Henri Lepeu

Terminale spécialité Mathématiques expertes
M. Bérard

Colle S11

11/12/25

1 Démonstration

Démontrer le théorème suivant :

Théorème 1

Toute suite convergente est bornée.

2 Exercice : Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Définition 1 – Partie entière (rappel)

La *partie entière* d'un nombre réel a est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à a.
Notée $\lfloor a \rfloor$, elle est entièrement définie par :

$$\begin{cases} \lfloor a \rfloor \in \mathbb{Z} \\ \lfloor a \rfloor \leqslant a < \lfloor a \rfloor + 1 \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout réel a et tout entier naturel $k \geqslant 1$, on a

$$0 \leqslant \lfloor ka \rfloor - k\lfloor a \rfloor \leqslant k - 1.$$

2. Soient un réel x et un entier $p \geