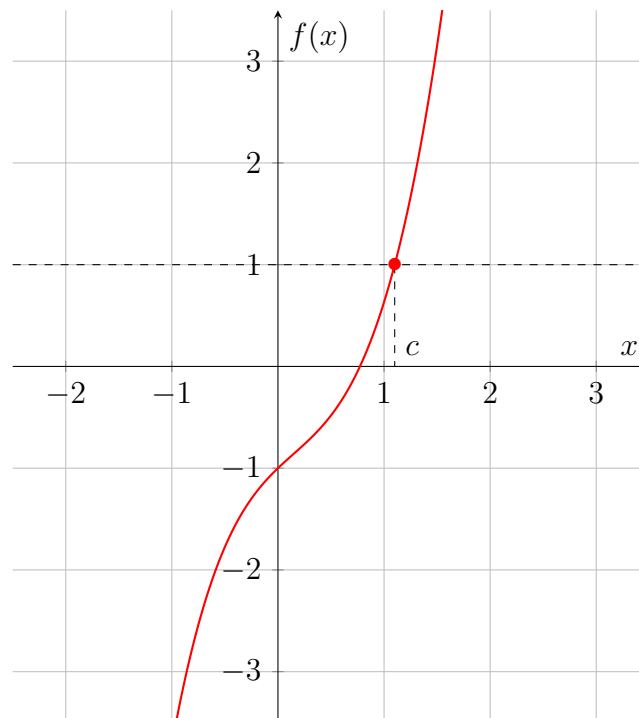
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

nous en concluons par extension, que f est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .

Par conséquent, le réel 1 admet par f un unique antécédent $c \in \mathbb{R}$, ce qui prouve que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution $c \in \mathbb{R}$.

- Il faut remarquer que la localisation de la solution c dans l'intervalle $[0,2]$ permet d'approximer cette dernière, par dichotomie.

Pour clore cet exemple, nous contrôlons graphiquement :



Théorème 10.18 – Théorème de la bijection

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I quelconque, alors f est une bijection de I sur l'intervalle image $f(I)$, ce qui signifie

$$\forall y \in f(I), \exists ! x \in I, \quad f(x) = y.$$

Démonstration

Puisque f est continue sur l'intervalle I , par extension de la propriété des valeurs intermédiaires, nous énonçons que tout réel y appartenant à l'intervalle $f(I)$ admet au moins un antécédent $x \in I$ par la fonction f .

L'unicité du réel x est établie comme dans la preuve de la proposition précédente. En effet, nous supposons par l'absurde que y admet deux antécédents distincts x et x' (par exemple $x < x'$).

Pour fixer les idées, nous supposons que f est décroissante strictement sur I , ce qui implique

$$f(x) > f(x'),$$

soit $y > y$, ce qui est contradictoire.

Par l'absurde, nous avons prouvé que tout réel y appartenant à l'intervalle $f(I)$ admet un unique antécédent par la fonction f dans I .

Remarque

- Selon la nature de l'intervalle I , l'intervalle $f(I)$ est déterminé dans le contexte.

Par exemple :

- si f est croissante strictement et continue sur $I =]a, b[$, alors

$$f(I) = \left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$$

- si f est décroissante strictement et continue sur $I =]a, +\infty[$, alors

$$f(I) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$$

- si f est croissante strictement et continue sur $I =]-\infty, +\infty[$, alors

$$f(I) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[.$$

- Le théorème de la bijection est particulièrement important car il permet la construction de nouvelles fonctions de référence, comme nous allons le voir dans la section 10.3.

Exemple 10.10 – Fonction racine carrée

Soit f la restriction à \mathbb{R}_+ de la fonction $x \mapsto x^2$.

Cette fonction est continue et croissante strictement sur \mathbb{R}_+ , c'est donc une bijection

de $[0, +\infty[$ sur l'intervalle

$$f(\mathbb{R}_+) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \right[= [0, +\infty[.$$

Nous en déduisons que, pour tout réel $y \in \mathbb{R}_+$, l'équation $x^2 = y$ admet une unique solution x dans \mathbb{R}_+ et nous savons que $x = \sqrt{y}$ convient.

Nous définissons ainsi la fonction racine carrée $y \mapsto \sqrt{y}$, en associant à chaque $y \in \mathbb{R}_+$ son unique antécédent $x = \sqrt{y}$ par la fonction carré. C'est ce que nous avons vu avec la bijection réciproque à la section 3.4.

Exemple 10.11 – Fonction logarithme népérien

La fonction \exp est continue et croissante strictement sur \mathbb{R} , c'est donc une bijection de \mathbb{R} sur l'intervalle

$$\exp(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \right[=]0, +\infty[= \mathbb{R}_+^*.$$

Par conséquent, pour tout réel $y \in \mathbb{R}_+^*$, l'équation $\exp(x) = y$ admet une unique solution x dans \mathbb{R} qui est par définition le logarithme népérien de $y > 0$, noté $x = \ln(y)$.

Ainsi, nous définissons la fonction logarithme népérien $\ln : y \mapsto \ln y$, en associant à chaque $y \in \mathbb{R}_+^*$ son unique antécédent $x = \ln y$ par la fonction exponentielle. La fonction \ln est la bijection réciproque de l'exponentielle.

Nous pouvons retenir dès à présent l'équivalence suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad y = e^x \iff x = \ln y.$$

10.3 Fonction racine n -ième

Proposition 10.19

Soit un entier naturel $n \geq 2$ et un réel $a \geq 0$.
L'équation $x^n = a$ admet une unique solution dans \mathbb{R}_+ .

Démonstration

Pour tout entier $n \geq 2$, nous considérons la fonction puissance p_n définie sur \mathbb{R}_+ par

$$p_n(x) = x^n.$$

- Pour réviser, nous prouvons que p_n est croissante strictement sur \mathbb{R}_+ par une méthode directe.

Soient a et b deux réels appartenant à \mathbb{R}_+ tels que $a < b$.

Nous savons, depuis la classe de Première, factoriser $a^n - b^n$, ce qui donne

$$\begin{aligned} p_n(a) - p_n(b) &= a^n - b^n \\ &= (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k. \end{aligned}$$

Puisque $a < b$, cela implique que $a - b < 0$.

Puisque $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}_+$, avec $a \neq b$, nous en déduisons

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k > 0.$$

Il en résulte

$$p_n(a) < p_n(b),$$

ce qui prouve que p_n est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

- De plus p_n est continue sur \mathbb{R}_+ , c'est donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur son image

$$p_n(\mathbb{R}_+) = \left[p_n(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} p_n(x) \right[= [0, +\infty[= \mathbb{R}_+.$$

Par conséquent, tout réel $a \in \mathbb{R}_+$ admet par p_n un unique antécédent $x \in \mathbb{R}_+$, ce qui justifie que l'équation $x^n = a$ admet une unique solution dans \mathbb{R}_+ .

Définition 10.3 – Fonction racine n -ième

Soit un entier $n \geq 2$.

Pour chaque réel $a \in \mathbb{R}_+$, la *racine n -ième* du réel a , notée $\sqrt[n]{a}$, est l'unique solution appartenant à \mathbb{R}_+ de l'équation $x^n = a$.

La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ définie sur \mathbb{R}_+ est la fonction racine n -ième.

Remarque

- Nous retiendrons par définition que, pour tous les réels a et b appartenant à \mathbb{R}_+ , nous disposons de l'équivalence

$$b^n = a \iff b = \sqrt[n]{a}.$$

- Si $n \geq 2$ est un entier impair, la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ peut être définie sur \mathbb{R} , car dans ce cas, la fonction $x \mapsto x^n$ est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .

Proposition 10.20

Soit un entier $n \geq 2$. Pour tout réel $a \in \mathbb{R}_+$, nous avons

$$\left(\sqrt[n]{a} \right)^n = a \quad \text{et} \quad \sqrt[n]{a^n} = a.$$

Démonstration

Soit un réel $a > 0$.

- Par définition, $\sqrt[n]{a}$ est l'unique solution de l'équation $x^n = a$, ce qui signifie

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

- Pour justifier la seconde égalité, nous posons $b = a^n$. Il vient

$$\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n]{b},$$

ce qui implique

$$\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b = a^n.$$

Puisque $\sqrt[n]{b} \in \mathbb{R}_+$ et $a \in \mathbb{R}_+$, nous avons :

$$\sqrt[n]{b} = a,$$

ce qui justifie

$$\sqrt[n]{a^n} = a.$$

Remarque

La proposition précédente permet de poser, pour tout entier $n \geq 2$ et $x \in \mathbb{R}_+$,

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}.$$

En effet avec cette notation, nous avons :

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x^{\frac{n}{n}} = x \quad \text{et} \quad (x^n)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{n}{n}} = x,$$

ce qui signifie que les propriétés des exposants entiers peuvent être étendues à l'exposant rationnel $\frac{1}{n}$, avec $n \geq 2$. Nous le démontrons dans la proposition qui suit.

Proposition 10.21 – Action de la fonction racine n -ième sur la multiplication

Soit un entier $n \geq 2$.

Pour tous les réels $a \geq 0$ et $b \geq 0$, nous avons

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b},$$

soit

$$(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}}.$$

Démonstration

Soient un entier $n \geq 2$, a et b deux réels positifs.

En posant $\alpha = \sqrt[n]{a}$ et $\beta = \sqrt[n]{b}$, nous obtenons

$$a = \alpha^n \quad \text{et} \quad b = \beta^n, \quad \text{avec } \alpha \geq 0 \text{ et } \beta \geq 0.$$

Nous en déduisons

$$a \times b = \alpha^n \times \beta^n = (\alpha\beta)^n,$$

ce qui équivaut à

$$\alpha\beta = \sqrt[n]{ab}.$$

Nous en concluons

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}.$$

Remarque

De la même façon, en exercice, nous pourrions justifier que les propriétés algébriques de la fonction racine carrée se généralisent pour la fonction racine n -ième, c'est-à-dire :

- $\forall a \geq 0, \forall b \geq 0, \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad \text{soit} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}.$
- $\forall a \geq 0, \quad \sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[pn]{a} \quad \text{soit} \quad \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{p}} = a^{\frac{1}{pn}}, \quad \text{avec } p \geq 2 \text{ entier}.$

Chapitre 11

Dérivation : compléments

Sommaire

11.1 Dérivée de la composée de deux fonctions	205
11.1.1 Le cas général	205
11.1.2 Une généralisation de la dérivée de u^p	207
11.2 Dérivée seconde – Dérivée n-ième	210
11.3 Fonction convexe	214
11.3.1 Définition – Caractérisations	214
11.3.2 Dérivée et convexité	218
11.3.3 Point d’inflexion	223
11.4 Rolle et accroissements finis	224
11.4.1 Dérivée et extremum	224
11.4.2 Théorème de Rolle	226
11.4.3 Théorème des accroissements finis	228
11.4.4 Dérivée et sens de variations	229

Nous complétons dans ce chapitre les connaissances acquises en classe de Première à ce sujet.

Conformément aux directives du programme officiel, nous mettons en place la dérivation de la composée de deux fonctions, ce qui permet d’établir de nouvelles formules de dérivation. Dans ce contexte, nous introduisons également la notion de fonction convexe qui précise la position d’une courbe relativement à ses tangentes.

Pour aller plus loin, nous prouvons le théorème de Rolle et celui des accroissements finis, ce qui permet ensuite de donner une justification rigoureuse du lien entre le signe de la dérivée et sens de variations de la fonction considérée. Les accroissements finis autorisant aussi un traitement satisfaisant de la convergence de suites récurrentes non monotones, c’est la méthode du « point fixe ».

Nous étudions, d’un point de vue algorithmique, la résolution algébrique d’équations de la forme $f(x) = 0$:

- par la méthode de la sécante en lien avec la notion de convexité,
- par la méthode des tangentes ou de Newton.

Historiquement la notion de dérivée est le point de départ de l’analyse moderne. Au XVII^e siècle, Gottfried Wilhelm Leibniz et Isaac Newton amorcent l’idée de dérivée en proposant la notion « d’infiniment petit ». Cependant, cette notion est très intuitive donc

peu rigoureuse. Il faut attendre le XVIII^e siècle pour que d'Alembert affine la notion de dérivée en un point en considérant la notion de taux d'accroissement.

C'est avec Weierstrass au XIX^e siècle que le concept de dérivation est proposé tel que nous le connaissons de nos jours.

11.1 Dérivée de la composée de deux fonctions

11.1.1 Le cas général

Proposition 11.1 – Dérivée d'une fonction composée

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et g une fonction dérivable sur un intervalle J telles que :

$$\forall x \in I, \quad u(x) \in J,$$

alors

- La fonction $g \circ u$ définie sur I est dérivable sur I .
- $\forall x \in I, \quad (g \circ u)'(x) = u'(x) \times (g' \circ u)(x).$

Démonstration

Soit $a \in I$ tel que $u(a) \in J$.

Nous posons $b = u(a)$ et pour tout réel $y \in J$ tel que $y \neq b$,

$$T_b(y) = \frac{g(y) - g(b)}{y - b}.$$

Pour tout réel $x \neq a$, nous avons

$$\frac{(g \circ u)(x) - (g \circ u)(a)}{x - a} = \frac{g(u(x)) - g(u(a))}{x - a}.$$

Sous réserve que, pour $x \neq a$, on ait $u(x) \neq u(a)$, il vient

$$\begin{aligned} \frac{(g \circ u)(x) - (g \circ u)(a)}{x - a} &= \frac{g(u(x)) - g(u(a))}{u(x) - u(a)} \times \frac{u(x) - u(a)}{x - a} \\ &= T_b(u(x)) \times \frac{u(x) - u(a)}{x - a}. \end{aligned}$$

Puisque u est dérivable en a , nous avons

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x) - u(a)}{x - a} = u'(a).$$

De plus, la fonction u est continue en a , ce qui donne

$$\lim_{x \rightarrow a} u(x) = u(a).$$

Par conséquent, en posant $y = u(x)$ et sachant que g est dérivable en $b = u(a)$, par composition et produit de limites en a , nous obtenons

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(g \circ u)(x) - (g \circ u)(a)}{x - a} = u'(a) \times \lim_{x \rightarrow a} T_b(u(x)) = u'(a) \times g'(u(a))$$

ce qui prouve que, pour tout $a \in I$, $g \circ u$ est dérivable au point a .

Nous en concluons

$$\forall x \in I, \quad (g \circ u)'(x) = u'(x) \times (g' \circ u)(x).$$

Remarque

- Pour tout réel $x \in I$, nous obtenons

$$\begin{aligned}(g \circ u)'(x) &= g'(u(x)) \times u'(x) \\ &= (g' \circ u)(x) \times u'(x) \\ &= ((g' \circ u) \times u')(x).\end{aligned}$$

Nous en déduisons

- En termes fonctionnels : $(g \circ u)' = ((g' \circ u) \times u')$.
- En termes différentiels : $\frac{d(g \circ u)}{dx} = \frac{dg}{du} \frac{du}{dx}$.
- Cette démonstration est un peu restrictive car elle impose que la fonction u soit injective, ce qui signifie pour rappel que deux réels distincts ont des images distinctes par u .
Il existe une autre preuve qui n'impose pas cette restriction, mais elle est plus délicate à mettre en forme.
- Lorsque u est une fonction affine $x \mapsto ax + b$, nous retrouvons la dérivée de $f : x \mapsto g(ax + b)$ qui est, dans les conditions de la proposition,

$$\forall x \in I, \quad f' = ag'(ax + b).$$

Exemple 11.1

La fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$ définie sur \mathbb{R} est la composée de $x \mapsto -x^2$ qui est dérivable sur \mathbb{R} avec \exp qui est aussi dérivable sur \mathbb{R} .

La condition : $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) \in \mathbb{R}$, est immédiatement vérifiée.

Par composition, la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et nous avons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -2x \exp'(-x^2) = -2xe^{-x^2}.$$

Exemple 11.2

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{\sin x}$ définie sur $[0, \pi]$ est la composée de $x \mapsto \sin x$ dérivable sur $]0, \pi[$ avec $x \mapsto \sqrt{x}$ qui est dérivable sur $]0, +\infty[$.

La condition : $\forall x \in]0, \pi[, \sin x \in]0, +\infty[$, est satisfaite.

Par composition, la fonction f est dérivable sur $]0, \pi[$ et nous avons

$$\forall x \in]0, \pi[, \quad f'(x) = \sin' x \times \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}.$$

Exemple 11.3

Ici, nous employons une rédaction plus concise qui est utilisée en pratique.

La fonction $g : x \mapsto x^3 e^{\frac{1}{x}}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ par composition et produit.

Pour tout réel $x > 0$, nous obtenons

$$g'(x) = 3x^2 e^{\frac{1}{x}} + x^3 \left(-\frac{1}{x^2} \right) e^{\frac{1}{x}} = x e^{\frac{1}{x}} (3x - 1).$$

11.1.2 Une généralisation de la dérivée de u^p **Proposition 11.2**

Soient u une fonction dérivable sur un intervalle I et f la fonction $x \mapsto (u(x))^p$.

- Si $p \in \mathbb{N}^*$, alors f est dérivable sur I , et

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = pu'(x)(u(x))^{p-1}.$$

- Si $p \in \mathbb{Z}^*$ et pour tout $x \in I$, $u(x) \neq 0$, alors f est dérivable sur I , et

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = pu'(x)(u(x))^{p-1}.$$

- Si $p = \frac{1}{2}$ et pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$, alors $f : x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I , et

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \frac{1}{2}u'(x)(u(x))^{\frac{1}{2}-1} = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

- Si $p = \frac{1}{n}$, avec $n \geq 2$ et pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$, alors $f : x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est dérivable sur I , et

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \frac{1}{n}u'(x)(u(x))^{\frac{1}{n}-1} = \frac{u'(x)\sqrt[n]{u(x)}}{nu(x)}.$$

Démonstration

Nous étudions les quatre cas proposés.

- $p \in \mathbb{N}^*$.

Dans ce premier cas, f est la composée de la fonction puissance $g : x \mapsto x^p$ qui est dérivable sur \mathbb{R} avec la fonction u , dérivable sur I .

La condition : $\forall x \in I, u(x) \in \mathbb{R}$, est satisfaite.

Nous en concluons que $f = g \circ u$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, nous obtenons

$$f'(x) = u'(x)g'(u(x)) = pu'(x)(u(x))^{p-1}.$$

- $p \in \mathbb{Z}_-^*$ et pour tout $x \in I$, $u(x) \neq 0$.

Nous posons $n = -p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel $x \in I$, il vient

$$f(x) = (u(x))^{-n} = \frac{1}{(u(x))^n}.$$

En appliquant le 1^{er} cas, la fonction $v : x \mapsto (u(x))^n$ est dérivable et ne s'annule pas sur I .

Il en résulte que f est dérivable sur I par inverse.

Pour tout réel $x \in I$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= -\frac{v'(x)}{(v(x))^2} \\
 &= -\frac{nu'(x)(u(x))^{n-1}}{(u(x))^{2n}} \\
 &= (-n)u'(x)(u(x))^{n-1}(u(x))^{-2n} \\
 &= (-n)u'(x)(u(x))^{-n-1} \\
 &= pu'(x)(u(x))^{p-1}
 \end{aligned}$$

- $p = \frac{1}{2}$ et pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$.

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est la composée de $g : x \mapsto \sqrt{x}$ dérivable sur $]0, +\infty[$ avec la fonction u dérivable sur I .

La condition : $\forall x \in I$, $u(x) \in]0, +\infty[$, est satisfaite.

Par conséquent, par composition (proposition 11.1), la fonction $f = g \circ u$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, nous obtenons

$$f'(x) = u'(x)(g' \circ u)(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{1}{2}u'(x)(u(x))^{\frac{1}{2}-1}$$

- $p = \frac{1}{n}$, avec $n \geq 2$ et pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$.

Lors de l'exercice 12 du TD10, nous avons montré que la fonction $g : x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$, nous avons

$$g'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}.$$

La fonction $f : x \mapsto g \circ u(x)$ est la composée de $g : x \mapsto \sqrt[n]{x}$ dérivable sur $]0, +\infty[$ avec la fonction u dérivable sur I .

La condition : $\forall x \in I$, $u(x) \in]0, +\infty[$ est satisfaite.

Par conséquent, par composition, la fonction $f = g \circ u$, est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, nous obtenons :

$$f'(x) = u'(x)(g' \circ u)(x) = \frac{u'(x) \sqrt[n]{u(x)}}{nu(x)}.$$

Remarque

Nous avons généralisé la formule de dérivation

$$(u^p)' = pu'u^{p-1}$$

avec $p \in \mathbb{N}^*$ aux exposants entiers relatifs et aux exposants rationnels du type

$$p = \frac{1}{n}, \quad \text{avec } n \geq 2.$$

On démontre que cette formule de dérivation reste vraie lorsque l'exposant est un rationnel non nul, puis un réel non nul. Ce point sera abordé dans le chapitre 12.

Exemple 11.4

La fonction $f : x \mapsto (x^3 - 1)^5$, définie sur \mathbb{R} , est dérivable sur \mathbb{R} par composition. Pour tout réel x , nous obtenons

$$f'(x) = 15x^2(x^3 - 1)^4.$$

Exemple 11.5

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{(x^2 - 1)^5}$ est dérivable pour les réels x tels que $x^2 - 1 \neq 0$, c'est-à-dire, par abus de langage, sur

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Pour tout réel $x \in \mathcal{D}_f$, nous avons $f(x) = (x^2 - 1)^{-5}$. Nous en déduisons

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-5) \times 2x(x^2 - 1)^{-5-1} \\ &= -\frac{10x}{(x^2 - 1)^6}. \end{aligned}$$

Exemple 11.6

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{e^x - 1}$ est dérivable par composition, pour les réels x tels que $e^x - 1 > 0$, c'est-à-dire sur $]0, +\infty[$. Pour tout réel $x > 0$, nous obtenons

$$f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}.$$

Exemple 11.7

La fonction $f : x \mapsto \sqrt[3]{x^3 - 1}$ est dérivable par composition, pour les réels x tels que $x^3 - 1 > 0$, c'est-à-dire sur $]1, +\infty[$.

Pour tout réel $x > 1$, nous avons

$$f(x) = (x^3 - 1)^{\frac{1}{3}}.$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3} \times 3x^2(x^3 - 1)^{\frac{1}{3}-1} \\ &= x^2(x^3 - 1)^{-\frac{2}{3}} \\ &= \frac{x^2 \sqrt[3]{x^3 - 1}}{x^3 - 1}. \end{aligned}$$

11.2 Dérivée seconde – Dérivée n -ième

Définition 11.1 – Dérivée seconde

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée. Si f' est elle-même dérivable sur I , la dérivée de f' , notée f'' est la *dérivée seconde* de la fonction f .

Remarque

- Nous connaissons la notation « différentielle » de la dérivée due à Leibniz, c'est-à-dire, en posant $y = f(x)$, par abus de langage nous écrivons

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

En ce qui concerne la dérivée seconde, nous notons

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x).$$

- D'un point de vue fonctionnel, on note aussi $f'' = \frac{d^2f}{dx^2}$. Le nom d'une variable étant « muet », si par exemple x est une fonction du temps t de la forme $x = g(t)$, alors nous écrivons

$$\frac{dx}{dt} = g'(t) \quad \text{et} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = g''(t).$$

- Le signe de la dérivée seconde est utile, pour déterminer, si besoin est, le sens de variations de la dérivée f' . Ce dernier régle les tangentes à la courbe \mathcal{C}_f et induit la notion de convexité qui est l'objet du paragraphe suivant.

Définition 11.2 – Dérivée n -ième

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et $n \in \mathbb{N}$.

La *dérivée n -ième*, sous réserve d'existence, notée $f^{(n)}$, est définie en posant $f^{(0)} = f$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n+1)} = (f^{(n)})'.$$

Notation (rappel) L'ensemble des fonctions dérivables $n \in \mathbb{N}^*$ fois sur un intervalle I est noté $\mathcal{D}^n(I)$.

Exemple 11.8

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^*$, nous déterminons la dérivée n -ième de la fonction inverse

$$f : x \mapsto \frac{1}{x}.$$

Nous avons, pour tout x réel non nul,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$$

$$f''(x) = (-1)(-2)x^{-3} = \frac{2}{x^3} = (-1)^2 \frac{2!}{x^{2+1}}$$

$$f^{(3)}(x) = (-1)(-2)(-3)x^{-4} = -\frac{6}{x^4} = (-1)^3 \frac{3!}{x^{3+1}}$$

Nous conjecturons que, pour $x \neq 0$ et $n \geq 1$,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Nous démontrons par récurrence cette conjecture.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

Initialisation

$$(-1)^1 \frac{1!}{x^2} = -\frac{1}{x^2} = f'(x)$$

L'égalité annoncée est donc vraie au rang $n = 1$.

Hérédité

Nous supposons qu'à un rang $n \in \mathbb{N}^*$ fixé,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Montrons que :

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}.$$

Nous avons d'après l'hypothèse de récurrence

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)},$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) \\ &= (-1)^n n! (- (n+1)) x^{-(n+1)-1} \\ &= (-1)^{n+1} (n+1)! x^{-(n+2)} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}. \end{aligned}$$

L'égalité proposée est donc vraie au rang $n+1$.

En appliquant le principe de récurrence, nous en concluons

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Remarque

Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I , par une récurrence immédiate, nous pouvons justifier

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$

et, pour tout λ réel,

$$(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}.$$

Par contre, c'est plus compliqué en ce qui concerne la dérivée n -ième d'un produit. Nous calculons cette dérivée n -ième dans la proposition qui suit, par analogie avec la formule du binôme de Newton.

Proposition 11.3 – Formule de Leibniz

Soient f et g deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I .

Le produit fg est n fois dérivable sur I et, pour tout entier naturel $n \geq 1$, nous avons

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Démonstration

Nous prouvons la formule de Leibniz par récurrence.

Initialisation

Pour $n = 1$, nous avons

$$\sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} f^{(k)} g^{(1-k)} = \binom{1}{0} f^{(0)} g^{(1)} + \binom{1}{1} f^{(1)} g^{(0)} = fg' + f'g = (fg)',$$

ce qui justifie que l'égalité est vraie au rang $n = 1$.

Hérédité

Nous supposons l'égalité vraie à un rang entier $n > 1$.

Montrons

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence, puis en dérivant une somme et un produit, nous obtenons

$$\begin{aligned} (fg)^{(n+1)} &= ((fg)^{(n)})' \\ &= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \right)' \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^{(k)} g^{(n-k)})' \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)}) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)}. \end{aligned}$$

Dans la première sommation, nous posons $j = k + 1$. Ainsi, il vient

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} f^{(j)} g^{(n-j+1)}.$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} (fg)^{(n+1)} &= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} f^{(j)} g^{(n-j+1)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} \\ &= f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] f^{(k)} g^{(n-k+1)} + f^{(0)} g^{(n+1)}. \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Pascal, nous obtenons

$$\begin{aligned} (fg)^{(n+1)} &= f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + f^{(0)} g^{(n+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}. \end{aligned}$$

La formule de Leibniz est héréditaire.

En appliquant le principe de récurrence, nous en concluons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Exemple 11.9

Nous déterminons la dérivée n -ième de la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f : x \mapsto x^2 e^{-x}.$$

Les fonctions $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto e^{-x}$ sont n fois dérivables sur \mathbb{R} .

Pour tout réel x , nous avons

- $u^{(k)}(x) = 0$, dès que $k \geq 3$,
- $v^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$, pour tout entier naturel k .

En appliquant la formule de Leibniz, nous obtenons, pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \binom{n}{0} u^{(0)} v^{(n)} + \binom{n}{1} u^{(1)} v^{(n-1)} + \binom{n}{2} u^{(2)} v^{(n-2)} \\ &= x^2 (-1)^n e^{-x} + n \times 2x (-1)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 (-1)^{n-2} e^{-x} \\ &= (-1)^n e^{-x} (x^2 - 2nx + n(n-1)) \end{aligned}$$

11.3 Fonction convexe

11.3.1 Définition – Caractérisations

Nous donnons la figure suivante :

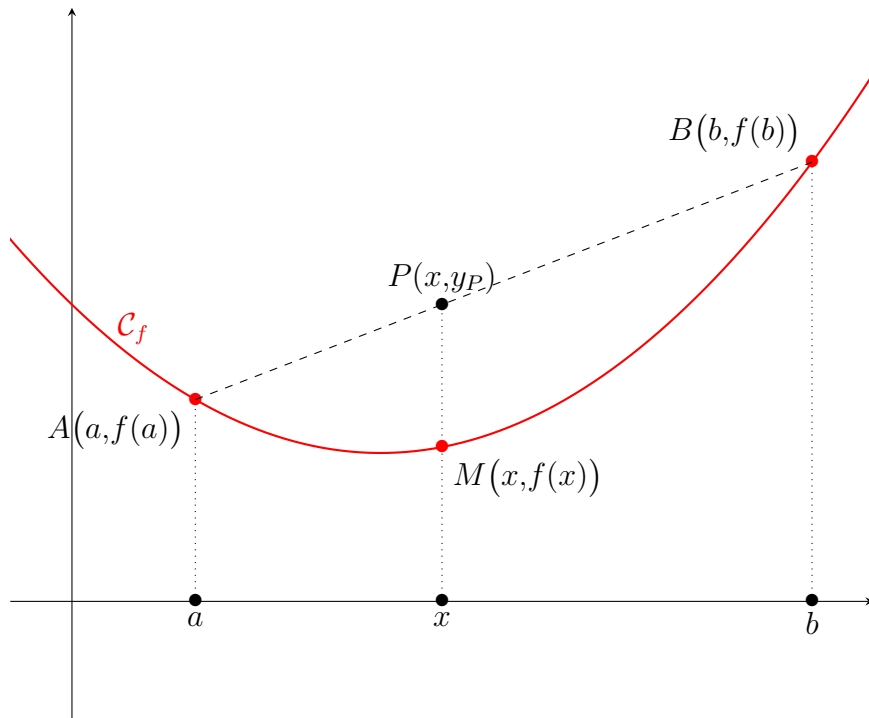


FIGURE 11.1 – Exemple de fonction convexe

Définition 11.3 – Fonction convexe / Fonction concave

Avec les notations de la FIGURE 11.1 précédente, une fonction f est *convexe* si et seulement si, pour tous les points A et B distincts de \mathcal{C}_f , la partie de cette courbe comprise entre les points A et B est située en dessous du segment $[AB]$ (appelé *corde*).

Dans le cas contraire, la fonction est *concave*, ce qui est illustrée sur la FIGURE 11.2 ci-après.

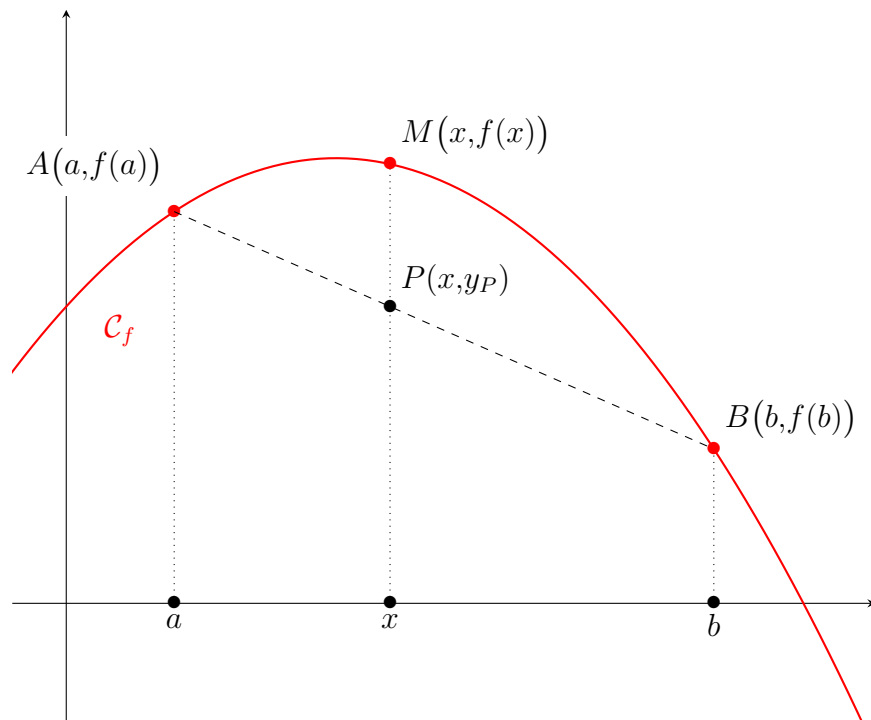


FIGURE 11.2 – Exemple de fonction concave

Exemple 11.10

Les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto |x|$, $x \mapsto e^x$ sont convexes sur \mathbb{R} .

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur $]0, +\infty[$ et concave sur $] -\infty, 0[$.

Les fonctions affines sont à la fois convexes et concaves.

Proposition 11.4 – Caractérisation de la convexité

Une fonction f définie sur un intervalle I est convexe si et seulement si, pour tous les réels a et b appartenant à I tels que $a < b$,

$$f(ka + (1 - k)b) \leq kf(a) + (1 - k)f(b),$$

avec k décrivant $[0, 1]$.

Démonstration

Avec les notations de la FIGURE 11.1, le point $P(x, y_P)$ appartient au segment $[AB]$ si, et seulement si :

$$\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{BA}, \quad \text{avec } k \in [0, 1].$$

Puisque $\overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} x - b \\ y_P - f(b) \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} b - a \\ f(b) - f(a) \end{pmatrix}$, nous obtenons

$$\begin{cases} x - b = k(a - b) \\ y_P - f(b) = k(f(a) - f(b)) \end{cases} \iff \begin{cases} x = ka + (1 - k)b \\ y_P = kf(a) + (1 - k)f(b) \end{cases}$$

Par définition d'une fonction convexe, nous savons que $f(x) \leq y_P$, ce qui équivaut à

$$f(ka + (1 - k)b) \leq kf(a) + (1 - k)f(b), \quad \text{avec } k \in [0, 1].$$

Remarque

- Cette inégalité est une première inégalité de convexité.
- En particulier, lorsque P est le milieu du segment $[AB]$, c'est-à-dire pour $k = \frac{1}{2}$, nous obtenons une seconde inégalité de convexité

$$f\left(\frac{a + b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Ainsi, pour tous les réels a et b , en utilisant par exemple la convexité de la fonction carré ou exponentielle, nous justifions les inégalités

$$(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2),$$

$$\sqrt{e^{a+b}} \leq \frac{e^a + e^b}{2}.$$

- Avec les notations de la seconde figure, la fonction f est concave si, et seulement si :

$$f(ka + (1 - k)b) \geq kf(a) + (1 - k)f(b), \quad \text{avec } k \in [0, 1].$$

Exemple 11.11

La convexité de la fonction valeur absolue sur \mathbb{R} établit une preuve immédiate de l'inégalité triangulaire.

En effet, pour tous les réels a et b ,

$$\left| \frac{a + b}{2} \right| \leq \frac{|a| + |b|}{2},$$

ce qui implique $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Lemme 11.5

Soient deux réels a et b tels que $a < b$. Nous avons

$$\forall t \in [0,1], \quad ta + (1-t)b \in [a,b].$$

Démonstration

Pour tout réel $t \in [0,1]$, nous posons

$$\phi(t) = ta + (1-t)b.$$

Cette fonction est affine et nous avons

$$\forall t \in [0,1], \quad \phi(t) = (a-b)t + b.$$

Puisque $a-b < 0$, la fonction ϕ est décroissante. Nous en déduisons, pour $t \in [0,1]$:

$$\phi(1) \leq \phi(t) \leq \phi(0), \quad \text{soit } a \leq \phi(t) \leq b,$$

ce qui justifie

$$\forall t \in [0,1], \quad ta + (1-t)b \in [a,b].$$

Proposition 11.6 – Deuxième caractérisation de la convexité

Soient f une fonction définie sur un intervalle I , $a \in I$ et $b \in I$ deux réels tels que $a < b$.

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est convexe.

(ii) $\forall x \in [a,b], \quad f(x) \leq f(a) + (x-a) \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$

Démonstration

- $\boxed{(i) \implies (ii)}$

Nous supposons que f est convexe.

Avec les données de la FIGURE 11.1, nous déterminons une équation de la droite (AB) qui est non parallèle à la droite des ordonnées.

Cette équation est de la forme $y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + p$.

Puisque $A \in (AB)$, nous en déduisons

$$p = y_A - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x_A = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}a,$$

ce qui donne

$$(AB) : y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a).$$

Le système

$$\begin{cases} y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \\ x \in [a, b] \end{cases}$$

caractérise le segment $[AB]$.

Par définition de la convexité de f , la partie de la courbe \mathcal{C}_f comprise entre les points A et B est située en dessous du segment $[AB]$, ce qui signifie

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) \leq f(a) + (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- $\boxed{(ii) \implies (i)}$

Nous supposons que, pour tout réel $x \in [a, b]$,

$$f(x) \leq f(a) + (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

En appliquant le lemme précédent, en posant

$$x = ta + (1 - t)b, \quad \text{avec } t \in [0, 1],$$

il vient

$$f(ta + (1 - t)b) \leq f(a) + (ta + (1 - t)b - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} f(ta + (1 - t)b) &\leq f(a) + (1 - t)(b - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ &\leq f(a) + (1 - t)(f(b) - f(a)) \\ &\leq tf(a) + (1 - t)f(b), \end{aligned}$$

ce qui prouve que la fonction f est convexe.

11.3.2 Dérivée et convexité

Proposition 11.7 – Dérivée croissante

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a \in I$. Si la dérivée f' est croissante sur I alors

$$\forall x \in I, \quad f(x) \geq f(a) + (x - a)f'(a).$$

Démonstration

Soit un réel $a \in I$.

Pour tout réel $x \in I$, nous posons

$$d(x) = f(x) - (f(a) + (x - a)f'(a)).$$

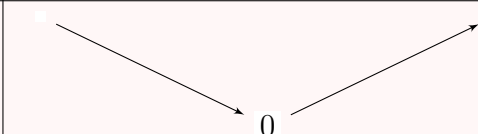
Cette fonction, par différence, est dérivable sur I et nous obtenons

$$d'(x) = f'(x) - f'(a).$$

Puisque f' est croissante sur I , nous en déduisons :

- Si $x \in I \cap [a, +\infty[$, soit $x \geq a$, alors $f'(x) \geq f'(a)$ donc $d'(x) \geq 0$. Par conséquent, la fonction $x \mapsto d(x)$ est croissante sur $I \cap [a, +\infty[$.
- Si $x \in I \cap]-\infty, a]$, soit $x \leq a$, alors $f'(x) \leq f'(a)$, donc $d'(x) \leq 0$. Par conséquent, la fonction $x \mapsto d(x)$ est décroissante sur $I \cap]-\infty, a]$.

En résumé, nous disposons du tableau de variations suivant

x	a		
d'	$-$	0	$+$
d			

Nous en déduisons que la fonction d admet en $x = a$ un minimum $d(a) = 0$, c'est-à-dire

$$\forall x \in I, \quad d(x) \geq 0.$$

Nous en concluons :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \geq f(a) + (x - a)f'(a).$$

Proposition 11.8 – Dérivée croissante et convexité

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Si la dérivée f' est croissante sur I , alors f est convexe.

Démonstration

Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$ et $x \in]a, b[$.

D'après le théorème des accroissements finis (Théorème 11.12 que nous verrons au paragraphe 11.4.3), nous avons

$$\exists c_1 \in]a, x[, \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_1)$$

et

$$\exists c_2 \in]x, b[, \quad \frac{f(b) - f(x)}{b - x} = f'(c_2).$$

Comme $c_1 < c_2$ et f' croissante, nous en déduisons

$$f'(c_1) \leq f'(c_2).$$

Par conséquent, pour tout $x \in]a, b[$:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \iff (b - x)(f(x) - f(a)) \leq (x - a)(f(b) - f(x))$$

$$\iff bf(x) - bf(a) - xf(x) + xf(a) \leq xf(b) - xf(x) - af(b) + af(x)$$

$$\iff bf(x) - af(x) - bf(a) \leq xf(b) - xf(a) + bf(a) - af(b)$$

$$\iff (b - a)f(x) \leq f(b)(x - a) + (b - x)f(a)$$

$$\iff (b - a)f(x) \leq f(b)(x - a) + (b - a + a - x)f(a)$$

$$\iff (b - a)f(x) \leq f(b)(x - a) + (b - a)f(a) + (a - x)f(a)$$

$$\iff (b - a)f(x) \leq (f(b) - f(a))(x - a) + (b - a)f(a)$$

$$\iff f(x) \leq f(a) + (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

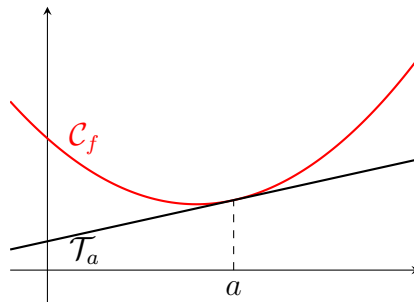
Cette inégalité est encore vraie quand $x = a$ ou $x = b$, elle est donc valable sur $[a, b]$, et ce, quels que soient les réels $a, b \in I$ tels que $a < b$. Nous retrouvons ainsi la deuxième caractérisation de la convexité, ce qui justifie que f est convexe.

Remarque

- On peut démontrer que la réciproque de cette proposition est vraie (et c'est bien plus simple).
- Si f est dérivable et f' décroissante sur I , alors f est concave.
- Si f est dérivable en $a \in I$, alors une équation de la tangente \mathcal{T}_a à la courbe représentative \mathcal{C}_f au point $A(a, f(a))$ est

$$\mathcal{T}_a : y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Par suite, si f est convexe, alors la proposition 11.7 de ce paragraphe prouve que, quel que soit $a \in I$, \mathcal{C}_f est au-dessus de \mathcal{T}_a .

**Exemple 11.12**

La fonction carré, dérivable sur \mathbb{R} , est convexe. Quels que soient les réels x et a , nous en déduisons

$$x^2 \geq 2ax - a^2.$$

Exemple 11.13

Plus généralement, pour tout entier $n \geq 2$, la fonction $p_n : x \mapsto x^n$ est dérivable sur \mathbb{R}_+ et $p : x \mapsto nx^{n-1}$ est croissante sur \mathbb{R}_+ .

Cette fonction puissance est donc convexe sur $[0, +\infty[$.

Pour tous les réels x et a positifs, il vient

$$x^n \geq a^n + (x - a)na^{n-1},$$

c'est-à-dire

$$x^n \geq na^{n-1}x - (n - 1)a^n.$$

En particulier, pour $a = 1$ et $x = 1 + t$, avec $t \geq 0$, nous retrouvons l'inégalité de Bernoulli

$$\forall t \geq 0, \quad (1 + t)^n \geq 1 + nt.$$

Proposition 11.9 – Action de la dérivée seconde

Soit un intervalle I et une fonction $f \in \mathcal{D}^2(I)$.

- $\forall x \in I, f''(x) \geq 0 \implies f$ est convexe.
- $\forall x \in I, f''(x) \leq 0 \implies f$ est concave.

Démonstration

Puisque, pour tout réel $x \in I$, $f''(x) = (f')'(x)$, nous appliquons le principe de Lagrange vu en Première.

- Si $f''(x) \geq 0$, alors f' est croissante sur I , ce qui implique que f est convexe.
- Si $f''(x) \leq 0$, alors f' est décroissante sur I , ce qui implique que f est concave.

Exemple 11.14

Nous cherchons à déterminer les intervalles sur lesquels la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est convexe, puis s'il existe des intervalles sur lesquels cette fonction est concave. Cette fonction est dérivable deux fois sur \mathbb{R} par composition puis par produit. Pour tout réel x , nous obtenons

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2xe^{-x^2}, \\ f''(x) &= -2e^{-x^2} + (-2x)(-2x)e^{-x^2} \\ &= 2e^{-x^2}(2x^2 - 1). \end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} f''(x) \geq 0 &\iff 2x^2 - 1 \geq 0 \\ &\iff x \in \left] -\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty \right[\end{aligned}$$

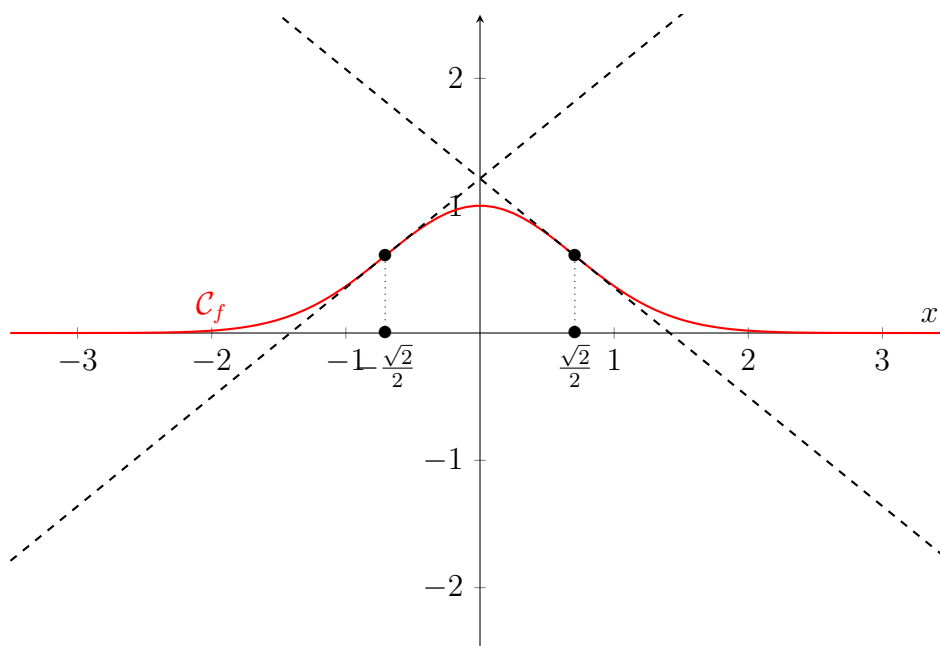
et

$$\begin{aligned} f''(x) \leq 0 &\iff 2x^2 - 1 \leq 0 \\ &\iff x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \end{aligned}$$

Nous en concluons que :

- La fonction f est convexe sur les intervalles $\left] -\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right]$ et $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty \right[$
- La fonction f est concave sur l'intervalle $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$.

Graphiquement, nous avons



Nous observons que la concavité de la courbe change aux points d'abscisses $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

11.3.3 Point d'inflexion

Définition 11.4 – Point d'inflexion

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .

Si f'' s'annule en $a \in I$ en changeant de signe, le point $A(a, f(a))$ est un *point d'inflexion*.

Exemple 11.15

En reprenant l'exemple précédent, la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ admet deux points d'inflexion d'abscisses $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exemple 11.16

Nous considérons la fonction polynôme de degré 3

$$P : x \mapsto x^3 + px + q,$$

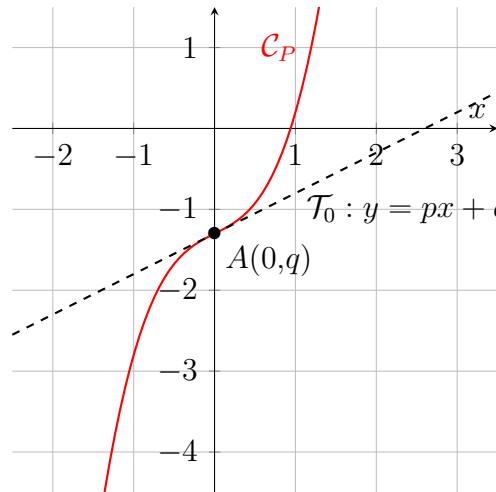
avec p et q réels.

Nous avons, pour tout réel x , $P'(x) = 3x^2 + p$ et $P''(x) = 6x$. Il en résulte $P''(x) = 0$ pour $x = 0$ en changeant de signe, donc le point $A(0, q)$ est un point d'inflexion.

Plus précisément, nous avons

- $P''(x) \leq 0 \iff x \leq 0$, ce qui prouve que P est concave sur $] -\infty, 0]$.
- $P''(x) \geq 0 \iff x \geq 0$, ce qui prouve que P est convexe sur $[0, +\infty[$.

Graphiquement, nous observons que la courbe \mathcal{C}_P « traverse » en A la tangente \mathcal{T}_0 :



Puisque P est convexe sur $[0, +\infty[$, nous en déduisons, pour tout réel $x \geq 0$:

$$P(x) \geq P'(0)x + P(0) = px + q,$$

ce qui signifie que, pour $x \in [0, +\infty[$, la courbe \mathcal{C}_P est au-dessus de la tangente \mathcal{T}_0 .
Puisque P est concave sur $] -\infty, 0]$, nous en déduisons, pour tout réel $x \leq 0$:

$$P(x) \leq P'(0)x + P(0) = px + q,$$

ce qui signifie que, pour $x \in] -\infty, 0]$, la courbe \mathcal{C}_P est en-dessous de la tangente \mathcal{T}_0 .

11.4 Rolle et accroissements finis

11.4.1 Dérivée et extremum

Nous rappelons la condition nécessaire d'existence d'un extremum local vue en Première.

Définition 11.5 – Extremum global

Soient f une fonction définie sur un intervalle I , m et M deux réels.

On dit que :

- La fonction f admet sur I le réel m pour minimum si et seulement si :

$$\forall x \in I, f(x) \geq m \quad \text{et} \quad \exists a \in I, f(a) = m.$$

- La fonction f admet sur I le réel M pour maximum si et seulement si :

$$\forall x \in I, f(x) \leq M \quad \text{et} \quad \exists a \in I, f(a) = M.$$

Définition 11.6 – Extremum local

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

On dit que $f(a)$ est un *maximum local* (respectivement un *minimum local*) de f sur I s'il existe un intervalle $J \subset I$ ouvert centré en $a \in J$ tel que $f(a)$ soit un maximum (respectivement un minimum) de f sur J .

Remarque

Un extremum global est local.

Proposition 11.10 – Condition nécessaire d'existence d'extremum local

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert et $a \in I$.

Si f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$.

Démonstration

Pour fixer les idées, nous supposons que $f(a)$ est un minimum local.

Par définition, il existe $\varepsilon > 0$ et un intervalle $J =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset I$ centré en a tel que

$$\forall x \in J, \quad f(x) \geq f(a).$$

Nous distinguons deux cas.

1^{er} cas : $x \in]a, a + \varepsilon[$

Dans ce cas, nous avons

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0.$$

Puisque f est dérivable en a , par passage à la limite sur une inégalité, nous obtenons

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0.$$

2^e cas : $x \in]a - \varepsilon, a[$.

Dans ce second cas, nous avons

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0.$$

Puisque f est dérivable en a , par passage à la limite sur une inégalité, nous obtenons

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0.$$

Nous déduisons de ces deux cas que $f'(a) \geq 0$ et $f'(a) \leq 0$, ce qui prouve que $f'(a) = 0$.

La preuve est analogue en supposant que $f(a)$ est un maximum local.

11.4.2 Théorème de Rolle

Théorème 11.11 – Théorème de Rolle

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et qui satisfait à $f(a) = f(b)$, alors

$$\exists c \in]a, b[, \quad f'(c) = 0.$$

Démonstration

Nous distinguons deux cas.

1^{er} cas : f est constante sur $[a, b]$.

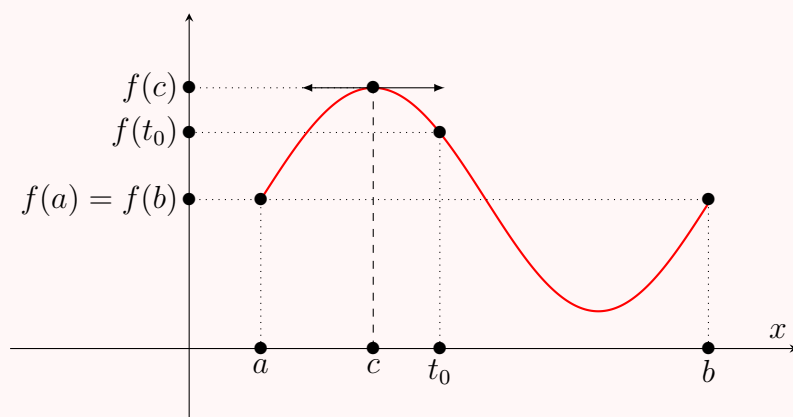
Dans ce cas, pour tout réel $x \in]a, b[, f'(x) = 0$.

Par suite n'importe lequel des réels $c \in]a, b[$ convient et satisfait à $f'(c) = 0$.

2^e cas : f est non constante sur $[a, b]$.

Dans ce cas, il existe un réel $t_0 \in [a, b]$ tel que $f(t_0) \neq f(a)$. Nous en déduisons que $f(t_0) > f(a)$ ou $f(t_0) < f(a)$.

- Nous supposons dans un premier temps que $f(t_0) > f(a)$ et nous donnons une figure décrivant cette situation.



En appliquant la proposition 10.16, puisque f est continue sur $[a, b]$, f admet un maximum, atteint sur cet intervalle fermé, ce qui signifie :

$$\exists c \in [a, b], \forall x \in [a, b], \quad f(x) \leq f(c).$$

En particulier pour $x = t_0$, nous avons

$$f(a) < f(t_0) \leq f(c),$$

ce qui implique

$$f(a) < f(c),$$

ce qui prouve que $c \neq a$, et comme $f(a) = f(b)$, $c \neq b$, c'est-à-dire $c \in]a, b[$.

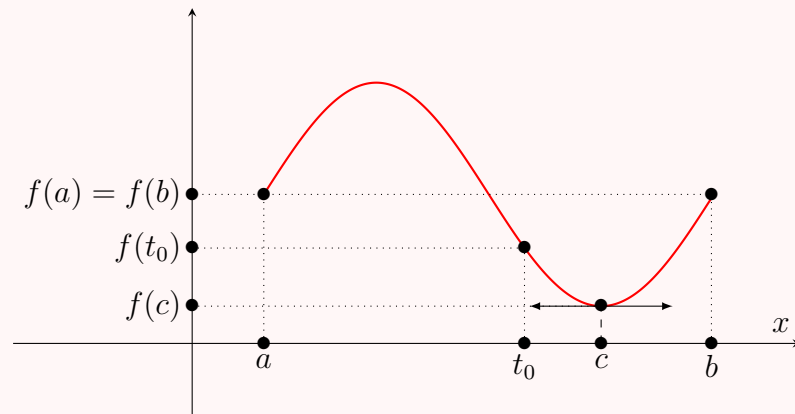
En appliquant la proposition 11.10, la fonction f étant dérivable en $c \in]a, b[$ et admettant un maximum local en c , nous en concluons

$$\exists c \in]a, b[, \quad f'(c) = 0.$$

- Nous supposons que $f(t_0) < f(a)$.

La preuve est analogue en considérant cette fois le minimum atteint par f en $c \in]a, b[$.

La figure qui suit résume cette situation.



Remarque

- Ce théorème affirme que la courbe \mathcal{C}_f admet au moins une tangente parallèle à la droite des abscisses.
- Il assure l'existence implicite d'au moins une solution dans l'intervalle ouvert $]a, b[$ de l'équation $f'(x) = 0$.
- Les conditions pour appliquer le théorème de Rolle sont indispensables.

11.4.3 Théorème des accroissements finis

Théorème 11.12 – Théorème des accroissements finis

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors

$$\exists c \in]a, b[, \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Démonstration

Soit g la fonction définie sur $[a, b]$ par

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

- Cette fonction est, par différence, continue sur $[a, b]$.
- Cette fonction est, par différence, dérivable sur $]a, b[$ et

$$\forall x \in]a, b[, \quad g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- De plus, nous avons

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = f(a),$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a),$$

ce qui justifie que $g(a) = g(b)$.

Par conséquent, les hypothèses pour appliquer le théorème de Rolle sont vérifiées. Nous en concluons l'existence d'un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\exists c \in]a, b[, \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Remarque

Le théorème des accroissements finis permet de nombreuses applications en Analyse. Dans le TD11, nous en étudierons une qui est l'inégalité des accroissements finis. Pour l'instant, nous démontrons le principe de Lagrange, qui est énoncé, mais la plupart du temps admis, en classe de Première.

11.4.4 Dérivée et sens de variations

Nous rappelons la proposition qui suit et qui a été justifiée en Première.

Proposition 11.13

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si f est croissante sur I , alors pour tout réel $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.
- Si f est décroissante sur I , alors pour tout réel $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.
- Si f est constante sur I , alors pour tout réel $x \in I$, $f'(x) = 0$.

Proposition 11.14 – Principe de Lagrange

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

Si, pour tout réel $x \in I$, on a

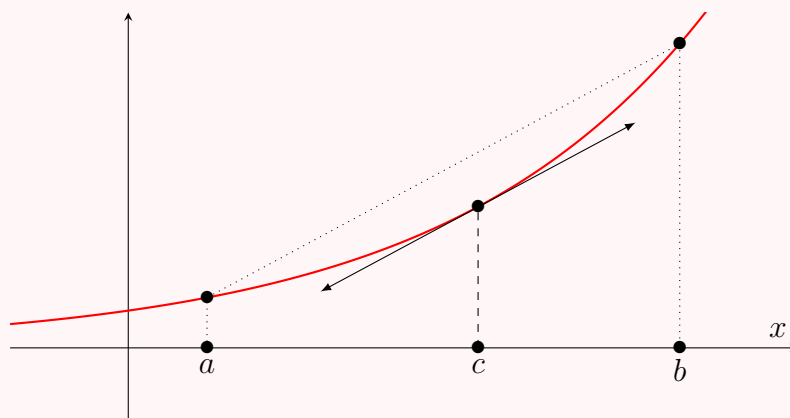
- $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I .
- $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I .
- $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I .

Démonstration

Soient $a \in I$ et $b \in I$ tels que $a < b$.

1^{er} cas : $\forall x \in I$, $f'(x) \geq 0$.

Graphiquement, nous observons ce cas sur la figure suivante :



La fonction f étant dérivable sur I , nous en déduisons que

- f est continue sur $[a, b]$,
- f est dérivable sur $]a, b[$.

Nous pouvons appliquer le théorème des accroissements finis, ce qui donne

$$\exists c \in]a, b[, \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

En particulier pour $x = c$, nous obtenons dans ce premier cas

$$f'(c) \geq 0,$$

ce qui implique

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0.$$

Nous en déduisons que si $a < b$, alors $f(a) \leq f(b)$.

Nous en concluons que la fonction f est croissante sur I .

2^e cas : $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$.

En appliquant à nouveau le théorème des accroissements finis, sachant qu'en particulier pour $x = c$, $f'(c) \leq 0$, il vient

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq 0.$$

Nous en déduisons que si $a < b$, alors $f(a) \geq f(b)$.

Nous en concluons, dans ce second cas, que la fonction f est décroissante sur I .

3^e cas : $\forall x \in I, f'(x) = 0$.

De la même façon, sachant qu'en particulier pour $x = c$, $f'(c) = 0$, nous obtenons

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Nous en déduisons que si $a < b$, alors $f(a) = f(b)$, ce qui prouve que la fonction f est constante sur I .

Corollaire 11.15 – Égalité de deux dérivées

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

Si, pour tout réel $x \in I$, on a $f'(x) = g'(x)$, alors il existe $c \in I$ tel que

$$f(x) = g(x) + c.$$

Démonstration

Soit $x \in I$ tel que $f'(x) = g'(x)$. Nous obtenons

$$f'(x) - g'(x) = 0,$$

soit

$$(f - g)'(x) = 0.$$

Nous en déduisons qu'il existe un réel c tel que, pour tout réel $x \in I$,

$$(f - g)(x) = c,$$

soit

$$f(x) = g(x) + c.$$

Exemple 11.17 – Application à la physique

Un mobile est soumis à un mouvement rectiligne uniforme de vitesse v constante égale à v_0 en m.s^{-1} . Ainsi, pour tout réel $t \geq 0$, nous avons

$$v(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt} = v_0.$$

La loi horaire de ce mobile est donc

$$x(t) = v_0 t + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

En considérant la condition initiale $x(0) = x_0$, nous obtenons $c = x_0$, soit

$$x(t) = v_0 t + x_0.$$

Proposition 11.16 – Monotonie stricte

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

On suppose que l'ensemble

$$N = \{x \in I \mid f'(x) = 0\}$$

n'est pas une réunion d'intervalles non vides.

- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante strictement sur I .
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante strictement sur I .

Démonstration

Nous raisonnons par l'absurde, en supposant que la fonction f est croissante sans être strictement croissante sur l'intervalle I , ce qui donne

$$\exists (x_1, x_2) \in I^2, \quad (x_1 < x_2) \wedge (f(x_1) = f(x_2)).$$

Soit $x \in [x_1, x_2]$. Puisque f est croissante sur I , nous obtenons

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Nous en déduisons

$$f(x_1) = f(x) = f(x_2),$$

ce qui prouve que f est une fonction constante sur l'intervalle $[x_1, x_2]$.

Il en résulte que

$$\forall x \in [x_1, x_2], \quad f'(x) = 0,$$

ce qui implique que $[x_1, x_2] \subset I$. Or $x_1 < x_2$, donc $[x_1, x_2]$ est un intervalle non vide. C'est contradictoire avec N n'étant pas une réunion d'intervalles non vides.

La preuve est analogue dans le cas où, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.

Remarque

Lorsque $N = \{x \in I \mid f'(x) = 0\}$ n'est pas une réunion d'intervalles non vides, on dit que les éléments de N sont des points « isolés ».

Corollaire 11.17

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est croissante strictement sur I .
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est décroissante strictement sur I .

Démonstration

Nous appliquons la proposition précédente lorsque $N = \emptyset$.

Chapitre 12

Fonction logarithme népérien

Sommaire

12.1 Définition – Premières propriétés	235
12.1.1 Notion de fonction réciproque	235
12.1.2 Définition de la fonction logarithme népérien	235
12.1.3 Premières propriétés	236
12.2 Dérivée et variations de \ln	238
12.2.1 Dérivée de $x \mapsto \ln x$	238
12.2.2 Variations de \ln	238
12.2.3 Dérivée de $x \mapsto \ln(u(x))$	241
12.3 Propriétés algébriques de la fonction \ln	242
12.3.1 Action de \ln sur la multiplication	242
12.3.2 Action de \ln sur une puissance	243
12.4 Représentation graphique de la fonction \ln	245
12.4.1 Limites en $+\infty$, en 0	245
12.4.2 Représentation graphique	247
12.5 Formes indéterminées logarithmiques	249
12.5.1 Limite de $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$	249
12.5.2 Limite de $x \mapsto x \ln x$ en 0 à droite	251
12.5.3 Limite de $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ en 0	254
12.6 Fonction logarithme décimal	256
12.7 Fonctions exponentielles de bases a	258

Les fonctions logarithmes ont été inventées au XVI^e siècle par le mathématicien écossais John Napier (1550–1615) dont le nom francisé est Néper. Son idée, issue de l’astronomie, fut de transformer une multiplication de nombres très grands par une addition de ces derniers.

A la fin de sa vie, avec le mathématicien anglais Henry Briggs (1561–1631), ils établirent des tables de logarithmes qui ont eu un grand succès et furent utilisées jusqu’à l’avènement de l’ère informatique. De nos jours, une calculatrice scientifique restitue immédiatement le logarithme de n’importe quel nombre strictement positif.

Dans ce chapitre, nous étudions principalement la fonction logarithme népérien ou de base e .

Nous verrons que la propriété algébrique qui transforme une multiplication en une addition nous permet de disposer d'une fonction dont le sens de variation est très lent comparativement à celui de la fonction exponentielle dont la croissance est très rapide.

Nous nous intéresserons en particulier à la fonction logarithme décimal qui est couramment utilisée dans de nombreux domaines scientifiques.

Pour exemple, citons :

- En chimie pour mesurer le pH d'une solution aqueuse.
- En astronomie, pour mesurer la magnitude d'un astre.
- En acoustique pour mesurer un niveau sonore en décibels.
- En sismologie pour mesurer la magnitude d'un séisme (échelle de Richter).

12.1 Définition – Premières propriétés

12.1.1 Notion de fonction réciproque

Nous rappelons une définition et une proposition de la section 3.4 sur la notion de **bijection réciproque**.

Définition 12.1 – Application réciproque

Soit f une bijection d'un intervalle I de \mathbb{R} dans $f(I)$.
Alors, pour tout $y \in f(I)$, il existe un unique élément $x \in I$ tel que $y = f(x)$.
On définit ainsi une application $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ qui est aussi bijective, et qu'on appelle *application réciproque* de f .

Proposition 12.1

Soit f une bijection d'un intervalle I de \mathbb{R} dans $f(I)$.
Nous disposons des deux assertions suivantes :

$$\begin{cases} \forall x \in I, & (f^{-1} \circ f)(x) = x \\ \forall y \in f(I), & (f \circ f^{-1})(y) = y. \end{cases}$$

Nous rappelons maintenant le théorème 10.18, dit « Théorème de la bijection » :

Théorème 12.2 – Théorème de la bijection

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I quelconque, alors f est une bijection de I sur l'intervalle image $f(I)$, ce qui signifie

$$\forall y \in f(I), \exists ! x \in I, \quad f(x) = y.$$

12.1.2 Définition de la fonction logarithme népérien

Proposition 12.3

La fonction \exp est une bijection de \mathbb{R} sur $]0, +\infty[$.

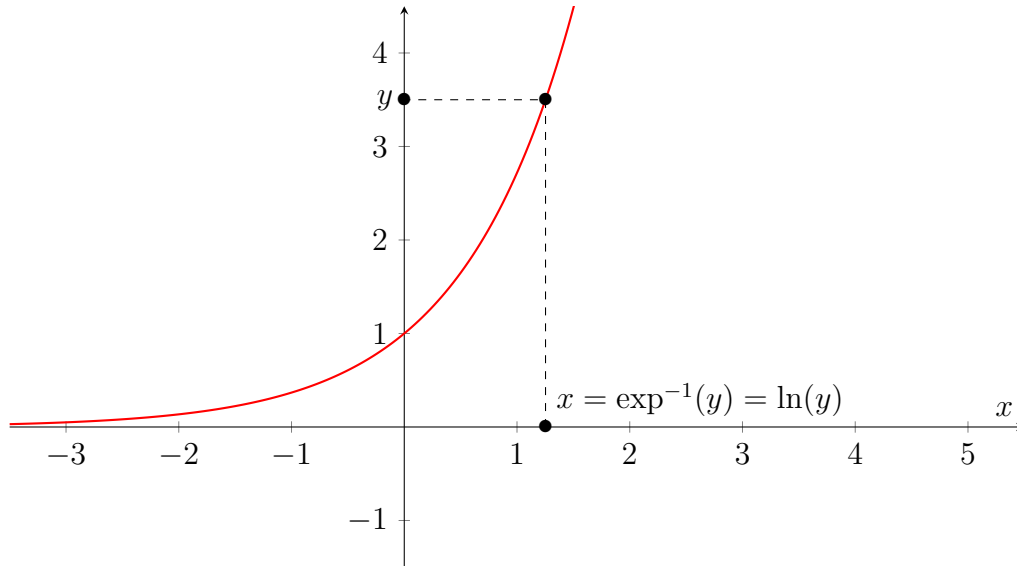
Démonstration

La fonction \exp est continue et croissante strictement sur \mathbb{R} , c'est donc une bijection de \mathbb{R} sur l'intervalle

$$\exp(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \right[=]0, +\infty[.$$

Par conséquent, pour tout réel $y \in \mathbb{R}_+^*$, l'équation $\exp(x) = y$ admet une unique solution $x \in \mathbb{R}$, ce qui permet de définir la fonction réciproque \exp^{-1} de la fonction exponentielle par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad y = e^x \iff x = \exp^{-1}(y).$$



Définition 12.2 – Logarithme népérien

La fonction logarithme népérien (ou logarithme de base e) est la fonction notée \ln telle que

$$\ln = \exp^{-1}.$$

12.1.3 Premières propriétés

Proposition 12.4

Nous disposons des propriétés suivantes :

- La fonction \ln est définie sur \mathbb{R}_+^* .
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, y = e^x \iff x = \ln(y)$.
- $\ln(e) = 1$ et $\ln(1) = 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, e^{\ln x} = x$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$.

Démonstration

- Les deux premières propriétés résultent immédiatement de la définition de la fonction \ln .
- Nous avons, à nouveau par définition,

$$\exp(1) = e \iff 1 = \exp^{-1}(e) = \ln(e),$$

$$\exp(0) = 1 \iff 0 = \exp^{-1}(1) = \ln(1).$$

- Pour tout réel $x > 0$, il vient

$$e^{\ln x} = \exp(\ln(x)) = (\exp \circ \ln)(x) = (\exp \circ \exp^{-1})(x) = x.$$

- Pour tout réel x , nous avons

$$\ln(e^x) = \ln(\exp(x)) = (\ln \circ \exp)(x) = (\exp^{-1} \circ \exp)(x) = x.$$

Exemple 12.1

Nous proposons, pour illustrer ces premières propriétés de base mais néanmoins essentielles, quelques « gammes » en considérant la fonction

$$f : x \mapsto \ln(2x - 1).$$

- Cette fonction est définie si et seulement si $2x - 1 > 0$, soit $x > \frac{1}{2}$.

Nous en concluons

$$\mathcal{D}_f = \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[.$$

- Nous cherchons tout d'abord à résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur \mathcal{D}_f :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff \ln(2x - 1) = 0 \\ &\iff 2x - 1 = e^0 = 1 \\ &\iff x = 1. \end{aligned}$$

Puisque $1 \in \mathcal{D}_f$, nous en concluons :

$$\mathcal{S} = \{1\}.$$

- Nous cherchons tout d'abord à résoudre l'équation $f(x) = b$ sur \mathcal{D}_f , où b est un réel donné :

$$\begin{aligned} f(x) = b &\iff \ln(2x - 1) = b \\ &\iff 2x - 1 = e^b \\ &\iff x = \frac{1 + e^b}{2}. \end{aligned}$$

Puisque $\frac{1 + e^b}{2} > \frac{1}{2}$, nous en concluons

$$\mathcal{S}_b = \left\{ \frac{1 + e^b}{2} \right\}.$$

Nous remarquons que, pour tout $b \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = b$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$. En d'autres termes, nous avons prouvé algébriquement que f est une bijection de $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$ sur \mathbb{R} .

Nous considérons à présent les fonctions $g : x \mapsto f(|x|)$ et $h : x \mapsto \ln|2x - 1|$.

- La fonction g est définie si, et seulement si, $2|x| - 1 > 0$, soit $|x| > \frac{1}{2}$, ce qui équivaut à

$$x < -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x > \frac{1}{2}.$$

Nous en concluons

$$\mathcal{D}_g = \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[.$$

- La fonction h est définie si, et seulement si, $|2x - 1| > 0$, soit $x \neq \frac{1}{2}$, ce qui donne

$$\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

12.2 Dérivée et variations de \ln

12.2.1 Dérivée de $x \mapsto \ln x$

Proposition 12.5

La fonction \ln est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , et on a

$$\forall x > 0, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Démonstration

Nous utilisons la formule de la dérivée de la bijection réciproque, démontrée dans l'exercice 13 du TD 11.

Nous savons que \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R} sont des intervalles ouverts non vides, que la fonction \exp est dérivable sur \mathbb{R} et que sa dérivée ne s'annule pas sur \mathbb{R} . Alors $\ln = \exp^{-1}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et

$$\begin{aligned} \forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln'(y) &= (\exp^{-1})'(y) = \frac{1}{\exp'(\exp^{-1}(y))} \\ &= \frac{1}{\exp(\exp^{-1}(y))} \\ &= \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

Nous en concluons que \ln est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Remarque – Tangentes à la courbe représentative \mathcal{C}_{\ln}

- Au point d'abscisse 1, une équation de la tangente est

$$y = \ln'(1)(x - 1) + \ln(1),$$

c'est-à-dire $y = x - 1$.

- Au point d'abscisse e , une équation de la tangente est

$$y = \ln'(e)(x - e) + \ln(e),$$

c'est-à-dire $y = \frac{x - e}{e} + 1$, soit $y = \frac{x}{e}$.

12.2.2 Variations de \ln

Proposition 12.6

La fonction \ln est croissante strictement sur \mathbb{R}_+^* .

Démonstration

Puisque

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x} > 0,$$

nous en déduisons que \ln est croissante strictement sur \mathbb{R}_+^* .

Proposition 12.7 – Signe de $\ln x$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

- $\ln x < 0 \iff x \in]0, 1[$
- $\ln x \geq 0 \iff x \in [1, +\infty[$.

Démonstration

- Soit un réel $x > 0$ tel que $\ln x < 0$.

La fonction \exp étant croissante strictement sur \mathbb{R} , nous obtenons

$$e^{\ln x} < e^0,$$

c'est-à-dire $0 < x < 1$.

Réciproquement, soit un réel $x \in]0, 1[$.

Puisque $0 < x < 1$, la fonction \ln étant croissante strictement sur \mathbb{R}_+^* , il vient

$$\ln x < \ln 1,$$

soit $\ln x < 0$.

- Soit un réel $x > 0$ tel que $\ln x \geq 0$.

La fonction \exp étant croissante strictement sur \mathbb{R} , nous obtenons

$$e^{\ln x} \geq e^0,$$

c'est-à-dire $x \geq 1$.

Réciproquement, soit un réel $x \in [1, +\infty[$.

Puisque $x \geq 1$, la fonction \ln étant croissante strictement sur \mathbb{R}_+^* , il vient

$$\ln x \geq \ln 1,$$

soit $\ln x \geq 0$.

Exemple 12.2

Nous résolvons l'inéquation $\ln(x^2 - 1) < 0$.

Tout d'abord, l'ensemble de définition de cette inéquation est l'ensemble \mathcal{D} des réels tels que $x^2 - 1 > 0$, ce qui donne

$$\mathcal{D} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[.$$

Pour tout réel $x \in \mathcal{D}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\ln(x^2 - 1) < 0 &\iff 0 < x^2 - 1 < 1 \\ &\iff 1 < x^2 < 2 \\ &\iff -\sqrt{2} < x < -1 \quad \text{ou} \quad 1 < x < \sqrt{2}\end{aligned}$$

Nous en concluons, en désignant par \mathcal{S} l'ensemble des solutions :

$$\mathcal{S} = \mathcal{D} \cap \left(]-\sqrt{2}, -1[\cup]1, \sqrt{2}[\right) =]-\sqrt{2}, -1[\cup]1, \sqrt{2}[.$$

Proposition 12.8 – Comparaison de deux logarithmes

Soient deux réels a et b strictement positifs.

- $a = b \iff \ln a = \ln b.$
- $a < b \iff \ln a < \ln b.$

Démonstration

Soient deux réels $a > 0$ et $b > 0$.

- Si $a = b$, alors $\ln a = \ln b$.
Réciproquement, si $\ln a = \ln b$, alors

$$e^{\ln a} = e^{\ln b},$$

soit $a = b$.

- La fonction \ln étant croissante strictement sur \mathbb{R}_+^* , si $a < b$, alors $\ln a < \ln b$.
Réciproquement, la fonction \exp étant croissante strictement sur \mathbb{R} , si $\ln a < \ln b$, alors

$$e^{\ln a} < e^{\ln b},$$

soit $a < b$.

Exemple 12.3

Nous proposons de résoudre :

- l'équation $\ln(x^2 - 1) = \ln 2$,
- l'inéquation $\ln(x^2 - 1) > \ln 2$.

Dans les deux cas l'ensemble de définition est, comme nous l'avons déterminé dans l'exemple précédent :

$$\mathcal{D} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[.$$

Pour $x \in \mathcal{D}$, nous avons d'une part

$$\begin{aligned}\ln(x^2 - 1) = \ln 2 &\iff x^2 - 1 = 2 \\ &\iff x^2 = 3 \\ &\iff x = -\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Nous en concluons que l'ensemble \mathcal{D} des solutions de cette équation est

$$\mathcal{S} = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\} \cap \mathcal{D} = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}.$$

D'autre part, il vient

$$\begin{aligned} \ln(x^2 - 1) > \ln 2 &\iff x^2 - 1 > 2 \\ &\iff x^2 > 3 \\ &\iff x < -\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x > \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Nous en concluons que l'ensemble \mathcal{S}' des solutions de cette inéquation est

$$\mathcal{S}' = \mathcal{D} \cap (]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[) =]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[.$$

12.2.3 Dérivée de $x \mapsto \ln(u(x))$

Proposition 12.9

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I tel que

$$\forall x \in I, \quad u(x) > 0.$$

La fonction $g : x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et,

$$\forall x \in I, \quad g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Démonstration

Puisque

- \ln est dérivable sur $]0, +\infty[$
- u est dérivable sur I
- $\forall x \in I, \quad u(x) > 0$

Nous appliquons le théorème de dérivation de la composée de deux fonctions à $g = \ln \circ u$.

Il en résulte que g est dérivable sur I et quel que soit $x \in I$, nous avons

$$g'(x) = u'(x) \times (\ln' \circ u)(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Exemple 12.4

La fonction $f : x \mapsto \ln(x^2 + 1)$ est dérivable sur \mathbb{R} puisque

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 1 > 0.$$

Pour tout réel x , par composition, il vient :

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Exemple 12.5

La fonction $f : x \mapsto \ln(e^x - 2)$ est dérivable pour les réels x tels que $e^x - 2 > 0$, c'est-à-dire $e^x > 2$, soit $x > \ln 2$.

Par suite, pour $x \in]\ln 2, +\infty[$, nous obtenons

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x - 2}.$$

12.3 Propriétés algébriques de la fonction \ln

12.3.1 Action de \ln sur la multiplication

Proposition 12.10

Quels que soient les réels a et b strictement positifs, nous avons

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b.$$

Démonstration

Soient deux réels $a > 0$ et $b > 0$. En utilisant la fonction \exp , il vient

$$e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} e^{\ln b} = ab = e^{\ln(ab)},$$

ce qui implique la conclusion attendue

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall b \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(ab) = \ln a + \ln b.$$

Remarque

Si $a < 0$ et $b < 0$, alors $ab > 0$.

Par conséquent $\ln(ab)$ est défini mais nous ne pouvons pas appliquer l'égalité fonctionnelle ci-dessus.

Proposition 12.11 – action sur l'inverse, sur le quotient

Quels que soient les réels a et b strictement positifs, nous avons

- $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b.$

Démonstration

- Soit un réel $b > 0$, nous avons :

$$\ln b + \ln \left(\frac{1}{b} \right) = \ln \left(b \times \frac{1}{b} \right) = \ln 1 = 0,$$

ce qui justifie

$$\ln \left(\frac{1}{b} \right) = -\ln b.$$

- Soient deux réels $a > 0$ et $b > 0$, il vient

$$\ln \left(\frac{a}{b} \right) = \ln \left(a \times \frac{1}{b} \right) = \ln a + \ln \left(\frac{1}{b} \right) = \ln a - \ln b.$$

Exemple 12.6

Soit la fonction définie sur \mathbb{R} par $f : x \mapsto \ln \left(\frac{e^{2x}}{e^x + 1} \right)$.

Nous proposons de justifier, pour tout réel x , l'égalité

$$f(x) = x - \ln(1 + e^{-x}).$$

Pour tout réel x , nous avons

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln e^{2x} - \ln(e^x + 1) \\ &= 2x - \ln(e^x(1 + e^{-x})) \\ &= 2x - (\ln e^x + \ln(1 + e^{-x})) \\ &= 2x - x + \ln(1 + e^{-x}) \\ &= x - \ln(1 + e^{-x}). \end{aligned}$$

12.3.2 Action de \ln sur une puissance**Proposition 12.12**

Pour tout réel a strictement positif et pour tout entier relatif n , nous avons

$$\ln(a^n) = n \ln a.$$

Démonstration

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$. Par disjonction, nous distinguons deux cas selon que $n \geq 0$ ou $n < 0$.

1^{er} cas : $n \geq 0$, c'est-à-dire $n \in \mathbb{N}$.

Nous prouvons l'égalité attendue par récurrence.

Initialisation

Nous avons

$$\ln(a^0) = \ln 1 = 0 = 0 \times \ln a,$$

ce qui justifie la propriété au rang $n = 0$.

Hérédité

Nous supposons qu'à un rang n entier naturel fixé, $\ln(a^n) = n \ln a$.

Montrons que : $\ln(a^{n+1}) = (n+1) \ln a$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, il vient

$$\ln(a^{n+1}) = \ln(a^n \times a) = \ln(a^n) + \ln a = n \ln a + \ln a = (n+1) \ln a.$$

L'égalité attendue est donc héréditaire.

En appliquant le principe de récurrence, nous en concluons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ln(a^n) = n \ln a.$$

2^e cas : $n < 0$, c'est-à-dire $n \in \mathbb{Z}_-^*$.

Nous posons $p = -n$, ainsi $p \in \mathbb{N}^*$. Il vient

$$\ln(a^n) = \ln(a^{-p}) = \ln\left(\frac{1}{a^p}\right) = -\ln(a^p) = -p \ln a = n \ln a.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, nous avons

$$\ln(a^n) = n \ln a.$$

Proposition 12.13 – Action de \ln sur la racine n -ième

Pour tout réel a strictement positif et tout entier naturel $n \geq 2$, nous avons

$$\ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \ln a.$$

Démonstration

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \geq 2$.

Nous avons

$$\ln a = \ln \left((\sqrt[n]{a})^n \right) = n \ln(\sqrt[n]{a}),$$

ce qui permet de conclure par

$$\ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \ln a.$$

Exemple 12.7

Nous souhaitons savoir si les fonctions $f : x \mapsto 2 \ln x$ et $g : x \mapsto \ln(x^2)$ sont égales.

La fonction f est définie sur \mathbb{R}_+^* et la fonction g sur \mathbb{R}^* . Par conséquent, ces deux fonctions ne sont pas égales.

L'égalité a lieu en restreignant g à \mathbb{R}_+^* car dans ce cas, nous avons

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x^2) = 2 \ln x.$$

Exemple 12.8

Nous souhaitons maintenant savoir si les fonctions $f : x \mapsto 2 \ln |x|$ et $g : x \mapsto \ln x^2$ sont égales.

Cette fois, nous avons $f = g$ car ces deux fonctions sont définies sur \mathbb{R}^* et, pour tout réel $x \neq 0$, nous avons

$$f(x) = \ln(|x|^2) = \ln(x^2) = g(x).$$

12.4 Représentation graphique de la fonction \ln

12.4.1 Limites en $+\infty$, en 0

Proposition 12.14

Nous disposons des deux résultats suivants :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty.$

Démonstration

- Pour déterminer la limite de la fonction \ln en $+\infty$, nous utilisons la définition théorique d'une limite égale à $+\infty$ en $+\infty$.

Soit un réel $A > 0$.

La fonction \exp étant croissante strictement sur \mathbb{R} , pour que $\ln x > A$, il suffit que

$$e^{\ln x} > e^A,$$

c'est-à-dire

$$x > e^A.$$

Par conséquent, en posant $B = e^A$, nous obtenons

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x > B, \ln x > A.$$

ce qui établit le résultat annoncé :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

- Pour déterminer la limite de la fonction \ln en 0^+ , nous posons :

$$X = \frac{1}{x},$$

ce qui donne

$$\ln x = \ln \left(\frac{1}{X} \right) = -\ln X.$$

Par composition, nous en concluons :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \lim_{X \rightarrow +\infty} (-\ln X) = -\infty.$$

Remarque

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, nous en déduisons que la courbe \mathcal{C}_{\ln} admet la droite des abscisses pour asymptote verticale.

Exemple 12.9

Nous considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$, définie sur

$$D_f =]0, e[\cup]e, +\infty[.$$

Nous déterminons ses limites aux bornes de D_f .

— Limite de f en 0^+ .

Nous observons une forme indéterminée du type « $\frac{-\infty}{-\infty}$ ». Pour lever cette indétermination, nous posons $X = \ln x$, avec par exemple $0 < x < 1$.

Ainsi $X \neq 0$ et nous obtenons

$$f(x) = \frac{X + 1}{X - 1} = \frac{1 + \frac{1}{X}}{1 - \frac{1}{X}}.$$

Par composition, nous en déduisons

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{X}}{1 - \frac{1}{X}} = 1.$$

— Limite de f en e^- .

Nous avons

$$\lim_{x \rightarrow e^-} \ln x + 1 = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow e^-} \ln x - 1 = 0^-,$$

ce qui donne par quotient

$$\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = -\infty.$$

— Limite de f en e^+ .

Nous avons

$$\lim_{x \rightarrow e^+} \ln x + 1 = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow e^+} \ln x - 1 = 0^+,$$

ce qui donne par quotient

$$\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = +\infty.$$

— Limite de f en $+\infty$

Nous observons une forme indéterminée du type $\frac{+\infty}{+\infty}$. Pour lever cette indétermination, de la même façon que pour la limite en 0^+ , nous posons $X = \ln x$, avec par exemple $x > 1$.

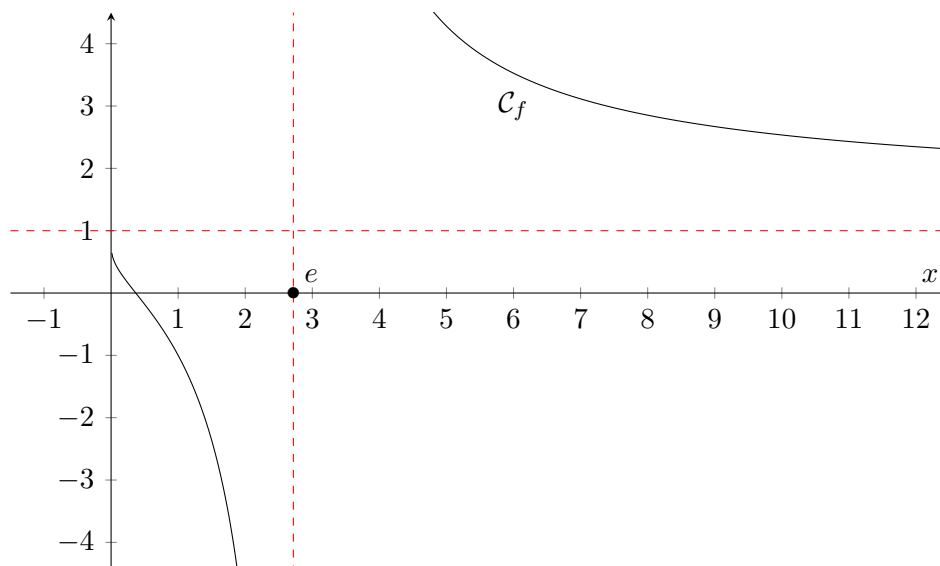
Ainsi $X \neq 0$ et nous obtenons

$$f(x) = \frac{X+1}{X-1} = \frac{1 + \frac{1}{X}}{1 - \frac{1}{X}}.$$

Par composition, nous en déduisons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{X}}{1 - \frac{1}{X}} = 1.$$

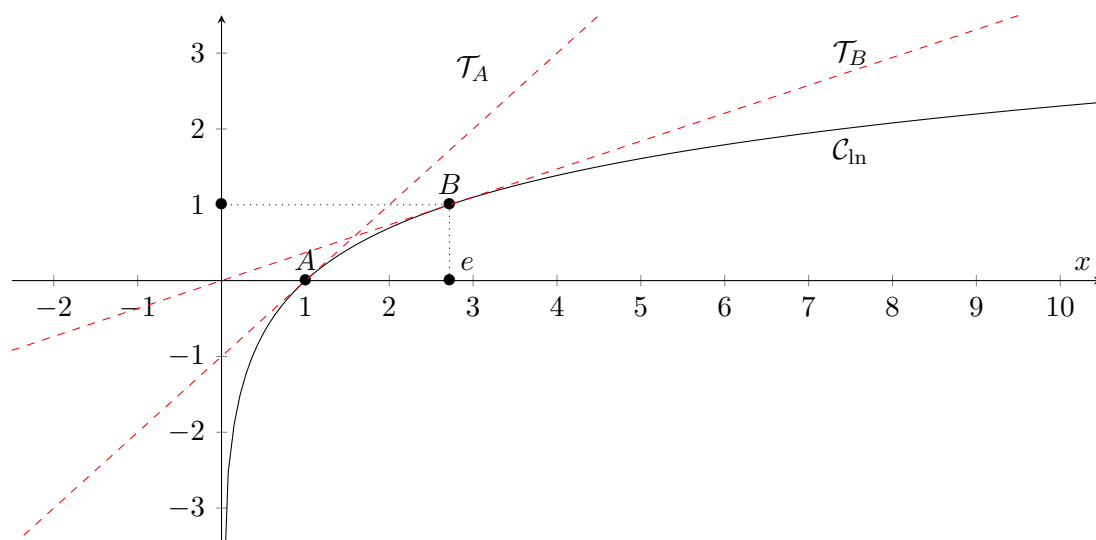
Nous contrôlons graphiquement en observant que la droite d'équation $x = e$ et la droite d'équation $y = 1$ sont respectivement une asymptote verticale et horizontale pour la courbe \mathcal{C}_f .



12.4.2 Représentation graphique

Nous connaissons les tangentes à \mathcal{C}_{\ln} aux points $A(1,0)$ et $B(e,1)$. Nous savons que $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Nous savons également que la courbe \mathcal{C}_{\ln} admet la droite des abscisses pour asymptote verticale.

Toutes ces informations nous restituent l'allure de la courbe représentative de \ln .

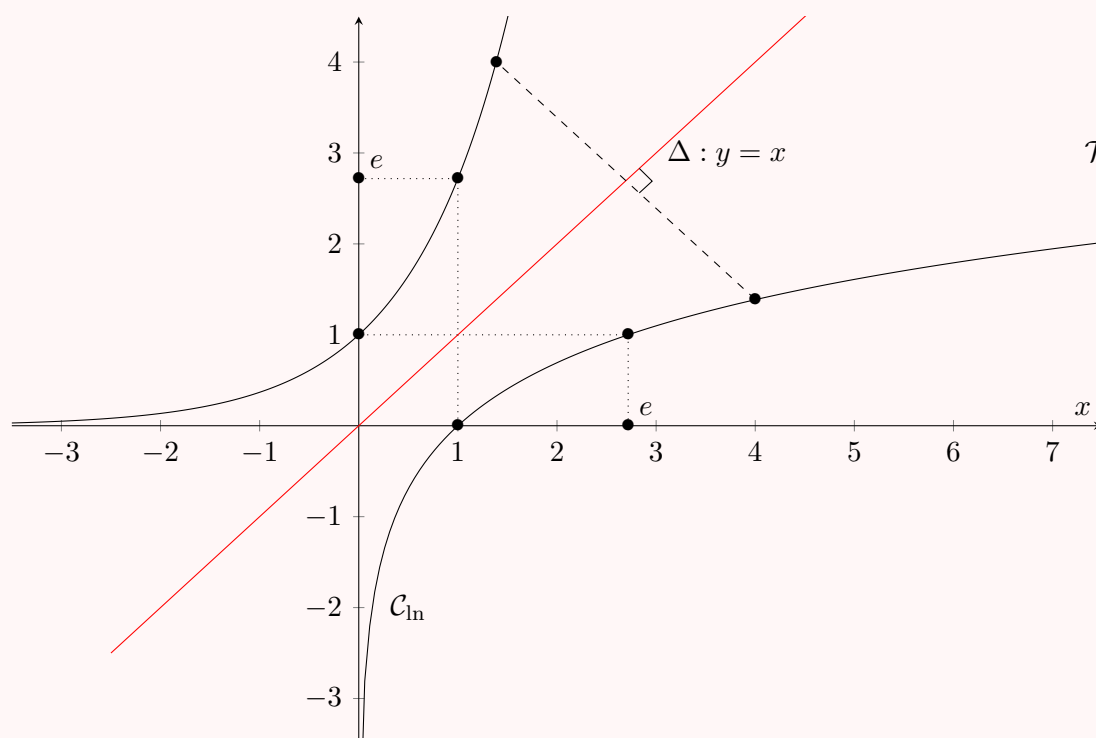


Proposition 12.15

Dans un repère orthonormal du plan, les courbes C_{\ln} et C_{\exp} sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.

Démonstration

Nous donnons d'abord la figure suivante.



Avec les notations de la figure, puisque les points $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ sont symétriques relativement à la droite Δ d'équation $y = x$, nous avons :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

Ainsi, nous disposons des équivalences

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}_{\ln} &\iff y = \ln x \\ &\iff x = e^y \\ &\iff y' = e^{x'} \\ &\iff M' \in \mathcal{C}_{\exp} \end{aligned}$$

ce qui justifie que les courbes \mathcal{C}_{\ln} et \mathcal{C}_{\exp} sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.

Remarque

On peut démontrer facilement que cette propriété est générale. Les représentations graphiques d'une bijection et de sa fonction réciproque sont symétriques relativement à la première bissectrice du repère orthonormal considéré.

12.5 Formes indéterminées logarithmiques

12.5.1 Limite de $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$

Proposition 12.16

Nous disposons de la limite suivante

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Démonstration

Nous observons une forme indéterminée du type « $\frac{+\infty}{+\infty}$ ».

Pour lever cette indétermination, nous posons $X = \ln x$. Ainsi, X tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Il vient

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{X}{e^X}$$

Par composition, nous en concluons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0.$$

Remarque

- ▷ Graphiquement, cette limite signifie que, x étant un réel suffisamment grand, les points d'abscisses x sur la courbe \mathcal{C}_{\ln} se rapprochent d'une droite parallèle à la droite des abscisses.

On dit dans ce cas que la courbe \mathcal{C}_{\ln} admet en $+\infty$, une branche parabolique de direction la droite des abscisses.

- ▷ Nous interprétons aussi cette limite par croissance comparée, ce qui signifie que la fonction $x \mapsto \ln x$ a une croissance plus lente que la fonction $x \mapsto x$ et par conséquent est « dominée » par $\frac{1}{x}$, en $+\infty$.

- ▷ Nous retiendrons que par inverse, nous disposons également de la limite suivante

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty.$$

- ▷ Sans indétermination, nous avons par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty.$$

Proposition 12.17 – Croissance comparée de la fonction $x \mapsto \ln x$ avec $x \mapsto x^n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = +\infty.$$

Démonstration

Nous observons une forme indéterminée du type « $\frac{+\infty}{+\infty}$ ».

Pour lever cette indétermination, nous posons $X = x^n$, avec $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Nous en déduisons

$$\ln X = \ln(x^n) = n \ln x,$$

ce qui donne

$$\frac{\ln x}{x^n} = \frac{1}{n} \times \frac{\ln X}{X}.$$

Par composition, puisque X tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, nous en concluons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \frac{1}{n} \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0.$$

Remarque

▷ De la même façon, en posant $X = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, avec $n \geq 2$ entier, nous justifions

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} = 0$$

En particulier pour $n = 2$, nous obtenons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$$

▷ En termes de croissance comparée, la fonction \ln a une croissance plus lente sur $]0, +\infty[$ que les fonctions puissances $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$.

Exemple 12.10

Nous considérons la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x} - \ln(2x)$.

- En $+\infty$, nous observons une forme indéterminée du type « $+\infty - \infty$ ». Pour tout réel $x > 0$, nous avons

$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x - \ln 2 = \sqrt{x} \left(1 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}} - \frac{\ln 2}{\sqrt{x}} \right).$$

Puisque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2}{\sqrt{x}} = 0,$$

par produit, nous en concluons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- En 0^+ la limite n'est pas indéterminée car

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(2x) = \lim_{X \rightarrow 0^+} \ln X = -\infty,$$

et par différence, nous en concluons

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

12.5.2 Limite de $x \mapsto x \ln x$ en 0 à droite**Proposition 12.18**

Nous disposons de la limite suivante

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0.$$

Démonstration

Nous observons une forme indéterminée du type « $0 \times -\infty$ ».

Pour lever cette indétermination, pour $x > 0$, nous posons $X = \frac{1}{x}$. Ainsi X tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0^+ .

Il vient

$$x \ln x = \frac{1}{X} \ln \left(\frac{1}{X} \right) = -\frac{\ln X}{X}.$$

Par composition, nous en concluons

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = - \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0.$$

Remarque

- ▷ Sans indétermination, par produit, nous avons $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$.
- ▷ Nous retenons ce résultat en exprimant que par croissance comparée, $x \mapsto \ln x$ est « dominée » par $x \mapsto x$ en 0^+ .

Proposition 12.19 – Limite de $x \mapsto x^n \ln x$ en 0^+

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Nous disposons de la limite suivante

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0.$$

Démonstration

Nous observons à nouveau une forme indéterminée du type « $0 \times -\infty$ ».

Pour $x > 0$, nous posons $X = \frac{1}{x}$.

Nous obtenons

$$x^n \ln x = \frac{1}{X^n} \ln \left(\frac{1}{X} \right) = -\frac{\ln X}{X^n}.$$

Par composition, nous en concluons

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = - \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X^n} = 0.$$

Remarque

- ▷ De la même façon, en posant $X = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, avec $n \geq 2$ entier, nous justifions dans le premier exemple qui suit.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[n]{x} \ln x = 0$$

En particulier pour $n = 2$, nous obtenons

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x = 0.$$

- ▷ En termes de croissance comparée, la fonction $x \mapsto \ln x$ est « dominée » par les fonctions puissances $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ en 0^+ .

Exemple 12.11

Nous justifions que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[n]{x} \ln x = 0$.

En posant $X = \sqrt[n]{x}$, avec $x > 0$ et $n \geq 2$ entier, puisque $x = X^n$, il vient

$$\sqrt[n]{x} \ln x = X \ln (X^n) = nX \ln X.$$

Par composition, il en résulte

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[n]{x} \ln x = n \lim_{X \rightarrow 0^+} X \ln X = 0.$$

Exemple 12.12

Nous étudions la limite en 0 de la fonction définie sur \mathbb{R}^* par

$$f : x \mapsto x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right).$$

Nous observons une forme indéterminée du type « $0 \times +\infty$ ».

Pour tout réel $x \neq 0$, nous avons

$$\begin{aligned} f(x) &= x \ln \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} \right) \\ &= x (\ln (x^2 + 1) - \ln (x^2)) \\ &= x (\ln (x^2 + 1) - \ln (|x|^2)) \\ &= x (\ln (x^2 + 1) - 2 \ln (|x|)). \end{aligned}$$

Par disjonction, deux cas s'imposent selon que $x > 0$ ou $x < 0$.

— **1^{er} cas** : $x > 0$.

Il vient, pour x voisin de 0^+ , par exemple pour $x \in]0, 1[$,

$$f(x) = x (\ln (x^2 + 1) - 2 \ln x) = x \ln x \left(\frac{\ln (x^2 + 1)}{\ln x} - 2 \right).$$

Puisque

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x^2 + 1) = \ln 1 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0,$$

nous en déduisons, par produit :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0.$$

— **2^e cas :** $x < 0$.

Dans ce cas, nous exploitons le fait que la fonction f est impaire.

Pour x voisin de 0^- , nous posons $X = -x$, ainsi X est voisin de 0^+ .

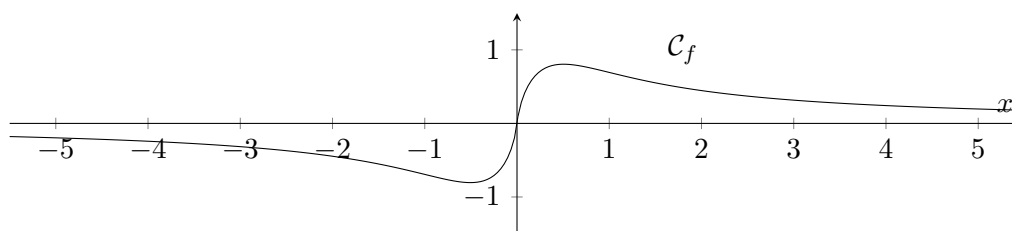
Nous obtenons

$$f(x) = f(-X) = -f(X),$$

ce qui donne par composition

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = - \lim_{X \rightarrow 0^+} f(X) = 0.$$

Pour terminer, nous contrôlons graphiquement.



Nous remarquons :

- qu'il est possible de prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
- que la limite de f en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à 0.

Par contre, la forme est indéterminée du type « $+\infty \times 0$ ».

Nous leverons cette indétermination dans la paragraphe qui suit.

12.5.3 Limite de $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ en 0

Proposition 12.20

Nous disposons de la limite suivante

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Démonstration

Il s'agit ici d'une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ».

Pour lever cette indétermination, nous observons que la fonction \ln est dérivable en 1, ce qui donne

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = \ln'(1) = 1.$$

Les variables h et x étant muettes, le résultat attendu est établi.

Remarque

En posant, pour tout réel $x \neq 0$,

$$\varepsilon(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} - 1$$

nous en déduisons

$$\ln(1+x) = x + x\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

ce qui restitue la fonction $x \mapsto x$ qui est l'approximation affine tangente en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.

On dit aussi que $x \mapsto x$ est le développement limité d'ordre 1 en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.

Exemple 12.13

Nous déterminons la limite quand x tend vers 1 de la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x-1}$.

Nous observons une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ».

Pour tout réel $x \neq 1$, nous posons $X = x - 1$, ce qui donne

$$\frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln(X+1)}{X}.$$

Par composition, nous obtenons

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(X+1)}{X} = 1.$$

Exemple 12.14

Nous considérons la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par

$$u_n = n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

Quand n tend vers $+\infty$, la forme est indéterminée du type « $+\infty \times 0$ ».

Pour tout entier $n \geq 1$, nous obtenons

$$u_n = \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n}}$$

En posant $X = \frac{1}{n}$, par composition, il vient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1.$$

Exemple 12.15

Nous revenons à l'exemple 12.12.

Nous étudions la limite en $+\infty$ de la fonction

$$f : x \mapsto x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right).$$

Quand x tend vers $+\infty$, la forme est à nouveau indéterminée du type « $+\infty \times 0$ ».

Pour $x > 0$, nous posons $h = \frac{1}{x^2} > 0$, ce qui implique $x = \frac{1}{\sqrt{h}}$.

Par suite, nous obtenons

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{h}} \ln(1+h) = \sqrt{h} \times \frac{\ln(1+h)}{h}.$$

Par composition et produit, nous en concluons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{h} \times \frac{\ln(1+h)}{h} = 0 \times 1 = 0.$$

12.6 Fonction logarithme décimal

Définition 12.3 – Logarithme décimal

La fonction *logarithme décimal*, notée \log ou \log_{10} , est définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall x > 0, \log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

Proposition 12.21

La fonction \log satisfait aux égalités suivantes :

- $\log 10 = 1$ et $\log 1 = 0$.
- $\forall n \in \mathbb{Z}, \log 10^n = n$.
- $\forall a > 0, \forall b > 0, \log(ab) = \log a + \log b$.
- La fonction \log est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Démonstration

À la constante multiplicative $\frac{1}{\ln 10} > 0$ près, les propriétés de \log sont celles de la fonction \ln .

Remarque

- ▷ Toutes les propriétés algébriques de \ln restent à disposition pour la fonction \log .
- ▷ La fonction \log est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x > 0, \log'(x) = \frac{1}{x \ln 10}.$$

- ▷ La fonction \log est utilisée dans de nombreux domaines scientifiques . Par exemple, citons

- L'échelle de Richter ^a qui mesure la magnitude R d'un séisme d'intensité I par la formule

$$R = \log \frac{I}{I_0},$$

où I_0 est une intensité minimale de référence.

- Le niveau sonore d'un son de pression acoustique P est donné, en décibels (dB), par la relation

$$L = 20 \log \frac{P}{P_0},$$

où $P_0 = 20 \mu\text{Pa}$ est la pression minimale en Micropascals, perceptible par l'oreille humaine.

- Le pH d'une solution aqueuse est donné par la formule :

$$pH = -\log [\text{H}_3\text{O}^+],$$

où $[\text{H}_3\text{O}^+]$ désigne la concentration d'ions H_3O^+ (en mol.L^{-1}).

- ▷ Plus généralement, une fonction logarithme de base a , avec $a > 0$ et $a \neq 1$, notée \log_a est définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall x > 0, \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Dans le cas particulier $a = 2$, la fonction \log_2 est employée pour définir l'entropie de Shannon ^b qui est une fonction mathématique qui mesure la quantité d'informations contenues ou délivrées par une source d'information.

^a. Sismologue américain : 1900–1985

^b. Mathématicien américain : 1916–2001.

12.7 Fonctions exponentielles de bases a

Définition 12.4

Soit un réel $a > 0$ tel que $a \neq 1$. La fonction exponentielle de base a , notée \exp_a , est définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) = e^{x \ln a}.$$

Remarque

▷ $\exp_e = \exp : x \mapsto e^x$.

▷ Si $a = 1$, alors $\exp_1 : x \mapsto 1$.

Ainsi \exp_1 n'est pas une bijection. C'est pour cette raison que nous supposons $a \neq 1$.

▷ Nous observons les égalités suivantes

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \exp_a(n) = e^{n \ln a} = (e^{\ln a})^n = a^n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exp_a\left(\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{1}{n} \ln a} = e^{\ln\left(a^{\frac{1}{n}}\right)} = a^{\frac{1}{n}}.$$

Nous allons, dans la proposition qui suit, étendre ces égalités lorsque $x \in \mathbb{Q}$, c'est-à-dire si x est un nombre rationnel, puis lorsque $x \in \mathbb{R}$, ce qui donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a}.$$

Proposition 12.22

Soit un réel $a > 0$ tel que $a \neq 1$.

Pour tout réel x , nous disposons de l'égalité

$$\exp_a(x) = e^{x \ln a} = a^x.$$

Démonstration

Nous distinguons trois cas selon que x est un rationnel positif ou un rationnel strictement négatif ou un réel.

— **1^{er} cas.**

Nous supposons que x est un nombre rationnel $r \geq 0$.

Pour cela, nous posons $r = \frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. il vient

$$\exp_a(r) = \exp_a\left(\frac{p}{q}\right) = e^{\frac{p}{q} \ln a} = \left(e^{\ln\left(a^{\frac{1}{q}}\right)}\right)^p = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = a^{\frac{p}{q}} = a^r.$$

— **2^e cas.**

Nous supposons que x est un nombre rationnel $r < 0$.

Nous posons $r' = -r > 0$. Nous en déduisons

$$\exp_a(r) = \exp_a(-r') = \frac{1}{\exp_a(r')} = \frac{1}{a^{r'}} = a^{-r'} = a^r$$

Ces deux cas permettent la conclusion

$$\forall r \in \mathbb{Q}, \quad \exp_a(r) = a^r.$$

— **3^e cas.**

Nous supposons que x est un réel quelconque.

Nous avons prouvé en exercice que \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , ce qui signifie, pour tout nombre réel x , qu'il existe une suite de nombres rationnels (r_n) définie sur \mathbb{N} , qui converge vers x .

Des deux premiers cas, il résulte que, pour tout entier naturel n ,

$$\exp_a(r_n) = e^{r_n \ln a} = a^{r_n}.$$

La fonction \exp_a est continue sur \mathbb{R} par composition de \exp avec la fonction linéaire $x \mapsto x \ln a$.

Quand n tend vers $+\infty$, par composition de la fonction \exp_a avec la suite (r_n) , nous en déduisons d'une part que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp_a(r_n) = \exp_a\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n\right) = \exp_a(x) = e^{x \ln a},$$

d'autre part, nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp_a(r_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n} = a^{\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n} = a^x.$$

Par unicité de la limite d'une suite, nous en concluons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a}.$$

Proposition 12.23 – Quelques propriétés de la fonction $x \mapsto a^x$

Soit un réel $a > 0$ tel que $a \neq 1$.

Nous disposons des propriétés suivantes :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad a^x > 0.$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(a^x) = x \ln a.$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \log_a(a^x) = x$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad a^{\log_a(x)} = x.$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad y = a^x \iff x = \log_a(y).$

Démonstration

Soit x un réel.

- Du résultat précédent, il résulte que

$$a^x = e^{x \ln a} > 0.$$

- Il vient

$$\ln(a^x) = \ln(e^{x \ln a}) = x \ln a.$$

- Nous avons

$$\log_a(a^x) = \frac{\ln(a^x)}{\ln a} = \frac{x \ln a}{\ln a} = x.$$

- Soit un réel $x > 0$. Nous obtenons

$$a^{\log_a(x)} = e^{\log_a(x) \times \ln a} = e^{\ln x} = x.$$

- Soient un réel x et un réel $y > 0$.

Si $y = a^x$, alors $\log_a(y) = \log_a(a^x) = x$.

Réciproquement, si $x = \log_a(y)$, alors $a^x = a^{\log_a(y)} = y$.

Remarque

- ▷ Les trois dernières propriétés ci-dessus justifient que les fonctions \exp_a et \log_a sont réciproques l'une de l'autre.
- ▷ Nous donnons ci-dessous les représentations graphiques de ces deux fonctions selon que $a > 1$ ou $0 < a < 1$.

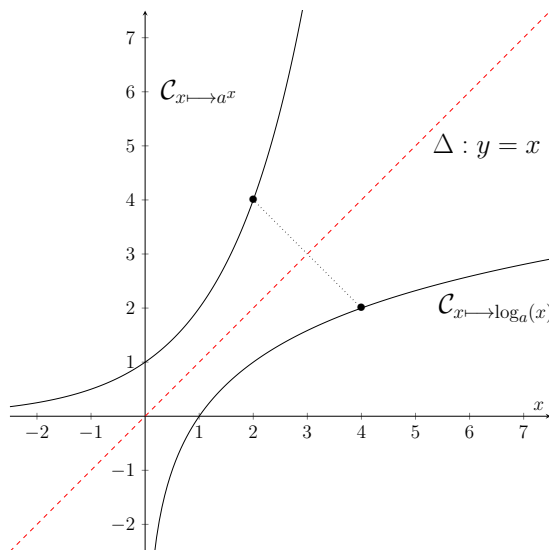


FIGURE 12.1 – $a > 1$

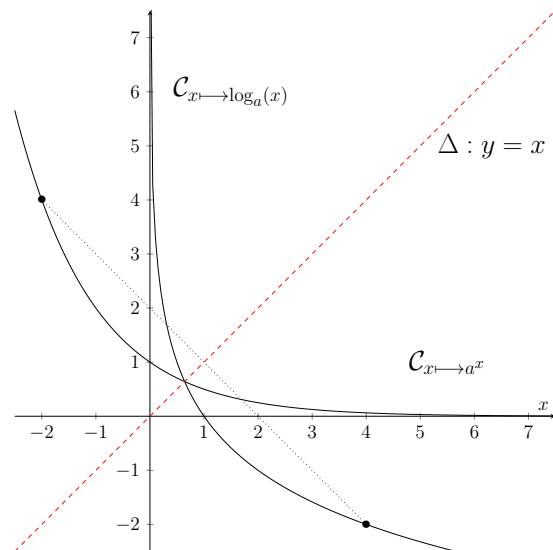


FIGURE 12.2 – $0 < a < 1$

Exemple 12.16

Nous résolvons dans \mathbb{R} l'équation

$$n^{2^x} = 2^{n^x}, \text{ où } n > 2 \text{ est un entier.}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} n^{2^x} = 2^{n^x} &\iff 2^x \ln n = n^x \ln 2, \\ &\iff \frac{2^x}{n^x} = \frac{\ln 2}{\ln n} \\ &\iff \left(\frac{2}{n}\right)^x = \frac{\ln 2}{\ln n} \\ &\iff x \ln \frac{2}{n} = \ln \left(\frac{\ln 2}{\ln n}\right) \\ &\iff x = \frac{\ln(\ln 2) - \ln(\ln n)}{\ln 2 - \ln n}. \end{aligned}$$

Exemple 12.17

Nous déterminons, par deux méthodes, la limite en 0 de la fonction $f : x \mapsto \frac{a^x - 1}{x}$, avec $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$.

▷ Méthode 1.

Pour tout réel $x \neq 0$, nous avons

$$f(x) = \frac{e^{x \ln a} - 1}{x} = \ln a \times \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a}.$$

Par suite, en posant $u = x \ln a$, nous obtenons

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ln a \times \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = \ln a.$$

▷ Méthode 2.

La fonction \exp_a est dérivable sur \mathbb{R} par composition et nous obtenons :

$$\exp'_a(x) = \ln a \times e^{x \ln a} = \ln a \times a^x.$$

En particulier cette fonction est dérivable en 0, ce qui donne

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp_a(x) - \exp_a(0)}{x} = \exp'_a(0) = \ln a$$

Proposition 12.24

Les propriétés algébriques de la fonction $\exp : x \mapsto e^x$ s'étendent aux fonctions $\exp_a : x \mapsto a^x$, avec $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, ce qui donne :

- $a^0 = 1$ et $a^1 = a$, et, pour tous les réels x et y ,
- $a^{x+y} = a^x \times a^y$,
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$,
- $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$,
- $(a^x)^y = a^{x \times y}$.

Démonstration

Ces égalités sont obtenues immédiatement à partir des propriétés algébriques de la fonction \exp .

Ainsi, nous nous contentons de justifier la première et la dernière de ces propriétés, les autres preuves sont laissées au soin du lecteur.

- $a^0 = 1$.

En effet, nous avons

$$a^0 = e^{0 \times \ln a} = e^0 = 1$$

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (a^x)^y = a^{x \times y}$.

Il vient

$$(a^x)^y = e^{y \times \ln(a^x)} = e^{yx \ln a} = a^{xy}.$$

Remarque

Nous avons généralisé aux exposants **réels** les règles de calcul sur les puissances d'exposants entiers que vous connaissez depuis la classe de Troisième.

Chapitre 13

Fonctions trigonométriques

Sommaire

13.1 Propriétés qualitatives	264
13.1.1 Parité	264
13.1.2 Sens de variations	265
13.1.3 Représentations graphiques	265
13.1.4 Fonctions périodiques	266
13.2 Les formules d'addition – de duplication	267
13.2.1 Formule d'addition	267
13.2.2 Formules de duplication	269
13.3 Dérivation des fonctions trigonométriques	271
13.3.1 Dérivées en 0 de sin et cos	271
13.3.2 Dérivées de sin et cos	273
13.3.3 Dérivée de la fonction tangente	275
13.3.4 Dérivée de la composée avec une fonction affine	275

Nous débutons ce chapitre en donnant les principales propriétés qualitatives des fonctions cosinus et sinus, c'est-à-dire leurs parités, leur sens de variations et leurs représentations graphiques. Cela nous amène naturellement à une introduction à la notion de fonctions périodiques.

Nous proposons ensuite de mettre en place les formules d'addition qui permettent de calculer le cosinus ou le sinus de la somme ou de la différence de deux réels en fonction des cosinus et des sinus de ces deux réels.

Nous pouvons alors aborder un des objectifs principaux de ce chapitre : la dérivation des fonctions trigonométriques sans oublier la fonction tangente.

Dans le TD, nous donnons comme approfondissement d'autres formules de trigonométrie comme les transformations de produits en sommes, de sommes en produits, ainsi que l'obtention des expressions rationnelles de $\cos x$ et $\sin x$.

13.1 Propriétés qualitatives

13.1.1 Parité

Proposition 13.1

Nous disposons des propriétés suivantes :

- Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont définies sur \mathbb{R} .
- La fonction $x \mapsto \cos x$ est paire.
- La fonction $x \mapsto \sin x$ est impaire.

Démonstration

Ces trois propriétés sont justifiées par lecture et exploitation des symétries sur le cercle trigonométrique.

Proposition 13.2

Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont périodiques de période 2π (ou 2π -périodiques). En d'autres termes, nous avons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x \quad \text{et} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x$$

Démonstration

Soient x un réel et k un entier relatif.

Les réels x et $x + 2\pi$ repèrent le même point sur le cercle trigonométrique.

Il en résulte que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x \quad \text{et} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x.$$

Proposition 13.3 – Action d'une translation sur \mathcal{C}_{\cos} et sur \mathcal{C}_{\sin}

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit t la translation de vecteur $2\pi \cdot \vec{i}$. Nous avons

- quel que soit le point $M \in \mathcal{C}_{\cos}$, $t(M) \in \mathcal{C}_{\cos}$.
- quel que soit le point $M \in \mathcal{C}_{\sin}$, $t(M) \in \mathcal{C}_{\sin}$.

Démonstration

Soient $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ deux points tels que $M' = t(M)$.

Nous avons

$$\overrightarrow{MM'} = 2\pi \cdot \vec{i},$$

ce qui donne

$$\begin{cases} x' - x = 2\pi \\ y' - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x' = x + 2\pi \\ y' = y \end{cases}$$

- Si $M(x, y) \in \mathcal{C}_{\cos}$, alors $y = \cos x$.

Nous en déduisons que les coordonnées (x', y') du point M' satisfont à l'équation

$$y' = \cos(x' - 2\pi) = \cos x'$$

Nous avons prouvé que $M' = t(M) \in \mathcal{C}_{\cos}$.

- Nous montrons de la même façon que

$$\forall M \in \mathcal{C}_{\sin}, \quad t(M) \in \mathcal{C}_{\sin}$$

Remarque

On dit que les courbes \mathcal{C}_{\cos} et \mathcal{C}_{\sin} sont globalement invariantes par la translation $t = t_{2\pi \cdot \vec{r}}$.

13.1.2 Sens de variations

Proposition 13.4

La fonction $x \mapsto \cos x$ est décroissante sur $[0, \pi]$.

Démonstration

Une lecture sur le cercle trigonométrique permet de conclure que si les réels a et b appartiennent à l'intervalle $[0, \pi]$ tels que $a \leq b$, alors $\cos a \geq \cos b$.

Proposition 13.5

La fonction $x \mapsto \sin x$ est

- croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Démonstration

De la même façon que ci-dessus, une lecture sur le cercle trigonométrique permet de conclure.

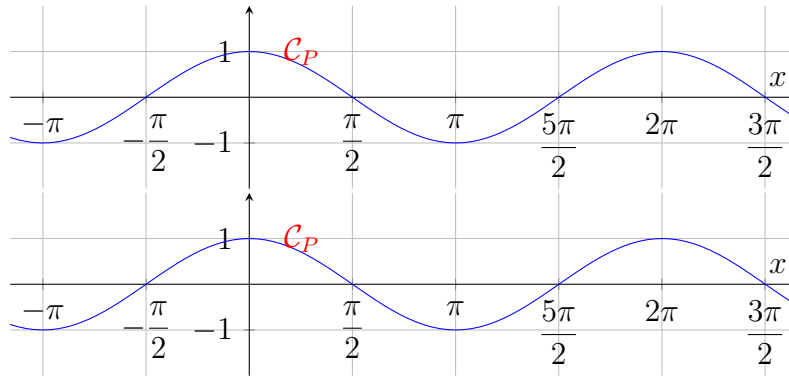
13.1.3 Représentations graphiques

Connaissant les courbes \mathcal{C}_{\cos} et \mathcal{C}_{\sin} sur l'intervalle $[0, \pi]$, nous en déduisons :

- \mathcal{C}_{\cos} et \mathcal{C}_{\sin} sur \mathbb{R}_+ par la translation de vecteur $2\pi \cdot \vec{i}$, puisque ces deux courbes sont globalement invariantes par cette translation.

- \mathcal{C}_{\cos} sur \mathbb{R} par symétrie par rapport à la droite des ordonnées car \cos est paire.
- \mathcal{C}_{\sin} sur \mathbb{R} par symétrie par rapport à l'origine du repère car \sin est impaire.

Ainsi, nous obtenons



13.1.4 Fonctions périodiques

Définition 13.1

Soit T un réel strictement positif. Une fonction f définie sur \mathbb{R} est périodique de période T (ou T -périodique) si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$$

Remarque

Si f est définie sur son ensemble de définition D_f , cette fonction est T -périodique si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in D_f, x + T \in D_f \\ \forall x \in D_f, f(x + T) = f(x) \end{array} \right.$$

Proposition 13.6

Si f est une fonction T -périodique, alors \mathcal{C}_f est globalement invariante par la translation de vecteur $T \cdot \vec{i}$.

Démonstration

Nous procédons comme dans l'exercice 16 en remplaçant le vecteur $2\pi \cdot \vec{i}$ par $T \cdot \vec{i}$.

Exemples. Nous en donnons trois.

La fonction $f : x \mapsto \cos(2x)$ est π -périodique car pour tout réel x , nous avons

$$f(x + \pi) = \cos 2(x + \pi) = \cos(2x + 2\pi) = \cos(2x) = f(x)$$

▷ La fonction $g : t \mapsto \sin(2\pi t)$ est 1-périodique car pour tout réel t , il vient

$$g(t + 1) = \sin 2\pi(t + 1) = \sin(2\pi t + 2\pi) = \sin(2\pi t) = g(t)$$

▷ Un signal triangle.

Nous représentons graphiquement la fonction f définie sur \mathbb{R} , 2-périodique telle que

$$\forall x \in [-1, 1], f(x) = |x|$$

La fonction f , restreinte à l'intervalle $[-1, 1]$ est paire.

Pour $x \geq 0$, l'action successive de la translation de vecteur $2 \cdot \vec{i}$ restitue la partie de C_f correspondant à $x \geq 0$.

La symétrie par rapport à la droite des ordonnées fournit la courbe C_f , pour tout réel x .

13.2 Les formules d'addition – de duplication

13.2.1 Formule d'addition

Proposition 13.7 – Action de \cos sur une différence

Quels que soient les réels a et b , nous disposons de l'égalité

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

Démonstration

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Nous considérons deux points A et B appartenant au cercle trigonométrique, qui sont repérés sur ce cercle, respectivement par deux réels a et b .

Nous calculons de deux manières le produit scalaire $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$.

D'une part, nous savons que l'angle $(\vec{OA}, \vec{OB}) = (b - a)[2\pi]$.

Puisque $OA = OB = 1$ et sachant que $x \mapsto \cos x$ est paire, nous en déduisons

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \times OB \times \cos(b - a) = \cos(a - b)$$

D'autre part, dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, nous avons

$$\vec{OA}(\cos a, \sin a) \quad \text{et} \quad \vec{OB}(\cos b, \sin b)$$

ce qui donne

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

Les deux expressions du produit scalaire $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$, permettent, pour tous réels a et b , d'obtenir l'égalité attendue, c'est-à-dire notre première formule d'addition :

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

Proposition 13.8 – Trois autres formules d'addition

Quels que soient les réels a et b , nous disposons des égalités suivantes :

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$,
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$,
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Démonstration

Soient deux réels a et b .

- Pour développer $\cos(a + b)$, nous remplaçons b par $-b$ dans la proposition précédente puis nous utilisons la parité des fonctions \cos et \sin .

Nous obtenons

$$\begin{aligned}\cos(a + b) &= \cos(a - (-b)) \\ &= \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b) \\ &= \cos a \cos b - \sin a \sin b\end{aligned}$$

- Pour développer $\sin(a - b)$, nous remarquons

$$\sin(a - b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a - b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} + b\right) - a\right)$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}\sin(a - b) &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} + b\right) - a\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + b\right) \cos a + \sin\left(\frac{\pi}{2} + b\right) \sin a \\ &= -\sin b \cos a + \cos b \sin a \\ &= \sin a \cos b - \cos a \sin b\end{aligned}$$

- Pour développer $\sin(a + b)$, nous remplaçons b par $-b$ dans le développement ci-dessus. Il vient

$$\begin{aligned}\sin(a + b) &= \sin(a - (-b)) \\ &= \sin a \cos(-b) - \cos a \sin(-b) \\ &= \sin a \cos b + \cos a \sin b\end{aligned}$$

Exemples. Nous en proposons deux.

1^{er} exemple : Lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{12}$.

Nous avons

$$\begin{aligned}
\cos \frac{\pi}{12} &= \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right), \\
&= \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}, \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}, \\
&= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

De la même façon, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\sin \frac{\pi}{12} &= \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right), \\
&= \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}, \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}, \\
&= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

2^e exemple : Soit un réel $\omega > 0$. Nous considérons les deux fonctions définies, pour tout réel t , par $f : t \mapsto \cos(\omega t)$ et $g : t \mapsto \sin(\omega t)$.

Nous superposons ces deux fonctions, ce qui consiste à en former une combinaison linéaire, en particulier à considérer leur somme $s = f + g$.

Quel que soit le réel t , nous obtenons

$$\begin{aligned}
s(t) &= f(t) + g(t) \\
&= \cos(\omega t) + \sin(\omega t) \\
&= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\omega t) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\omega t) \right) \\
&= \sqrt{2} \left(\cos(\omega t) \cos \frac{\pi}{4} + \sin(\omega t) \sin \frac{\pi}{4} \right) \\
&= \sqrt{2} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right)
\end{aligned}$$

Ainsi, s est une fonction trigonométrique de même pulsation ω que celle de f et g . Nous étudierons le cas général dans l'exercice corrigé 8 de ce chapitre.

13.2.2 Formules de duplication

Proposition 13.9 – Duplication ou passage à l'angle « moitié »

Pour tout réel x , nous disposons des égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
- \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x \\
\bullet \sin 2x &= 2 \sin x \cos x
\end{aligned}$$

Démonstration

Soit un réel x .

- Pour obtenir la première formule de duplication, nous appliquons le développement de $\cos(a+b)$, en particulier pour $a=b=x$. Il vient

$$\cos 2x = \cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

De plus, puisque $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, nous en déduisons

$$\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\cos 2x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$$

- Pour obtenir la seconde formule de duplication, nous appliquons le développement de $\sin(a+b)$, en particulier pour $a=b=x$, ce qui donne

$$\sin 2x = \sin(x+x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x$$

Corollaire 13.10 – Linéarisation ou passage à l'angle « double »

Pour tout réel x , nous avons :

$$- \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$- \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$- \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

Démonstration

Soit un réel x .

- Des égalités $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$, nous déduisons immédiatement que

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

- De l'égalité $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, il résulte immédiatement que

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

Exemples. Nous en donnons deux.

1^{er} exemple : Lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{8}$.

En utilisant les formules de passage à l'angle double, nous obtenons

$$\begin{aligned}\cos^2 \frac{\pi}{8} &= \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(2 \times \frac{\pi}{8} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}, \\ \sin^2 \frac{\pi}{8} &= \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(2 \times \frac{\pi}{8} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Puisque $\frac{\pi}{8} \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, nous avons $\cos \frac{\pi}{8} > 0$ et $\sin \frac{\pi}{8} > 0$.
Nous en concluons

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

2^e exemple : Pour tout réel x , nous souhaitons linéariser $\cos 3x$, c'est-à-dire exprimer ce réel sous la forme d'un polynôme de la variable $\cos x$.

Nous avons

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos(2x + x), \\ &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x, \\ &= (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2(\sin x \cos x) \sin x, \\ &= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x \sin^2 x, \\ &= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x (1 - \cos^2 x), \\ &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x.\end{aligned}$$

Nous utiliserons cette égalité dans l'exercice corrigé 7 de ce chapitre.
De la même manière, pour tout réel x , nous obtenons

$$\sin 3x = -4 \sin^3 x + 3 \sin x.$$

13.3 Dérivation des fonctions trigonométriques

13.3.1 Dérivées en 0 de sin et cos

Lemme 13.11

Nous disposons du résultat suivant :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Démonstration

Dans l'exercice corrigé 5 du chapitre 4.8 nous avons prouvé ce résultat qui est une forme indéterminée à mémoriser.

Proposition 13.12

La fonction $x \mapsto \sin x$ est dérivable en 0 et nous avons

$$\sin'(0) = 1$$

Démonstration

Pour tout réel $x \neq 0$, nous avons

$$\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \frac{\sin x}{x}$$

ce qui implique, en utilisant le lemme ci-dessus,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Nous en concluons que la fonction $x \mapsto \sin x$ est dérivable en 0 et nous obtenons

$$\sin'(0) = 1$$

Proposition 13.13

La fonction $x \mapsto \cos x$ est dérivable en 0 et nous avons

$$\cos'(0) = 0$$

Démonstration

Pour tout réel $x \neq 0$, nous avons

$$\frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} = \frac{\cos x - 1}{x}$$

Nous observons, quand x tend 0, une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ».

Pour x voisin de 0 et $x \neq \pi$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\cos x - 1}{x} &= \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} \\ &= \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} \\ &= \frac{-\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} \\ &= -\frac{\sin x}{x} \times \sin x \times \frac{1}{\cos x + 1}. \end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sin x}{x} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x + 1} = \frac{1}{2}$$

par produit, nous obtenons

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

Nous en concluons que la fonction $x \mapsto \cos x$ est dérivable en 0 et nous obtenons

$$\cos'(0) = 0$$

Remarque

Nous retiendrons que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$.

13.3.2 Dérivées de sin et cos

Proposition 13.14 – Dérivée de $x \mapsto \sin x$

La fonction $x \mapsto \sin x$ est dérivable sur \mathbb{R} et, nous avons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin'(x) = \cos x$$

Démonstration

Soient a et h deux réels, avec $h \neq 0$. Il vient

$$\begin{aligned} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} &= \frac{\sin a \cos h + \cos a \sin h - \sin a}{h} \\ &= \sin a \times \frac{\cos h - 1}{h} + \cos a \times \frac{\sin h}{h} \end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

par produit et somme, nous obtenons

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \cos a$$

Par conséquent la fonction $x \mapsto \sin x$ est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ et nous avons

$$\forall a \in \mathbb{R}, \sin'(a) = \cos a$$

En remplaçant a par x , nous obtenons la formule de dérivation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin'(x) = \cos x$$

Proposition 13.15 – Dérivée de $x \mapsto \cos x$

La fonction $x \mapsto \cos x$ est dérivable sur \mathbb{R} et, nous avons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos'(x) = -\sin x$$

Démonstration

Pour tout réel x , nous savons que

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Par composition de $x \mapsto \sin x$ avec la fonction affine $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$, toutes deux dérivables sur \mathbb{R} , pour tout réel x , nous obtenons

$$\cos' x = (-1) \sin'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$$

Exemples. Nous en développons deux.

1^{er} exemple : des tangentes

▷ Tangente à \mathcal{C}_{\sin} en $a = \pi$.

Une équation de cette tangente est

$$y = \sin'(\pi)(x - \pi) + \sin \pi, \text{ soit } y = -x + \pi$$

* tangente du sin en pi

▷ Tangente à \mathcal{C}_{\cos} en $a = \frac{\pi}{2}$.

Une équation de cette tangente est

$$y = \cos'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos \frac{\pi}{2}, \text{ soit } y = -x + \frac{\pi}{2}.$$

2^e exemple : quelques calculs de dérivées.

▷ Quelle est la dérivée sur \mathbb{R} de $f : x \mapsto x \sin x$?

Cette fonction est dérivable par produit sur \mathbb{R} .

Pour tout réel x , on a

$$f'(x) = 1 \times \sin x + x \cos x = \sin x + x \cos x$$

Quelle est la dérivée sur \mathbb{R}^* de $g : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$?

Cette fonction est dérivable par quotient sur \mathbb{R}^* .

Pour tout réel $x \neq 0$, nous avons

$$g'(x) = \frac{\cos x \times x - \sin x \times 1}{x^2} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

Quelle est la dérivée sur \mathbb{R} de $h : t \mapsto \cos(\pi t)$?

Cette fonction est dérivable sur \mathbb{R} par composition avec la fonction affine $t \mapsto \pi t$.

Pour tout réel t , nous obtenons

$$h'(t) = \pi \times \cos'(\pi t) = -\pi \sin(\pi t)$$

13.3.3 Dérivée de la fonction tangente

Proposition 13.16

La fonction \tan est dérivable sur tout intervalle I tel que $\frac{\pi}{2} + k\pi \notin I$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et, pour tout réel $x \in I$, nous avons

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Démonstration

Pour tout réel $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, nous savons que

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Par conséquent cette fonction est dérivable par quotient sur tout intervalle I tel que $\frac{\pi}{2} + k\pi \notin I$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Pour tout réel $x \in I$, nous avons

$$\tan'(x) = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Exemple. La fonction c définie sur tout intervalle I tel que $k\frac{\pi}{2} \notin I$, avec $k \in \mathbb{Z}$, par :

$$c(x) = \frac{1}{\tan x}$$

est dérivable, par inverse, sur cet intervalle.

Pour tout réel $x \neq k\frac{\pi}{2}$, avec $k \in \mathbb{Z}$, nous obtenons

$$c'(x) = -\frac{\tan' x}{\tan^2 x} = -\frac{1 + \tan^2 x}{\tan^2 x} = -\left(1 + \frac{1}{\tan^2 x}\right) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

13.3.4 Dérivée de la composée avec une fonction affine

Proposition 13.17

Soient a et b deux réels, avec $a \neq 0$.

Les fonctions $f : x \mapsto \sin(ax + b)$ et $g : x \mapsto \cos(ax + b)$ sont dérivables sur \mathbb{R} .

Pour tout réel x , nous avons

$$\begin{aligned} f'(x) &= a \cos(ax + b) \\ g'(x) &= -a \sin(ax + b) \end{aligned}$$

Démonstration

Les fonctions f et g sont dérivables sur \mathbb{R} par composition respectivement de \sin et \cos avec la fonction affine $x \mapsto ax + b$.

Pour tout réel x , nous obtenons

$$\begin{aligned}f'(x) &= a \sin'(ax + b) = a \cos(ax + b) \\g'(x) &= a \cos'(ax + b) = -a \sin(ax + b)\end{aligned}$$

Proposition 13.18

Soient a et b deux réels, avec $a \neq 0$.

La fonction $h : x \mapsto \tan(ax + b)$ est dérivable pour tout réel x tel que $ax + b \neq k\frac{\pi}{2}$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et nous avons

$$h'(x) = \frac{a}{\cos^2(ax + b)} = a(1 + \tan^2(ax + b))$$

Démonstration

La fonction h est, pour tout réel x tel que $ax + b \neq k\frac{\pi}{2}$, avec $k \in \mathbb{Z}$, dérivable par composition de \tan avec la fonction affine $x \mapsto ax + b$. Nous obtenons

$$h'(x) = a \tan'(ax + b) = \frac{a}{\cos^2(ax + b)} = a(1 + \tan^2(ax + b))$$

Exemple. Nous considérons la fonction f définie sur $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ par :

$$f(x) = \tan(\pi x) - \pi x$$

Cette fonction est, sur $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, dérivable par composition et différence. Pour tout réel $x \in] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, nous obtenons

$$f'(x) = \pi(1 + \tan^2(\pi x)) - \pi = \pi \tan^2(\pi x)$$

Puisque, pour tout réel $x \in] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, $f'(x) \geq 0$, nous en déduisons que la fonction f est croissante(strictement) sur $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

Chapitre 14

Primitives – Équations différentielles

Sommaire

14.1 Fonctions primitives	279
14.1.1 Définition – Existence	279
14.1.2 Propriétés	280
14.1.3 Tableau des primitives des fonctions usuelles	283
14.1.4 Primitives et composition	284
14.2 Équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre	287
14.2.1 Équation $y' = ay$ telle que $y(0) = 1$	287
14.2.2 Équation $y' = ay$	288
14.3 Équation différentielle affine du 1^{er} ordre	291
14.3.1 Résolution de $y' = ay + b$	291
14.3.2 Résolution de $y' = ay + b$ avec une condition initiale	293

Nous savons que la fonction $f : x \mapsto e^x$ est l'unique fonction définie sur \mathbb{R} , satisfaisant à l'égalité fonctionnelle

$$f' = f, \quad \text{avec } f(0) = 1.$$

Cette égalité mettant en relation la fonction f et sa dérivée f' est un premier exemple d'équation différentielle (du premier ordre).

Un abus de langage classiquement admis dans ce domaine consiste à poser $y = f$, à ne pas confondre avec $y = f(x)$ qui est une équation de la courbe \mathcal{C}_f représentative de f .

Cela permet de considérer que la fonction exponentielle est l'unique solution de l'équation différentielle

$$y' = y, \quad \text{avec } y(0) = 1.$$

En physique, on désigne fréquemment la dérivée de f ou de y par $y' = \frac{dy}{dx}$. L'équation différentielle ci-dessus s'écrit dans ce cas

$$\frac{dy}{dx} = y.$$

Dans ce chapitre, nous proposons de résoudre

- une équation différentielle de la forme $y' = f(x)$, où f est une fonction donnée, ce qui conduit à la notion de fonctions primitives,

- deux équations du premier ordre qui expriment y' linéairement ou affinement en fonction de y .

Nous traiterons pour approfondir deux exemples classiques du second ordre.

Il s'agit des équations différentielles

$$y'' = -\omega^2 y \quad \text{et} \quad y'' = \omega^2 y.$$

Les équations différentielles décrivent différents modèles continus d'évolution dépendant du temps.

Nous citons, pour exemples

- la loi de désintégration radioactive,
- l'obtention d'un régime stationnaire dans une circuit électrique,
- la loi logistique d'évolution de Verhulst ¹ d'une population,
- la loi de refroidissement de Newton.
- la loi du mouvement d'un oscillateur.
- la loi de propagation d'une épidémie de Daniel Bernoulli ².

1. Mathématicien belge : 1804–1849

2. Mathématicien-médecin-physicien suisse : 1700–1782

14.1 Fonctions primitives

14.1.1 Définition – Existence

Définition 14.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Une fonction F est une *primitive* de f sur I si et seulement si

- F est dérivable sur I ,
- $\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x)$.

Exemple 14.1

Une primitive de la fonction $f : x \mapsto x^2$ sur \mathbb{R} est la fonction $F : x \mapsto \frac{x^3}{3}$.

Nous remarquons dès à présent que $G : x \mapsto \frac{x^3}{3} + 3$ est aussi une primitive de f sur \mathbb{R} .

Exemple 14.2

La fonction $x \mapsto \ln x$ est une primitive sur $]0, +\infty[$ de $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Exemple 14.3

Une primitive de la fonction $x \mapsto \sin x$ sur \mathbb{R} est la fonction $F : x \mapsto -\cos x$.

Proposition 14.1 – Existence de primitives

Si f est continue sur un intervalle I , alors cette fonction admet sur I des primitives.

Démonstration

Cette propriété est admise pour l'instant. Elle sera justifiée au chapitre 15.

Remarque

- La réciproque de cette proposition est fausse.
- Dans le langage des équations différentielles, f étant une fonction donnée continue sur un intervalle I , une de ses primitives est une solution sur I de l'équation différentielle

$$y' = f(x).$$

14.1.2 Propriétés

Proposition 14.2

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I . Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) la fonction G est une primitive de f sur I ,
- (ii) il existe un réel c tel que, quel que soit le réel x , $G(x) = F(x) + c$.

Démonstration

$$(i) \implies (ii)$$

Si G est une primitive de f sur I alors G est dérivable sur I et nous avons

$$\forall x \in I, \quad G'(x) = f(x).$$

Puisque F est aussi une primitive de f sur I , pour tout réel x , nous en déduisons

$$G'(x) = F'(x),$$

ce qui implique

$$G'(x) - F'(x) = 0, \quad \text{soit } (G - F)'(x) = 0.$$

Par suite, il existe un réel c tel que, quel que soit le réel x ,

$$(G - F)(x) = c, \quad \text{c'est-à-dire } G(x) - F(x) = c.$$

Nous en concluons :

$$\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = F(x) + c.$$

$$(ii) \implies (i)$$

G est dérivable sur I comme somme de deux fonctions dérivables sur I .

Ainsi, pour tout réel x , nous obtenons

$$G'(x) = F'(x) = f(x),$$

ce qui justifie que G est une primitive de f sur I .

Remarque

Cette propriété signifie que si une fonction f admet une primitive sur un intervalle I , alors cette fonction admet une infinité de primitives sur I qui sont égales à une constante additive près.

Exemple 14.4

Une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $f : x \mapsto e^x + x$ est la fonction $x \mapsto e^x + \frac{x^2}{2}$.
L'ensemble des primitives de f sont les fonctions F définies sur \mathbb{R} par

$$F(x) = e^x + \frac{x^2}{2} + c, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}$$

Exemple 14.5

Pour $x > 0$, l'équation différentielle

$$y' = \frac{1}{x^2},$$

a pour ensemble de solutions, sur $]0, +\infty[$, les fonctions f définies par

$$f(x) = -\frac{1}{x} + c, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

Proposition 14.3 – Condition initiale

Soient f une fonction continue sur un intervalle I , $a \in I$ et b un réel.
Il existe une unique primitive G de f sur I satisfaisant à $G(a) = b$.

Démonstration

Soit F une primitive de f sur I .

L'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions G tel que

$$\forall x \in I, \quad G(x) = F(x) + c, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

La condition initiale $G(a) = b$ implique

$$F(a) + c = b, \quad \text{soit } c = b - F(a).$$

Cette valeur fixée du réel c assure que la fonction $G : x \mapsto F(x) + b - F(a)$ est l'unique primitive de f sur I satisfaisant à la condition initiale $G(a) = b$.

Exemple 14.6

Nous explicitons la primitive F sur $]0, +\infty[$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x} + 3$ qui satisfait à $F(1) = 2$.

Les primitives de f sont définies sur $]0, +\infty[$ par $x \mapsto \ln x + 3x + c$, avec $c \in \mathbb{R}$.

La condition initiale $F(1) = 2$ induit

$$2 = \ln 1 + 3 + c, \quad \text{ce qui donne } c = -1.$$

Nous en concluons

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad F(x) = \ln x + 3x - 1.$$

Exemple 14.7

Considérons un point M mobile sur une droite graduée, d'abscisse $x(t)$, le déplacement de ce point étant uniforme de vitesse constante v_0 , avec la condition initiale $x(0) = x_0$.

L'équation différentielle décrivant ce mouvement est

$$x'(t) = v_0.$$

Nous en déduisons

$$x(t) = v_0 t + c, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

Puisque $x(0) = x_0$, nous obtenons

$$x_0 = c.$$

Nous en concluons, pour tout réel $t \geq 0$,

$$x(t) = v_0 t + x_0.$$

Proposition 14.4 – Opérations sur les primitives

Soient F et G les primitives respectives de deux fonctions f et g sur un intervalle I et soit k un réel.

- $F + G$ est une primitive de la fonction $f + g$ sur I .
- $k.F$ est une primitive de la fonction $k.f$ sur I .

Démonstration

Cette preuve est immédiate en appliquant les règles de dérivation

$$\begin{aligned}(F + G)' &= F' + G' = f + g \\ (k.F)' &= k \cdot F' = k.f.\end{aligned}$$

14.1.3 Tableau des primitives des fonctions usuelles

Dans ce tableau, nous désignons par

- I un intervalle,
- f une fonction continue sur I ,
- c une constante additive,
- $n \in \mathbb{Z} \cup \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$.

Pour $x \in I$ tel que	si $f(x) =$	alors $F(x) =$
$I = \mathbb{R}$ ou $I \subset \mathbb{R}$	0	c
$I = \mathbb{R}$ ou $I \subset \mathbb{R}$	1	$x + c$
$I = \mathbb{R}$ ou $I \subset \mathbb{R}$	a	$ax + c$
I dépend de la nature du nombre $n \neq -1$	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$I =]0, +\infty[$	$x^{-1} = \frac{1}{x}$	$\ln x + c$
$I = \mathbb{R}$ ou $I \subset \mathbb{R}$	e^x	$e^x + c$
$I = \mathbb{R}$ ou $I \subset \mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x + c$
$I = \mathbb{R}$ ou $I \subset \mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x \neq 0$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + c$

Remarque

- Plus généralement, dans la 5^e ligne du tableau, nous pouvons remplacer l'exposant $n \in \mathbb{Z} \cup \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ par un exposant réel $\alpha \neq -1$.

Ainsi, pour tout réel $x \in]0, +\infty[$, une primitive de $x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ est la fonction

$$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c.$$

- Par somme et multiplication par un réel, une primitive sur \mathbb{R} d'un trinôme du second degré, $x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$ est la fonction

$$x \mapsto a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx + d.$$

- Plus généralement, une primitive sur \mathbb{R} d'un polynôme de degré n , $x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$, avec $a_n \neq 0$, est le polynôme de degré $n+1$,

$$x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

14.1.4 Primitives et composition

Proposition 14.5

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que sa dérivée u' soit continue sur I .

Soit g une fonction continue sur un intervalle J et G une primitive de g sur cet intervalle.

Nous supposons

$$\forall x \in I, \quad u(x) \in J.$$

Le réel λ étant donné, la fonction $f : x \mapsto \lambda u'(x)(g \circ u)(x)$ admet pour primitives sur l'intervalle I , les fonctions F définies par

$$F(x) = \lambda(G \circ u)(x) + c, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

Démonstration

La fonction F est dérivable sur I par composition.

Pour tout réel $x \in I$, nous obtenons

$$F'(x) = \lambda u'(x)(G' \circ u)(x) = \lambda u'(x)(g \circ u)(x).$$

Remarque

Dans le cas particulier où $u(x) = ax + b$, avec a réel non nul et b réel et dans les conditions de la proposition avec $\lambda = 1$, la fonction $f : x \mapsto g(ax + b)$ admet pour primitives sur l'intervalle I , les fonctions F définies par $F : x \mapsto \frac{1}{a}G(ax + b)$.

Avec les données de la proposition précédente, nous obtenons

Pour $x \in I$ tel que	si $f(x) =$	alors $F(x) =$
selon la nature du nombre $\alpha \neq -1$	$\lambda u'(x)u^\alpha(x)$	$\lambda \frac{u^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c$
$u(x) \neq 0$	$\lambda \frac{u'(x)}{u(x)}$	$\lambda \ln(u(x)) + c$
$I = \mathbb{R}$ ou $I \subset \mathbb{R}$	$\lambda u'(x)e^{u(x)}$	$\lambda e^{u(x)} + c$
$I = \mathbb{R}$ ou $I \subset \mathbb{R}$	$\lambda u'(x) \cos u(x)$	$\lambda \sin u(x) + c$
$I = \mathbb{R}$ ou $I \subset \mathbb{R}$	$\lambda u'(x) \sin u(x)$	$-\lambda \cos u(x) + c$
$u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\lambda \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}$	$\lambda \tan u(x) + c$

TABLE 14.1 – Tableau des primitives lorsque g est une fonction de référence.

Exemple 14.8

Nous déterminons les primitives F sur \mathbb{R} de la fonction

$$f : x \mapsto 2x(x^2 + 1)^4.$$

En posant $u(x) = x^2 + 1$, il vient : $u'(x) = 2x$, ce qui donne

$$f(x) = u'(x)u^4(x).$$

En appliquant la deuxième ligne du tableau pour $\alpha = 4$ et $\lambda = 1$, pour tout réel x , nous obtenons

$$F(x) = \frac{u^5(x)}{5} + c, \quad \text{soit } F(x) = \frac{(x^2 + 1)^5}{5} + c.$$

Exemple 14.9

Nous déterminons les primitives F sur $]1, +\infty[$ de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x}{(x^2 - 1)^3}.$$

En posant $u(x) = x^2 - 1$, il vient : $u'(x) = 2x$, ce qui donne

$$f(x) = \frac{1}{2}u'(x)u^{-3}(x).$$

En appliquant la deuxième ligne du tableau pour $\alpha = -3$ et $\lambda = \frac{1}{2}$, pour tout réel $x > 1$, nous obtenons :

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u^{-3+1}(x)}{-3+1} + c,$$

soit

$$F(x) = -\frac{1}{4(x^3 - 1)^2} + c.$$

Exemple 14.10

Nous déterminons les primitives F sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}.$$

En posant $u(x) = \cos x$, il vient : $u'(x) = -\sin x$, ce qui donne

$$f(x) = -u'(x)u^{-\frac{1}{2}}(x).$$

En appliquant à nouveau la deuxième ligne du tableau pour $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\lambda = -1$, pour tout réel $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, nous obtenons

$$F(x) = -\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}(x)}{-\frac{1}{2}+1} + c = -\frac{2}{u^{\frac{1}{2}}(x)} + c$$

c'est-à-dire

$$F(x) = -\frac{2}{\sqrt{\cos x}} + c$$

Exemple 14.11

Nous déterminons les primitives F de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{ax + b},$$

avec a réel non nul et b réel tels que $ax + b > 0$.

En posant $u(x) = ax + b$, il vient : $u'(x) = a$, ce qui donne

$$f(x) = \frac{1}{a} \times \frac{a}{ax + b} = \frac{1}{a} \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

En appliquant la troisième ligne du tableau $\lambda = \frac{1}{a}$, sachant que $ax + b > 0$, nous obtenons

$$F(x) = \frac{1}{a} \ln(|u(x)|) + c = \frac{1}{a} \ln(ax + b) + c.$$

Exemple 14.12

Nous déterminons les primitives F sur $]0, +\infty[$ de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

En posant $u(x) = \frac{1}{x}$, il vient : $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$, ce qui donne

$$f(x) = -u'(x) \exp(u(x)).$$

En appliquant la quatrième ligne du tableau avec $\lambda = -1$, pour tout réel $x > 0$, nous obtenons

$$F(x) = -e^{u(x)} + c = -\exp\left(\frac{1}{x}\right) + c.$$

14.2 Équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre

14.2.1 Équation $y' = ay$ telle que $y(0) = 1$

Proposition 14.6

Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $f_a : x \mapsto e^{ax}$ est l'unique fonction dérivable sur \mathbb{R} satisfaisant à

$$y' = ay \quad \text{et} \quad y(0) = 1$$

Démonstration

▷ Existence d'une solution.

La fonction f_a est dérivable sur \mathbb{R} par composition et, pour tout réel x , nous avons

$$f'_a(x) = ae^{ax} = af_a(x) \quad \text{et} \quad f_a(0) = 1$$

ce qui justifie que la fonction f_a satisfait $y' = ay$ et $y(0) = 1$.

▷ Unicité

Soit g une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} satisfaisant à $g' = ag$ et $g(0) = 1$.

Puisque $e^{ax} > 0$, nous posons $h(x) = \frac{g(x)}{e^{ax}}$.

La fonction h est dérivable sur \mathbb{R} par quotient et, pour tout réel x , nous avons

$$h'(x) = \frac{g'(x)e^{ax} - ag(x)e^{ax}}{e^{2ax}} = \frac{e^{ax}(g'(x) - ag(x))}{e^{2ax}}.$$

Nous savons que pour tout réel x , $g'(x) - ag(x) = 0$.

Il en résulte que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = 0.$$

Nous en déduisons que

$$\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = c.$$

En particulier, pour $x = 0$, nous obtenons

$$c = h(0) = \frac{g(0)}{e^{a \times 0}} = 1,$$

ce qui justifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = 1,$$

ce qui donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f_a(x).$$

Nous en concluons que

$$g = f_a.$$

Remarque

Si $a = 0$, l'équation $y' = 0$ et $y(0) = 1$ a pour unique solution $x \mapsto 1$.

Exemple 14.13

Nous résolvons l'équation différentielle $y' + 2y = 0$, avec $y(0) = 1$.

Cette équation équivaut à $y' = -2y$ et $y(0) = 1$.

En appliquant la proposition précédente, nous obtenons que cette équation admet pour unique solution la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = e^{-2x}.$$

14.2.2 Équation $y' = ay$

Proposition 14.7

Soit a un réel donné. Les deux propositions suivantes sont équivalentes.

- (i) f est une fonction dérivable sur \mathbb{R} , solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
- (ii) f est définie sur \mathbb{R} par

$$\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ce^{ax}.$$

Démonstration

$$(i) \implies (ii)$$

Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} satisfaisant à

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = af(x).$$

Pour tout réel x , posons $g(x) = e^{-ax}f(x)$.

La fonction g est dérivable sur \mathbb{R} , par composition et produit.

Sachant que $f'(x) - af(x) = 0$, nous obtenons

$$g'(x) = -ae^{-ax}f(x) + e^{-ax}f'(x) = e^{-ax}(f'(x) - af(x)) = 0.$$

Il en résulte que

$$\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = e^{-ax}f(x) = c.$$

Nous en concluons :

$$\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ce^{ax}$$

$$(ii) \implies (i)$$

Nous supposons que pour tout réel x , $f(x) = ce^{ax}$, avec $c \in \mathbb{R}$. Par composition, cette fonction est dérivable sur \mathbb{R} . Nous avons

$$f'(x) = cae^{ax} = a(ce^{ax}) = af(x)$$

ce qui justifie que la fonction $x \mapsto ce^{ax}$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

Remarque

- Si $a = 0$, l'équation $y' = 0$ a pour unique solution

$$x \mapsto c, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

- L'équation différentielle $y' = ay$ est une équation linéaire du premier ordre.
- Résolution de $y' = ay$ par « séparation des variables ».

En remarquant que si $y \neq 0$, alors l'équation $y' = ay$ équivaut à $\frac{y'}{y} = a$, nous proposons une autre méthode (dite par séparation des variables) pour résoudre l'équation $y' = ay$.

Pour $y \neq 0$, en explicitant une primitive de chaque membre de l'égalité

$$\frac{y'}{y} = a,$$

nous obtenons que

$$\ln |y| = ax + b, \quad \text{avec } b \in \mathbb{R},$$

ce qui donne

$$|y| = e^{ax+b} = e^b e^{ax}$$

Nous en déduisons que

$$y = -e^b e^{ax} \quad \text{ou} \quad y = e^b e^{ax}.$$

En posant $c = \pm e^b$, une solution non nulle de $y' = ay$ est la fonction

$$f : x \mapsto ce^{ax}, \quad \text{avec } c \neq 0.$$

Si $c = 0$, alors la fonction nulle est aussi solution.

Ainsi nous avons prouvé à nouveau que $f : x \mapsto ce^{ax}$, avec $c \in \mathbb{R}$, est une solution quelconque de $y' = ay$.

La réciproque est identique à celle explicitée dans la preuve de la proposition précédente.

Proposition 14.8

Soient a , x_0 et y_0 trois réels.

L'équation différentielle $y' = ay$ admet une unique solution f satisfaisant à la condition initiale $f(x_0) = y_0$.

Démonstration

Une solution quelconque de cette équation est la fonction $x \mapsto ce^{ax}$ avec $c \in \mathbb{R}$.

La condition initiale $f(x_0) = y_0$ implique

$$ce^{ax_0} = y_0, \quad \text{soit } c = y_0 e^{-ax_0}.$$

Nous en déduisons, pour tout réel x ,

$$f(x) = y_0 e^{-ax_0} e^{ax} = y_0 e^{a(x-x_0)}.$$

Les réels a , x_0 et y_0 sont donnés.

Il en résulte que la fonction $f : x \mapsto y_0 e^{a(x-x_0)}$ est unique.

Exemple 14.14 – Élimination d'un médicament. Notion de demi-vie.

Après avoir administré un médicament par injection intraveineuse de courte durée, la concentration plasmatique notée c_0 de ce dernier est maximale à l'instant $t = 0$. Elle diminue ensuite en fonction du temps. On considère que sa vitesse d'élimination est proportionnelle à la quantité $c(t)$ du médicament encore présente dans l'organisme à l'instant t .

Ainsi, à chaque instant t , nous disposons de l'équation différentielle

$$c'(t) = -kc(t),$$

où $k > 0$ est une constante d'élimination déterminée par la nature du médicament injecté. Les solutions de cette équation sont définies sur \mathbb{R}_+ par

$$t \mapsto \lambda e^{-kt}, \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

En tenant compte de la condition initiale, il vient

$$c_0 = c(0) = \lambda.$$

Nous en concluons que la loi d'élimination de ce médicament est décrite par la fonction décroissante sur $[0, +\infty[$, définie par

$$c(t) = c_0 e^{-kt}.$$

La demi-vie T de ce médicament désigne le temps nécessaire pour que la concentration de ce médicament dans le plasma sanguin soit diminuée de la moitié de sa valeur initiale.

Ainsi le réel $T > 0$ satisfait à l'équation

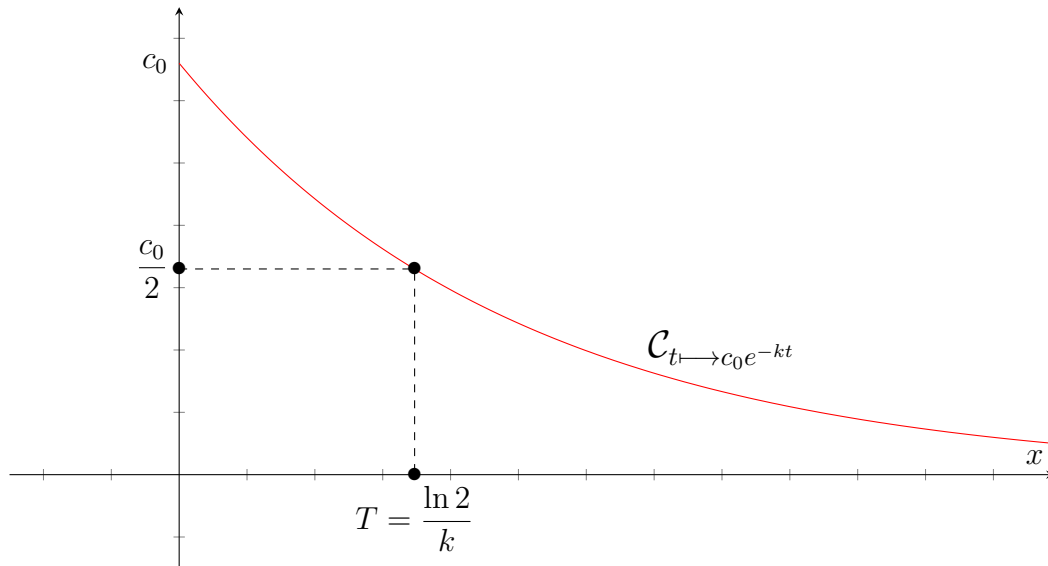
$$c(T) = \frac{c_0}{2}, \quad \text{soit } c_0 e^{-kT} = \frac{c_0}{2}.$$

Après simplification par $c_0 > 0$, nous obtenons

$$e^{-kT} = \frac{1}{2} \iff kT = \ln 2.$$

Nous en concluons que la demi-vie T , en fonction de $k > 0$, est

$$T = \frac{\ln 2}{k}.$$



14.3 Équation différentielle affine du 1^{er} ordre

14.3.1 Résolution de $y' = ay + b$

Proposition 14.9

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes.

(i) f est une fonction dérivable sur \mathbb{R} , solution de l'équation différentielle

$$y' = ay + b.$$

(ii) f est définie sur \mathbb{R} par

$$\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ce^{ax} - \frac{b}{a}.$$

Démonstration

$$(i) \implies (ii)$$

Soit f est une fonction dérivable sur \mathbb{R} telle que, pour tout réel x ,

$$f'(x) = af(x) + b.$$

Puisque $a \neq 0$, nous en déduisons

$$f'(x) = a \left(f(x) + \frac{b}{a} \right).$$

Considérons la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = f(x) + \frac{b}{a}$. Cette fonction est dérivable sur \mathbb{R} et $g'(x) = f'(x)$.

Avec ce changement de fonction, nous sommes amenés à résoudre l'équation différentielle

$$g'(x) = ag(x).$$

En appliquant la proposition 14.7, nous savons qu'il existe un réel c tel que, pour tout réel x , $g(x) = ce^{ax}$.

Nous en concluons que pour tout réel x ,

$$f(x) = g(x) - \frac{b}{a} = ce^{ax} - \frac{b}{a}.$$

$$\boxed{(ii) \implies (i)}$$

Nous supposons que, pour tout réel x , $f(x) = ce^{ax} - \frac{b}{a}$, avec $c \in \mathbb{R}$. Cette fonction est dérivable sur \mathbb{R} par composition. Nous obtenons

$$\begin{aligned} f'(x) &= ace^{ax} = a \left(ce^{ax} - \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \right) \\ &= a \left(ce^{ax} - \frac{b}{a} \right) + b \\ &= af(x) + b, \end{aligned}$$

ce qui prouve que f est une solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$.

Exemple 14.15

Nous résolvons l'équation différentielle $2y' + y = 3$. Cette équation équivaut à

$$y' = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}.$$

La proposition précédente permet d'affirmer que les solutions de l'équation différentielle $2y' + y = 3$ sont les fonctions

$$x \longmapsto ce^{-\frac{1}{2}x} + 3, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

Nous déterminons à présent la solution f de cette équation telle que sa courbe représentative \mathcal{C}_f passe par l'origine du repère choisi.

La condition initiale se traduit par $f(0) = 0$, c'est-à-dire

$$c + 3 = 0, \quad \text{soit } c = -3.$$

Nous en concluons que la solution f telle que $f(0) = 0$ est la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f : x \mapsto 3 \left(1 - e^{-\frac{1}{2}x} \right).$$

Remarque

- La fonction $x \mapsto -\frac{b}{a}$ est une solution particulière de l'équation $y' = ay + b$.
- La solution générale de cette équation s'obtient en additionnant cette solution particulière et la solution générale de $y' = ay$.
- L'équation différentielle $y' = ay + b$ qui équivaut à $y' - ay = b$ est une équation linéaire du premier ordre avec un second membre constant.

14.3.2 Résolution de $y' = ay + b$ avec une condition initiale

Proposition 14.10

Soient $a \neq 0$, b , x_0 et y_0 quatre réels.

L'équation différentielle $y' = ay + b$ admet une unique solution f satisfaisant à la condition initiale

$$f(x_0) = y_0.$$

Démonstration

Soit f une solution satisfaisant à $f(x_0) = y_0$. D'après la proposition précédente, il existe une constante c telle que,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ce^{ax} - \frac{b}{a}.$$

De l'égalité $f(x_0) = y_0$, il résulte que

$$y_0 = ce^{ax_0} - \frac{b}{a},$$

ce qui donne

$$c = \left(y_0 + \frac{b}{a} \right) e^{-ax_0}.$$

Ainsi nous obtenons

$$f : x \mapsto \left(y_0 + \frac{b}{a} \right) e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}.$$

Puisque $a \neq 0$, b , x_0 et y_0 sont quatre réels donnés, cette fonction f est l'unique solution de $y' = ay + b$ telle que $f(x_0) = y_0$.

Exemple 14.16 – Loi de refroidissement de Newton

Cette loi de refroidissement (ou de réchauffement) stipule que la vitesse de refroidissement de la température $T(t)$ (en degré Celsius) d'un objet à l'instant t (en minute) est proportionnelle à la différence entre la température de l'objet et la température T_a du milieu ambiant.

Nous supposons que l'objet possède une température initiale $T(0) = T_0$.

Cette loi de Newton, qui décrit l'évolution de la température $T(t)$, satisfait donc à l'équation différentielle

$$T'(t) = k(T(t) - T_a), \quad \text{avec la condition initiale } T(0) = T_0.$$

Le coefficient de proportionnalité $k \neq 0$ dépend essentiellement de la surface de contact entre l'objet et son milieu.

Cette équation est affine du 1^{er} ordre puisque

$$T'(t) = kT(t) - kT_a.$$

En appliquant la proposition 14.9, ses solutions sont définies sur \mathbb{R}_+ par

$$t \longmapsto ce^{kt} + T_a.$$

La condition initiale induit

$$T_0 = c + T_a, \quad \text{soit } c = T_0 - T_a.$$

Nous en concluons que la loi de Newton est décrite, pour tout réel $t \geq 0$, par la fonction définie par

$$T(t) = (T_0 - T_a)e^{kt} + T_a.$$

Chapitre 15

Intégration

Sommaire

15.1 Définition – Exemples	297
15.1.1 Définition	297
15.2 Primitives et intégrale	302
15.2.1 Dérivée de $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$	302
15.2.2 Calcul d'une intégrale	307
15.3 Propriétés algébriques de l'intégrale	310
15.3.1 Linéarité de l'intégrale	310
15.3.2 Relation de Chasles	312
15.4 Intégrale et inégalités	314
15.4.1 Positivité	314
15.4.2 Comparaison de deux intégrales	315
15.4.3 Valeur moyenne	318
15.5 Méthode des rectangles	320
15.5.1 Encadrement d'une intégrale	320
15.5.2 Algorithme de la méthode des rectangles	323
15.6 Intégration par partie	325
15.6.1 Introduction	325
15.6.2 La formule d'intégration par parties	325
15.7 Aires entre deux courbes	328

Dans l'Antiquité, Archimède¹ expose les premières notions sur le calcul intégral, en s'intéressant au calcul de l'aire d'un disque. Géométriquement, Il est parvenu à ses fins en approchant cette dernière par la somme des aires de triangles de plus en plus petits inscrits et exinscrits dans un cercle, ce qui a établi un premier encadrement du réel π .

Il faudra attendre le XVII^e siècle pour que Newton² et Leibniz³ développent conjointement le « calcul infinitésimal » c'est-à-dire le lien entre le calcul différentiel et le calcul intégral.

Au XIX^e siècle, c'est à Bernhard Riemann⁴, que vous devons la théorie de l'intégrale dont nous exposons ici une première version simplifiée.

1. Mathématicien, physicien grec : 287–212 av. J.-C.

2. Mathématicien-physicien anglais : 1643–1727

3. Mathématicien allemand : 1646–1716

4. Mathématicien allemand : 1826–1866

La théorie contemporaine de l'intégration est difficile et féconde puisque par exemple la théorie des probabilités en est une branche très importante.

À notre niveau, pour un premier contact avec le concept d'intégrale, nous nous appuyons sur les connaissances acquises au collège au sujet des aires d'un carré, d'un rectangle, d'un triangle, d'un trapèze. Une première approche du calcul plus général d'une aire et donc d'une intégrale est l'exercice 23 du chapitre 3 qui est intitulé « quadrature de l'hyperbole ».

Dans ce chapitre, nous proposons également différents algorithmes qui utilisent les pré-requis du collège énoncés ci-dessus. Ils permettent un calcul approché d'une intégrale et sont d'autant plus pertinents lorsqu'il n'est pas possible d'en expliciter le calcul exact.

15.1 Définition – Exemples

Nous supposons que le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. L'unité d'aire est : $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$.

15.1.1 Définition

Définition 15.1 – Intégrale d'une fonction continue, positive

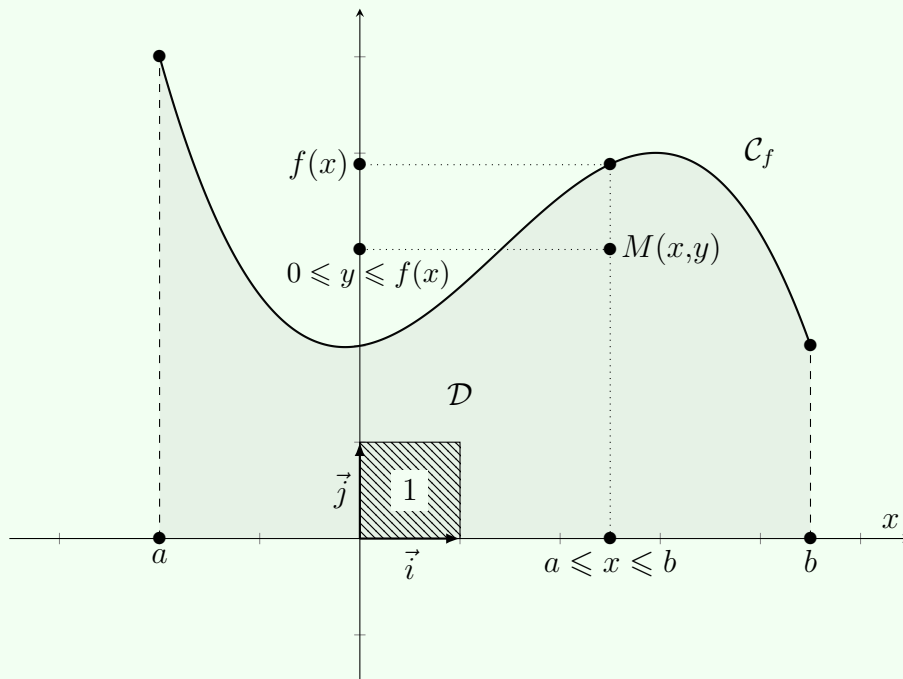
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$.

Nous supposons que

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) \geq 0.$$

L'intégrale de a à b de la fonction f est l'aire, dans l'unité d'aire, de la partie \mathcal{D} du plan, ensemble des points $M(x, y)$ tels que

$$a \leq x \leq b \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq f(x).$$



Cette intégrale est notée : $\int_a^b f(x)dx$, lire intégrale de a à b de $f(x)dx$.

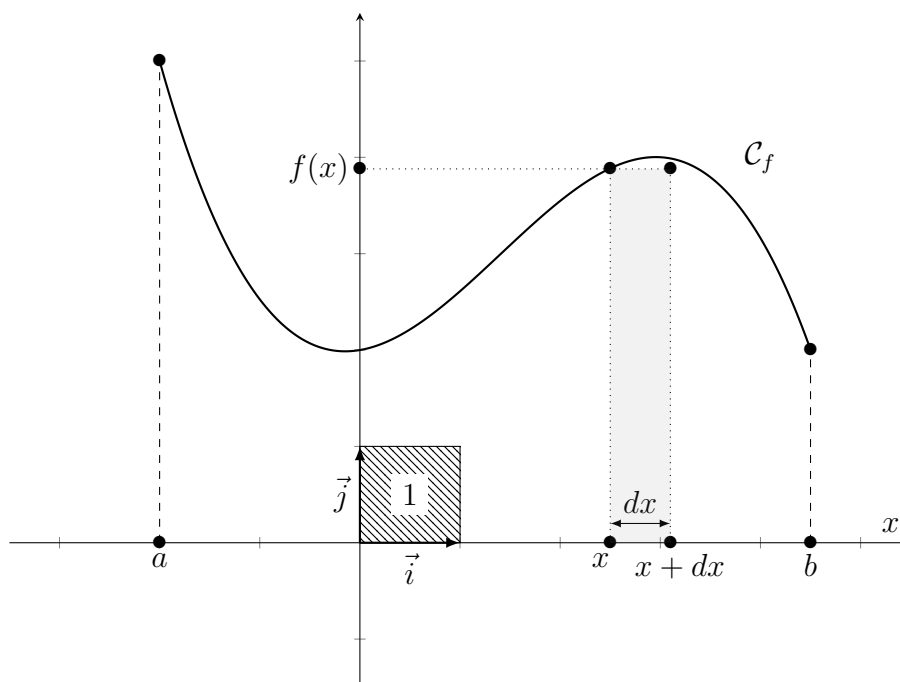
Remarque

- La variable x est muette, ce qui signifie

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz = \dots$$

- Si $a = b$, alors $\int_a^a f(x)dx = 0$.
- Le terme dx peut se comprendre en considérant un rectangle « élémentaire » de dimensions $f(x)$ et dx , avec $x \in [a, b]$.

L'aire de ce rectangle est $f(x) \times dx$.

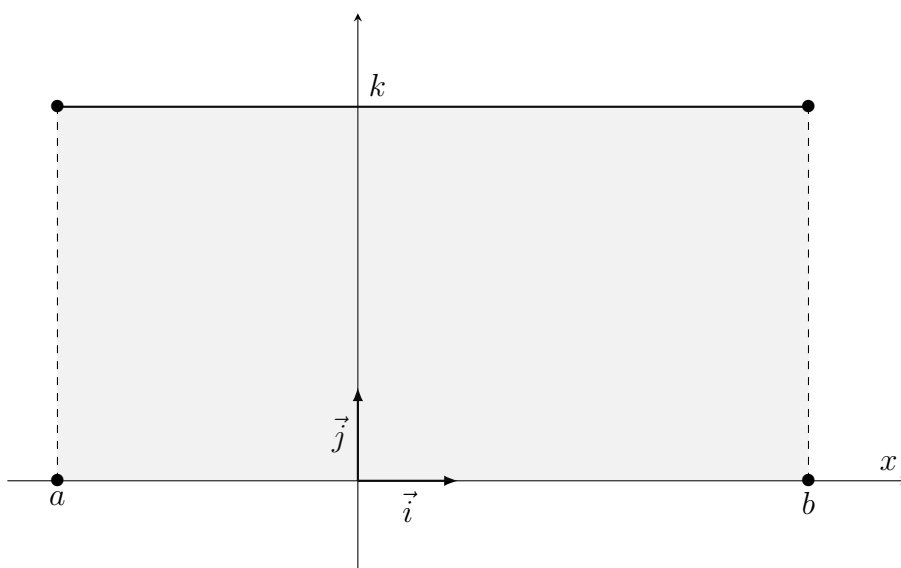


Lorsque x varie « continûment » de a à b , la somme des aires de ces rectangles se rapproche de l'aire sous la courbe, c'est-à-dire tend vers $\int_a^b f(x)dx$.

Cette explication est heuristique, elle sera précisée plus rigoureusement dans la suite du chapitre par la méthode des rectangles.

Exemple 15.1 – Intégrale d'une fonction positive constante

Soit un réel $k > 0$. Nous considérons la fonction $x \mapsto k$ définie sur l'intervalle $[a, b]$ avec $a < b$.



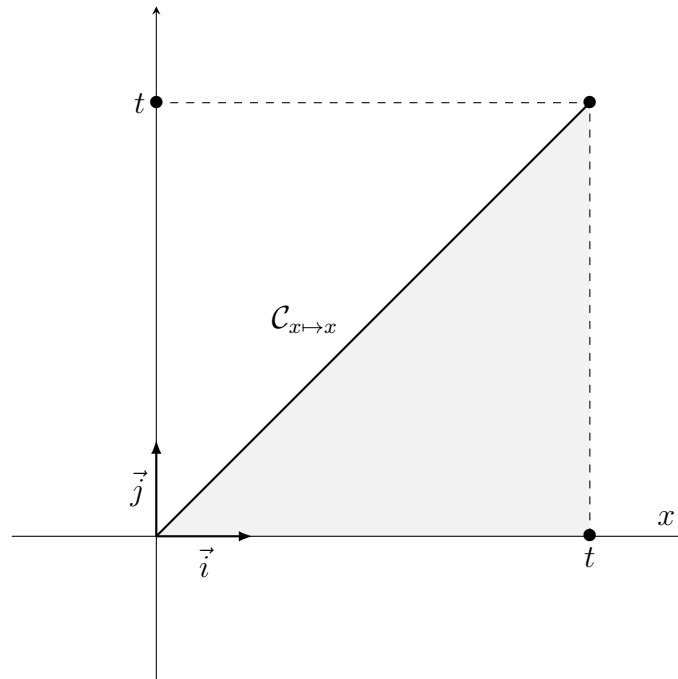
Nous obtenons immédiatement l'aire du rectangle grisée sur la figure,

$$\int_a^b k dx = k(b - a)$$

En particulier, nous retiendrons que lorsque $k = 1$, $\int_a^b 1 dx = \int_a^b dx = b - a$.

Exemple 15.2 – Intégrale de la fonction $x \mapsto x$

Soit un réel $t \geq 0$. Nous considérons la fonction $x \mapsto x$ définie sur l'intervalle $[0, t]$.



L'aire du triangle grisée sur la figure est

$$\int_0^t x dx = \frac{t^2}{2}.$$

Nous remarquons que la fonction $t \mapsto \int_0^t x dx$ est la primitive sur \mathbb{R}^+ , qui s'annule en 0, de la fonction $x \mapsto x$.

Exemple 15.3 – Quadrature d'une parabole

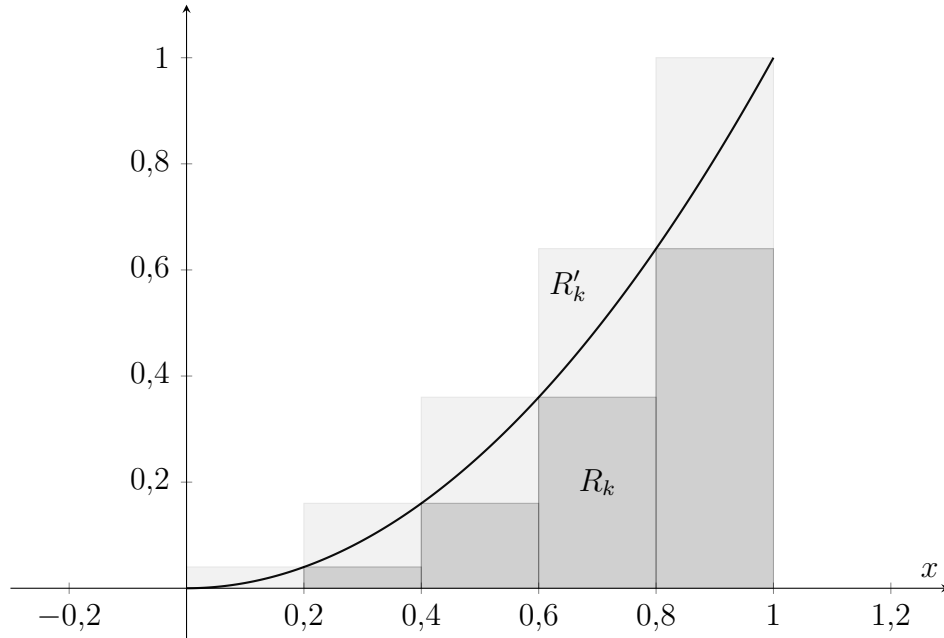
Nous souhaitons calculer l'aire sous la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2$ lorsque $x \in [0, 1]$.

Cet exemple est moins aisé que les précédents car nous ne disposons plus des formules classiques de calculs d'aires qui ont été rappelées dans l'introduction.

Nous subdivisons l'intervalle $[0, 1]$ en n intervalles de longueur $\frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, sur chaque intervalle $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, nous désignons par

- R_k le rectangle de "hauteur" $f\left(\frac{k}{n}\right)$,
- R'_k le rectangle de "hauteur" $f\left(\frac{k+1}{n}\right)$.



Dans cette figure, nous avons représenté le cas $n = 5$.

Les rectangles R_k en gris foncé sont sous la courbe \mathcal{C}_f et les rectangles R'_k sont des deux couleurs.

Nous considérons à présent la somme s_n des aires des rectangles R_k et la somme S_n des aires des rectangles R'_k .

▷ Préalablement, pour tout entier naturel p , nous rappelons l'égalité

$$1^2 + 2^2 + \cdots + p^2 = \sum_{k=1}^p k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}.$$

▷ Pour tout entier naturel n non nul, nous avons

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \times \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \end{aligned}$$

▷ De la même façon, il vient

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \\
 &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \\
 &= \frac{1}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}
 \end{aligned}$$

▷ Nous déterminons le sens de variation de la suite (s_n) .

Pour tout entier naturel n non nul, nous avons

$$s_{n+1} - s_n = \frac{n(2n+1)}{6(n+1)^2} - \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \frac{3n^2 + n - 1}{6n^2(n+1)^2}$$

Puisque $n \geq 1$, nous en déduisons

$$3n^2 + n - 1 > 0, \text{ soit } s_{n+1} - s_n \geq 0$$

ce qui prouve que la suite (s_n) est croissante.

▷ Nous déterminons le sens de variation de la suite (S_n) .

Pour tout entier naturel n non nul, il vient

$$S_{n+1} - S_n = \frac{(n+2)(2n+3)}{6(n+1)^2} - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = -\frac{3n^2 + 5n + 1}{6n^2(n+1)^2} < 0.$$

Il en résulte que la suite (S_n) est décroissante.

▷ Pour tout entier naturel n non nul, nous avons

$$\begin{aligned}
 S_n - s_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \\
 &= \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \\
 &= \frac{1}{n} (f(1) - f(0)) = \frac{1}{n}.
 \end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - s_n = 0.$$

- ▷ Ces trois derniers points prouvent que les suites (s_n) et (S_n) sont adjacentes. Elles convergent donc vers un même réel L tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s_n \leq L \leq S_n.$$

Puisque,

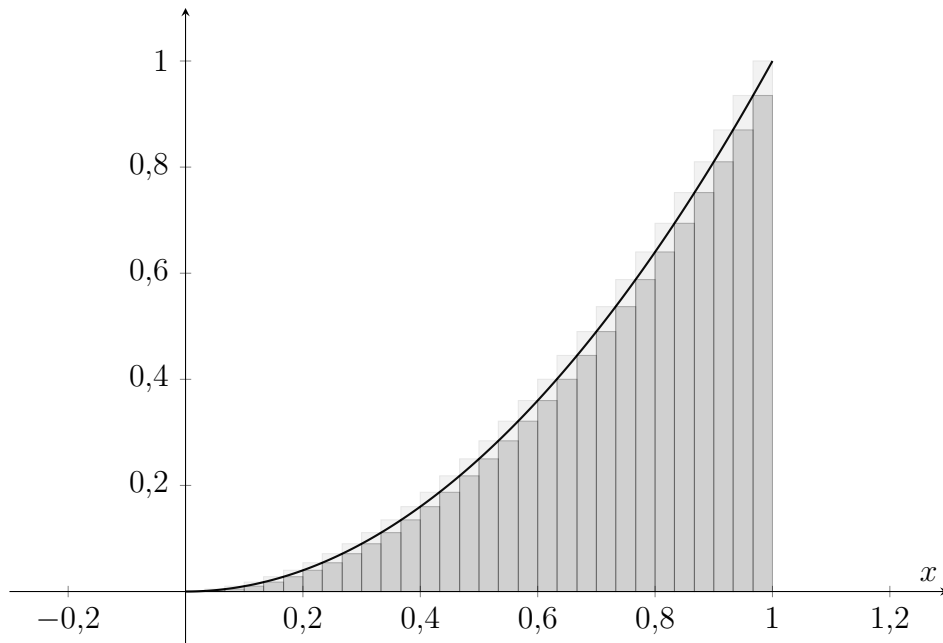
$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{3},$$

nous en déduisons que $L = \frac{1}{3}$ est l'aire sous la courbe \mathcal{C}_f , pour $0 \leq x \leq 1$.

Nous en concluons

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Nous illustrons ce passage à la limite en prenant par exemple $n = 30$.



15.2 Primitives et intégrale

15.2.1 Dérivée de $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$

Proposition 15.1

Soient f une fonction continue, positive et monotone sur un intervalle I et un réel $a \in I$.

La fonction F définie sur I par

$$\forall x \in I, \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

est la primitive de f sur I qui satisfait à $F(a) = 0$.

Démonstration

Pour fixer les idées, nous supposons que f est croissante sur I .
 Soient un réel $x \in I$ tel que $x > a$ et un réel $h \neq 0$ tel que $x + h \in I$.
 Justifier que F est une primitive de f sur I revient à prouver que

$$F \text{ est dérivable sur } I \quad \text{et} \quad F' = f,$$

ce qui nous amène à étudier

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

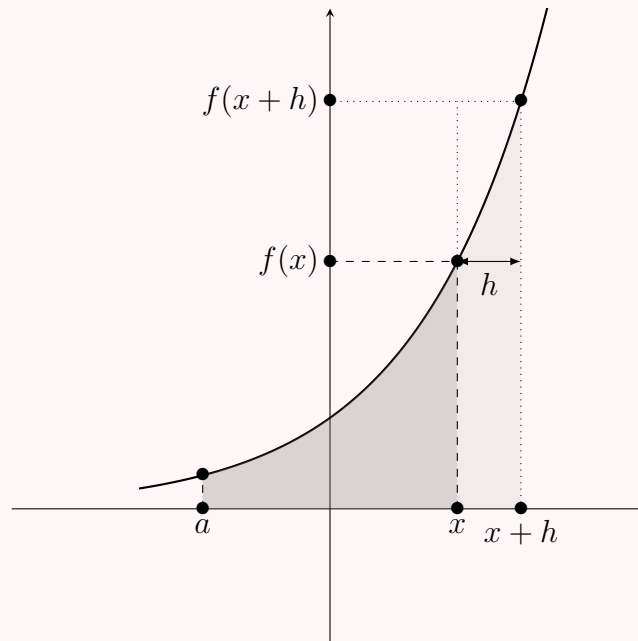
Nous distinguons deux cas selon que $h > 0$ ou $h < 0$.

1^{er} cas : $h > 0$.

Pour chaque réel $x \in I$ tel que $x > a$,

- le réel $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est l'aire sous la courbe \mathcal{C}_f , sur l'intervalle $[a, x]$,
- le réel $F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)dt$ est l'aire sous la courbe \mathcal{C}_f , sur l'intervalle $[a, x+h]$.

Ceci est illustré par la figure qui suit.



Le réel $F(x+h) - F(x)$ est égal, par soustraction, à l'aire sous la courbe \mathcal{C}_f sur l'intervalle, $[x, x+h]$.

Il en résulte que $F(x+h) - F(x)$ est minoré par l'aire du rectangle égale à $h \times f(x)$ et majoré par l'aire du rectangle égale à $h \times f(x+h)$, ce qui donne l'encadrement

$$hf(x) \leq F(x+h) - F(x) \leq hf(x+h).$$

Puisque $h > 0$, nous en déduisons

$$f(x) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h).$$

La fonction f est continue en $x \in I$ donc

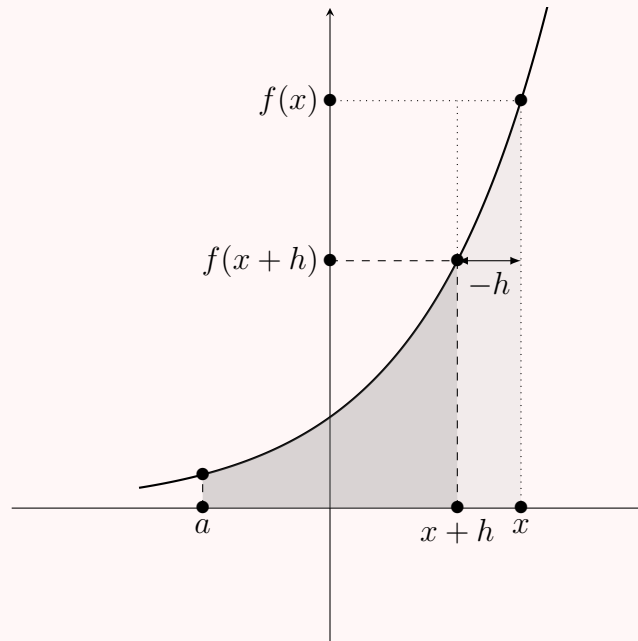
$$\lim_{h \rightarrow 0^+} f(x+h) = f(x).$$

En appliquant le théorème d'encadrement, nous en déduisons

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

2^e cas : $h < 0$.

Dans ce cas, en remarquant que $-h > 0$, nous disposons de la figure qui suit.



Dans ce cas, l'aire sous la courbe \mathcal{C}_f sur l'intervalle $[x+h, x]$ est égale à $F(x) - F(x+h)$.

Il en résulte que le réel $F(x) - F(x+h)$ est minoré par l'aire du rectangle égale à $(-h) \times f(x+h)$ et majoré par l'aire du rectangle égale à $(-h) \times f(x)$. Ainsi, nous obtenons l'encadrement :

$$-hf(x+h) \leq F(x) - F(x+h) \leq -hf(x),$$

ce qui donne, sachant que $-h > 0$,

$$f(x+h) \leq \frac{F(x) - F(x+h)}{-h} \leq f(x),$$

c'est-à-dire

$$f(x+h) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x).$$

Puisque $\lim_{h \rightarrow 0^-} f(x+h) = f(x)$, par encadrement, nous obtenons

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

L'étude de ces deux cas prouve que la fonction F est dérivable, pour tout réel $x \in I$, et

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

De plus $F(a) = 0$, nous avons ainsi établi que $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f sur I qui satisfait à $F(a) = 0$.

Remarque

- Nous disposons, avec cette proposition, d'une nouvelle formule de dérivation que vous pouvez retenir sous la forme

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t)dt \right) = f(x).$$

- Il est important de faire la distinction entre la variable x sur laquelle agit la fonction F , et la variable t dite d'intégration.

C'est pour cette raison que la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est parfois appelée « intégrale fonction de sa borne supérieure x ».

- La preuve est analogue en supposant f décroissante sur I .
- Sans l'hypothèse de monotonie, cette proposition demeure exacte.

Dans l'exemple 15.14, nous prouverons que la fonction F est continue avec la seule contrainte de continuité sur la fonction f .

Exemple 15.4

La fonction $f : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue, positive et décroissante sur \mathbb{R} .
Il en résulte que la fonction

$$F : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$$

est la primitive sur \mathbb{R} de f telle que $F(0) = 0$.

Sans calculer cette intégrale, nous pouvons obtenir des propriétés qualitatives de F .

- ▷ En effet, F est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x , nous obtenons

$$F'(x) = f(x) = e^{-x^2}$$

- ▷ Puisque, pour tout réel x , $F'(x) > 0$, F est croissante sur \mathbb{R} .
▷ Une équation de la tangente à l'origine O d'un repère choisi est

$$y = F'(0)x + F(0), \text{ soit } y = x$$

▷ La fonction F est dérivable 2 fois. Pour tout réel x , il vient

$$F''(x) = -2xe^{-x^2}$$

Par conséquent, $F''(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$, en changeant de signe. Il en résulte que O est un point d'inflexion pour la courbe \mathcal{C}_F .

Corollaire 15.2

Une fonction f continue et positive sur un intervalle I admet une primitive sur cet intervalle.

Démonstration

La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$, avec $a \in I$, convient.

Proposition 15.3 – Existence d'une primitive

Si une fonction est continue sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors elle admet des primitives sur cet intervalle.

Démonstration

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

Nous savons que f atteint sur $[a, b]$ un minimum m . Pour tout réel $x \in [a, b]$, nous posons $g(x) = f(x) - m \geq 0$.

La fonction g est continue, positive sur $[a, b]$, elle admet donc une primitive G sur cet intervalle.

Cette fonction est dérivable sur $[a, b]$ et nous avons

$$G'(x) = g(x) = f(x) - m.$$

Nous considérons la fonction F définie sur $[a, b]$ par

$$F(x) = G(x) + mx.$$

Cette fonction est dérivable sur $[a, b]$ et, pour tout réel $x \in [a, b]$, il vient

$$F'(x) = G'(x) + m = f(x) - m + m = f(x),$$

ce qui prouve que F est une primitive de f sur $[a, b]$.

15.2.2 Calcul d'une intégrale

Proposition 15.4 – Intégrale d'une fonction continue – positive

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$, avec $a < b$.
Étant donnée une primitive F de f sur $[a, b]$, nous disposons de l'égalité

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Démonstration

Nous savons que la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en $x = a$.

Une primitive quelconque F de f sur $[a, b]$ est définie par

$$\forall x \in [a, b], \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt + c, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, nous en concluons

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt + c - \int_a^a f(t)dt - c = \int_a^b f(t)dt.$$

Remarque

- Lorsque l'obtention d'une primitive F de f est immédiate, nous pouvons utiliser la notation suivante

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

- L'égalité $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive F de f choisie.

C'est pour cette raison que, dans ce calcul, nous pouvons choisir une primitive dont la constante additive est nulle.

Exemple 15.5

Nous calculons l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$.

Il vient

$$I = [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

Exemple 15.6

Nous calculons l'intégrale $J = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin(\pi x)dx$.

Nous obtenons

$$J = \left[-\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) \right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi} \cos 0 = \frac{1}{\pi}.$$

Exemple 15.7

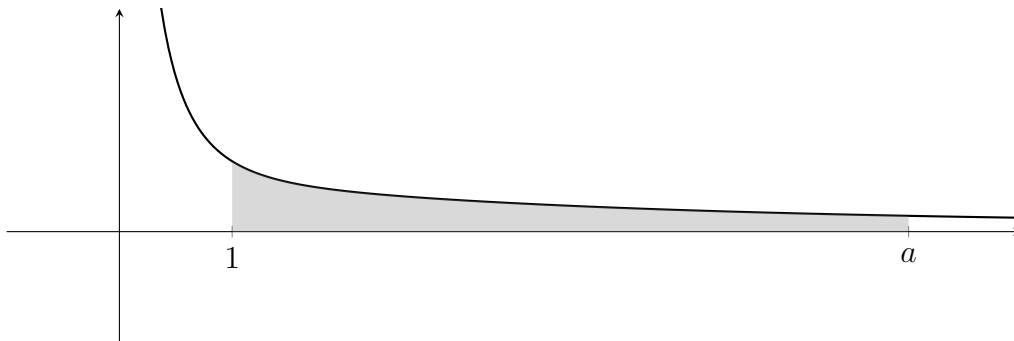
Pour tout réel $a > 0$, nous calculons l'intégrale

$$K(a) = \int_1^a \left(\frac{1}{t} - e^{-t} \right) dt.$$

Nous avons

$$K(a) = [\ln t + e^{-t}]_1^a = \ln a + e^{-a} - (\ln 1 + e^{-1}) = \ln a + \frac{1}{e^a} - \frac{1}{e}.$$

Graphiquement, nous obtenons



Nous remarquons sur cette figure et par le calcul,

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} K(a) = +\infty.$$

Exemple 15.8

Nous calculons $L = \int_0^1 \frac{e^{2x} + x}{e^{2x} + x^2} dx$.

Nous observons que

$$\forall x \in [0, 1], \quad \frac{e^{2x} + x}{e^{2x} + x^2} > 0.$$

En posant

$$u(x) = e^{2x} + x^2 > 0,$$

il vient

$$u'(x) = 2e^{2x} + 2x = 2(e^{2x} + x).$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{u'(x)}{u(x)} dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} \ln u(x) \right]_0^1 \\
 &= \left[\frac{1}{2} \ln (e^{2x} + x^2) \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2} (\ln (e^2 + 1) - \ln 1) = \ln \sqrt{e^2 + 1}.
 \end{aligned}$$

Proposition 15.5 – Calcul d’une intégrale d’une fonction continue

Soit une fonction continue f sur un intervalle $[a, b]$, avec $a < b$.

Étant donnée une primitive F de f sur $[a, b]$, nous disposons de l’égalité

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Démonstration

Nous savons que si f est continue sur $[a, b]$, alors f admet sur cet intervalle des primitives.

Soient F l’une quelconque d’entre elles et G la primitive de f telle que $G(a) = 0$.

Nous avons vu à la proposition 15.1, pour tout réel $x \in [a, b]$,

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

en ayant admis que cette proposition demeure vraie avec la seule contrainte de continuité sur la fonction f .

Puisque la fonction $x \mapsto F(x) - G(x)$ est constante, nous en déduisons, pour tout réel $x \in [a, b]$,

$$F(x) - G(x) = F(a) - G(a) = F(a),$$

ce qui implique

$$F(x) - F(a) = G(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

En particulier pour $x = b$, nous en concluons

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Exemple 15.9

Nous proposons de calculer l’intégrale $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x) dx$.

Nous remarquons que la fonction $x \mapsto \sin 2x$ change de signe sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$.
Nous avons

$$\begin{aligned} I &= \left[-\frac{1}{2} \cos 2x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -\frac{1}{2} \cos \left(2 \times \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} \cos \left(2 \times -\frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cos \pi \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

15.3 Propriétés algébriques de l'intégrale

15.3.1 Linéarité de l'intégrale

Proposition 15.6

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et λ un réel quelconque. Quels que soient les réels $a \in I$ et $b \in I$, nous avons

- $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
- $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$

Démonstration

Soient F et G des primitives respectives de f et g sur I et λ un réel quelconque.

- Nous savons que $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I . Il en résulte

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= [F(x) + G(x)]_a^b \\ &= F(b) + G(b) - (F(a) + G(a)) \\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

- Nous savons que λF est une primitive de λf sur I .
Nous en déduisons

$$\begin{aligned}
\int_a^b \lambda f(x) dx &= [\lambda F(x)]_a^b \\
&= \lambda F(b) - \lambda F(a) \\
&= \lambda(F(b) - F(a)) \\
&= \lambda \int_a^b f(x) dx.
\end{aligned}$$

Exemple 15.10

Nous proposons de calculer les intégrales

$$I = \int_0^\pi \cos^2 x dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^\pi \sin^2 x dx$$

Pour cela, nous calculons $I + J$, puis $I - J$ en utilisant la linéarité de l'intégrale. Il vient successivement

$$\begin{aligned}
I + J &= \int_0^\pi \cos^2 x dx + \int_0^\pi \sin^2 x dx \\
&= \int_0^\pi (\cos^2 x + \sin^2 x) dx \\
&= \int_0^\pi 1 dx \\
&= \pi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I - J &= \int_0^\pi \cos^2 x dx - \int_0^\pi \sin^2 x dx \\
&= \int_0^\pi (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \\
&= \int_0^\pi \cos 2x dx \\
&= \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{2} \sin 2\pi - \frac{1}{2} \sin 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi, nous résolvons le système

$$\begin{cases} I + J = \pi \\ I - J = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2I = \pi \\ I = J \end{cases}$$

ce qui donne pour conclure

$$I = J = \frac{\pi}{2}.$$

15.3.2 Relation de Chasles

Proposition 15.7

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

Quels que soient les réels $a \in I$, $b \in I$ et $c \in I$, nous avons

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$$

Démonstration

Soit F une primitive de f sur I . Il vient

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx &= F(b) - F(a) + F(c) - F(b) \\ &= F(c) - F(a) \\ &= \int_a^c f(x)dx. \end{aligned}$$

Corollaire 15.8

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

Quels que soient les réels $a \in I$, $b \in I$, nous avons

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

Démonstration

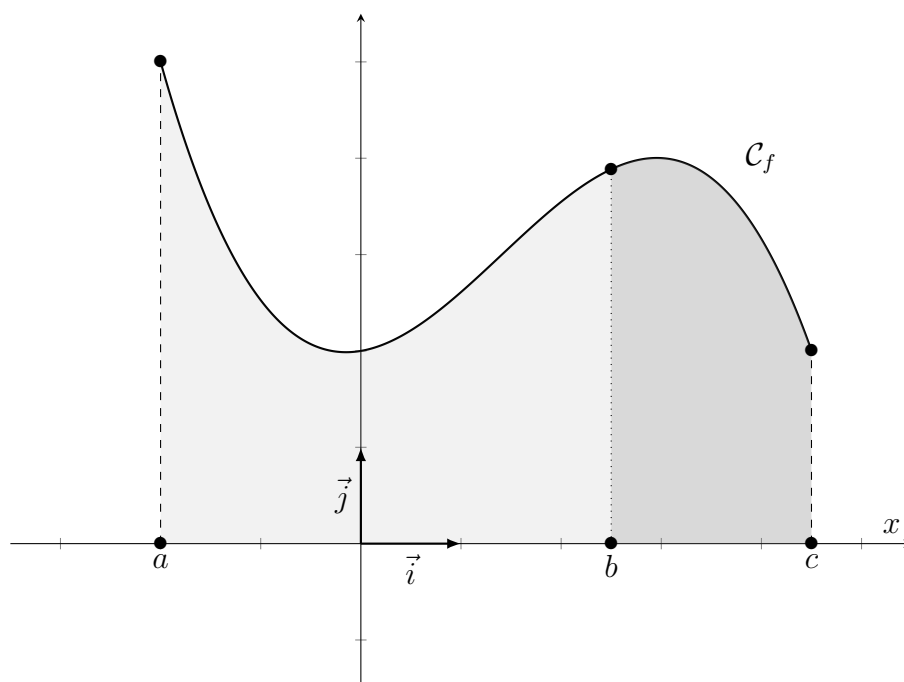
En particulier pour $c = a$ dans l'égalité précédente, nous obtenons

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0$$

ce qui justifie l'égalité attendue.

Remarque

Si f est positive sur I , alors la relation de Chasles^a traduit l'additivité des aires de deux parties adjacentes du plan.



^a. Mathématicien français : 1793-1880

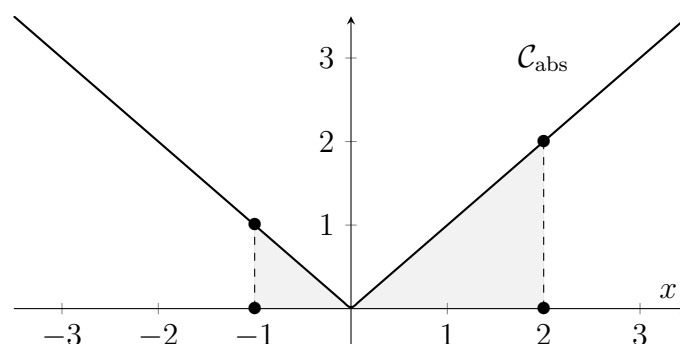
Exemple 15.11

Nous calculons l'intégrale $I = \int_{-1}^2 |x| dx$.

Il vient

$$I = \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^2 x dx = \left[-\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}.$$

Nous remarquons qu'il est également possible, dans ce cas, de déterminer I en calculant et en additionnant les aires des deux triangles sous la courbe dans la figure qui suit.



15.4 Intégrale et inégalités

15.4.1 Positivité

Proposition 15.9

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, avec $a \leq b$. Si, pour tout réel $x \in [a, b]$, $f(x) \geq 0$, alors

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Démonstration

Soit F une primitive de f sur $[a, b]$.

Puisque

$$\forall x \in [a, b], \quad F'(x) = f(x) \geq 0,$$

nous en déduisons que F est croissante sur $[a, b]$.

Il en résulte

$$a \leq b \implies F(a) \leq F(b),$$

ce qui prouve

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \geq 0.$$

Remarque

- L'intégrale d'une fonction positive est par définition l'aire sous la courbe \mathcal{C}_f , ce qui justifie immédiatement la propriété de positivité de l'intégrale. Cependant la preuve ci-dessus insiste sur l'importance qu'il y a à préciser que les bornes a et b sont rangées en ordre croissant.
- Si pour tout réel $x \in [a, b]$, $f(x) \leq 0$, alors

$$\int_a^b f(x) dx \leq 0.$$

- La réciproque de cette proposition est fausse comme le montre le contre-exemple qui suit.

$$\int_{-1}^2 x dx \geq 0$$

bien que $x \mapsto x$ change de signe sur $[-1, 2]$.

Exemple 15.12

Soit F la primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$ sur $[0, +\infty[$, telle que $F(0) = 0$.

Nous savons que, pour tout réel $x \geq 0$, $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

Puisque

$$\forall t \in [0, x], \quad e^{-t^2} \geq 0,$$

nous en déduisons

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \geq 0.$$

15.4.2 Comparaison de deux intégrales

Proposition 15.10

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$, avec $a \leq b$.
Si, pour tout réel $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Démonstration

Puisque, pour tout réel $x \in [a, b]$,

$$g(x) - f(x) \geq 0,$$

par positivité, nous en déduisons

$$\int_a^b (g(x) - f(x)) dx \geq 0.$$

Par linéarité, nous obtenons

$$\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0,$$

ce qui implique l'inégalité attendue, c'est-à-dire

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Exemple 15.13

Soit un réel $x \geq 1$. Pour tout réel $t \in [1, x]$ nous avons successivement

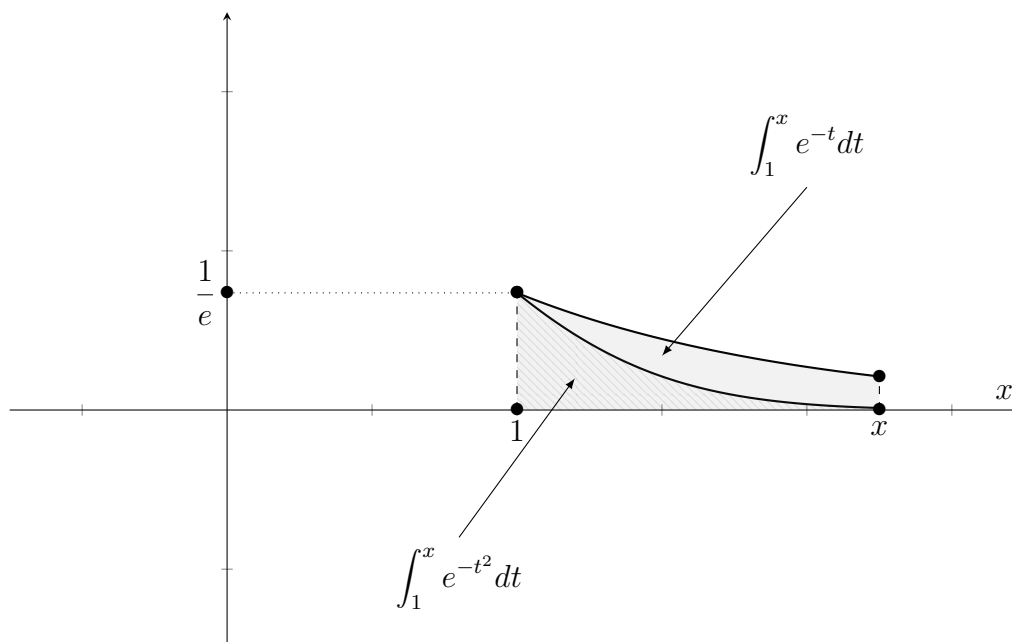
$$\begin{aligned} t^2 \geq t &\iff -t^2 \leq -t \\ &\iff e^{-t^2} \leq e^{-t}. \end{aligned}$$

Par comparaison des intégrales, nous en déduisons

$$\int_1^x e^{-t^2} dt \leq \int_1^x e^{-t} dt,$$

ce qui donne

$$\int_1^x e^{-t^2} dt \leq \frac{1}{e} - \frac{1}{e^x} \leq \frac{1}{e}.$$



Corollaire 15.11

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, avec $a \leq b$. Nous disposons de l'inégalité

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Démonstration

Pour tout réel $x \in [a, b]$, nous avons

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|.$$

Par comparaison des intégrales, nous en déduisons

$$\int_a^b -|f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

c'est-à-dire

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Nous en concluons l'inégalité attendue, soit

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Exemple 15.14

Soit une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$, avec $a < b$ et M un majorant sur cet intervalle de $x \mapsto |f(x)|$.

Pour tous les réels $x \in [a, b]$ et $x_0 \in [a, b]$, nous montrons que la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ satisfait à l'inégalité :

$$|F(x) - F(x_0)| \leq M |x - x_0|.$$

Nous avons, en utilisant la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \\ &= \int_a^x f(t)dt + \int_{x_0}^a f(t)dt, \\ &= \int_{x_0}^x f(t)dt. \end{aligned}$$

Nous distinguons deux cas.

1^{er} cas : $x \geq x_0$.

En appliquant le corollaire 15.11, il vient

$$|F(x) - F(x_0)| \leq \int_{x_0}^x |f(t)|dt \leq \int_{x_0}^x Mdt,$$

ce qui donne

$$|F(x) - F(x_0)| \leq M(x - x_0),$$

c'est-à-dire, puisque $x \geq x_0$,

$$|F(x) - F(x_0)| \leq M|x - x_0|.$$

2^e cas : $x < x_0$.

Puisque

$$F(x) - F(x_0) = - \int_x^{x_0} f(t)dt,$$

de la même façon, nous en déduisons

$$|F(x) - F(x_0)| \leq M(x_0 - x),$$

c'est-à-dire, puisque $x < x_0$,

$$|F(x) - F(x_0)| \leq M|x - x_0|.$$

Ainsi l'inégalité proposée est vraie, quels que soient les réels x et x_0 appartenant à $[a, b]$.

Nous en déduisons par encadrement que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0),$$

ce qui justifie, de façon directe, que la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est continue en x_0 .

15.4.3 Valeur moyenne

Théorème 15.12 – Théorème de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, avec $a < b$.

On suppose qu'il existe un réel m et un réel M tels que

$$\forall t \in [a, b], \quad m \leq f(t) \leq M.$$

Alors, il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt.$$

Démonstration

Nous savons que pour tout réel $t \in [a, b]$,

$$m \leq f(t) \leq M.$$

Par comparaison des intégrales, sachant que $a < b$, il vient

$$\int_a^b m dt \leq \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b M dt,$$

soit

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a).$$

Comme $b-a > 0$, nous obtenons

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \leq M.$$

Puisque la fonction f est continue sur $[a, b]$ et que l'image de cet intervalle par f est l'intervalle $[m, M]$, par application du théorème des valeurs intermédiaires, nous avons

$$\forall k \in [m, M], \exists c \in [a, b], \quad f(c) = k.$$

En particulier pour $k = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$, nous pouvons affirmer qu'il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt.$$

Remarque

- Nous avons énoncé au paragraphe 5.2.3 que \triangleright si f est continue sur $[a, b]$, alors la condition

$$\forall t \in [a; b], \quad m \leq f(t) \leq M,$$

est toujours vérifiée. \triangleright Plus précisément, nous savons que f atteint sur $[a, b]$ un minimum et un maximum.

- Si $a > b$, le théorème de la moyenne reste vrai. Il suffit d'échanger les rôles de a et b .

Nous disposons ainsi d'un énoncé plus général du théorème de la moyenne.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

Pour tous les réels $a \in I$ et $b \in I$ tels que $a \neq b$, il existe un réel c compris entre a et b satisfaisant à

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

Corollaire 15.13 – Inégalités de la moyenne

Dans les mêmes conditions que celles du théorème de la moyenne, nous disposons de l'encadrement

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a).$$

Démonstration

La preuve de ce corollaire est constituée des six premières lignes de la démonstration précédente.

Remarque. Lorsque f est continue et positive sur $[a, b]$, avec $a < b$, les inégalités de la moyenne signifient que l'aire sous la courbe est encadrée par les aires $m(b-a)$ et $M(b-a)$ des rectangles représentés sur la figure qui suit.

Définition. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, avec $a < b$. La valeur moyenne de f sur cet intervalle est le réel défini par

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Remarque. Avec les notations du théorème de la moyenne, lorsque f est continue et positive sur $[a, b]$, avec $a < b$, la valeur moyenne de f est égale à $f(c)$ qui est la hauteur du rectangle de largeur $b-a$ dont l'aire

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(t) dt$$

est égale à l'aire sous la courbe \mathcal{C}_f .

Exemple 15.15

Nous calculons la valeur moyenne, notée \bar{f} , sur l'intervalle $[-2,3]$ de la fonction $f : x \mapsto 2 + \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Il vient

$$\begin{aligned}\bar{f} &= \frac{1}{3 - (-2)} \int_{-2}^3 \left(2 + \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) dx \\ &= \frac{1}{5} \left[2x + \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_{-2}^3 \\ &= \frac{1}{5} \left(6 + \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \left(-4 + \frac{2}{\pi} \sin(-\pi)\right)\right) \\ &= \frac{1}{5} \left(10 - \frac{2}{\pi}\right) \\ &= 2 - \frac{2}{5\pi}\end{aligned}$$

15.5 Méthode des rectangles**15.5.1 Encadrement d'une intégrale**

Définition. Soit $[a,b]$ un intervalle avec $a < b$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, une subdivision de $[a,b]$, de pas $h = \frac{b-a}{n}$, est une suite finie de réels (x_k) définie par

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, x_k = a + k \frac{b-a}{n} = a + kh.$$

Proposition 15.14

Soit f une fonction continue, monotone et positive sur $[a,b]$, avec $a < b$.

On pose $I = \int_a^b f(x) dx$.

Avec les données de la définition, les suites (S_n) et (S'_n) , définies sur \mathbb{N}^* par

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \quad \text{et} \quad S'_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})$$

satisfont à

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n = I$$

Démonstration

Pour fixer les idées, nous supposons que f est croissante sur $[a,b]$.

Pour tout entier $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, nous remarquons

$$x_k \in [a,b] \quad \text{et} \quad x_{k+1} \in [a,b].$$

Puisque f est croissante sur $[a, b]$, nous en déduisons

$$x_k \leq x \leq x_{k+1} \rightarrow f(x_k) \leq f(x) \leq f(x_{k+1})$$

Par comparaison des intégrales, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, il vient

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k) dx \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_{k+1}) dx$$

c'est-à-dire,

$$(x_{k+1} - x_k) f(x_k) \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \leq (x_{k+1} - x_k) f(x_{k+1})$$

Puisque :

$$x_{k+1} - x_k = a + (k+1) \frac{b-a}{n} - a - k \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} = h$$

nous obtenons, pour tout entier $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$hf(x_k) \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \leq hf(x_{k+1})$$

Cet encadrement signifie que l'aire sous la courbe sur l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ est encadrée par les aires $hf(x_k)$ et $hf(x_{k+1})$ des rectangles comme cela est indiqué sur la figure qui suit.

En additionnant, pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, chaque membre de l'encadrement établi précédemment, nous obtenons

$$\sum_{k=0}^{n-1} hf(x_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} hf(x_{k+1}).$$

Nous posons, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k),$$

$$S'_n = h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}).$$

Grâce à la relation de Chasles, nous avons

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = I.$$

Ainsi, nous disposons de l'encadrement

$$S_n \leq I \leq S'_n.$$

De cette double inégalité, nous déduisons

$$0 \leq I - S_n \leq S'_n - S_n$$

Or, nous avons

$$\begin{aligned}
S'_n - S_n &= h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) - h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k), \\
&= h \left(\sum_{j=1}^n f(x_j) - \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \right), \\
&= h \left(\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(x_n) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right), \\
&= h (f(x_n) - f(x_0)), \\
&= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)).
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I - S_n \leq \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)).$$

Puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) = 0,$$

par encadrement, nous en concluons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I - S_n = 0$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = I$$

De plus, comme

$$S'_n = S_n + \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)),$$

par somme des limites, nous en déduisons $\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n = I$.

Remarque

- Si f est décroissante sur $[a, b]$, alors nous disposons de l'encadrement

$$S'_n \leq I \leq S_n$$

ce qui permet d'obtenir les mêmes conclusions.

- Lorsque f est monotone sur $[a, b]$, avec $a < b$, le réel

$$\frac{b-a}{n} |f(b) - f(a)|,$$

est un majorant de l'erreur commise en approximant l'intégrale I par S_n ou S'_n .

- Les sommes

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

$$S'_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (k+1) \frac{b-a}{n}\right)$$

sont les sommes de Riemann associées à la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$. Elles permettent d'étudier la convergence de certaines suites.

L'exemple qui suit en est une illustration.

Exemple 15.16

Nous considérons la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right).$$

Pour tout réel $x \in [0, 1]$, nous posons $f(x) = \ln(1+x)$.

Cette fonction f est continue, positive et croissante sur $[0, 1]$.

De plus, nous observons une somme de Riemann puisque,

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) = S'_n.$$

La proposition précédente permet de conclure par

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n = \int_0^1 \ln(1+x) dx$$

Au paragraphe suivant, nous verrons comment calculer cette intégrale.

Pour l'instant, nous proposons la méthode algorithmique des rectangles pour obtenir une valeur approchée de l'intégrale $\int_0^1 \ln(1+x) dx$.

15.5.2 Algorithme de la méthode des rectangles

Avec les notations du paragraphe précédent, les bornes a et b ainsi que l'entier $n \geq 1$ étant choisis, la fonction f à intégrer étant définie, nous proposons l'algorithme suivant

$h \leftarrow \frac{b-a}{n}$ $u \leftarrow 0$ $v \leftarrow 0$ <p>Pour k allant de 0 à $n-1$</p> $u \leftarrow u + hf(a + kh)$ $v \leftarrow v + hf(a + (k+1)h)$ <p>Fin Pour</p> <p>Afficher u</p> <p>Afficher v</p>	<pre> from math import * def f(x) : return log(x + 1) a=float (input ("a=")) b = float (input ("b=")) n=int (input ("n=")) h = (b - a)/n u = 0 v = 0 for k in range(n) : u = u + h * f(a + k * h) print ("Pour", "n=", n) print("u = ", u) print (" v = ", v) </pre>
--	---

Ainsi un encadrement de l'intégrale $\int_0^1 \ln(1+x)dx$ est :

Pour $n = 100$
 $u = 0.382824458574729,$
 $v = 0.38975593038032846.$

Pour $n = 1000$
 $u = 0.3859477458629461,$
 $v = 0.3866408930435061.$

Nous donnons à présent une version plus synthétique en introduisant une fonction Python `rect(f,a,b,n)`.

```

from math import *
def f(x):
    return log(x+1)
def rect(f,a,b,n):
    h=(b-a)/n
    u,v=0,0
    x=a
    for i in range(n):
        u=u+h*f(x)
        x=x+h
        v=v+\text{trm{h}}*\text{trm{f}}(\text{trm{x}}
    return (u,v)

```

»» Pour $n = 1000$
 $u = 0.3859477458629461,$
 $v = 0.3866408930435061.$

15.6 Intégration par partie

15.6.1 Introduction

Pour introduire cette méthode d'intégration, nous remarquons que l'intégrale du produit de deux fonctions n'est pas égale au produit de leurs intégrales.

En effet, le contre-exemple qui suit justifie cette remarque préalable.

D'une part, nous avons

$$\int_0^1 t(t+1)dt = \int_0^1 (t^2 + t) dt = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

D'autre part, il vient

$$\left(\int_0^1 t dt \right) \times \left(\int_0^1 (t+1) dt \right) = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 \times \left[\frac{t^2}{2} + t \right]_0^1 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{3}{4}.$$

Par conséquent, nous constatons que

$$\int_0^1 t(t+1)dt \neq \left(\int_0^1 t dt \right) \times \left(\int_0^1 (t+1) dt \right)$$

15.6.2 La formule d'intégration par parties

Proposition 15.15

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I tel que u' et v' soient continues sur I .

Pour tous les réels a et b appartenant à I , nous disposons de l'égalité

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Démonstration

La fonction $u \times v$ est dérivable sur I .

Pour tout réel $x \in I$, nous avons

$$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

ce qui implique

$$u(x)v'(x) = (uv)'(x) - u'(x)v(x)$$

Puisque les fonctions

$$x \longmapsto u(x)v'(x) \quad \text{et} \quad x \longmapsto (u \times v)'(x) - u'(x)v(x),$$

sont continues sur I , nous pouvons intégrer, entre a et b , les deux membres de l'égalité précédente.

Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_a^b u(x)v'(x)dx &= \int_a^b [(u \times v)'(x) - u'(x)v(x)] dx \\ \int_a^b u(x)v'(x)dx &= \int_a^b (u \times v)'(x)dx - \int_a^b u'(x)v(x)dx \\ \int_a^b u(x)v'(x)dx &= [(u \times v)(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx\end{aligned}$$

La formule d'intégration par parties est ainsi démontrée.

Remarque

- La formule d'intégration par parties est symétrique, ce qui signifie que l'on dispose également de l'égalité

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [(u \times v)(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

- Pour appliquer cette formule, nous devons préciser que les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 , c'est-à-dire dérivables dont les dérivées sont continues sur I .
- Dans la preuve ci-dessus, nous avons utilisé le fait que si deux fonctions sont égales sur un intervalle alors leurs intégrales sont égales.

Mais la réciproque est fautive comme le montre le contre-exemple

$$\int_0^1 t dt = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^1 (1-t) dt = \frac{1}{2}$$

mais $t \mapsto t$ et $t \mapsto 1-t$ sont distinctes sur $[0,1]$.

- Il est facile de vérifier que la formule d'intégration par parties ne dépend pas de la primitive de u' choisie (respectivement de v').
- La formule d'intégration par parties est la plupart du temps utilisée lorsqu'il s'agit de calculer l'intégrale du produit d'un polynôme par une fonction de nature différente.

C'est ce qui est illustré dans les exemples qui suivent.

Exemple 15.17

Nous calculons l'intégrale

$$I = \int_0^\pi x \sin 2x dx.$$

Pour $x \in [0, \pi]$, nous posons

$$\begin{aligned}u(x) &= x & \text{et} & & v'(x) &= \sin 2x, \\ u'(x) &= 1 & \text{et} & & v(x) &= -\frac{1}{2} \cos 2x.\end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi]$.

La formule d'intégration par parties donne

$$\begin{aligned}
I &= \left[-\frac{x}{2} \cos 2x \right]_0^\pi - \int_0^\pi 1 \times \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) dx, \\
I &= -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos 2x dx, \\
I &= -\frac{\pi}{2} + \left[\frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^\pi = -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Exemple 15.18

Soit un entier $n \geq 2$. Nous calculons l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{\ln(n)} (2x+1)e^{-x} dx$$

Pour $x \in [0, \ln(n)]$, on pose

$$\begin{aligned}
u(x) &= 2x+1 \quad \text{et} \quad v'(x) = e^{-x}, \\
u'(x) &= 2 \quad \text{et} \quad v(x) = -e^{-x}.
\end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont \mathcal{C}^1 sur $[0, \ln(n)]$.

En intégrant par parties, il vient

$$\begin{aligned}
I_n &= [(2x+1)(-e^{-x})]_0^{\ln(n)} - \int_0^{\ln(n)} 2 \times (-e^{-x}) dx, \\
&= -(2\ln(n)+1)e^{-\ln(n)} + 1 + 2[-e^{-x}]_0^{\ln(n)}, \\
&= -(2\ln(n)+1)\frac{1}{n} + 1 + 2\left(-\frac{1}{n} + 1\right), \\
&= -2\frac{\ln(n)}{n} - \frac{3}{n} + 3.
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$, nous observons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 3.$$

Exemple 15.19

Nous déterminons la primitive L sur $]0; +\infty[$, de la fonction \ln satisfaisant à la condition initiale $L(1) = 0$.

Nous savons que, pour tout réel $x > 0$, cette primitive s'exprime sous une forme intégrale par

$$L(x) = \int_1^x \ln(t) dt.$$

En remarquant que

$$L(x) = \int_1^x \ln(t) \times 1 dt,$$

nous posons, pour $t \in [1, x]$ ou $t \in [x, 1]$,

$$\begin{aligned} u(t) &= \ln t \quad \text{et} \quad v'(t) = 1, \\ u'(t) &= \frac{1}{t} \quad \text{et} \quad v(t) = t. \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont \mathcal{C}^1 sur $[1, x]$ ou $[x, 1]$.

La formule d'intégration par parties donne

$$\begin{aligned} L(x) &= \int_1^x u(t)v'(t)dt \\ &= [t \ln t]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \times t dt \\ &= x \ln x - \int_1^x 1 dt \\ &= x \ln x - (x - 1) \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que

$$L(1) = 0 \text{ et, } \forall x > 0, L'(x) = \ln x$$

Les primitives de \ln sont les fonctions F définies sur \mathbb{R}_+^* par

$$F(x) = x \ln x - (x - 1) + c, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}$$

c'est-à-dire, en posant $C = 1 + c$,

$$F(x) = x \ln x - x + C, \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

15.7 Aires entre deux courbes

Proposition 15.16 – Cas de deux fonctions positives

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, avec $a < b$.

Nous supposons

$$\forall x \in [a, b], \quad 0 \leq g(x) \leq f(x)$$

En désignant par

$$D = \{M(x, y) / x \in [a, b], g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

dans l'unité d'aire, nous avons

$$\text{aire}(D) = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Démonstration

Nous établissons ce résultat à l'aide de la figure qui suit.

Pour tout réel $x \in [a, b]$, nous désignons par D_f l'aire sous la courbe \mathcal{C}_f et D_g l'aire

sous la courbe \mathcal{C}_g .

Graphiquement, dans l'unité d'aire, nous observons

$$\text{aire}(D) = \text{aire}(D_f) - \text{aire}(D_g),$$

ce qui donne, puisque les fonctions f et g sont positives sur $[a, b]$,

$$\text{aire}(D) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx,$$

ce qui permet de conclure par linéarité,

$$\text{aire}(D) = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Proposition 15.17 – Cas général

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, avec $a < b$.

Nous supposons

$$\forall x \in [a, b], \quad g(x) \leq f(x)$$

En désignant par

$$D = \{M(x, y) / x \in [a, b], g(x) \leq y \leq f(x)\},$$

dans l'unité d'aire, nous avons

$$\text{aire}(D) = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Démonstration

Puisque la fonction g est continue sur $[a, b]$, elle admet sur cet intervalle un minimum m .

Pour tout réel $x \in [a, b]$, nous posons

$$f_1(x) = f(x) - m \quad \text{et} \quad g_1(x) = g(x) - m.$$

Nous avons

$$\forall x \in [a, b], \quad 0 \leq g_1(x) \leq f_1(x)$$

En appliquant la proposition précédente, avec les notations de la figure qui suit, nous obtenons

$$\text{aire}(D_1) = \text{aire}(D_{f_1}) - \text{aire}(D_{g_1})$$

La translation de vecteur $m\vec{j}$ transforme la partie D du plan en la partie D_1 . Sachant qu'une translation conserve les aires, nous en déduisons

$$\text{aire}(D) = \text{aire}(D_1)$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}
\text{aire}(D) &= \text{aire}(D_{f_1}) - \text{aire}(D_{g_1}) \\
&= \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b g_1(x)dx \\
&= \int_a^b (f_1(x) - g_1(x))dx \\
&= \int_a^b [f(x) - m - (g(x) - m)]dx \\
&= \int_a^b (f(x) - g(x))dx
\end{aligned}$$

Exemple 15.20

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, nous calculons l'aire a_n de la partie du plan D_n définie par

$$D_n = \left\{ M(x, y) / \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad \ln x \leq y \leq e^x \right\}$$

Cet exemple est illustré par la figure ci-dessous

En appliquant la proposition précédente, dans l'unité d'aires, pour tout entier $n \geq 1$, nous obtenons

$$a_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 (e^x - \ln x) dx$$

Dans le dernier exemple du paragraphe précédent, nous avons établi qu'une primitive de la fonction \ln sur $]0, +\infty[$ est $x \mapsto x \ln x - x$.

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}
a_n &= [e^x - x \ln x + x]_{\frac{1}{n}}^1, \\
&= e + 1 - e^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} \ln \left(\frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n}, \\
&= e + 1 - \frac{1}{n} - \frac{\ln(n)}{n} - e^{\frac{1}{n}}.
\end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$$

nous observons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = e.$$

Corollaire 15.18 – Cas d’une fonction négative

Soit g une fonction continue sur $[a, b]$, avec $a < b$.

Nous supposons

$$\forall x \in [a, b], \quad g(x) \leq 0.$$

En désignant par

$$D = \{M(x, y) / x \in [a, b], g(x) \leq y \leq 0\}$$

dans l’unité d’aire, nous avons

$$\text{aire}(D) = - \int_a^b g(x) dx$$

Démonstration

Nous appliquons la proposition précédente dans le cas particulier

$$f(x) = 0.$$

Il vient

$$\text{aire}(D) = \int_a^b (0 - g(x)) dx = - \int_a^b g(x) dx$$

Remarque

Lorsque la fonction f change de signe sur $[a, b]$, nous calculons l’aire limitée par \mathcal{C}_f et la droite des abscisses en utilisant la relation de Chasles, en faisant la somme algébrique des intégrales de la fonction f sur les intervalles où elle conserve un signe constant.

Exemple 15.21

Soit f la fonction $x \mapsto \sin(2x)$.

Nous calculons l’aire \mathcal{A} de la partie du plan limitée par la droite des abscisses et la courbe \mathcal{C}_f , lorsque $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

Nous observons que f change de signe sur $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

En utilisant la remarque précédente, il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= - \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \sin(2x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) dx \\ &= - \left[-\frac{1}{2} \cos(2x) \right]_{-\frac{\pi}{4}}^0 + \left[-\frac{1}{2} \cos(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Nous en concluons que dans l’unité d’aire u^2 , nous avons

$$\mathcal{A} = \frac{3}{2}.$$

Nous remarquons que, sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, l'aire sous la courbe représentative de la fonction positive $x \mapsto |\sin(2x)|$ est aussi égale à \mathcal{A} , dans l'unité d'aire.

n

Troisième partie

Géométrie

Chapitre 16

Calcul vectoriel dans l'espace

Chapitre 17

Produit scalaire dans l'espace

Chapitre 18

Géométrie analytique dans l'espace

Quatrième partie

Probabilités

Chapitre 19

Probabilités

Sommaire

19.1 Épreuves successives indépendantes	345
19.1.1 Cas de deux épreuves successives	345
19.1.2 Cas de n épreuves successives	346
19.2 Schéma de Bernoulli	347
19.2.1 Loi de Bernoulli	347
19.2.2 Loi binomiale	350
19.3 Opérations sur les variables aléatoires	354
19.3.1 Linéarité de l'espérance	354
19.3.2 Action de l'espérance sur une fonction affine	356
19.3.3 Action de la variance sur une fonction affine	357
19.3.4 Notion de variables aléatoires indépendantes	358
19.3.5 Échantillon de variables aléatoires	360
19.4 Loi des grands nombres	362
19.4.1 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev	362
19.4.2 Inégalité de concentration : loi des grands nombres	365
19.4.3 Loi des grands nombres et schéma de Bernoulli	367

Les pré-requis de ce chapitre sont les connaissances acquises à ce sujet en classes de Troisième, Seconde et Première.

Nous débutons ce chapitre, par l'observation de la succession de n épreuves identiques à deux issues : « succès ou échec », la réalisation de chacune étant indépendante des autres. Ceci nous amène à définir un schéma de Bernoulli¹ puis la variable aléatoire qui lui est associée, c'est-à-dire la loi binomiale.

Nous développons ensuite les opérations sur l'espérance et la variance de deux variables aléatoires, c'est-à-dire, la linéarité de l'espérance et l'additivité de la variance lorsque les deux variables aléatoires sont indépendantes.

Pour terminer, nous évaluons l'écart entre une valeur prise par une variable aléatoire et sa moyenne en proposant l'inégalité de Bienaymé²-Tchebychev³ et son application dans la preuve de la loi des grands nombres.

1. Mathématicien suisse : 1654–1705
 2. Mathématicien français : 1796–1878
 3. Mathématicien russe : 1821–1894

Jusqu'à la fin du XIX^e siècle, le calcul de probabilités concernait uniquement une quantification du hasard liée à des expériences aléatoires dont le nombre d'issues est fini. La description de situations aléatoires dont l'ensemble des issues est infini a conduit à la naissance de la théorie des probabilités.

C'est le mathématicien russe Kolmogorov⁴ qui, au début du XX^e siècle, en utilisant la théorie naissante des ensembles, proposa une axiomatique qui est le fondement de l'étude théorique des probabilités. De nos jours c'est une branche très importante et féconde des mathématiques contemporaines.

4. Mathématicien russe : 1907–1987

19.1 Épreuves successives indépendantes

19.1.1 Cas de deux épreuves successives

Définition 19.1

Soient $\Omega_1 = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p\}$ et $\Omega_2 = \{\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_q\}$ deux ensembles d'issues possibles sur lesquels sont définies respectivement deux lois de probabilités \mathbb{P}_1 et \mathbb{P}_2 . On suppose que, pour chaque couple (i, j) tel que $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq q$, les événements $\{\omega_i\}$ et $\{\omega'_j\}$ sont indépendants.

Nous définissons une loi de probabilité \mathbb{P} sur le produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2$ par

$$\forall (\omega_i, \omega'_j) \in \Omega_1 \times \Omega_2, \quad \mathbb{P}(\{(\omega_i, \omega'_j)\}) = \mathbb{P}_1(\{\omega_i\}) \times \mathbb{P}_2(\{\omega'_j\})$$

Cette probabilité est la probabilité de succession de deux épreuves indépendantes.

Exemple 19.1

Nous prenons pour

- Ω_1 l'ensemble des 4 issues possibles lors du jet d'un dé tétraédrique équilibré.
- Ω_2 l'ensemble des deux issues lors du jet d'une pièce équilibrée.

Nous avons

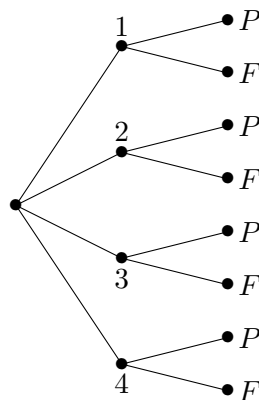
$$\begin{aligned} \Omega_1 \times \Omega_2 &= \{1, 2, 3, 4\} \times \{P, F\} \\ &= \{(1, P), (2, P), (3, P), (4, P), (1, F), (2, F), (3, F), (4, F)\}. \end{aligned}$$

La probabilité de succession définie sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ est uniforme.

Chaque couple d'issue indépendante a une probabilité égale à

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Nous pouvons représenter cette succession de deux épreuves indépendantes par l'arbre qui suit.



Les propriétés usuelles sont appliquées avec une probabilité de succession.

Par exemple, nous considérons l'événement A : « obtenir un couple qui ne comporte aucune coordonnée face ».

Nous obtenons :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{(1,P),(2,P),(3,P),(4,P)\}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

19.1.2 Cas de n épreuves successives

Définition 19.2

Nous considérons un entier $n \geq 2$.

Soient $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$, n ensembles d'issues possibles sur lesquels sont définies respectivement n lois de probabilités

$$\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \dots, \mathbb{P}_n.$$

Un n -uplet (x_1, x_2, \dots, x_n) appartenant au produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$ est une succession d'épreuves indépendantes lorsque la réalisation de chaque issue x_i ne dépend pas de la réalisation de la précédente.

Nous définissons ainsi une loi de probabilité \mathbb{P} sur le produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$ de la façon suivante :

$$\mathbb{P}((x_1, x_2, \dots, x_n)) = \mathbb{P}_1(\{x_1\}) \times \mathbb{P}_2(\{x_2\}) \times \dots \times \mathbb{P}_n(\{x_n\}).$$

Remarque

Dans une urne contenant n boules de différentes couleurs, un tirage successif avec remise de r boules est une succession d'épreuves indépendantes.

Ce n'est pas le cas d'un tirage successif sans remise ou d'un tirage simultané de ces r boules.

Exemple 19.2

Une urne contient 4 boules numérotées 0 et 3 boules numérotées 1. Trois d'entre elles sont prélevées au hasard, successivement avec remise.

Il s'agit d'une succession de trois épreuves indépendantes, chaque épreuve restituant 1 ou 0.

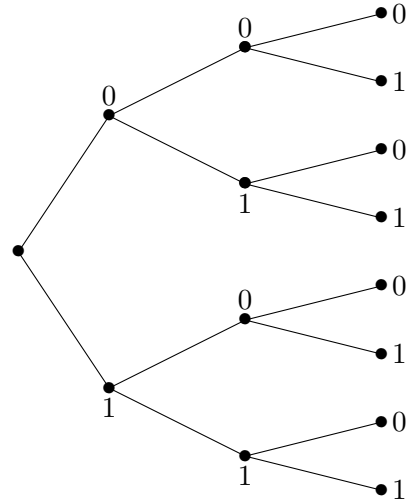
L'ensemble des issues possibles est donc

$$\Omega = \{0,1\}^3 = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\}$$

Nous avons

$$\text{Card}(\Omega) = 2^3 = 8$$

Nous pouvons nous aider d'un arbre pour lister les 8 triplets possibles.



Nous considérons l'événement A : « obtenir au moins deux 0 ».

En parcourant l'arbre, cet événement est réalisé pour les triplets suivants

$$A = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)\}$$

De plus la succession de 1 ou 0 sont des épreuves indépendantes, ce qui donne

$$\mathbb{P}(A) = \left(\frac{4}{7}\right)^3 + 3 \times \left(\frac{4}{7}\right)^2 \times \frac{3}{7} = \left(\frac{4}{7}\right)^2 \left(\frac{4}{7} + \frac{9}{7}\right) = \frac{16 \times 13}{7^3} \approx 0,6.$$

Nous verrons dans la section qui suit que cette expérience aléatoire peut être décrite par une variable aléatoire qui compte le nombre de 0 obtenu en réitérant trois prélèvements successifs avec remise (c'est-à-dire indépendants).

19.2 Schéma de Bernoulli

19.2.1 Loi de Bernoulli

Définition 19.3 – Épreuve de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire dont l'ensemble Ω des issues possibles est réduit à deux éléments notés S (succès) et \bar{S} (échec).

Pour tout réel $p \in [0,1]$, on définit sur $\Omega = \{S, \bar{S}\}$ une loi de probabilité \mathbb{P} en posant

$$\mathbb{P}(S) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\bar{S}) = 1 - p.$$

Définition 19.4 – Variable aléatoire de Bernoulli

Avec les données ci-dessus, une variable aléatoire X définie sur $\Omega = \{S, \bar{S}\}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p si et seulement si

- $X(\Omega) = \{0,1\}$,
- $\mathbb{P}(X = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p.$

Remarque

- Une loi de Bernoulli de paramètre p est notée $b(p)$ ou $\mathcal{B}(1,p)$.
- On note $X \hookrightarrow b(p)$ la donnée d'une loi de Bernoulli de paramètre p (la flèche \hookrightarrow signifie « a pour loi »).
- On pose souvent $q = 1 - p$.
- En général, nous avons $p \in]0,1[$ car si $p = 0$ ou $p = 1$, alors la variable X est certaine égale à 0 ou 1.

Exemple 19.3

- Lancer d'une pièce équilibrée : $S = \text{Pile}$, $\bar{S} = \text{Face}$.
 X suit une loi de Bernoulli $b\left(\frac{1}{2}\right)$.
- Lancer d'un dé équilibré : $S = 1$, $\bar{S} \neq 1$.
 X suit une loi de Bernoulli $b\left(\frac{1}{6}\right)$.
- Dans une urne, il y a une proportion p de boules blanches, les autres boules sont d'une autre couleur. Nous considérons les deux événements
 - S : « tirer une boule blanche ».
 - \bar{S} : « tirer une boule d'une autre couleur ». X suit une loi de Bernoulli $b(p)$.

Proposition 19.1 – Paramètres d'une loi de Bernoulli

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli $b(p)$.

- Son espérance est $\mathbb{E}(X) = p$.
- Sa variance est $\text{Var}(X) = p(1 - p)$.

Démonstration

- Par définition de l'espérance d'une variable aléatoire nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 1 \times \mathbb{P}(X = 1) + 0 \times \mathbb{P}(X = 0) \\ &= 1 \times p + 0 \times (1 - p) \\ &= p.\end{aligned}$$

- Pour calculer la variance de X , nous utilisons la formule de König-Huyghens vue en classe de Première, ce qui donne

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= 1^2 \times \mathbb{P}(X = 1) + 0^2 \times \mathbb{P}(X = 0) - p^2 \\ &= p - p^2 = p(1 - p).\end{aligned}$$

Exemple 19.4 – Fonction affine d’une variable de Bernoulli

Nous considérons une variable aléatoire X qui suit une loi de Bernoulli $b\left(\frac{1}{2}\right)$.
 $Y = 2X - 1$ est une variable aléatoire telle que

$$Y(\Omega) = \{-1, 1\}$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = -1) &= \mathbb{P}(2X - 1 = -1) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(Y = 1) &= \mathbb{P}(2X - 1 = 1) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Nous en concluons que Y suit également une loi de Bernoulli $b\left(\frac{1}{2}\right)$.

Un calcul direct de son espérance est envisageable mais nous pouvons aussi appliquer les connaissances vues en Première puisque

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(2X - 1) = 2\mathbb{E}(X) - 1 = 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0$$

ce qui signifie que Y est centrée.

Toujours grâce programme de Première, nous obtenons

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(2X - 1) = 2^2 \text{Var}(X) = 4 \times \frac{1}{4} = 1,$$

ce qui signifie que Y est réduite.

19.2.2 Loi binomiale

Définition 19.5 – Schéma de Bernoulli

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.

Un schéma de Bernoulli est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de même loi $b(p)$.

Définition 19.6

Dans ce schéma de Bernoulli, la variable aléatoire X qui restitue le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètres n et p , notée $\mathcal{B}(n,p)$.

Remarque

- Dans un schéma de Bernoulli, une issue possible est un n -uplet dont chaque coordonnée est 0 ou 1, c'est à dire un élément de $\{0,1\}^n$.
Cette issue peut aussi être représentée par un mot de n lettres, chaque lettre étant S ou $E = \bar{S}$.
- Une loi de Bernoulli $b(p)$ est une loi binomiale $\mathcal{B}(1,p)$.
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, alors nous avons

$$X(\Omega) = \{0,1,2,\dots,n\}.$$

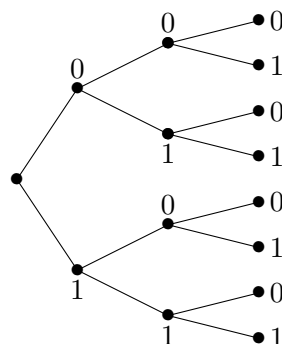
Exemple 19.5

Nous considérons une pièce truquée, la face numérotée 1 apparaît avec une probabilité égale à $\frac{2}{3}$, l'autre face, notée 0, est réalisée avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$.

Cette pièce est jetée trois fois de suite.

Nous reconnaissons un schéma de Bernoulli qui est constitué de trois épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{2}{3}$. Ainsi la variable aléatoire comptant le nombre de succès, c'est-à-dire le nombre de faces 1 obtenu, suit une loi binomiale de paramètre $n = 3$ et $p = \frac{2}{3}$.

Pour déterminer la loi de X c'est-à-dire les calculs de $\mathbb{P}(X = k)$ lorsque k décrit $\{0,1,2,3\}$ nous formons l'arbre qui suit.



Il vient

$$\mathbb{P}(X = 0) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \binom{3}{0} \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \binom{3}{1} \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \binom{3}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{4}{9}$$

$$\mathbb{P}(X = 3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \binom{3}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{8}{27}$$

Nous vérifions que

$$\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) = 1$$

La loi de X est résumée par le tableau qui suit.

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

Proposition 19.2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.

Si X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, alors

- $X(\Omega) = \{0,1,2,\dots,n\} = \llbracket 0,n \rrbracket$,
- $\forall k \in \llbracket 0,n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Démonstration

- Par définition de la variable aléatoire X , nous avons

$$X(\Omega) = \{0,1,2,\dots,n\} = \llbracket 0,n \rrbracket.$$

- Pour chaque entier $k \in \llbracket 0,n \rrbracket$, une issue favorable à la réalisation de l'événement $(X = k)$ est un n -uplet constitué de k coordonnées numérotées 1 et de $n - k$ coordonnées numérotées 0.

Cette issue est réalisée par la succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes. Elle a donc pour probabilité le réel $p^k(1-p)^{n-k}$.

Or nous dénombrons $\binom{n}{k}$ n -uplets qui sont constitués de k coordonnées numérotées 1 et de $n - k$ coordonnées numérotées 0. Ces n -uplets sont des issues favorables disjointes deux à deux qui ont toutes la même probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$.

Comme elles sont au nombre de $\binom{n}{k}$, nous en concluons, par additivité des probabilités :

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Remarque

▷ Si $q = 1 - p$, alors pour tout entier $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, nous avons

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

▷ Valeurs de $\mathbb{P}(X = k)$, pour $k \in \{0, 1, n\}$.

$$\mathbb{P}(X = 0) = \binom{n}{0} p^0 q^n = q^n$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = \binom{n}{1} p^1 q^{n-1} = npq^{n-1}$$

$$\mathbb{P}(X = n) = \binom{n}{n} p^n q^0 = p^n$$

▷ Calculs de $\mathbb{P}(X \geq 1)$ et $\mathbb{P}(X \geq 2)$.

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - q^n.$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 2) &= 1 - (\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1)) \\ &= 1 - (q^n + npq^{n-1}) \\ &= 1 - q^{n-1}(q + np). \end{aligned}$$

Proposition 19.3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.

Si X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) = 1$$

Démonstration

En utilisant la formule du binôme de Newton (proposition 7.15), nous obtenons

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1.$$

Algorithme Nous proposons, lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, une séquence qui restitue, pour chaque valeur de l'entier k , la probabilité $\mathbb{P}(X = k)$ et la probabilité cumulée $\mathbb{P}(X \leq k)$.

```

1  def combinaison (n,k):
2      if k>n:
3          c=0
4      else:
5          c=1
6      for i in range(1,k+1):
7          c =c*(1+(n-k)/i)
8          c=int (c)
9      return c
10
11 def lbinomiale(n,p,k):
12     p=combinaison(n,k)*p**k*(1-p)**(n-k)
13     return p
14
15 def repbinomiale(n,p,k):
16     s=(1-p)**n
17     for i in range(1, k+1):
18         s=s+lbinomiale (n,p,i)
19     return s

```

Par exemple, lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{B}(10,0.6)$, pour $k = 7$, nous obtenons

```

>>> lbinomiale(10,0.6,7)
>>> 0.21499084799999998
>>> repbinomiale(10,0.6,7)
>>> 0.8243494912

```

Proposition 19.4 – Calculs de l'espérance et de la variance

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, alors l'espérance et la variance de X sont

$$\mathbb{E}(X) = np \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = npq.$$

Démonstration

▷ Calcul de l'espérance de X .

Par définition de l'espérance d'une variable aléatoire finie, nous avons

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^n k \times \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n k \times \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^n k \times \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

En utilisant « la petite formule » vue lors du TD7, nous savons que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$,

$$k \times \binom{n}{k} = n \times \binom{n-1}{k-1},$$

ce qui donne :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n n \times \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}$$

Nous posons $j = k - 1$. Il vient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^{j+1} q^{n-(j+1)} \\ &= np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j q^{n-1-j} \\ &= np(p+q)^{n-1} \\ &= np \end{aligned}$$

▷ Nous obtiendrons le calcul de $\text{Var}(X)$ (ainsi que celui de $\mathbb{E}(X)$), plus simplement, dans le paragraphe qui suit.

19.3 Opérations sur les variables aléatoires

19.3.1 Linéarité de l'espérance

Proposition 19.5 – Une autre expression de $\mathbb{E}(X)$

Soient $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r\}$ un ensemble d'issues possibles, \mathbb{P} une loi de probabilité et X une variable aléatoire définies sur Ω .

Nous disposons d'une autre expression de $\mathbb{E}(X)$ qui est

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^r X(\omega_i) \mathbb{P}(\omega_i)$$

Démonstration

Nous savons que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \mathbb{P}(X = k).$$

Puisque $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r\}$, pour tout $k \in X(\Omega)$, il existe $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tel que $X(\omega_i) = k$.

Il en résulte

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X = X(\omega_i)) = \mathbb{P}(\omega_i)$$

ce qui permet de définir, en tenant compte uniquement de la donnée de Ω , l'espérance de X par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^r X(\omega_i) \mathbb{P}(\omega_i)$$

Proposition 19.6 – Linéarité de l'espérance

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même ensemble $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r\}$ d'issues possibles, ce dernier étant muni d'une loi de probabilité \mathbb{P} .

L'espérance est linéaire, ce qui signifie, pour tous les réels a et b ,

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y).$$

Démonstration

Nous appliquons la proposition précédente à la variable aléatoire $L = aX + bY$. En admettant que la définition de l'espérance peut être transférée à la variable L pour la loi de probabilité \mathbb{P} , il vient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(aX + bY) &= \sum_{i=1}^r (aX + bY)(\omega_i) \mathbb{P}(\omega_i) \\ &= a \sum_{i=1}^r X(\omega_i) \mathbb{P}(\omega_i) + b \sum_{i=1}^r Y(\omega_i) \mathbb{P}(\omega_i) \\ &= a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y). \end{aligned}$$

Remarque

En particulier :

▷ pour $a = b = 1$, nous obtenons

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

▷ pour $b = 0$, nous obtenons

$$\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$$

Exemple 19.6

Nous considérons deux jets successifs de deux dés tétraédriques où X désigne le numéro de la face cachée du premier lancer et Y désigne le numéro de la face cachée du second lancer.

Puisque X et Y ont la même loi de probabilité et sont définies sur

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\},$$

nous en déduisons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X + Y) &= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) \\ &= 2 \left(1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} \right) \\ &= 2 \times \frac{5}{2} = 5. \end{aligned}$$

Pour vérification, nous pouvons déterminer la loi de $S = X + Y$ et calculer ensuite $\mathbb{E}(S)$.

En effet, nous avons

$$\mathbb{E}(S) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$

la loi de S étant résumée par le tableau qui suit.

k	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbb{P}(S = k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

Ainsi, nous obtenons

$$\mathbb{E}(S) = \frac{2}{16} + \frac{6}{16} + \frac{12}{16} + \frac{20}{16} + \frac{18}{16} + \frac{14}{16} + \frac{8}{16} = \frac{80}{16} = 5.$$

19.3.2 Action de l'espérance sur une fonction affine

Proposition 19.7

Soient a et b deux réels. Pour toute variable aléatoire X définie sur Ω , nous avons

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b.$$

Démonstration

Nous admettons que la définition de l'espérance peut être transférée à la variable $aX + b$ pour la loi de probabilité \mathbb{P} . Il vient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(aX + b) &= \sum_{k \in X(\Omega)} (ak + b)\mathbb{P}(X = k), \\ &= a \sum_{k \in X(\Omega)} k\mathbb{P}(X = k) + b \sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}(x = k). \end{aligned}$$

Puisque $\sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}(x = k) = 1$ et par définition de $\mathbb{E}(X)$, nous en concluons

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b.$$

Corollaire 19.8

Pour toute variable aléatoire X définie sur Ω , la variable aléatoire $Y = X - \mathbb{E}(X)$ est centrée.

Démonstration

En appliquant la proposition précédente, nous obtenons

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) = 0,$$

ce qui prouve que la variable aléatoire $Y = X - \mathbb{E}(X)$ est centrée.

Exemple 19.7

Un dé équilibré tétraédrique dont les faces sont numérotées de 1 à 4 est lancé. On désigne par X le numéro de la face cachée.

Nous avons

$$\mathbb{E}(X) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{2}.$$

Le numérotage des quatre faces est modifié par la variable aléatoire $Y = 2X - 1$.

Nous avons

$$\mathbb{E}(Y) = 2\mathbb{E}(X) - 1 = 4$$

Ce résultat peut être vérifié par un calcul direct avec $Y(\Omega) = \{1, 3, 5, 7\}$, ce qui donne

$$\mathbb{E}(Y) = 1 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} + 5 \times \frac{1}{4} + 7 \times \frac{1}{4} = 4$$

19.3.3 Action de la variance sur une fonction affine**Proposition 19.9**

Soient a et b deux réels. Pour toute variable aléatoire X définie sur Ω , nous avons

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X) \quad \text{et} \quad \sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$$

Démonstration

▷ Par définition, nous avons

$$\text{Var}(aX + b) = \mathbb{E}((aX + b)^2) - (\mathbb{E}(aX + b))^2$$

En appliquant la linéarité de l'espérance ainsi que l'action de l'espérance sur une fonction affine, nous obtenons

$$\begin{aligned} \text{Var}(aX + b) &= \mathbb{E}(a^2X^2 + 2abX + b^2) - (a\mathbb{E}(X) + b)^2 \\ &= a^2\mathbb{E}(X^2) + 2ab\mathbb{E}(X) + b^2 - a^2(\mathbb{E}(X))^2 - 2ab\mathbb{E}(X) - b^2 \\ &= a^2(\mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2) \\ &= a^2 \text{Var}(X) \end{aligned}$$

▷ Nous en déduisons

$$\sigma(aX + b) = \sqrt{\text{Var}(aX + b)} = \sqrt{a^2 \text{Var}(X)} = |a|\sqrt{\text{Var}(X)} = |a|\sigma(X).$$

Remarque

Nous pouvons également établir la preuve de cette proposition en appliquant la formule de König-Huyghens à la variable aléatoire $aX + b$.

Corollaire 19.10

Pour toute variable aléatoire X définie sur Ω telle que $\sigma(X) \neq 0$, la variable aléatoire $T = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est réduite, ce qui signifie

$$\text{Var}(T) = 1.$$

Démonstration

En appliquant la proposition précédente, nous obtenons

$$\text{Var}(T) = \text{Var}\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{1}{\sigma^2(X)} \text{Var}(X) = 1.$$

19.3.4 Notion de variables aléatoires indépendantes**Définition 19.7**

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même ensemble Ω d'issues possibles, muni d'une loi de probabilité \mathbb{P} .

Ces deux variables sont indépendantes si et seulement si pour tout couple $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ les événements $(X = i)$ et $(Y = j)$ sont indépendants.

En d'autres termes, X et Y sont indépendantes si et seulement si

$$\mathbb{P}(X = i \cap Y = j) = \mathbb{P}(X = i) \times \mathbb{P}(Y = j).$$

Exemple 19.8

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p .

Nous déterminons la loi de la variable aléatoire $Z = XY$.

Puisque $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0, 1\}$, nous en déduisons

$$Z(\Omega) = \{0, 1\}$$

Il en résulte, par indépendance des variables X et Y ,

$$\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(X = 1 \cap Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1) \times \mathbb{P}(Y = 1) = p^2$$

ce qui implique

$$\mathbb{P}(Z = 0) = 1 - \mathbb{P}(Z = 1) = 1 - p^2.$$

Nous remarquons que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre p^2 .

Nous observons

$$\mathbb{E}(Z) = p^2 = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y), \quad \text{soit } \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Cet exemple illustre un résultat général, que nous énonçons et admettons car sa preuve dépasse le cadre de cet ouvrage.

Proposition 19.11 – admise

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même ensemble Ω d'issues possibles, muni d'une loi de probabilité \mathbb{P} .

Si X et Y sont indépendantes, alors

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Proposition 19.12 – Action de la variance sur la somme de variables aléatoires

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même ensemble Ω d'issues possibles, muni d'une loi de probabilité \mathbb{P} . Si X et Y sont indépendantes, alors :

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y).$$

Démonstration

Nous savons que

$$\text{Var}(X + Y) = \mathbb{E}((X + Y))^2 - (\mathbb{E}(X + Y))^2$$

En utilisant la linéarité de l'espérance, il vient

$$\begin{aligned} \text{Var}(X + Y) &= \mathbb{E}(X^2 + 2XY + Y^2) - (\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y))^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) \\ &\quad - (\mathbb{E}(X))^2 - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - (\mathbb{E}(Y))^2 \\ &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 2(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)) \end{aligned}$$

Puisque les variables X et Y sont indépendantes, en appliquant la proposition précédente, nous en concluons

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$$

Exemple 19.9

Nous reprenons l'exemple 19.6 de jets successifs indépendants de deux dés tétraédriques équilibrés.

Nous savons que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \frac{5}{2}$.

Nous avons

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y^2) = 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times \frac{1}{4} + 4^2 \times \frac{1}{4} = \frac{30}{4}.$$

Nous en déduisons

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = \frac{30}{4} - \frac{25}{4} = \frac{5}{4}$$

Puisque les variables X et Y sont indépendantes, nous obtenons

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = 2 \times \frac{5}{4} = \frac{5}{2}.$$

19.3.5 Échantillon de variables aléatoires

Définition 19.8

Soit un entier naturel $n \geq 2$. Un n -uplet (X_1, X_2, \dots, X_n) de n variables aléatoires est un échantillon de taille n , lorsque ces n variables sont indépendantes, identiques et de même loi.

Exemple 19.10

Dans cet échantillon, nous supposons que, pour tout entier i compris entre 1 et n , la variable X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p .

Dans ce cas l'observation d'une valeur prise par cet échantillon est un n uplet de $\{0, 1\}^n$.

Proposition 19.13

Soit (X_1, X_2, \dots, X_n) un échantillon. En posant

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

et en désignant par μ et σ l'espérance et l'écart-type de chaque coordonnée de cet échantillon, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_n) &= n\mu \\ \text{Var}(S_n) &= n\sigma^2 \\ \sigma(S_n) &= \sqrt{n}\sigma\end{aligned}$$

Démonstration

▷ Par linéarité de l'espérance, nous obtenons

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^n \mu = n\mu.$$

▷ Puisque les variables X_1, X_2, \dots, X_n sont indépendantes, il vient

$$\text{Var}(S_n) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \sum_{i=1}^n \sigma^2 = n\sigma^2.$$

▷ Nous en déduisons

$$\sigma(S_n) = \sqrt{n \times \sigma^2} = \sqrt{n} \times \sigma.$$

Corollaire 19.14 – Moyenne d'un échantillon

Les données sont celles de la proposition précédente.
Nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) &= \mu \\ V\left(\frac{S_n}{n}\right) &= \frac{\sigma^2}{n} \\ \sigma\left(\frac{S_n}{n}\right) &= \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

Démonstration

▷ Par linéarité de l'espérance, il vient

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{n} \times n \times \mu = \mu.$$

▷ En appliquant la proposition 19.9, nous obtenons

$$\text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \text{Var}(S_n) = \frac{1}{n^2} \times n \times \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

▷ Il en résulte que

$$\sigma\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Corollaire 19.15 – Espérance et variance d'une loi binomiale

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.

Si, pour tout entier i compris entre 1 et n , la variable X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p , alors $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, et nous avons

$$\mathbb{E}(S_n) = np \quad \text{et} \quad \text{Var}(S_n) = np(1-p).$$

Démonstration

Nous reprenons l'exemple précédent.

Dans ce cas, la variable $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ restitue le nombre de succès lors de la succession de n épreuves de Bernoulli identiques, indépendantes et de même loi.

Nous en déduisons que S_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, ce qui implique, en appliquant la proposition précédente,

$$\mathbb{E}(S_n) = np \quad \text{et} \quad \text{Var}(S_n) = np(1-p).$$

19.4 Loi des grands nombres

19.4.1 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

Proposition 19.16 – Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire finie telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$. Pour tout réel $a > 0$, nous disposons de l'inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Démonstration

Soit un réel $a > 0$. Pour tout $k \in X(\Omega)$, nous distinguons par disjonction les deux cas : $k < a$ ou $k \geq a$.

Nous obtenons

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k < a}} k\mathbb{P}(X = k) + \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k \geq a}} k\mathbb{P}(X = k).$$

Puisque $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$, nous en déduisons

$$\sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k < a}} k\mathbb{P}(X = k) \geq 0,$$

ce qui implique

$$\mathbb{E}(X) \geq \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k \geq a}} k\mathbb{P}(X = k).$$

De plus, comme $\mathbb{P}(X = k) \geq 0$, si $k \geq a$, alors $k\mathbb{P}(X = k) \geq a\mathbb{P}(X = k)$. Il en résulte

$$\sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k \geq a}} k\mathbb{P}(X = k) \geq \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k \geq a}} a\mathbb{P}(X = k),$$

ce qui donne, par transitivité de la relation \geq ,

$$\mathbb{E}(X) \geq a \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k \geq a}} \mathbb{P}(X = k).$$

En observant que $\sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k \geq a}} \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geq a)$, il vient

$$\mathbb{E}(X) \geq a\mathbb{P}(X \geq a).$$

Nous en concluons

$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Exemple 19.11

Une pièce de monnaie équilibrée est lancée 100 fois de suite. Nous nous intéressons au nombre X de piles obtenus.

Nous reconnaissons un schéma de Bernoulli et ainsi X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(100; 0,5)$, d'espérance $\mathbb{E}(X) = 100 \times 0,5 = 50$.

En appliquant l'inégalité de Markov^a, nous en obtenons par exemple

$$\mathbb{P}(X \geq 75) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{75}, \quad \text{soit } \mathbb{P}(X \geq 75) \leq \frac{2}{3}.$$

Nous remarquons que cette majoration est assez « grossière » car on peut vérifier que dans cette situation

$$\mathbb{P}(X \geq 75) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 74) \approx 0,3 \times 10^{-7}.$$

^a. Mathématicien russe : 1856–1922

Proposition 19.17 – Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire finie.

Nous disposons de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Démonstration

Soit un réel $\varepsilon > 0$.

En choisissant $a = \varepsilon^2 > 0$, nous appliquons l'inégalité de Markov à la variable aléatoire :

$$Y = (X - \mathbb{E}(X))^2 \geq 0.$$

Il vient

$$\mathbb{P}(Y \geq \varepsilon^2) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{\varepsilon^2},$$

soit

$$\mathbb{P}((X - \mathbb{E}(X))^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)}{\varepsilon^2}.$$

En considérant l'événement $((X - \mathbb{E}(X))^2 \geq \varepsilon^2)$, nous avons

$$((X - \mathbb{E}(X))^2 \geq \varepsilon^2) = (\sqrt{(X - \mathbb{E}(X))^2} \geq \sqrt{\varepsilon^2}) = (|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon).$$

Par ailleurs, nous savons que $\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \text{Var}(X)$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est ainsi acquise

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Exemple 19.12

Nous reprenons l'exemple précédent où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(100; 0,5)$.

Puisque

$$\text{Var}(X) = 100 \times 0,5 \times 0,5 = 25,$$

nous en déduisons, en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que, pour tout réel $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - 50| \geq \varepsilon) \leq \frac{25}{\varepsilon^2}.$$

En particulier, pour $\varepsilon = 25$, il vient

$$\mathbb{P}(|X - 50| \geq 25) \leq \frac{1}{25}.$$

En considérant l'événement $(|X - 50| \geq 25)$, nous avons

$$(|X - 50| \geq 25) = (X - 50 \leq -25) \cup (X - 50 \geq 25) = (X \leq 25) \cup (X \geq 75).$$

Puisque $(X \leq 25) \cap (X \geq 75) = \emptyset$, il en résulte

$$\mathbb{P}((X \leq 25)) + \mathbb{P}(X \geq 75) \leq \frac{1}{25},$$

ce qui implique

$$\mathbb{P}(X \geq 75) \leq \mathbb{P}((X \leq 25)) + \mathbb{P}(X \geq 75) \leq \frac{1}{25}.$$

Ainsi nous observons, dans cet exemple, que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev fournit une majoration de $\mathbb{P}(X \geq 75)$ plus précise que celle obtenue avec l'inégalité de Markov dans l'exemple précédent.

Corollaire 19.18

Dans les conditions de la proposition précédente, nous posons $\sigma = \sigma(X)$.
Pour tout réel $t > 0$, nous disposons de l'inégalité

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t\sigma) \leq \frac{1}{t^2}.$$

Démonstration

Soit un réel $t > 0$. En particulier pour $\varepsilon = t\sigma$, nous appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Nous obtenons

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{t^2\sigma^2},$$

c'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t\sigma) \leq \frac{1}{t^2}.$$

Remarque

En particulier, pour $t = 2$, nous obtenons

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq 2\sigma) \leq \frac{1}{4},$$

ce qui signifie que la probabilité que les valeurs prises par X restent distantes de $\mathbb{E}(X)$ de plus de 2σ est majorée par 0,25.

19.4.2 Inégalité de concentration : loi des grands nombres**Proposition 19.19**

Soient un entier $n \geq 2$ et X_1, X_2, \dots, X_n , n variables aléatoires identiques, indépendantes, de même loi d'espérance μ et d'écart-type σ .

En posant $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, nous avons

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Démonstration

Soit un réel $\varepsilon > 0$.

Nous appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire $\frac{S_n}{n}$. Il vient

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}$$

Puisque nous avons

▷ par linéarité,

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{n} \times n\mu = \mu.$$

▷ par indépendance,

$$\text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \text{Var}(S_n) = \frac{1}{n^2} \times n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n},$$

l'inégalité attendue en résulte, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Remarque

▷ Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose souvent

$$M_n = \frac{S_n}{n}$$

M_n est une variable aléatoire qui est la moyenne des variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n .

L'énoncé de la loi des grands nombres devient

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|M_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

▷ La loi des grands nombres signifie que la probabilité que $M_n = \frac{S_n}{n}$ prennent des valeurs distantes de μ de plus de ε est d'autant plus petite que ε est grand.

▷ Nous pouvons exprimer la loi des grands nombres en considérant l'événement contraire de $(|M_n - \mu| \geq \varepsilon)$ ce qui donne, quel que soit le réel $\varepsilon > 0$,

$$1 - \mathbb{P}(|M_n - \mu| < \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2},$$

soit

$$\mathbb{P}(|M_n - \mu| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Corollaire 19.20 – Convergence en probabilité

Avec les données précédentes, pour tout réel $\varepsilon > 0$, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|M_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0.$$

Démonstration

Soit un réel $\varepsilon > 0$ donné.

Puisque, pour tout entier $n \geq 2$, nous avons

$$0 \leq \mathbb{P}(|M_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} = 0,$$

par encadrement, nous en concluons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|M_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0.$$

19.4.3 Loi des grands nombres et schéma de Bernoulli

Proposition 19.21

Soient un entier $n \geq 2$, un réel $p \in [0,1]$ et X_1, X_2, \dots, X_n , n variables aléatoires identiques, indépendantes, de même loi de Bernoulli $b(p)$.

En posant $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ et $M_n = \frac{S_n}{n}$, pour tout réel $\epsilon > 0$, nous avons

$$\mathbb{P}(|S_n - np| \geq \epsilon) \leq \frac{np(1-p)}{\epsilon^2}$$

$$\mathbb{P}(|M_n - p| \geq \epsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$$

Démonstration

Puisque, pour tout entier i compris entre 1 et n , la variable X_i , à valeurs dans $\{0,1\}$, est de Bernoulli, nous en déduisons que la variable S_n qui compte le nombre de 1, c'est-à-dire le nombre de succès, suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

▷ Il en résulte que

$$\mathbb{E}(S_n) = np \quad \text{et} \quad V(S_n) = np(1-p).$$

En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, nous obtenons

$$\forall \epsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|S_n - np| \geq \epsilon) \leq \frac{np(1-p)}{\epsilon^2}.$$

▷ De plus, nous avons

$$\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = p \quad \text{et} \quad \sigma^2 = p(1-p).$$

L'application, dans ce cas, de la loi des grands nombres donne

$$\forall \epsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|M_n - p| \geq \epsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}.$$

Exemple 19.13

Un dé équilibrée cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 est lancé 120 fois de suite. On désigne par S_{120} la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où la face 1 ou la face 6 apparaît.

Nous souhaitons déterminer un minorant de la probabilité $\mathbb{P}(35 \leq S_{120} \leq 45)$.

Cette expérience aléatoire est la répétition indépendante 120 fois d'une même épreuve de Bernoulli dont le probabilité de succès est $p = \frac{1}{3}$. Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli dans lequel la variable aléatoire S_{120} suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(120, \frac{1}{3}\right)$.

En appliquant la première inégalité de la proposition précédente, pour tout réel

$\varepsilon > 0$, nous obtenons :

$$\mathbb{P} \left(\left| S_{120} - 120 \times \frac{1}{3} \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{120 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}{\varepsilon^2},$$

soit

$$\mathbb{P} (|S_{120} - 40| \geq \varepsilon) \leq \frac{80}{3\varepsilon^2},$$

ce qui équivaut à

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{P} (|S_{120} - 40| < \varepsilon) &\leq \frac{80}{3\varepsilon^2} \iff \mathbb{P} (|S_{120} - 40| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{80}{3\varepsilon^2} \\ &\iff \mathbb{P} (40 - \varepsilon < S_{120} < 40 + \varepsilon) \geq 1 - \frac{80}{3\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

En particulier pour $\varepsilon = 6$, nous obtenons

$$\mathbb{P} (34 < S_{120} < 46) \geq 1 - \frac{80}{3 \times 6^2}, \quad \text{soit } \mathbb{P} (34 < S_{120} < 46) \geq \frac{7}{27}.$$

Puisque l'événement

$$(34 < S_{120} < 46) = (35 \leq S_{120} \leq 45),$$

nous en concluons

$$\mathbb{P} (35 \leq S_{120} \leq 45) \geq \frac{7}{27}.$$

Maths expertes

Cinquième partie

Arithmétique

Chapitre 20

Divisibilité dans \mathbb{Z}

Sommaire

20.1 Diviseurs d'un entier relatif	374
20.1.1 Définitions	374
20.1.2 Propriétés de la relation divise 	375
20.2 Division euclidienne dans \mathbb{Z}	379
20.2.1 Division euclidienne dans \mathbb{N}	380
20.2.2 Division d'un entier relatif par un entier naturel non nul	384
20.2.3 Division d'un entier relatif par un entier relatif non nul	386

Au primaire et au collège, vous avez pratiqué la divisibilité par la résolution de nombreux exercices concrets. En Seconde, la divisibilité dans \mathbb{N} a été abordée.

Dans ce chapitre nous proposons d'approfondir ces connaissances par un exposé de la théorie de la divisibilité dans l'ensemble des entiers relatifs.

C'est le fondement d'une branche des mathématiques qui est appelée l'arithmétique ou la théorie des nombres. L'arithmétique est connue depuis l'Antiquité notamment en Grèce, à travers les éléments d'Euclide (−300 ans avant notre ère) mais il faudra attendre le XVII^e siècle où Pierre de Fermat (1601–1665), découvrant les écrits de Diophante (mathématicien grec III^e siècle), développa ardemment cette branche des mathématiques.

Après lui, de nombreux mathématiciens comme par exemple, Gauss, Euler, et de nos jours, André Weil et Andrew Wiles, ont contribué au développement de l'arithmétique.

Cette science connaît actuellement un essor important dû notamment à l'étude de la cryptographie (les codes secrets) et aux développements algorithmiques à ce sujet en informatique.

20.1 Diviseurs d'un entier relatif

Exemple 20.1

Quiconque connaissant sa table de 6 sait que

$$42 = 6 \times 7,$$

ce qui équivaut à

$$42 \div 6 = 7.$$

On dit alors indifféremment que :

- 6 divise 42,
- 6 est un diviseur de 42,
- 42 est un multiple de 6.

En désignant par $\text{Div}(42)$ l'ensemble des diviseurs dans \mathbb{N} de 42, nous avons

$$\text{Div}(42) = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}.$$

Par extension, on a aussi

$$42 = (-3) \times (-14).$$

On dit que -3 divise 42 dans \mathbb{Z} .

Ainsi, l'ensemble des diviseurs de 42 dans \mathbb{Z} est

$$\text{Div}(42) = \{-42, -21, -14, -7, -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}.$$

20.1.1 Définitions

Définition 20.1 – Divisibilité dans \mathbb{Z}

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$. On dit que b *divise* a si et seulement si

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \quad a = b \times k.$$

Lorsque b divise a , on note $b|a$.

L'ensemble des diviseurs de a , noté $\text{Div}(a)$ est défini par

$$\text{Div}(a) = \{b \in \mathbb{Z}^* \mid b|a\} = \{b \in \mathbb{Z}^* \mid a = b \times k, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Remarque

- Lorsque b divise a , on dit aussi que b *est un diviseur de* a , ou bien, a *est un multiple de* b .
 - Nous avons $0 = 0 \times 0$, ce qui signifie que $0|0$, à ne pas confondre avec la forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ».
- De plus, quel que soit $b \in \mathbb{Z}^*$, $b|0$, car $0 = b \times 0$.

Nous en concluons

$$\text{Div}(0) = \mathbb{Z}.$$

En particulier dans \mathbb{N} , nous avons $\text{Div}(0) = \mathbb{N}$.

- $\text{Div}(1) = \{-1, 1\}$ et dans \mathbb{N} , $\text{Div}(1) = \{1\}$.

- Par contre, aucun entier relatif non nul est divisible par 0.

En effet, s'il existe un entier relatif $a \neq 0$ tel que $0|a$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 0 \times k = 0$, ce qui est contradictoire avec $a|0$.

Exemple 20.2

Nous déterminons l'ensemble des entiers relatifs n tels que $2n + 5$ divise 7.

Puisque $\text{Div}(7) = \{-7, -1, 1, 7\}$, nous en déduisons

$$(2n + 5 = -7) \vee (2n + 5 = -1) \vee (2n + 5 = 1) \vee (2n + 5 = 7),$$

ce qui donne

$$n \in \{-6, -3, -2, 1\}.$$

Réciproquement, nous vérifions que si $n \in \{-6, -3, -2, 1\}$, alors $2n + 5|7$.

Nous en concluons que l'ensemble des entiers relatifs n tels que $2n + 5$ divise 7 est $\{-6, -3, -2, 1\}$.

20.1.2 Propriétés de la relation divise |

Proposition 20.1

Quel que soit $a \in \mathbb{Z}$, $\text{Div}(a) = \text{Div}(|a|)$.

Démonstration

Si $a = 0$, l'égalité proposée est vérifiée.

Nous supposons que $a \in \mathbb{Z}^*$ et nous procédons par double inclusion.

\square Si $b \in \text{Div}(a)$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = bk$.

Par disjonction, nous distinguons deux cas.

1^{er} cas : $a > 0$.

Dans ce cas, il vient

$$|a| = bk,$$

ce qui implique que b divise $|a|$ donc $b \in \text{Div}(|a|)$.

2^e cas : $a < 0$.

Dans ce cas, nous avons

$$|a| = -a = b(-k), \quad \text{avec } -k \in \mathbb{Z},$$

ce qui implique que $b \in \text{Div}(|a|)$.

Ainsi, nous avons établi l'implication

$$b \in \text{Div}(a) \implies b \in \text{Div}(|a|), \quad \text{soit } \text{Div}(a) \subset \text{Div}(|a|)$$

□ Réciproquement, si $b \in \text{Div}(|a|)$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $|a| = bk$.
 En utilisant la même disjonction que précédemment, nous justifions de même que $b|a$ et par conséquent, nous avons $b \in \text{Div}(a)$, ce qui justifie

$$\text{Div}(|a|) \subset \text{Div}(a).$$

Nous en concluons par double inclusion que, pour tout $a \in \mathbb{Z}^*$,

$$\text{Div}(a) = \text{Div}(|a|).$$

Remarque

Cette proposition permet, dans la recherche des diviseurs d'un entier relatif a , de restreindre la détermination de $\text{Div}(a)$ à $\text{Div}(|a|)$, avec $|a| \in \mathbb{N}$.

Algorithme Étant donné un entier naturel n , nous proposons de déterminer ses diviseurs positifs avec un algorithme qui teste sa divisibilité par tous les entiers compris entre 1 et n .

C'est un peu brutal car nous ne tenons pas compte des critères de divisibilité mais c'est adapté à un traitement informatique.

```

1 def diviseurs(n) :
2     L=[]
3     for k in range(1,n+1) :
4         if n%k==0 :
5             L.append(k)
6     return L

```

Par exemple, nous obtenons :

```

>>> diviseurs(2025)
[1, 3, 5, 9, 15, 25, 27, 45, 75, 81, 225, 405, 675, 2025].

>>> diviseurs(524287)
[1, 524287],

```

ce qui signifie que ce nombre est premier.

Dans cette implémentation en Python, nous précisons que $n\%k == 0$ traduit que k divise n puisque cette instruction signifie que le reste de la division de n par k est nul.

Proposition 20.2

La relation « divise » est une relation d'ordre dans \mathbb{Z} (cf. 4.3), c'est-à-dire qu'elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Démonstration

- Réflexivité.

Soit $a \in \mathbb{Z}$. Nous avons $a = a \times 1$, donc $a|a$.

- Antisymétrie.

Soient $a \in \mathbb{Z}^*$ et $b \in \mathbb{Z}^*$ tels que $a|b$ et $b|a$.

Il existe k et k' entiers relatifs tels que $b = ak$ et $a = bk'$.

Nous en déduisons que $a = (ak)k' = a(kk')$. Puisque $a \neq 0$, il vient $kk' = 1$.

Or nous savons que k et k' sont des entiers relatifs. Il en résulte que $k = k' = 1$ ou $k = k' = -1$, ce qui justifie

$$a = b \quad \text{ou} \quad a = -b.$$

- Transitivité.

Soient $a \in \mathbb{Z}^*$ et $b \in \mathbb{Z}^*$ et $c \in \mathbb{Z}$ tels que $a|b$ et $b|c$.

Il existe k et k' entiers relatifs tels que $b = ak$ et $c = bk'$.

Nous en déduisons que $c = (ak)k' = a(kk')$, avec $kk' \in \mathbb{Z}$.

Nous avons ainsi prouvé que $a|c$.

Remarque

- La relation $|$ est une relation d'ordre partiel car deux entiers relatifs ne sont pas toujours comparables pour $|$, par opposition à la relation \leq qui est d'ordre total dans \mathbb{Z} .

Un contre-exemple est obtenu en prenant $a = -7$ et $b = 10$.

- Restreinte à \mathbb{N}^* , l'antisymétrie devient

$$a|b \wedge b|a \implies a = b.$$

- Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $1|a$, $-1|a$, $a|a$ et $-a|a$.

En effet nous avons :

$$a = 1 \times a = (-1) \times (-a).$$

Nous en déduisons : $\{-1, 1, -a, a\} \subset \text{Div}(a)$.

Proposition 20.3 – Lien entre $|$ et \leq

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.

$$b|a \implies |b| \leq |a|.$$

Démonstration

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.

Si $b|a$, alors il existe $q \in \mathbb{Z}^*$ tel que $a = bq$. Puisque $q \in \mathbb{Z}^*$, nous avons $|q| \geq 1$.

Il en résulte

$$|b||q| \geq |b|,$$

soit

$$|bq| \geq |b|.$$

Nous en concluons

$$|b| \leq |a|.$$

Remarque

- Lorsque $b = 0$, la proposition est fausse.
- Restreinte à \mathbb{N}^* , cette proposition devient : $b|a \implies b \leq a$.
- La réciproque est évidemment fausse. Un contre-exemple est $a = 12$ et $b = -7$. En effet nous avons $-7 \leq 12$ mais -7 ne divise pas 12.

Proposition 20.4 – Divisibilité et combinaison linéaire

Soient a , b et c trois entiers relatifs avec $c \neq 0$.

Si $c|a$ et $c|b$, alors, quels que soient les entiers relatifs α et β ,

$$c|\alpha a + \beta b.$$

En particulier, nous avons : $c|a + b$ et $c|a - b$.

Démonstration

Soient $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}^*$ tels que $c|a$ et $c|b$.

Il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$ tels que $a = ck$ et $b = ck'$.

Étant donnés deux entiers relatifs α et β , nous obtenons

$$\alpha a + \beta b = (ck) \times \alpha + (ck') \times \beta = c(\alpha \times k + \beta \times k').$$

Puisque $\alpha k + \beta k' \in \mathbb{Z}$, nous en concluons

$$c|\alpha a + \beta b.$$

En particulier, lorsque $\alpha = \beta = 1$, nous avons $c|a + b$.

En particulier, lorsque $\alpha = 1$ et $\beta = -1$, nous avons $c|a - b$.

Remarque

Comme souvent en arithmétique, la réciproque de cette proposition est fausse. Le contre-exemple qui suit le justifie. $5|4 + 6$ mais 5 ne divise ni 4, ni 6.

Exemple 20.3

Pour illustrer une utilisation de cette proposition, nous considérons deux entiers relatifs $a = 6n + 5$ et $b = 7n + 6$, avec $n \in \mathbb{Z}$.

Nous souhaitons déterminer dans \mathbb{Z} l'ensemble des diviseurs communs à a et b .

Si d est un diviseur commun à a et b , alors

$$d|a \quad \text{et} \quad d|b.$$

En observant que

$$6b - 7a = 6(7n + 6) - 7(6n + 5) = 1,$$

nous en déduisons, par combinaison linéaire,

$$d|6b - 7a, \quad \text{c'est-à-dire} \quad d|1$$

ce qui induit

$$d = -1 \quad \text{ou} \quad d = 1.$$

Il en résulte que

$$\text{Div}(a) \cap \text{Div}(b) \subset \{-1, 1\}.$$

Puisque l'inclusion réciproque est toujours vraie, nous en concluons

$$\text{Div}(a) \cap \text{Div}(b) = \{-1, 1\}.$$

Dans ce cas, on dit que a et b sont premiers entre eux.

Proposition 20.5

Soient $a \in \mathbb{Z}^*$, $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$.
Si $a|b$, alors $a|bc$ et $ac|bc$.

Démonstration

Soient $a \in \mathbb{Z}^*$, $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$.
Nous supposons que $a|b$.
Il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $b = aq$.
Nous en déduisons

$$bc = (aq)c = a(qc) = q(ac), \quad \text{avec } qc \in \mathbb{Z},$$

ce qui prouve que $a|bc$ et $ac|bc$.

Remarque

- La réciproque de $(a|b \implies a|bc)$ est fausse, ce qui est justifié par le contre exemple qui suit.
Pour $a = 6$, $b = 4$ et $c = 9$, nous avons $6|4 \times 9$ mais 6 ne divise ni 4, ni 9.
- Lorsque $c \in \mathbb{Z}^*$, la réciproque de $(a|b \implies ac|bc)$ est vraie.

20.2 Division euclidienne dans \mathbb{Z}

Exemple 20.4

- À l'école primaire, effectuer la division de 58 par 7 donne un quotient égal à 8 et un reste égal à 2, ce qui signifie

$$58 = 7 \times 8 + 2, \quad \text{avec } 2 < 7.$$

- De la même façon diviser 99 par 11 donne un quotient égal à 9 et un reste égal à 0, c'est à dire

$$99 = 11 \times 9 + 0, \quad \text{avec } 0 < 11.$$

- Par extension à \mathbb{Z} , nous avons

$$-58 = 7 \times (-8) - 2 = 7 \times (-9) + 5, \quad \text{avec } 5 < 7,$$

ce qui signifie que la division de -58 par 7 restitue un quotient égal à -9 et un reste égal à 5 .

20.2.1 Division euclidienne dans \mathbb{N}

Préalablement, nous rappelons l'axiome du plus petit élément (proposition 6.2).

Proposition 20.6 – Axiome du plus petit élément

Toute partie B non vide de \mathbb{N} admet un plus petit élément p , ce qui signifie

$$\exists p \in \mathbb{N}, \forall b \in B, \quad (b \geq p) \wedge (p \in B).$$

Lemme 20.7 – Lemme d'Archimède

Quels que soient les entiers naturels x et y , avec $x \neq 0$, il existe un entier naturel n tel que

$$nx > y.$$

Démonstration

Soient $x \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{N}$.

D'une part nous avons $x \geq 1$, ce qui implique

$$xy \geq y.$$

D'autre part, l'inégalité $y + 1 > y$ implique

$$x(y + 1) > xy.$$

Ainsi nous obtenons la double inégalité

$$y \leq xy < x(y + 1),$$

ce qui induit, en posant $n = y + 1$,

$$nx > y.$$

Remarque

- Ce résultat est encore vrai lorsque $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$. On dit que \mathbb{R} est archimédien.
- Ce lemme est faux si x est nul.

Proposition 20.8

Quels que soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, il existe un couple unique d'entiers naturels (q, r) satisfaisant à

$$a = bq + r, \quad \text{avec } 0 \leq r < b.$$

Démonstration

- **Existence du couple (q, r) .**

Étant donnés $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, nous considérons le sous-ensemble E de \mathbb{N} défini par

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid bn > a\}.$$

— Le lemme d'Archimède assure que $E \neq \emptyset$.

En appliquant l'axiome du « plus petit élément », nous affirmons que E , qui est une partie non vide de \mathbb{N} , admet un plus petit élément q' .

Nous observons tout d'abord que $q' \geq 1$.

En effet, si $q' = 0$, alors on aurait, puisque $q' \in E$,

$$b \times 0 > a,$$

ce qui contredit $a \in \mathbb{N}$.

Ainsi, en posant $q = q' - 1$, nous avons

$$q \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad q < q'.$$

— Puisque q' est le plus petit élément de E , nous en déduisons d'une part

$$q \notin E, \quad \text{c'est-à-dire } bq \leq a,$$

et d'autre part

$$q' \in E, \text{ c'est-à-dire } bq' > a,$$

soit

$$b(q + 1) > a.$$

— De ces deux inégalités, il résulte que

$$bq \leq a < b(q + 1),$$

ce qui implique

$$bq - bq \leq a - bq < b(q + 1) - bq, \quad \text{soit } 0 \leq a - bq < b.$$

En posant $r = a - bq$, nous obtenons

$$a = bq + r, \quad \text{avec } 0 \leq r < b.$$

- **Unicité du couple (q, r) .**

Nous supposons qu'il existe deux couples distincts d'entiers naturels (q, r) et (q', r') tels que

$$a = bq + r, \quad \text{avec } 0 \leq r < b,$$

$$a = bq' + r', \quad \text{avec } 0 \leq r' < b.$$

Nous en déduisons

$$bq + r = bq' + r', \quad \text{c'est-à-dire } b(q - q') = r' - r.$$

Or, $0 \leq r < b$ implique $-b < -r \leq 0$.

Des deux encadrements,

$$0 \leq r' < b \quad \text{et} \quad -b < -r \leq 0,$$

par addition membres à membres, nous déduisons

$$-b < r' - r < b, \quad \text{soit } -b < b(q' - q) < b.$$

En divisant les trois membres cette double inégalité par $b > 0$, il vient

$$-1 < q' - q < 1.$$

Il en résulte

$$q' - q \in \mathbb{Z} \cap]-1, 1[,$$

ce qui implique

$$q' - q = 0, \quad \text{soit } q' = q.$$

L'unicité du quotient q est ainsi acquise.

En reportant dans l'égalité $b(q - q') = r' - r$, nous obtenons

$$r' - r = 0, \quad \text{soit } r' = r.$$

L'unicité du reste est ainsi prouvée.

Remarque

- Si $a < b$, alors nous avons

$$a = b \times 0 + a, \quad \text{avec } 0 \leq a < b.$$

Nous en concluons dans ce cas que la division euclidienne de a par b restitue un quotient $q = 0$ et un reste $r = a$.

- Si $a = b$, alors nous avons

$$a = a \times 1 + 0,$$

c'est-à-dire a divise a .

Nous en concluons dans ce cas que la division euclidienne de a par a restitue un quotient $q = 1$ et un reste $r = 0$.

- La double inégalité $0 \leq r < b$ signifie également

$$r \in \{0, 1, 2, \dots, b-1\}, \quad \text{c'est-à-dire } r \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket.$$

Exemple 20.5

Soit n un entier naturel.

La division euclidienne de n par 2 restitue par disjonction deux restes qui sont $r = 0$ ou $r = 1$.

Ainsi il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que

$$n = 2q \text{ (entier pair) ou } n = 2q + 1 \text{ (entier impair).}$$

Cela signifie que la division euclidienne d'un entier naturel par 2 induit une partition de \mathbb{N} qui est constituée par l'union disjointe de l'ensemble des entiers naturels pairs avec l'ensemble des entiers naturels impairs.

Exemple 20.6

Effectuer la division euclidienne de n par 3 restitue par disjonction trois restes : $r = 0$ ou $r = 1$ ou $r = 2$.

Ainsi il est possible de définir une partition de \mathbb{N} constituée de trois sous-ensembles disjoints deux à deux qui sont

$$\{3q \mid q \in \mathbb{N}\} \quad \text{ou} \quad \{3q + 1 \mid q \in \mathbb{N}\} \quad \text{ou} \quad \{3q + 2 \mid q \in \mathbb{N}\}.$$

Remarque

Plus généralement, lors de la division euclidienne d'un entier naturel n par un entier naturel b non nul, nous définissons une partition de \mathbb{N} en b sous-ensembles disjoints deux à deux, qui sont classifiés selon leur reste dans cette division par b .

Nous emploierons souvent cette remarque dans les exercices qui utilisent la division euclidienne. L'exemple qui suit en est une illustration.

Exemple 20.7

Nous montrons, quel que soit l'entier naturel n , que l'entier

$$u_n = n(n + 1)(2n + 1)$$

est divisible par 3, puis par 6.

- En effectuant la division euclidienne de n par 3, nous distinguons par disjonction trois cas selon que le reste est égal à 0 ou 1 ou 2.

1^{er} cas : $r = 0$, c'est-à-dire $n = 3q$, avec $q \in \mathbb{N}$.

Il vient

$$u_n = u_{3q} = 3q(3q + 1)(6q + 1) = 3k, \quad \text{avec } k = q(3q + 1)(6q + 1) \in \mathbb{N},$$

ce qui justifie que $3 \mid u_{3q}$.

2^e cas : $r = 1$, c'est-à-dire $n = 3q + 1$, avec $q \in \mathbb{N}$.

Il vient

$$u_n = u_{3q+1} = (3q + 1)(3q + 2)(6q + 3) = 3(3q + 1)(3q + 2)(2q + 1) = 3k',$$

avec $k' = (3q + 1)(3q + 2)(2q + 1) \in \mathbb{N}$, ce qui justifie que $3 \mid u_{3q+1}$.

3^e cas : $r = 2$, c'est-à-dire $n = 3q + 2$, avec $q \in \mathbb{N}$.

Il vient

$$u_n = u_{3q+2} = (3q+2)(3q+3)(6q+5) = 3(3q+2)(q+1)(6q+5) = 3k'',$$

avec $k'' = (3q+2)(q+1)(6q+5) \in \mathbb{N}$, ce qui justifie que $3|u_{3q+2}$.

Nous en concluons que, pour tout entier naturel n , $3|u_n$.

- De plus, les entiers n et $n+1$ sont consécutifs, par suite l'un des deux est pair, ce qui justifie que u_n est divisible par 2.

Par conséquent il existe deux entiers naturels a et b tels que

$$u_n = 3a \quad \text{et} \quad u_n = 2b.$$

En observant que

$$u_n = 3u_n - 2u_n,$$

nous obtenons

$$u_n = 3 \times 2b - 2 \times 3a = 6(b-a), \quad \text{avec } b-a \in \mathbb{Z},$$

ce qui prouve que, pour tout entier naturel n , $6|u_n$.

Algorithme Nous disposons en Python des procédures suivantes :

- `a%b` qui restitue le reste de la division euclidienne de a par b .
- `a//b` qui restitue le quotient de la division euclidienne de a par b .

Ceci permet de proposer la fonction Python

```

1 def divisioneucli(a,b) :
2     q=a//b
3     r=a%b
4     return(q,r)

```

Par exemple, nous obtenons

```

>>> divisioneucli(2022,53)
(38, 8).

```

20.2.2 Division d'un entier relatif par un entier naturel non nul

Exemple 20.8

Nous avons vu en introduction la division euclidienne de -58 par 7 déduite de celle de 58 par 7 .

Nous donnons un autre exemple pour aider à la compréhension de la preuve qui suit.

Nous souhaitons effectuer la division euclidienne de -37 par 11 .

En effectuant la division de 37 par 11 , nous obtenons

$$37 = 11 \times 3 + 4, \quad \text{avec } 4 < 11,$$

ce qui donne

$$-37 = 11 \times (-3) - 4.$$

Puisque $-4 < 0$, pour restituer un reste r satisfaisant à $0 \leq r < 11$, nous procédons de la façon suivante

$$-37 = 11 \times (-3) - 11 + 11 - 4 = 11 \times (-4) + 7.$$

Ainsi la division euclidienne de -37 par 11 restitue un quotient égal à -4 , un reste égal à 7 , avec $0 \leq 7 < 11$.

Proposition 20.9

Quels que soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, il existe un couple unique d'entiers relatifs (q, r) satisfaisant à

$$a = bq + r, \quad \text{avec } 0 \leq r < b.$$

Démonstration

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

Nous distinguons par disjonction deux cas, selon que $a \geq 0$ ou $a < 0$.

1^{er} cas : $a \geq 0$, c'est-à-dire $a \in \mathbb{N}$.

Nous sommes dans le cas de la proposition précédente 20.8. Le résultat est ainsi démontré.

2^e cas : $a < 0$, c'est-à-dire $a \in \mathbb{Z}_-^*$.

• **Existence du couple (q, r) .**

En effectuant la division euclidienne de $-a \in \mathbb{N}^*$ par l'entier naturel b non nul, nous savons qu'il existe un unique couple $(q', r') \in \mathbb{N}^2$ tel que

$$-a = bq' + r', \quad \text{avec } 0 \leq r' < b.$$

Nous distinguons à nouveau par disjonction deux sous-cas.

— Si $r' = 0$, alors nous avons

$$a = b(-q'),$$

ce qui donne, en posant $q = -q'$,

$$a = bq, \quad \text{avec } q \in \mathbb{Z}.$$

Nous avons ainsi justifié que le couple $(q, 0)$ convient.

— Si $r' > 0$, alors il vient

$$a = b(-q') - r', \quad \text{avec } -b < -r' < 0.$$

Nous en déduisons

$$a = b(-q') - b + b - r' = b(-q' - 1) + b - r'.$$

En posant $q = -q' - 1$ et $r = b - r'$, nous obtenons d'une part,

$$a = bq + r$$

et d'autre part,

$$0 < b - r' < b, \quad \text{soit } 0 < r < b.$$

L'étude de ces deux sous-cas établit, lorsque $a < 0$, l'existence d'un couple (q, r) d'entiers relatifs satisfaisant à

$$a = bq + r, \quad \text{avec } 0 \leq r < b.$$

• **Unicité de r et q .**

C'est la même preuve que dans le cas où a est un entier naturel.

Exemple 20.9

Nous prouvons que tout entier relatif n qui n'est pas divisible par 3 a un carré qui donne 1 pour reste dans sa division euclidienne par 3.

En effet, un entier relatif n non divisible par 3 restitue comme reste $r = 1$ ou $r = 2$ dans sa division par 3, ce qui donne

$$n = 3q + r, \quad \text{avec } q \in \mathbb{Z} \text{ et } r = 1 \text{ ou } r = 2.$$

Nous en déduisons

$$n^2 = (3q + r)^2 = 9q^2 + 6qr + r^2$$

— Si $r = 1$, alors nous avons

$$n^2 = 9q^2 + 6q + 1 = 3(3q^2 + 2q) + 1,$$

ce qui donne, en posant $k = 3q^2 + 2q \in \mathbb{Z}$,

$$n^2 = 3k + 1.$$

— Si $r = 2$, alors nous avons

$$n^2 = 9q^2 + 12q + 4 = 9q^2 + 12q + 3 + 1 = 3(3q^2 + 4q + 1) + 1,$$

ce qui donne, en posant $k' = 3q^2 + 4q + 1 \in \mathbb{Z}$,

$$n^2 = 3k' + 1.$$

Nous en concluons que si n est non divisible par 3, alors la division euclidienne de n^2 par 3 restitue un reste égal à 1.

20.2.3 Division d'un entier relatif par un entier relatif non nul

Proposition 20.10

Quels que soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$, il existe un couple unique d'entiers relatifs (q, r) satisfaisant à

$$a = bq + r, \quad \text{avec } 0 \leq r < |b|.$$

Démonstration

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.

Par disjonction, nous distinguons deux cas selon que $b > 0$ ou $b < 0$.

1^{er} cas : $b > 0$, c'est-à-dire $b \in \mathbb{N}^*$.

Nous pouvons appliquer la proposition précédente puisque dans ce cas

$$|b| = b.$$

2^e cas : $b < 0$.

Puisque $-b \in \mathbb{N}^*$, la division euclidienne de a par $-b$ assure l'existence d'un entier relatif q' et d'un entier relatif r tels que

$$a = (-b)q' + r = b(-q') + r, \quad \text{avec } 0 \leq r < -b.$$

Puisque $b < 0$, nous avons $|b| = -b$.

De plus, en posant $q = -q'$, nous obtenons

$$a = bq + r, \quad \text{avec } q \in \mathbb{Z} \text{ et } 0 \leq r < |b|.$$

L'existence du couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ est ainsi acquise et son unicité se prouve comme précédemment.

Exemple 20.10

Nous divisons -202 par -13 .

Nous commençons par effectuer la division euclidienne de 202 par 13 , ce qui donne

$$202 = 13 \times 15 + 7, \quad \text{avec } 7 < 13.$$

Nous en déduisons

$$-202 = (-13) \times 15 - 7 = (-13) \times 15 - 13 + 13 - 7 = (-13) \times 16 + 6.$$

Puisque $6 < |-13|$, nous en concluons que la division euclidienne de -202 par -13 restitue un quotient $q = 16$ et un reste $r = 6$.

Remarque

La double inégalité $0 \leq r < |b|$ signifie également

$$r \in \{0, 1, 2, \dots, |b| - 1\}, \quad \text{c'est-à-dire } r \in \llbracket 0, |b| - 1 \rrbracket.$$

Exemple 20.11

Tout entier relatif a , dans la division euclidienne par -4 , peut s'écrire par disjonction

$$(a = -4q) \vee (a = -4q + 1) \vee (a = -4q + 2) \vee (a = -4q + 3), \quad \text{avec } q \in \mathbb{Z},$$

ce qui définit une partition de \mathbb{Z} .

Chapitre 21

Congruences dans \mathbb{Z}

Sommaire

21.1 Définition – Caractérisation	390
21.1.1 Définition – Notations	390
21.2 Propriétés algébriques d’une congruence	394
21.2.1 Une relation d’équivalence	394
21.2.2 Compatibilité de l’addition avec une congruence	396
21.2.3 Compatibilité de la multiplication avec une congruence	398
21.2.4 Exposants et congruences	401

La notion de congruence met en relation deux entiers et propose de raisonner, non pas sur ces deux nombres, mais sur leurs restes dans la division euclidienne de ces derniers par un entier fixé appelé modulo.

Ce concept introduit un nouveau langage arithmétique qui permet d’aborder notamment la divisibilité par un modulo de nombres très grands. C’est cette idée qui est largement développée en cryptographie.

Bien que connue depuis le V^e siècle en Inde et le XIII^e siècle en Chine, cette notion fut pour la première fois étudiée rigoureusement par le mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss (1777–1855).

Nous lui devons notamment la structuration algébrique de la congruence, ce qui signifie, avec un modulo donné, de pouvoir additionner, multiplier et par conséquent d’exponentialiser.

La congruence est aujourd’hui couramment utilisée en théorie des nombres. Elle représente le fondement d’une branche des mathématiques appelée arithmétique modulaire.

21.1 Définition – Caractérisation

21.1.1 Définition – Notations

Définition 21.1

Soient n un entier naturel non nul, a et b deux entiers relatifs.

On dit que a et b sont *congrus modulo n* si, et seulement si, a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n .

Lorsque a et b sont congrus modulo n , nous notons indifféremment

$$a \equiv b \pmod{n} \quad \text{ou} \quad a \equiv b [n].$$

Remarque

L'égalité modulo n est aussi appelée relation de congruence modulo n dans l'ensemble des entiers relatifs.

Exemple 21.1

Nous proposons comme 1^{er} exemple une application issue de la vie courante puisqu'il s'agit du n° INSEE ou n° de sécurité sociale. Ce numéro est composé de treize chiffres et d'une clef de vérification constituée de deux chiffres.

Par exemple nous considérons le numéro suivant

2 62 02 19 223 078 89,

ce qui signifie qu'il s'agit d'une personne du sexe féminin (2) qui est née en 1962 (62), au mois de février (02), dans le département de la Corrèze (19), dans une commune dont le code est 223, le numéro de l'acte de naissance qui lui a été attribué est 078, 89 étant la clef de vérification.

En considérant le reste r de la division euclidienne de $N = 2620219223078$ par 97, cette clef est déterminée par l'égalité

$$\text{clef} = 97 - r.$$

Dans le langage des congruences, nous avons

$$N \equiv r [97]$$

En modifiant l'algorithme donnée au paragraphe 20.2.1, nous obtenons

```

1 def clefinsee(N):
2     r=N%97
3     clef=97-r
4     return(clef)

>>> clefinsee(2620219223078)
89
```

Proposition 21.1 – Caractérisation d'une congruence

Soient n un entier naturel non nul, a et b deux entiers relatifs.
Les deux propositions suivantes sont équivalentes

$$\begin{aligned} (i) \quad & a \equiv b [n] \\ (ii) \quad & n \mid a - b \end{aligned}$$

Démonstration

Soient n un entier naturel non nul, a et b deux entiers relatifs.

$$(i) \Rightarrow (ii)$$

Si $a \equiv b [n]$, alors a et b ont le même reste r dans la division euclidienne par n .
Par suite, il existe deux entiers relatifs q et q' tels que

$$a = nq + r \quad \text{et} \quad b = nq' + r,$$

avec $r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Par soustraction membres à membres de ces deux égalités, il vient

$$a - b = n(q - q'), \text{ avec } q - q' \in \mathbb{Z},$$

ce qui prouve que $n \mid a - b$.

$$(ii) \Rightarrow (i)$$

Si $a - b$ est divisible par n , alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$a - b = nk, \quad \text{c'est-à-dire } a = nk + b.$$

Effectuons la division euclidienne de b par n .

Il existe $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{N}$ tels que

$$b = nq + r, \quad \text{avec } r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket.$$

Nous en déduisons

$$a = nk + nq + r = n(k + q) + r, \quad \text{avec } r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket.$$

Puisque $k + q \in \mathbb{Z}$, r est le reste de la division euclidienne de a par n .

Ainsi les entiers a et b ont le même reste r dans la division euclidienne par n .

Nous en concluons que $a \equiv b [n]$.

Exemple 21.2

- ▷ $-1 \equiv 1 [2]$ car $-1 - 1 = -2$ est divisible par 2.
- ▷ $3 \equiv 0 [3]$ car $3 - 0 = 3$ est divisible par 3.
- ▷ $73 \equiv 52 [7]$ car $73 - 52 = 21$ est divisible par 7.
- ▷ Quel que soit l'entier relatif n , $(2n - 1)^2 \equiv 1 [4]$.

En effet, pour tout entier relatif n , nous avons

$$(2n - 1)^2 - 1 = (2n - 1 - 1)(2n - 1 + 1) = 4n(n - 1) = 4q,$$

avec $q = n(n - 1) \in \mathbb{Z}$, ce qui établit que

$$4 \mid (2n - 1)^2 - 1, \text{ c'est-à-dire } (2n - 1)^2 \equiv 1 \pmod{4}.$$

Nous pouvons aussi observer que $n - 1$ et n sont deux entiers consécutifs donc l'un des deux est pair, ce qui justifie que

$$8 \mid (2n - 1)^2 - 1, \text{ c'est-à-dire } (2n - 1)^2 \equiv 1 \pmod{8}.$$

▷ Quels que soient les entiers relatifs a et b ,

$$(a + b)^3 \equiv a^3 + b^3 \pmod{3}$$

En effet, pour tous les entiers relatifs a et b , nous avons

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

ce qui implique

$$(a + b)^3 - (a^3 + b^3) = 3ab(a + b) = 3q,$$

avec $q = ab(a + b) \in \mathbb{Z}$, ce qui prouve que 3 divise $(a + b)^3 - (a^3 + b^3)$.

Nous en concluons

$$(a + b)^3 \equiv a^3 + b^3 \pmod{3}$$

Proposition 21.2 – Lien avec la division euclidienne

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, a un entier relatif et r un entier naturel.

Les deux propositions suivantes sont équivalentes.

- (i) $a \equiv r \pmod{n}$ et $r \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$,
- (ii) r est le reste de la division euclidienne de a par n .

Démonstration

$$(i) \Rightarrow (ii)$$

Si $a \equiv r \pmod{n}$ et $r \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, alors il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$a - r = nq, \text{ soit } a = nq + r,$$

ce qui justifie que r est le reste de la division euclidienne de a par n .

$$(ii) \Rightarrow (i)$$

Si r est le reste de la division euclidienne de a par n , alors

$$a = nq + r, \text{ avec } q \in \mathbb{Z} \text{ et } r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket,$$

ce qui établit

$$a - r = nq,$$

c'est-à-dire

$$a \equiv r [n] \quad \text{et} \quad r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket.$$

Exemple 21.3

La division euclidienne de 2022 par 19 restitue un reste égal à 8 car $2022 = 19 \times 106 + 8$, donc

$$2022 \equiv 8 [19].$$

Remarque

- Sans la condition $r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, l'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ est fausse. En effet, $52 \equiv 45 [7]$ et 45 n'est pourtant pas le reste de la division euclidienne de 52 par 7.
- La division euclidienne de tout entier relatif a par $n \in \mathbb{N}^*$, induit par disjonction

$$a \equiv 0 [n] \vee a \equiv 1 [n] \vee a \equiv 2 [n] \vee \dots \vee a \equiv n-1 [n],$$

ce qui définit une partition de \mathbb{Z} .

Proposition 21.3 – Lien avec la divisibilité

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a un entier relatif. Nous disposons de l'équivalence

$$n \mid a \iff a \equiv 0 [n].$$

Démonstration

C'est immédiat car

$$n \mid a \iff n \mid a - 0 \iff a \equiv 0 [n].$$

Remarque – Cas particuliers et extensions

- Cas particulier : $n = 0$.
Quels que soient les entiers relatifs a et b , nous avons :

$$a \equiv b [0] \iff a - b = q \times 0 = 0 \iff a = b.$$

Par conséquent, la congruence modulo 0 est l'égalité usuelle dans \mathbb{Z} .

- Cas particulier : $n = 1$.

Quels que soient les entiers relatifs a et b , nous avons

$$a \equiv b[1] \iff a - b = q \times 1 = q, \text{ avec } q \in \mathbb{Z}$$

ce qui signifie

$$a \equiv b[1] \iff a - b \in \mathbb{Z}.$$

- Congruences dans \mathbb{R} .

Un réel ω étant donné, par extension, deux réels x et y sont congrus modulo ω , noté $x \equiv y [\omega]$, si et seulement si

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \quad x - y = k\omega.$$

Lorsque $\omega = 2\pi$, on retrouve la congruence modulo 2π de la trigonométrie.

- Classes modulo n .

L'entier naturel r étant le reste de la division de $a \in \mathbb{Z}$ par $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle classe de r modulo n , le sous-ensemble de \mathbb{Z} , noté \tilde{r} , défini par

$$\tilde{r} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv r [n]\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = r + kn, k \in \mathbb{Z}\}.$$

En désignant par \mathbb{Z}_n l'ensemble des classes modulo n , nous obtenons

$$\mathbb{Z}_n = \{\tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{2}, \dots, \widetilde{n-1}\}.$$

▷ Par exemple, modulo 2, il existe deux classes,

$$\tilde{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 0 [2]\}, \text{ c'est l'ensemble des entiers pairs.}$$

$$\tilde{1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 1 [2]\}, \text{ c'est l'ensemble des entiers impairs.}$$

21.2 Propriétés algébriques d'une congruence

21.2.1 Une relation d'équivalence

Proposition 21.4

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, a , b et c trois entiers relatifs.

La relation congru modulo n est une relation d'équivalence, ce qui signifie

- $a \equiv a [n]$ (réflexivité),
- $a \equiv b [n] \implies b \equiv a [n]$ (symétrie),
- $a \equiv b [n] \wedge b \equiv c [n] \implies a \equiv c [n]$ (transitivité).

Démonstration— Réflexivité

Soit $a \in \mathbb{Z}$. Nous avons : $a - a = 0 = 0 \times n$, ce qui justifie

$$a \equiv a [n].$$

— Symétrie

Soient a et b deux entiers relatifs. Si $a \equiv b [n]$, alors il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que

$$a - b = nq,$$

ce qui implique

$$b - a = n(-q) = nq', \quad \text{avec } q' = -q \in \mathbb{Z},$$

ce qui prouve

$$b \equiv a [n].$$

— Transitivité

Soient a, b et c trois entiers relatifs. Si $a \equiv b [n]$ et $b \equiv c [n]$, alors il existe deux entiers relatifs q et q' tels que

$$a - b = nq \quad \text{et} \quad b - c = nq',$$

ce qui implique, par addition membres à membres,

$$a - c = n(q + q') = nq'', \quad \text{avec } q'' = q + q' \in \mathbb{Z}.$$

Nous en concluons

$$a \equiv c [n].$$

Remarque

- La réciproque de la propriété de symétrie est vraie.
- La réciproque de la propriété de transitivité est fausse.
En effet, nous avons $52 \equiv 12 [10]$ mais 52 n'est pas congru à 7 modulo 10 et 7 n'est pas congru à 12 modulo 10.

21.2.2 Compatibilité de l'addition avec une congruence

Proposition 21.5

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, a, b, c et d quatre entiers relatifs.

L'addition dans \mathbb{Z} est compatible avec la congruence modulo n , ce qui signifie

$$a \equiv c [n] \wedge b \equiv d [n] \implies a + b \equiv c + d [n].$$

Démonstration

Si $a \equiv c [n]$ et $b \equiv d [n]$, alors

$$n \mid a - c \quad \text{et} \quad n \mid b - d,$$

ce qui implique, par addition

$$n \mid (a - c) + (b - d), \quad \text{c'est-à-dire} \quad n \mid (a + b) - (c + d).$$

Nous en concluons

$$a + b \equiv c + d [n].$$

Remarque

La réciproque de cette proposition est fausse. En effet :

$$23 \equiv 3 [5], \quad \text{soit} \quad 20 + 3 \equiv 2 + 1 [5],$$

mais ni 20 est congru à 2, ni 3 est congru à 1, modulo 5.

Exemple 21.4 – Addition modulo 2

Nous avons

$$0 \equiv 0 [2] \quad \text{et} \quad 1 \equiv 1 [2],$$

ce qui induit

$$0 + 0 \equiv 0 [2], \quad 1 + 0 \equiv 1 [2], \quad 0 + 1 \equiv 1 [2].$$

Par contre l'addition $1 + 1$ n'est pas sans surprise car

$$1 + 1 \equiv 2 [2],$$

mais $2 \equiv 0 [2]$, donc par transitivité du modulo 2, il vient

$$1 + 1 \equiv 0 [2].$$

Ceci nous amène à définir la table d'addition de \mathbb{Z}_2 :

+	$\tilde{0}$	$\tilde{1}$
$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{1}$
$\tilde{1}$	$\tilde{1}$	$\tilde{0}$

Nous pouvons de la même façon définir la table d'addition de \mathbb{Z}_3 ,

+	$\tilde{0}$	$\tilde{1}$	$\tilde{2}$
$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{1}$	$\tilde{2}$
$\tilde{1}$	$\tilde{1}$	$\tilde{2}$	$\tilde{0}$
$\tilde{2}$	$\tilde{2}$	$\tilde{0}$	$\tilde{1}$

Proposition 21.6 – Simplification

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, a , b et c trois entiers relatifs. Nous disposons de l'équivalence

$$a + c \equiv b + c [n] \iff a \equiv b [n].$$

Démonstration

Nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} a + c \equiv b + c [n] &\iff (a + c) - (b + c) \equiv 0 [n] \\ &\iff a - b \equiv 0 [n] \\ &\iff a \equiv b [n]. \end{aligned}$$

Proposition 21.7 – Compatibilité avec la soustraction

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, a , b , c et d quatre entiers relatifs. La soustraction dans \mathbb{Z} est compatible avec la congruence modulo n , ce qui signifie

$$a \equiv c [n] \wedge b \equiv d [n] \implies a - b \equiv c - d [n].$$

Démonstration

Si $a \equiv c [n]$ et $b \equiv d [n]$, alors

$$n \mid a - c \quad \text{et} \quad n \mid b - d,$$

ce qui implique, par soustraction

$$n \mid (a - c) - (b - d), \quad \text{c'est-à-dire } n \mid (a - b) - (c - d).$$

Nous en concluons

$$a - b \equiv c - d [n].$$

Proposition 21.8 – Simplification

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, a , b et c trois entiers relatifs. Nous disposons de l'équivalence :

$$a - c \equiv b - c [n] \iff a \equiv b [n].$$

Démonstration

Nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} a - c \equiv b - c [n] &\iff (a - c) - (b - c) \equiv 0 [n] \\ &\iff a - b \equiv 0 [n] \\ &\iff a \equiv b [n]. \end{aligned}$$

Exemple 21.5 – Une équation du 1^{er} degré, modulo 8

Il s'agit de résoudre dans \mathbb{Z} , l'équation

$$x + 5 \equiv 3 [8].$$

En utilisant la dernière proposition de simplification, il vient

$$\begin{aligned} x + 5 \equiv 3 [8] &\iff x + 5 - 5 \equiv 3 - 5 [8] \\ &\iff x \equiv -2 [8]. \end{aligned}$$

Puisque $-2 \equiv 6 [8]$, par transitivité du modulo 8, nous en déduisons

$$x \equiv 6 [8].$$

Réciproquement, si $x \equiv 6 [8]$, alors il vient

$$x + 5 \equiv 11 [8],$$

ce qui implique, puisque $11 \equiv 3 [8]$,

$$x + 5 \equiv 3 [8].$$

En désignant par S l'ensemble des solutions de cette équation, nous en concluons

$$S = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 6 [8]\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 6 + 8k, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Nous observons que cette équation du 1^{er} degré, modulo 8, admet une infinité de solutions qui est strictement incluse dans \mathbb{Z} .

21.2.3 Compatibilité de la multiplication avec une congruence**Proposition 21.9**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, a , b , c et d quatre entiers relatifs. La multiplication dans \mathbb{Z} est compatible avec la congruence modulo n , ce qui signifie

$$a \equiv c [n] \wedge b \equiv d [n] \implies a \times b \equiv c \times d [n].$$

Démonstration

Si $a \equiv c [n]$ et $b \equiv d [n]$, alors

$$n \text{ divise } a - c \text{ et } n \text{ divise } b - d,$$

ce qui implique, par combinaison linéaire,

$$n \mid b(a - c) + c(b - d), \quad \text{c'est-à-dire } n \mid ab - cd.$$

Nous en concluons

$$ab \equiv cd [n].$$

Remarque

La réciproque de cette proposition est fausse. En effet, $30 \equiv 0 [15]$, soit $6 \times 5 \equiv 0 [15]$, mais ni 6, ni 5 ne sont congrus à 0 modulo 15.

Exemple 21.6

- Nous avons

$$2 \times 4 \equiv 8 [8].$$

Puisque $8 \equiv 0 [8]$, nous en déduisons

$$2 \times 4 \equiv 0 [8].$$

Ainsi, modulo 8, le produit de deux entiers non nuls peut être nul. Dans la multiplication modulo 8, on dit que 2 et 4 sont des diviseurs de 0.

- Plus généralement, la table de valeurs qui suit,

$x \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	(mod 8)
$2x \equiv$	0	2	4	6	0	2	4	6	(mod 8)

justifie que modulo 8, l'entier 4 est la seule solution non nulle de l'équation

$$2x \equiv 0 [8].$$

- Si $x \equiv 2 [5]$ alors $3x \equiv 6 [5]$. Puisque $6 \equiv 1 [5]$, nous en déduisons $3x \equiv 1 [5]$. Dans ce cas, on dit que 3 a pour inverse 2 modulo 5.

Corollaire 21.10

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, a , b et c trois entiers relatifs. Nous avons

$$a \equiv b [n] \implies a \times c \equiv b \times c [n].$$

Démonstration

Nous appliquons la proposition précédente, en supposant

$$a \equiv b [n] \quad \text{et} \quad c \equiv c [n],$$

ce qui implique

$$a \times c \equiv b \times c [n].$$

Remarque

- La réciproque de ce corollaire est fausse. En effet :

$$27 \equiv 24 [3], \text{ c'est-à-dire } 3 \times 9 \equiv 3 \times 8 [3],$$

cependant 9 n'est pas congrus à 8 modulo 3 .

- La remarque précédente indique qu'on ne peut pas diviser par un entier relatif non nul les deux membres d'une congruence.

Ainsi, nous donnons dans les exemples qui suivent une méthode pour résoudre des équations de la forme $ax \equiv b [n]$ qui repose sur des tableaux de valeurs des restes modulo n .

Dans le chapitre 22, nous proposerons une méthode générale pour résoudre cette équation sous certaines conditions.

Exemple 21.7

Nous résolvons dans \mathbb{Z} l'équation $5x \equiv 1 [3]$.

Modulo 3, par disjonction, nous obtenons ci-dessous le tableau des valeurs de $5x$, lorsque x est un reste de la division euclidienne par 3.

$x \equiv$	0	1	2	(mod3)
$5x \equiv$	0	2	1	(mod3)

Il en résulte

$$5x \equiv 1 [3] \iff x \equiv 2 [3].$$

Nous en concluons que l'ensemble des solutions de cette équation est

$$S = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 2 [3]\} = \{2 + 3k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemple 21.8

Nous résolvons dans \mathbb{Z} l'équation $10x + 2 \equiv 3 [5]$.

Modulo 5, par disjonction, nous obtenons le tableau des valeurs de $10x + 2$, lorsque x est un reste de la division euclidienne par 5.

$x \equiv$	0	1	2	3	4	(mod5)
$10x + 2 \equiv$	2	2	2	2	2	(mod5)

Il résulte de ce tableau que, pour tout entier relatif x , l'entier $10x + 2$ n'est jamais

congru à 3 modulo 5.

Nous en concluons que cette équation n'a pas de solution.

Exemple 21.9

Selon le contexte, un tableau de valeurs n'est pas l'unique méthode à employer.

Ainsi, pour justifier l'implication

$$n \equiv 3 [7] \implies 7 \mid 3n + 5,$$

nous donnons deux autres méthodes.

▷ Méthode 1.

Si $n \equiv 3 [7]$, alors nous en déduisons successivement

$$3n \equiv 9 [7]$$

$$3n + 5 \equiv 14 [7]$$

Or, $14 \equiv 0 [7]$, ce qui donne par transitivité du modulo 7 ,

$$3n + 5 \equiv 0 [7].$$

Nous en concluons que 7 divise $3n + 5$.

▷ Méthode 2.

Si $n \equiv 3 [7]$, alors 7 divise $n - 3$. De plus 7 divise 14 . Par combinaison linéaire, nous en déduisons

$$7 \mid 3(n - 3) + 14, \text{ c'est-à-dire } 7 \text{ divise } 3n + 5.$$

▷ Par contre, pour étudier la réciproque, nous n'avons à disposition pour l'instant que la méthode du tableau des valeurs de $3n + 5$ modulo 7.

21.2.4 Exposants et congruences

Proposition 21.11

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, a, b deux entiers relatifs et $p \geq 2$ un entier naturel. Nous disposons de l'implication

$$a \equiv b [n] \implies a^p \equiv b^p [n].$$

Démonstration

our cette preuve, nous utilisons la factorisation

$$a^p - b^p = (a - b) \sum_{k=0}^{p-1} a^{p-1-k} b^k.$$

Si $a \equiv b [n]$, alors n divise $a - b$, donc il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que

$$a - b = nq.$$

Nous en déduisons

$$a^p - b^p = nq \sum_{k=0}^{p-1} a^{p-1-k} b^k = n \left(q \times \sum_{k=0}^{p-1} a^{p-1-k} b^k \right)$$

ce qui donne, en posant $q' = q \times \sum_{k=0}^{p-1} a^{p-1-k} b^k$,

$$a^p - b^p = nq', \quad \text{avec } q' \in \mathbb{Z}.$$

Par conséquent, n divise $a^p - b^p$, ce qui établit

$$a^p \equiv b^p [n].$$

Remarque

- Cette proposition peut également être prouvée par récurrence sur l'entier $p \geq 2$.
- La réciproque de cette propriété est fausse. En effet :

$$25 \equiv 16 [3], \quad \text{c'est-à-dire } 5^2 \equiv 4^2 \times 8 [3],$$

cependant 5 n'est pas congru à 4 modulo 3.

- Ce résultat permet d'étudier la divisibilité de nombres entiers très grands. Pour cela, des congruences égales à 1 ou -1 sont souvent utilisées. Les exemples qui suivent en sont une illustration.

Exemple 21.10

Nous souhaitons déterminer le reste de la division euclidienne de l'entier 2021^{2022} par 5.

En remarquant que

$$2021 \equiv 1 [5]$$

il vient

$$2021^{2022} \equiv 1^{2022} [5], \quad \text{soit } 2021^{2022} \equiv 1 [5]$$

Nous en concluons que $r = 1$ est le reste de la division euclidienne de 2021^{2022} par 5.

Exemple 21.11

Nous cherchons à présent le reste de la division euclidienne de l'entier 2022^{2021} par 5.

C'est moins immédiat que dans l'exemple précédent. Nous observons que

$$2022 \equiv 2 [5],$$

ce qui implique

$$2022^2 \equiv 4 [5],$$

soit

$$2022^2 \equiv -1 \pmod{5} \quad \text{car } 4 \equiv -1 \pmod{5}.$$

Puisque

$$2022^{2021} = 2022^{2020} \times 2022 = (2022^2)^{1010} \times 2022,$$

nous en déduisons

$$2022^{2021} \equiv (-1)^{1010} \times 2 \pmod{5}, \quad \text{c'est-à-dire } 2022^{2021} \equiv 2 \pmod{5}$$

Nous en concluons que $r = 2$ est le reste de la division euclidienne de 2022^{2021} par 5.

Chapitre 22

PGCD de deux entiers

Sommaire

22.1 Plus grand commun diviseur	407
22.1.1 Un exemple – Trois remarques préalables	407
22.1.2 Définition du plus grand commun diviseur de deux entiers . . .	408
22.1.3 Premières propriétés du pgcd	408
22.1.4 Algorithme d’Euclide	413
22.1.5 Propriété multiplicative du pgcd	417
22.2 Entiers premiers entre eux	419
22.2.1 Définition – caractérisation du pgcd de deux entiers	419
22.2.2 Caractérisation de deux entiers premiers entre eux	420
22.2.3 Caractérisation de Bezout du pgcd de deux entiers	424
22.3 Le théorème de Gauss	427
22.3.1 Le théorème	427
22.3.2 Résolution de l’équation $ax \equiv b[n]$	430
22.4 Équation diophantienne $ax + by = c$	431

Le concept de plus grand commun diviseur de deux entiers apparaît dès l’Antiquité dans les éléments d’Euclide (environ 300 avant notre ère). Euclide y décrit le premier algorithme connu en utilisant une méthode itérative par soustraction qui est remplacée de nos jours par des divisions euclidiennes successives.

En s’appuyant sur cet algorithme, nous présentons deux grands résultats de l’arithmétique qui sont :

- le théorème de Bezout¹ qui caractérise deux nombres premiers entre eux. En fait, ce théorème est dû à Bachet de Méziriac² et Bezout a ensuite généralisé ce résultat aux polynômes.
- le théorème de Gauss³ qui permet notamment de résoudre
 - des équations diophantiennes du premier degré à deux inconnues,
 - des systèmes de congruences à une inconnue ; c’est le problème des restes chinois.

1. Mathématicien français : 1730–1783

2. Mathématicien français : 1581–1638

3. Mathématicien allemand : 1777–1855

Nous disposons ainsi des outils qui permettent d'aborder des questions de cryptographie anciennes comme le chiffrement affine ou plus actuelles, comme le chiffrement de Hill (1929) ou le système R.S.A. (1978).

22.1 Plus grand commun diviseur

22.1.1 Un exemple – Trois remarques préalables

Exemple 22.1

Dans \mathbb{Z} , nous avons

$$\text{Div}(63) = \{-63, -21, -9, -7, -3, -1, 1, 3, 7, 9, 21, 63\}$$

$$\text{Div}(45) = \{-45, -15, -9, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 9, 15, 45\}$$

Par suite, nous obtenons

$$\text{Div}(63) \cap \text{Div}(45) = \{-9, -3, -1, 1, 3, 9\}$$

Nous observons que 9 est le plus grand élément de $\text{Div}(63) \cap \text{Div}(45)$, c'est le « plus grand commun diviseur » de 63 et 45.

Ce dernier est noté

$$\text{pgcd}(63, 45) = 9.$$

Nous remarquons que 9 est également le plus grand élément de $\text{Div}(63) \cap \text{Div}(45) \cap \mathbb{N}$.

Remarque

Nous faisons trois remarques préalables.

- Étant donnés deux entiers relatifs non nuls, nous savons

$$\text{Div}(a) = \text{Div}(|a|) \quad \text{et} \quad \text{Div}(b) = \text{Div}(|b|),$$

ce qui donne

$$\text{Div}(a) \cap \text{Div}(b) = \text{Div}(|a|) \cap \text{Div}(|b|),$$

ce qui va nous permettre de définir $\text{pgcd}(a, b)$ en se restreignant à $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

- Nous savons que $\text{Div}(0) = \mathbb{Z}$ donc, quel que soit $a \in \mathbb{N}^*$,

$$\text{Div}(0) \cap \text{Div}(a) = \text{Div}(a).$$

- Comme dans \mathbb{N} , nous disposons dans \mathbb{Z} de l'axiome qui suit :

Toute partie non vide et majorée de \mathbb{Z} admet un plus grand élément.

22.1.2 Définition du plus grand commun diviseur de deux entiers

Proposition 22.1

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
L'ensemble des diviseurs communs à a et b admet un plus grand élément.

Démonstration

Nous appliquons l'axiome du plus grand élément à $\text{Div}(a) \cap \text{Div}(b) \subset \mathbb{Z}$.

D'une part $\text{Div}(a) \cap \text{Div}(b) \neq \emptyset$ car $1 \in \text{Div}(a) \cap \text{Div}(b)$.

D'autre part, quel que soit $x \in \text{Div}(a) \cap \text{Div}(b)$, nous avons

$$x \leq |x| \leq a \quad \text{et} \quad x \leq |x| \leq b$$

ce qui implique

$$x \leq \min(a, b)$$

Par conséquent, $\text{Div}(a) \cap \text{Div}(b)$ est majoré par $\min(a, b)$. Nous en concluons que $\text{Div}(a) \cap \text{Div}(b)$ admet un plus grand élément.

Définition 22.1 – PGCD

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

Le *plus grand commun diviseur* de a et b , noté $\text{pgcd}(a, b)$, est le plus grand élément de $\text{Div}(a) \cap \text{Div}(b)$.

Remarque

- Si $a \in \mathbb{Z}^*$ et $b \in \mathbb{Z}^*$, puisque $\text{Div}(a) \cap \text{Div}(b) = \text{Div}(|a|) \cap \text{Div}(|b|)$, alors nous obtenons

$$\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(|a|, |b|)$$

- $\text{pgcd}(a, b)$ est parfois noté $a \wedge b$.

22.1.3 Premières propriétés du pgcd

Proposition 22.2

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

Nous disposons des trois propriétés suivantes :

- $\text{pgcd}(a, 0) = a$.
- $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, a)$.
- $\text{pgcd}(a, b) \geq 1$.

Démonstration

Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

- Nous avons

$$\text{Div}(a) \cap \text{Div}(0) = \text{Div}(a) \cap \mathbb{Z} = \text{Div}(a),$$

ce qui justifie, par unicité du plus grand élément,

$$\text{pgcd}(a, 0) = a.$$

- Nous savons que

$$\text{Div}(a) \cap \text{Div}(b) = \text{Div}(b) \cap \text{Div}(a),$$

ce qui justifie, par unicité du plus grand élément,

$$\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, a).$$

- Puisque $1 \in \text{Div}(a) \cap \text{Div}(b)$ et par définition du plus grand élément de $\text{Div}(a) \cap \text{Div}(b)$, nous obtenons

$$\text{pgcd}(a, b) \geq 1.$$

Proposition 22.3

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

Si a divise b , alors nous disposons des deux propriétés suivantes :

- $\text{Div}(a) \cap \text{Div}(b) = \text{Div}(a)$,
- $\text{pgcd}(a, b) = a$.

Démonstration

Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

- Nous supposons que a divise b et nous prouvons préalablement

$$\text{Div}(a) \subset \text{Div}(b)$$

Si $x \in \text{Div}(a)$, alors nous avons $x \mid a$.

Puisque $a \mid b$, par transitivité de la relation divise, nous en déduisons

$$x \mid b, \quad \text{c'est-à-dire } x \in \text{Div}(b)$$

Nous avons ainsi établi

$$\text{Div}(a) \subset \text{Div}(b).$$

Il en résulte

$$\text{Div}(a) \cap \text{Div}(b) = \text{Div}(a)$$

- Par unicité du plus grand élément, si $a \mid b$, alors nous en déduisons

$$\text{pgcd}(a, b) = a$$

Corollaire 22.4

Quel que soit $a \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$\text{pgcd}(a, a) = a \quad \text{et} \quad \text{pgcd}(a, 1) = 1$$

Démonstration

Soit $a \in \mathbb{N}^*$, puisque $a \mid a$ et $1 \mid a$, en appliquant la proposition précédente, il vient

$$\text{pgcd}(a, a) = a \quad \text{et} \quad \text{pgcd}(a, 1) = 1$$

Exemple 22.2

Soit un entier $n \geq 2$.

Puisque $n^3 - n = n(n+1)(n-1)$, nous en déduisons

$$n \mid n^3 - n, n+1 \mid n^3 - n \quad \text{et} \quad n-1 \mid n^3 - n,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \text{pgcd}(n^3 - n, n) &= n \\ \text{pgcd}(n^3 - n, n+1) &= n+1 \\ \text{pgcd}(n^3 - n, n-1) &= n-1 \end{aligned}$$

Proposition 22.5 – Lemme d’Euclide

Soient a et b deux entiers naturels non nuls et r le reste de la division euclidienne de a par b . Nous disposons des deux propriétés suivantes :

- $\text{Div}(a) \cap \text{Div}(b) = \text{Div}(b) \cap \text{Div}(r)$
- $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r)$

Démonstration

La division euclidienne de $a \in \mathbb{N}^*$ par $b \in \mathbb{N}^*$ de reste r induit l’existence d’un entier naturel q tel que

$$a = bq + r, \quad \text{avec } 0 \leq r < b$$

Pour démontrer que $\text{Div}(a) \cap \text{Div}(b) = \text{Div}(b) \cap \text{Div}(r)$ et $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r)$, nous procédons par disjonction selon que $r = 0$ ou $r > 0$.

1^{er} cas : $r = 0$.

Dans ce cas, nous avons

$$a = bq, \quad \text{c’est-à-dire } b \mid a,$$

ce qui induit, en appliquant la proposition précédente,

$$\text{Div}(a) \cap \text{Div}(b) = \text{Div}(b).$$

Puisque $\text{Div}(r) = \text{Div}(0) = \mathbb{Z}$, nous en déduisons

$$\text{Div}(a) \cap \text{Div}(b) = \text{Div}(b) \cap \text{Div}(0).$$

Par unicité du plus grand élément, nous obtenons

$$\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(b,0) = b.$$

2^e cas : $r > 0$.

- Pour prouver $\text{Div}(a) \cap \text{Div}(b) = \text{Div}(b) \cap \text{Div}(r)$, nous procédons par double inclusion.

▷ Si un entier $d \in \text{Div}(a) \cap \text{Div}(b)$, alors nous avons

$$d \mid a \quad \text{et} \quad d \mid b,$$

ce qui implique par combinaison linéaire

$$d \mid a - bq, \text{ c'est-à-dire } d \mid r.$$

Puisque $d \mid b$, nous obtenons

$$d \in \text{Div}(b) \cap \text{Div}(r)$$

ce qui établit

$$\text{Div}(a) \cap \text{Div}(b) \subset \text{Div}(b) \cap \text{Div}(r)$$

▷ Réciproquement, soit $d \in \text{Div}(b) \cap \text{Div}(r)$, alors nous avons

$$d \mid b \quad \text{et} \quad d \mid r$$

ce qui implique par combinaison linéaire :

$$d \mid bq + r, \text{ c'est-à-dire } d \mid a.$$

Puisque $d \mid b$, nous obtenons

$$d \in \text{Div}(a) \cap \text{Div}(b)$$

ce qui établit

$$\text{Div}(b) \cap \text{Div}(r) \subset \text{Div}(a) \cap \text{Div}(b)$$

Ces deux inclusions justifient l'égalité

$$\text{Div}(a) \cap \text{Div}(b) = \text{Div}(b) \cap \text{Div}(r)$$

- Par unicité du plus grand élément de chacun de ces deux ensembles, nous en concluons

$$\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(b,r)$$

Remarque

- La contrainte $0 < r < b$ n'intervient pas dans la preuve du second cas. La proposition reste donc vraie lorsque q et $r > 0$ sont deux entiers naturels qui satisfont à l'égalité $a = bq + r$.
- Le lemme d'Euclide est un résultat important car il permet de traiter la plupart des questions au sujet du pgcd. C'est la « pierre angulaire » de la mise en place de l'algorithme d'Euclide.
Nous illustrons cette dernière remarque par les exemples qui suivent.

Exemple 22.3

Nous déterminons $\text{pgcd}(230, 22)$, puis $\text{pgcd}(-230, 22)$.

- Calcul de $\text{pgcd}(230, 22)$.

En effectuant la division de 230 par 22, il vient

$$230 = 22 \times 10 + 10$$

ce qui donne, en appliquant le lemme d'Euclide,

$$\text{pgcd}(230, 22) = \text{pgcd}(22, 10)$$

▷ En réitérant ce lemme pour le $\text{pgcd}(22, 10)$, nous obtenons

$$22 = 10 \times 2 + 2, \text{ c'est-à-dire } \text{pgcd}(22, 10) = \text{pgcd}(10, 2).$$

▷ Puisque 2 divise 10, il vient

$$\text{pgcd}(10, 2) = 2.$$

Nous en concluons

$$\text{pgcd}(230, 22) = \text{pgcd}(22, 10) = \text{pgcd}(10, 2) = 2.$$

Cette itération du lemme d'Euclide est un premier exemple qui illustre l'algorithme d'Euclide.

- Calcul de $\text{pgcd}(-230, 22)$.

Nous avons

$$\text{pgcd}(-230, 22) = \text{pgcd}(|-230|, 22) = \text{pgcd}(230, 22) = 2.$$

Exemple 22.4

Soient n et p deux entiers naturels non nuls premiers entre eux, c'est-à-dire tels que $\text{pgcd}(n, p) = 1$.

Nous déterminons $\text{pgcd}(n + p, n)$, puis nous en déduisons $\text{pgcd}(3n + 2p, n + p)$ et $\text{pgcd}(4n + 3p, 3n + 2p)$.

▷ Puisque $n + p = n \times 1 + p$, en appliquant le lemme d'Euclide, il vient

$$\text{pgcd}(n + p, n) = \text{pgcd}(n, p) = 1$$

ce qui prouve que les entiers naturels $n + p$ et n sont premiers entre eux.

▷ Nous avons

$$3n + 2p = (n + p) \times 2 + n$$

ce qui donne, en appliquant à nouveau le lemme

$$\text{pgcd}(3n + 2p, n + p) = \text{pgcd}(n + p, n) = \text{pgcd}(n, p) = 1$$

ce qui prouve les entiers naturels $3n + 2p$ et $n + p$ sont premiers entre eux.

▷ Nous avons

$$4n + 3p = (3n + 2p) \times 1 + n + p$$

ce qui donne, en appliquant à nouveau le lemme d'Euclide,

$$\text{pgcd}(4n + 3p, 3n + 2p) = \text{pgcd}(3n + 2p, n + p) = \text{pgcd}(n + p, n) = \text{pgcd}(n, p) = 1,$$

ce qui prouve que les entiers naturels $4n + 3p$ et $3n + 2p$ sont aussi premiers entre eux.

22.1.4 Algorithme d'Euclide

Nous avons observé dans l'exemple 22.3 que le $\text{pgcd}(230, 22) = 2$ est atteint par itération du lemme d'Euclide jusqu'à l'obtention de 2 qui est le dernier reste non nul.

Nous généralisons ce processus dans la proposition qui suit.

Proposition 22.6 – Algorithme d'Euclide

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

En effectuant la division euclidienne de a par b , le $\text{pgcd}(a, b)$ est le dernier reste non nul de l'itération de la division euclidienne du diviseur et du reste de la division précédente.

Démonstration

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

Étape 1. La division euclidienne de a par b restitue deux entiers naturels q_1 et r_1 tels que

$$a = bq_1 + r_1, \quad \text{avec } 0 \leq r_1 < b$$

▷ Si $r_1 = 0$, alors b divise a , ce qui donne

$$\text{pgcd}(a, b) = b$$

▷ Si $r_1 > 0$, alors l'application du lemme d'Euclide donne

$$\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r_1)$$

Étape 2. La division euclidienne de b par r_1 restitue deux entiers naturels q_2 et r_2 tels que

$$b = r_1 q_2 + r_2, \quad \text{avec } 0 \leq r_2 < r_1$$

▷ Si $r_2 = 0$, alors r_1 divise b , ce qui donne

$$\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r_1) = r_1$$

▷ Si $r_2 > 0$, alors l'application du lemme d'Euclide donne

$$\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r_1) = \text{pgcd}(r_1, r_2)$$

Étape 3. En réitérant ce processus, nous construisons une suite d'entiers naturels $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de premier terme $r_0 = b$, qui satisfait à :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad r_{n-1} = r_n q_{n+1} + r_{n+1},$$

avec $0 \leq r_{n+1} < r_n$.

La suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels décroissante strictement telle que

$$b > r_1 > r_2 > \cdots > r_n > r_{n+1} \cdots \geq 0.$$

- Nous démontrons que cette suite est nulle à partir d'un certain rang, ce qui signifie qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n > k, \quad r_n = 0.$$

Nous considérons la partie E de \mathbb{N} définie par

$$E = \{r_n \in \mathbb{N} \mid r_n > 0\}$$

Nous observons que $E \neq \emptyset$ car $r_0 = b$ appartient à E .

Par conséquent E étant une partie non vide de \mathbb{N} , elle admet un plus petit élément $r_k > 0$.

Plus précisément, il existe un entier naturel k tel que $r_k \in E$. Or $r_{k+1} < r_k$, d'où

$$r_{k+1} \notin E,$$

c'est-à-dire

$$r_k > 0 \quad \text{et} \quad r_{k+1} = 0.$$

Nous en concluons que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir du rang $k + 1$.

- En appliquant le lemme d'Euclide jusqu'au rang k , nous obtenons

$$\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r_1) = \text{pgcd}(r_1, r_2) = \cdots = \text{pgcd}(r_k, 0) = r_k.$$

Corollaire 22.7

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Nous disposons de la propriété suivante :

tout diviseur commun à a et b est un diviseur de leur pgcd.

En d'autres termes, si $d = \text{pgcd}(a, b)$, alors nous avons

$$\text{Div}(a) \cap \text{Div}(b) = \text{Div}(d).$$

Démonstration

Avec les notations de la démonstration précédente, si $d = \text{pgcd}(a, b)$, alors nous obtenons :

$$\begin{aligned} \text{Div}(a) \cap \text{Div}(b) &= \text{Div}(b) \cap \text{Div}(r_1) = \text{Div}(r_1) \cap \text{Div}(r_2) \\ &= \dots = \text{Div}(r_k) \cap \text{Div}(0) = \text{Div}(d). \end{aligned}$$

Exemple 22.5

Nous illustrons ce corollaire en montrant, quels que soient les entiers naturels a et b non nuls, l'égalité

$$\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(5a + 3b, 2a + b).$$

Nous posons

$$x = 5a + 3b, \quad y = 2a + b, \quad d = \text{pgcd}(a, b) \text{ et } d' = \text{pgcd}(x, y).$$

▷ D'une part, nous avons

$$d \mid a \quad \text{et} \quad d \mid b,$$

ce qui implique, par combinaison linéaire,

$$d \mid 5a + 3b \quad \text{et} \quad d \mid 2a + b, \quad \text{c'est-à-dire } d \mid x \text{ et } d \mid y.$$

En appliquant le corollaire précédent, nous en déduisons

$$d \mid d'$$

▷ D'autre part, des égalités

$$\begin{cases} 5a + 3b &= x \\ 2a + b &= y \end{cases}$$

nous déduisons

$$\begin{cases} a &= 3y - x \\ b &= 2x - 5y \end{cases}$$

Par conséquent, puisque

$$d' \mid x \quad \text{et} \quad d' \mid y,$$

nous obtenons, par combinaison linéaire,

$$d' \mid 3y - x \quad \text{et} \quad d' \mid 2x - 5y, \quad \text{c'est-à-dire} \quad d' \mid a \quad \text{et} \quad d' \mid b.$$

En appliquant à nouveau le corollaire précédent, nous en déduisons

$$d' \mid d.$$

▷ Comme

$$d \mid d' \quad \text{et} \quad d' \mid d,$$

la relation divise étant antisymétrique, nous en concluons

$$d = d'.$$

▷ Nous pouvons également justifier que $d' = d$, en employant le lemme d'Euclide. En effet, nous avons $5a + 3b = 2(2a + b) + a + b$, donc

$$d' = \text{pgcd}(5a + 3b, 2a + b) = \text{pgcd}(2a + b, a + b).$$

Mais, $2a + b = (a + b) \times 1 + a$, ce qui donne

$$d' = \text{pgcd}(a + b, a).$$

Enfin, $a + b = a \times 1 + b$, ce qui implique

$$d' = \text{pgcd}(a, b) = d.$$

Algorithme (script Python de l'algorithme d'Euclide) Nous proposons la fonction Python suivante :

```

1  def pgcd(a,b):
2      while b!=0:
3          r=a%b
4          a=b
5          b=r
6      return a

```

Par exemple, nous obtenons

```
>>> pgcd(7119,4977)
63
```

```
>>> pgcd(2235282,32718)
42
```

22.1.5 Propriété multiplicative du pgcd

Proposition 22.8

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
 Quel que soit $k \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$\text{pgcd}(ka, kb) = k \times \text{pgcd}(a, b).$$

Démonstration

Soient a , b et k trois entiers naturels non nuls.
 Nous posons

$$d = \text{pgcd}(a, b) \quad \text{et} \quad d' = \text{pgcd}(ka, kb).$$

▷ D'une part, puisque $d \mid a$ et $d \mid b$, nous en déduisons

$$kd \mid ka \quad \text{et} \quad kd \mid kb,$$

ce qui implique, en utilisant le corollaire 22.7,

$$kd \mid d'.$$

Par suite, il existe $k' \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$d' = k'(kd) = k'kd.$$

▷ D'autre part, comme $d' \mid ka$ et $d' \mid kb$, nous en déduisons, puisque $d' = k'kd$,

$$k'kd \mid ka \quad \text{et} \quad k'kd \mid kb,$$

ce qui donne, après simplification par $k \in \mathbb{N}^*$,

$$k'd \mid a \quad \text{et} \quad k'd \mid b.$$

En appliquant à nouveau le corollaire 22.7, nous obtenons

$$k'd \mid d.$$

Par conséquent, il existe $\alpha \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$d = \alpha(k'd) = \alpha k'd.$$

Après simplification par $d \geq 1$, il vient

$$\alpha k' = 1,$$

ce qui implique, dans \mathbb{N}^* ,

$$k' = \alpha = 1.$$

En reportant la valeur $k' = 1$ dans l'égalité $d' = k'kd$, nous en concluons

$$d' = kd,$$

c'est-à-dire

$$\text{pgcd}(ka, kb) = k \times \text{pgcd}(a, b).$$

Corollaire 22.9

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.

Quel que soit $k \in \mathbb{Z}^*$, nous avons

$$\text{pgcd}(ka, kb) = |k| \times \text{pgcd}(a, b).$$

Démonstration

Puisque, quels que soient les entiers relatifs a et b non nuls,

$$\text{pgcd}(|a|, |b|) = \text{pgcd}(a, b),$$

nous en déduisons, en appliquant la proposition 22.8,

$$\begin{aligned} \text{pgcd}(ka, kb) &= \text{pgcd}(|ka|, |kb|) = \text{pgcd}(|k||a|, |k||b|) = |k| \times \text{pgcd}(|a|, |b|) \\ &= |k| \times \text{pgcd}(a, b). \end{aligned}$$

Exemple 22.6

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Nous calculons

$$\text{pgcd}(np, n(2p + 1))$$

En appliquant la proposition précédente, nous avons

$$\text{pgcd}(np, n(2p + 1)) = n \times \text{pgcd}(p, 2p + 1).$$

Puisque $2p + 1 = 2 \times p + 1$, en utilisant le lemme d'Euclide, nous obtenons

$$\text{pgcd}(p, 2p + 1) = \text{pgcd}(2p + 1, p) = \text{pgcd}(p, 1) = 1$$

Ainsi les entiers p et $2p + 1$ sont premiers entre eux et nous en concluons

$$\text{pgcd}(np, n(2p + 1)) = n$$

22.2 Entiers premiers entre eux

22.2.1 Définition – caractérisation du pgcd de deux entiers

Définition 22.2

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.

Ces deux entiers sont premiers entre eux si et seulement si $\text{pgcd}(a,b) = 1$.

Remarque

— Les entiers a et b sont premiers entre eux si et seulement si

$$\text{Div}(a) \cap \text{Div}(b) = \{-1, 1\}.$$

— Deux nombres premiers sont premiers entre eux mais la réciproque est fausse.

Contre-exemple : 15 et 8 sont premiers entre eux mais ne sont pas premiers.

— Nous rappelons qu'une fraction $\frac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{Z}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$ est irréductible si et seulement si a et b sont premiers entre eux.

Proposition 22.10 – Caractérisation du pgcd

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.

Quel que soit $d \in \mathbb{N}^*$, les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) $d = \text{pgcd}(a,b)$,
- (ii) il existe deux entiers relatifs non nuls a' et b' , premiers entre eux, tels que

$$a = da' \quad \text{et} \quad b = db'$$

Démonstration

$(i) \Rightarrow (ii)$

Si $d = \text{pgcd}(a,b)$ alors, il existe $a' \in \mathbb{Z}^*$ et $b' \in \mathbb{Z}^*$ tels que

$$a = da' \quad \text{et} \quad b = db'$$

Nous en déduisons, en appliquant le corollaire du paragraphe précédent avec $d \geq 1$,

$$d = \text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(da',db') = d \times \text{pgcd}(a',b')$$

ce qui implique, après simplification par $d \geq 1$,

$$\text{pgcd}(a',b') = 1$$

Par conséquent les entiers a' et b' tels que $a = da'$ et $b = db'$, sont premiers entre eux.

$(ii) \Rightarrow (i)$

En supposant que (ii) est vraie, nous obtenons

$$\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(da',db') = d \times \text{pgcd}(a',b') = d \times 1 = d$$

Exemple 22.7

Nous résolvons dans \mathbb{N}^2 le système

$$\begin{cases} x + y = 144 \\ \text{pgcd}(x, y) = 18 \end{cases}$$

En utilisant la proposition précédente, nous obtenons

$$\begin{cases} x + y = 144 \\ x = 18x', y = 18y' \\ \text{pgcd}(x', y') = 1 \end{cases}$$

ce qui induit le système d'inconnues x' et y'

$$\begin{cases} 18(x' + y') = 144 \\ \text{pgcd}(x', y') = 1 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x' + y' = 8 \\ \text{pgcd}(x', y') = 1 \end{cases}$$

Puisque x' et y' sont premiers entre eux, l'ensemble S' des solutions de ce système est

$$S' = \{(1, 7), (3, 5), (5, 3), (7, 1)\}$$

Nous en déduisons que l'ensemble S des solutions du système initial est inclus dans

$$\{(18, 126), (54, 90), (90, 54), (126, 18)\}$$

Réciproquement, nous vérifions que chacun de ces quatre couples est solution du système, ce qui permet de conclure,

$$S = \{(18, 126), (54, 90), (90, 54), (126, 18)\}$$

22.2.2 Caractérisation de deux entiers premiers entre eux**Théorème 22.11 – Théorème de Bezout ^a**

^a. Mathématicien français : 1730–1783

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) a et b sont premiers entre eux
- (ii) il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

Démonstration

Nous commençons par le plus facile, c'est-à-dire $(ii) \Rightarrow (i)$.

Nous supposons que (ii) est vraie et soit $d = \text{pgcd}(a, b)$.

Puisque $d \mid a$ et $d \mid b$, par combinaison linéaire, nous en déduisons

$$d \mid au + bv, \text{ c'est-à-dire } d \mid 1,$$

ce qui implique, comme $d \geq 1$,

$$d = 1.$$

Ainsi nous avons prouvé que a et b sont premiers entre eux.

$(i) \Rightarrow (ii)$

Nous supposons que a et b sont premiers entre eux.

▷ Nous considérons le sous-ensemble E de \mathbb{N} défini par

$$E = \{au + bv \in \mathbb{N}^* / u \in \mathbb{Z}, v \in \mathbb{Z}\}.$$

Nous avons $a = a \times 1 + b \times 0$ donc $a \in E$, ce qui prouve

$$E \neq \emptyset$$

Par suite, E étant une partie non vide de \mathbb{N} , elle admet un plus petit élément $m \in \mathbb{N}^*$, ce qui induit deux informations,

$$[1] : \forall x \in E, x \geq m,$$

$[2] : \text{il existe un couple } (u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } m = au_0 + bv_0.$

▷ La division euclidienne de a par $m \in \mathbb{N}^*$ restitue un quotient $q \in \mathbb{Z}$ et un reste r satisfaisant à

$$a = mq + r, \text{ avec } 0 \leq r < m.$$

Si $r > 0$, en utilisant la condition $[2]$, alors il vient successivement

$$\begin{aligned} r &= a - mq \\ &= a - (au_0 + bv_0)q \\ &= a(1 - u_0q) + b(-v_0q) \end{aligned}$$

En posant $u = 1 - u_0q$ et $v = -v_0q$, nous obtenons

$$r = au + bv, \text{ avec } u \in \mathbb{Z} \text{ et } v \in \mathbb{Z}$$

ce qui implique :

$$r \in E \text{ et } r < m.$$

Cela est contradictoire avec la condition $[1]$.

Ainsi, par l'absurde, nous avons prouvé que

$$r = 0, \text{ ce qui signifie que } m \text{ divise } a.$$

▷ En effectuant la division euclidienne de b par $m \in \mathbb{N}^*$, nous prouvons de la même façon

m divise b .

▷ Il en résulte que m divise $\text{pgcd}(a,b) = 1$, ce qui établit que $m = 1$.
Ainsi nous avons démontré que si a et b sont premiers entre eux, alors il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

Remarque

— Il n'y a pas unicité du couple (u,v) d'entiers relatifs.

Par exemple 5 et 3 sont premiers entre eux et nous avons simultanément

$$5 \times (-1) + 3 \times 2 = 1, \text{ le couple } (-1, 2) \text{ convient.}$$

$$5 \times 2 + 3 \times (-3) = 1, \text{ le couple } (2, -3) \text{ convient également.}$$

— Le théorème de Bezout assure l'existence d'au moins une solution implicite de l'équation $au + bv = 1$ lorsque a et b sont premiers entre eux.

En remarquant que

$$au = 1 - bv, \text{ c'est-à-dire } au \equiv 1[b],$$

nous donnons dans l'algorithme qui suit une méthode qui restitue explicitement une solution particulière de l'équation $au + bv = 1$.

Algorithme À l'aide de l'algorithme d'Euclide, nous vérifions que les deux entiers a et b sont premiers entre eux, ce qui assure l'existence de deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

Nous en déduisons que $au \equiv 1[b]$, ce qui permet de proposer un algorithme qui calcule les restes de la division euclidienne des multiples successifs de a par b jusqu'à obtenir un reste égal à 1.

Ainsi, nous donnons le script Python :

```

1  def pgcd(a,b):
2      while b!=0:
3          r=a%b
4          a=b
5          b=r
6      return a
7  def bezout(a,b):
8      if pgcd(a,b)!=1:
9          return "non,premiers"
10     else :
11         u=1
12         c=a
13         while a%b!=1:
14             u=u+1
15             a=u*c
16             v=int((1-a)/b)
17     return u,v

```

Par exemple pour $a = 2022$ et $b = 557$ qui sont premiers entre eux, nous obtenons

>>> $u=73, v=-265$

Nous vérifions

$$2022 \times 73 + 557 \times (-265) = 1$$

Proposition 22.12 – Entiers premiers entre eux et multiplication

Soient a, b et c trois entiers relatifs non nuls.

Si a est premier avec b et avec c , alors a est premier avec $b \times c$.

Démonstration

Si a est premier avec b et avec c , alors en appliquant le théorème de Bezout, nous avons

$$\begin{aligned} au + bv &= 1, & \text{avec } (u, v) \in \mathbb{Z}^2 \\ au' + cv' &= 1, & \text{avec } (u', v') \in \mathbb{Z}^2 \end{aligned}$$

Il en résulte

$$(au + bv)(au' + cv') = 1$$

ce qui donne

$$a^2uu' + acuv' + abvu' + bcvv' = 1, \text{ soit } a(auu' + cuv' + bvu') + bc(vv') = 1.$$

Nous en déduisons, en posant $u'' = auu' + cuv' + bvu' \in \mathbb{Z}$ et $v'' = vv' \in \mathbb{Z}$,

$$au'' + bcv'' = 1$$

ce qui établit, en appliquant à nouveau la caractérisation de Bezout, que

$$a \text{ est premier avec } b \times c.$$

Exemple 22.8 – Somme et produit de deux entiers premiers entre eux

Soient a et b deux entiers non nuls premiers entre eux.

Nous démontrons $a + b$ et ab sont premiers entre eux et pour changer, nous utilisons la notation \wedge du pgcd.

Puisque $a \wedge b = 1$, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = 1$.

▷ D'une part, nous en déduisons

$$au + bv = 1 \Leftrightarrow au + av - av + bv = 1 \Leftrightarrow (a + b)v + a(u - v) = 1,$$

ce qui donne, en posant $u' = u - v \in \mathbb{Z}$,

$$(a + b)v + au' = 1$$

Ainsi nous avons prouvé

$$(a + b) \wedge a = 1$$

▷ D'autre part, nous avons

$$au + bv = 1 \Leftrightarrow au + bu - bu + bv = 1 \Leftrightarrow (a + b)u + b(v - u) = 1,$$

ce qui donne, en posant $v' = v - u \in \mathbb{Z}$,

$$(a + b)u + bv' = 1$$

ce qui établit

$$(a + b) \wedge b = 1$$

▷ En appliquant la proposition précédente, nous en concluons

$$(a + b) \wedge ab = 1$$

22.2.3 Caractérisation de Bezout du pgcd de deux entiers

Proposition 22.13

Soient a, b deux entiers relatifs non nuls et $d \in \mathbb{N}^*$.

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) $d = \text{pgcd}(a, b)$,
- (ii) d divise a et b et il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = d$.

Démonstration

(i) \Rightarrow (ii)

Nous supposons que $d = \text{pgcd}(a, b)$.

En appliquant la proposition qui caractérise le pgcd du paragraphe 7.2.1, il existe deux entiers relatifs a' et b' premiers entre eux tels que

$$a = da' \quad \text{et} \quad b = db'$$

Puisque $\text{pgcd}(a', b') = 1$, nous appliquons le théorème de Bezout, ce qui donne

$$\text{il existe } (u, v) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tels que } a'u + b'v = 1.$$

Après multiplication des deux membres de cette égalité par $d \geq 1$, nous obtenons

$$(da')u + (db')v = d$$

c'est-à-dire

$$au + bv = d$$

(ii) \Rightarrow (i)

Nous supposons que $d|a, d|b$ et qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = d$.

Nous désignons par d' le $\text{pgcd}(a, b)$.

D'une part, puisque $d' | a$ et $d' | b$, nous en déduisons par combinaison linéaire

$$d' \mid au + bv, \text{ soit } d' \mid d,$$

ce qui implique

$$d' \leq d$$

D'autre part, puisque $d \in \text{Div}(a) \cap \text{Div}(b)$ et comme d' est le plus grand élément de $\text{Div}(a) \cap \text{Div}(b)$, nous en déduisons

$$d \leq d'$$

Par antisymétrie de la relation \leq dans \mathbb{N}^* , nous en concluons

$$d = d' = \text{pgcd}(a, b)$$

Remarque

— Le couple $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ n'est pas unique.

Par exemple $3 = \text{pgcd}(33, 6)$ et nous obtenons simultanément

$$3 = 33 \times 1 + 6 \times (-5) = 33 \times (-1) + 6 \times 6$$

— Si la condition $d \mid a, d \mid b$ n'est pas réalisée dans (ii) la réciproque (ii) \Rightarrow (i) est fausse.

Nous donnons le contre-exemple

$$9 = 33 \times 3 + 6 \times (-15)$$

bien que $9 \neq \text{pgcd}(33, 6)$, en observant que

$$9 \text{ ne divise pas } 33 \text{ et } 6.$$

— Cette caractérisation de Bezout assure l'existence d'au moins une solution implicite de l'équation $au + bv = d$ lorsque d divise a et b .

En remarquant que

$$au = d - bv, \text{ c'est-à-dire } au \equiv d[b],$$

nous pouvons donner un l'algorithme semblable au précédent qui restitue explicitement une solution particulière de l'équation $au + bv = d$.

Cependant pour introduire un autre algorithme qui restitue aussi une solution particulière de l'équation $au + bv = d$ avec $d = \text{pgcd}(a, b)$, nous proposons, dans l'exemple qui suit, deux méthodes articulées sur l'algorithme d'Euclide.

Exemple 22.9

L'algorithme d'Euclide pour calculer le $\text{pgcd}(44064, 2975)$ donne le tableau suivant :

$44064 = 2975 \times 14 + 2414$	[5]	[1]
$2975 = 2414 \times 1 + 561$	[4]	[2]
$2414 = 561 \times 4 + 170$	[3]	[3]
$561 = 170 \times 3 + 51$	[2]	[4]
$170 = 51 \times 3 + 17$	[1]	[5]
$51 = 17 \times 2 + 0$		

Nous en concluons

$$\text{pgcd}(44064, 2975) = 17$$

1^{er} méthode : ascendante.

En partant de l'avant dernière ligne du tableau, nous obtenons successivement

$$[1] \Rightarrow 17 = 170 - 51 \times 3$$

$$[2] \Rightarrow 51 = 561 - 170 \times 3, \text{ ce qui donne}$$

$$17 = 170 - (561 - 170 \times 3) \times 3$$

$$17 = 10 \times 170 - 3 \times 561$$

$$[3] \Rightarrow 170 = 2414 - 561 \times 4, \text{ ce qui donne}$$

$$17 = 10 \times (2414 - 561 \times 4) - 3 \times 561,$$

$$17 = 10 \times 2414 - 43 \times 561.$$

$$[4] \Rightarrow 561 = 2975 - 2414 \times 1, \text{ ce qui donne}$$

$$17 = 10 \times 2414 - 43 \times (2975 - 2414 \times 1),$$

$$17 = 53 \times 2414 - 43 \times 2975$$

$$[5] \Rightarrow 2414 = 44064 - 2975 \times 14, \text{ ce qui donne}$$

$$17 = 53 \times (44064 - 2975 \times 14) - 43 \times 2975$$

$$17 = 44064 \times 53 + 2975 \times (-785)$$

Nous en concluons que le couple $(53, -785)$ est une solution particulière, dans \mathbb{Z}^2 , de l'équation

$$44064u + 2975v = 17$$

2^e méthode : descendante.

Nous partons de la première ligne du tableau en posant $a = 44064$ et $b = 2975$, ce qui permet d'élaborer des calculs littéraux.

Nous avons successivement

$$[1] \Rightarrow 2414 = a - 14b.$$

$$[2] \Rightarrow 561 = 2975 - 2414 \times 1 = b - (a - 14b), \text{ ce qui donne}$$

$$561 = 15b - a$$

$$[3] \Rightarrow 170 = 2414 - 561 \times 4 = (a - 14b) - 4(15b - a), \text{ ce qui donne}$$

$$170 = 5a - 74b$$

$$[4] \Rightarrow 51 = 561 - 170 \times 3 = (15b - a) - 3(5a - 74b), \text{ ce qui donne}$$

$$51 = -16a + 237b$$

$$[5] \Rightarrow 17 = 170 - 51 \times 3 = (5a - 74b) - 3(-16a + 237b), \text{ ce qui donne}$$

$$17 = 53a - 785b = a \times 53 + b \times (-785)$$

C'est cette seconde méthode qui induit un algorithme général qui restitue un couple $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ satisfaisant à $au + bv = \text{pgcd}(a, b)$.

Nous mettrons en place ceci dans l'exercice corrigé 18 de ce chapitre.

22.3 Le théorème de Gauss

22.3.1 Le théorème

Théorème 22.14 – Théorème de Gauss

Soient a , b et c trois entiers relatifs non nuls.

Si a et b sont premiers entre eux et si a divise bc , alors a divise c .

Démonstration

Soient a , b et c trois entiers relatifs non nuls.

Puisque $\text{pgcd}(a, b) = 1$, en appliquant le théorème de Bezout nous obtenons qu'il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs tels que

$$au + bv = 1$$

ce qui donne, en multipliant les deux membres de cette égalité par l'entier c non nul :

$$(ac)u + (bc)v = c$$

Or, nous savons

$$a \mid bc$$

et de plus, nous avons

$$a \mid ac.$$

Par combinaison linéaire, nous en déduisons

$$a \mid (ac)u + (bc)v$$

ce qui établit la conclusion attendue, c'est-à-dire

$$a \mid c$$

Remarque

— Si a et b ne sont pas premiers entre eux, alors le théorème de Gauss est inexact.

Nous proposons comme contre-exemple : $a = 6, b = -8$ et $c = 75$.

Nous avons

$$\text{pgcd}(6, -8) = 2 \neq 1, 6 \mid -8 \times 75 \text{ mais } 6 \text{ ne divise pas } 75$$

— La réciproque est fausse.

Le contre-exemple $a = 4, b = 8$ et $c = 12$ le prouve.

En effet, nous avons

$$4 \mid 12 \quad \text{et} \quad 4 \mid 8 \times 12 \text{ mais } 4 \quad \text{et} \quad 8 \text{ ne sont pas premiers entre eux.}$$

Exemple 22.10

Quels sont les points à coordonnées entières sur la droite (d) d'équation $4x - 3y + 9 = 0$?

Avec GeoGebra, nous observons que des points à coordonnées entières existent sur cette droite.

Soit $M(x, y)$, avec $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ un point appartenant à la droite (d).

L'équation $4x - 3y + 9 = 0$ est équivalente à $4x = 3(y - 3)$, notée [1].

Nous en déduisons, puisque $y - 3 \in \mathbb{Z}$,

$$3 \mid 4x$$

et puisque 3 et 4 sont premiers entre eux, le théorème de Gauss induit

$$3 \mid x, \text{ c'est-à-dire } x = 3k, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}.$$

En reportant dans l'équation [1], nous obtenons

$$4 \times 3k = 3(y - 3), \text{ soit } y - 3 = 4k, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Nous en déduisons que si $M(x, y)$ est un point de (d) à coordonnées entières, alors

$$x = 3k \quad \text{et} \quad y = 4k + 3, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Réciproquement, tout point $M(3k, 4k + 3)$, avec $k \in \mathbb{Z}$, satisfait à

$$4 \times 3k - 3 \times (4k + 3) + 9 = 12k - 12k - 9 + 9 = 0,$$

donc appartient à la droite (d).

Nous en concluons que les points $M(x, y)$ à coordonnées entières sur la droite (d) sont les points

$$M(3k, 4k + 3), \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Corollaire 22.15

Soient a , b et n trois entiers relatifs non nuls.

Si a et b divisent n et sont premiers entre eux, alors $a \times b$ divise n .

Démonstration

Puisque $a \mid n$ et $b \mid n$, il existe deux entiers relatifs k et k' tels que

$$n = ka \quad \text{et} \quad n = k'b,$$

ce qui implique

$$ka = k'b$$

Nous déduisons de cette égalité que

$$b \text{ divise } ka.$$

Comme a et b sont premiers entre eux, en appliquant le théorème de Gauss, nous obtenons

$$b \text{ divise } k.$$

Il en résulte qu'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que

$$k = bq$$

ce qui donne

$$n = (bq)a = (ab) \times q$$

Nous en concluons

$$ab \text{ divise } n.$$

Remarque

- La réciproque de ce corollaire est vraie, quels que soient les entiers non nuls a et b .
- Ce corollaire est faux si a et b ne sont pas premiers entre eux.

En effet, en prenant $a = 3, b = 6$ et $n = 60$, nous obtenons

$$3 \mid 60, 6 \mid 60 \text{ mais } 18 \text{ ne divise pas } 60.$$

Exemple 22.11

Pour tout entier naturel n , nous considérons l'entier $A_n = n(n+1)(n^3-1)$.
Nous avons

$$A_n = n(n+1)(n-1)(n^2+n+1)$$

Puisque n et $n+1$ sont deux entiers consécutifs, le produit $n(n+1)$ est divisible par 2.

Puisque $(n-1)n(n+1)$ est le produit de trois entiers consécutifs, il est divisible par 3.

Comme 2 et 3 sont premiers entre eux, nous en concluons que 6 divise A_n .

22.3.2 Résolution de l'équation $ax \equiv b[n]$ **Proposition 22.16**

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls et $n \in \mathbb{N}^*$.

Si a et n sont premiers entre eux, l'équation $(E) : ax \equiv b[n]$, admet au moins une solution $x_0 \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble $S_{(E)}$ des solutions de cette équation est défini par

$$S_{(E)} = \{x \in \mathbb{Z} / x \equiv x_0[n]\}$$

Démonstration

▷ Puisque a et n sont premiers entre eux, en appliquant le théorème de Bezout, nous savons qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que

$$au + nv = 1,$$

ce qui donne, en multipliant les deux membres de cette égalité par $b \in \mathbb{Z}^*$,

$$(au)b + (nv)b = b, \text{ soit } a(ub) = b + n(-vb)$$

Nous en déduisons

$$a(ub) \equiv b[n]$$

ce qui prouve que l'entier $x_0 = ub \in \mathbb{Z}$ est une solution particulière de l'équation (E) .

▷ Soit x une solution quelconque de (E) . Nous avons

$$\begin{cases} ax \equiv b[n] \\ ax_0 \equiv b[n] \end{cases}$$

ce qui implique par soustraction

$$a(x - x_0) \equiv 0[n], \text{ c'est-à-dire } n \mid a(x - x_0).$$

Comme a et n sont premiers entre eux, en appliquant le théorème de Gauss, nous obtenons

$$n \text{ divise } x - x_0, \text{ soit } x \equiv x_0[n]$$

Réciproquement, si $x \equiv x_0[n]$, alors nous en déduisons

$$ax \equiv ax_0[n], \text{ c'est-à-dire } ax \equiv b[n].$$

Nous en concluons :

$$S_{(E)} = \{x \in \mathbb{Z} / x \equiv x_0[n]\}$$

Exemple 22.12

Nous résolvons dans \mathbb{Z} l'équation $3x \equiv 1[5]$.

Nous observons que 3 et 5 sont premiers entre eux et que $x_0 = 2$ est une solution particulière de cette équation. En appliquant la proposition précédente, nous en déduisons que l'ensemble de solutions de cette équation est

$$S = \{x \in \mathbb{Z} / x \equiv 2[5]\}$$

Nous pouvons interpréter cette équation, en considérant que modulo 5, l'entier 3 est inversible et admet pour inverse 2.

22.4 Équation diophantienne $ax + by = c$

Proposition 22.17

Soient S l'ensemble des solutions dans \mathbb{Z}^2 de l'équation $ax + by = c$, avec a, b, c entiers relatifs non nuls donnés et $d = \text{pgcd}(a, b)$.

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) $S \neq \emptyset$,
- (ii) d divise c .

Démonstration

(i) \Rightarrow (ii)

Nous supposons que $S \neq \emptyset$, ce qui signifie,

$$\text{il existe un couple } (x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } ax_0 + by_0 = c.$$

Puisque $d = \text{pgcd}(a, b)$, nous en déduisons

$$d \mid a \quad \text{et} \quad d \mid b$$

ce qui induit, par combinaison linéaire,

$$d \mid ax_0 + by_0, \text{ c'est-à-dire } d \mid c.$$

(ii) \Rightarrow (i)

Nous supposons que d divise c , ce qui signifie

il existe $c' \in \mathbb{Z}^*$ tel que $c = c'd$

Puisque $d = \text{pgcd}(a, b)$, nous en déduisons qu'il existe deux entiers relatifs a' et b' premiers entre eux qui satisfont à :

$$a = a'd \quad \text{et} \quad b = b'd$$

Comme $\text{pgcd}(a', b') = 1$, en appliquant le théorème de Bezout, nous savons qu'il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs tel que

$$a'u + b'v = 1$$

ce qui donne, en multipliant les deux membres de cette égalité par $c' \in \mathbb{Z}^*$,

$$a'(uc') + b'(vc') = c'$$

En posant $x_0 = uc'$ et $y_0 = vc'$, nous obtenons

$$a'x_0 + b'y_0 = c'$$

ce qui induit, en multipliant les deux membres de cette égalité par $d \geq 1$,

$$(da)'x_0 + (db')y_0 = dc', \text{ c'est-à-dire } ax_0 + by_0 = c.$$

Nous avons établi que $(x_0, y_0) \in S$ et par conséquent

$$S \neq \emptyset$$

Remarque

- Cette proposition assure un test qui restitue l'existence implicite ou la non existence de solutions de l'équation diophantienne $ax + by = c$.
- Si a et b sont premiers entre eux, alors, quel que soit $c \in \mathbb{Z}^*$, $\text{pgcd}(a, b) = 1$ divise c , ce qui assure un ensemble non vide de solutions.
- Lorsque cette équation admet des solutions, sa résolution explicite est initialisée par l'obtention d'une solution particulière.

Nous disposons de deux possibilités pour déterminer cette dernière.

▷ Cette solution particulière est évidente, ou bien

- elle est obtenue en utilisant les algorithmes décrits aux paragraphes 7.2.2 et 7.2.3 lorsque le théorème de Bezout assure qu'il existe un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs qui est une solution particulière de (E) , avec $c = 1$.

Exemple 22.13

Nous proposons une résolution littérale de l'équation $ax + by = c$, notée (E) , en distinguant de façon exhaustive les cas qui sont susceptibles de se présenter.

1^{er} cas : a et b sont premiers entre eux et $c = 0$

Nous avons :

$$(E) \Leftrightarrow ax = b(-y)$$

Nous en déduisons que b divise ax et puisque a et b sont premiers entre eux, le théorème de Gauss assure que b divise x .

Il en résulte que

$$x = bk, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

En reportant cette valeur de x dans l'équation initiale, nous obtenons

$$a(bk) = b(-y)$$

ce qui donne, après simplification par $b \neq 0$,

$$y = -ak$$

Réciproquement, nous vérifions

$$ax + by = a(bk) + b(-ak) = 0$$

Nous en concluons que l'ensemble de solutions de cette équation est

$$S_{(E)} = \{(bk, -ak)/k \in \mathbb{Z}\}$$

2^e cas : a et b sont premiers entre eux et $c = 1$.

Le théorème de Bezout assure qu'il existe un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs qui est une solution particulière de (E) , avec $c = 1$.

Par conséquent, si (x, y) est une solution quelconque de (E) , alors nous avons

$$\begin{cases} ax + by = 1 \\ ax_0 + by_0 = 1 \end{cases}$$

ce qui donne, en soustrayant de la première équation, la seconde

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0, \text{ soit } a(x - x_0) = b(y_0 - y), \text{ notée } (E').$$

Nous sommes ramenés au premier cas, ce qui permet de conclure. Cependant, pour fixer les idées, nous refaisons le raisonnement.

Nous déduisons de (E') que b divise $a(x - x_0)$ et puisque a et b sont premiers entre eux, le théorème de Gauss assure que b divise $x - x_0$.

Nous en déduisons

$$x - x_0 = bk, \text{ c'est-à-dire } x = x_0 + bk \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

En reportant cette valeur de x dans l'équation (E') , nous obtenons

$$a(bk) = b(y_0 - y)$$

ce qui donne, après simplification par $b \neq 0$,

$$y_0 - y = ak, \text{ soit } y = y_0 - ak$$

Réciproquement, sachant que $ax_0 + by_0 = 1$, nous vérifions

$$ax + by = a(x_0 + bk) + b(y_0 - ak) = ax_0 + by_0 + abk - abk = 1.$$

Nous en concluons que l'ensemble de solutions de cette équation est

$$S_{(E)} = \{(x_0 + bk, y_0 - ak) / k \in \mathbb{Z}\}$$

3^e cas : a et b sont premiers entre eux et $c \neq 1$.

Puisque $\text{pgcd}(a, b) = 1$, le théorème de Bezout assure qu'il existe un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs qui satisfait à

$$ax_0 + by_0 = 1$$

En multipliant par $c \in \mathbb{Z}^*$ les deux membres de cette égalité, il vient

$$a(cx_0) + c(by_0) = c$$

ce qui justifie que le couple $(X_0, Y_0) = (cx_0, cy_0)$ est une solution particulière de l'équation (E) .

Par suite, si (x, y) est une solution quelconque de (E) , alors nous avons

$$\begin{cases} ax + by = c \\ aX_0 + bY_0 = 1 \end{cases}$$

ce qui donne, en soustrayant de la première équation, la seconde

$$a(x - X_0) + b(y - Y_0) = 0, \text{ soit } a(x - X_0) = b(Y_0 - y), \text{ notée } (E').$$

Nous sommes ramenés au second cas, ce qui permet cette fois de conclure directement.

Nous obtenons

$$x = X_0 + bk = cx_0 + bk \quad \text{et} \quad y = Y_0 - ak = cy_0 - ak, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

Réciproquement, sachant que $ax_0 + by_0 = 1$, nous vérifions :

$$ax + by = a(cx_0 + bk) + b(cy_0 - ak) = c(ax_0 + by_0) + abk - abk = c.$$

Nous en concluons que l'ensemble de solutions de cette équation est

$$S_{(E)} = \{(cx_0 + bk, cy_0 - ak) / k \in \mathbb{Z}\}.$$

4^e cas : a et b ne sont pas premiers entre eux et $c = \text{pgcd}(a, b)$.

Puisque $c = \text{pgcd}(a, b)$, en appliquant la caractérisation de ce dernier établie au paragraphe 7.2.1, il existe deux entiers a' et b' premiers entre eux tels que

$$a = ca' \quad \text{et} \quad b = cb'$$

Nous en déduisons

$$(E) \Leftrightarrow ca'x + cb'y = c,$$

ce qui équivaut, après simplification des deux membres par $c \geq 1$, à (E') ,

$$a'x + b'y = 1, \quad \text{avec } \text{pgcd}(a', b') = 1$$

Ainsi nous sommes ramenés au 2^e cas.

Le couple d'entiers (x_0, y_0) étant une solution particulière de (E') , nous obtenons

$$x = x_0 + b'k \quad \text{et} \quad y = y_0 - a'k, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Réciproquement, sachant que $a'x_0 + b'y_0 = 1$, nous vérifions

$$ax + by = a(x_0 + b'k) + b(y_0 - a'k) = ax_0 + by_0 = c(a'x_0 + b'y_0) = c.$$

Nous en concluons que l'ensemble de solutions de cette équation est

$$S_{(E)} = \{(x_0 + b'k, y_0 - a'k) / k \in \mathbb{Z}\}$$

5^e cas : a et b ne sont pas premiers entre eux et c est divisible par $d = \text{pgcd}(a, b)$.

Dans ce cas, il existe un entier non nul α tel que $c = \alpha d$.

Soit (x_0, y_0) une solution particulière de l'équation $ax + by = d$, c'est-à-dire tel que

$$ax_0 + by_0 = d$$

En multipliant ses deux membres par $\alpha \in \mathbb{Z}^*$, il vient :

$$a(\alpha x_0) + b(\alpha y_0) = \alpha d = c$$

nous en déduisons que le couple $(\alpha x_0, \alpha y_0)$ est une solution particulière de (E) .

En procédant comme dans le cas précédent, nous obtenons

$$S_{(E)} = \{(\alpha x_0 + bk, \alpha y_0 - ak) / k \in \mathbb{Z}\}.$$

6^e cas : a et b ne sont pas premiers entre eux et c n'est pas divisible par $\text{pgcd}(a, b)$.

En appliquant la négation de la proposition précédente, nous en concluons que l'équation (E) n'a pas de solution.

Algorithme (un exemple numérique) Nous souhaitons déterminer une fonction Python qui restitue une solution particulière (u, v) de l'équation diophantienne $ax + by = c$, en localisant les entiers u et v dans deux intervalles centrés en 0 de longueur suffisamment grande, choisie par l'utilisateur.

Nous proposons le script suivant

```

1  def equadiop(a,b,c):
2      for u in range(-10,10):
3          for v in range (-10,10):
4              e=a*u+b*v
5              if e==c:
6                  return u,v
7      return "vide"
```

Exemple 22.14

Par exemple nous résolvons dans \mathbb{Z}^2 l'équation (E),

$$114x + 30y = 54$$

Nous commençons par calculer le pgcd(114,30) soit "à la main" par l'algorithme d'Euclide, soit en utilisant le script Python du pgcd donné au paragraphe 7.1.4. Nous obtenons

$$\text{pgcd}(114,30) = 6$$

Puisque 6 divise 54 , l'équation proposée admet donc des solutions.

En exécutant ce script, nous obtenons

»> equadiop(114,30,54)

»> (1, - 2).

Ainsi le couple $(x_0, y_0) = (1, -2)$ est une solution particulière (E).

Par conséquent, si (x, y) est une solution quelconque de (E), alors nous avons

$$\begin{cases} 114x + 30y = 54 \\ 114x_0 + 30y_0 = 54 \end{cases}$$

ce qui donne en soustrayant de la première équation, la seconde,

$114(x - x_0) + 30(y - y_0) = 0$, soit $114(x - x_0) = 30(y_0 - y)$, notée (E').

En divisant par 6 les deux membres de (E'), il vient

$$19(x - x_0) = 5(y_0 - y)$$

Nous déduisons que 5 divise $19(x - x_0)$ et puisque 19 et 5 sont premiers entre eux, le théorème de Gauss assure que 5 divise $x - x_0$.

Nous en déduisons

$$x - x_0 = 5k, \text{ c'est-à-dire } x = x_0 + 5k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

En reportant cette valeur de x dans l'équation (E'), nous obtenons

$$19(5k) = 5(y_0 - y)$$

ce qui donne, après simplification par 5,

$$y_0 - y = 19k, \text{ soit } y = y_0 - 19k$$

Réciproquement, sachant que $114x_0 + 30y_0 = 54$, nous vérifions

$$114x + 19y = 114(x_0 + 5k) + 30(y_0 - 19k) = 114x_0 + 30y_0 + 570k - 570k = 54.$$

Nous en concluons que l'ensemble de solutions de cette équation est

$$S_{(E)} = \{(1 + 5k, -2 - 19k)/k \in \mathbb{Z}\}$$

Chapitre 23

Nombres premiers

Sixième partie

Analyse complexe

Chapitre 24

Les nombres complexes

Chapitre 25

Nombres complexes et trigonométrie

Chapitre 26

Équations polynomiales dans \mathbb{C}

Chapitre 27

Angles dans le plan complexe

Septième partie

Algèbre

Chapitre 28

Calcul matriciel

Chapitre 29

Graphes

Chapitre 30

Matrices et processus d'évolution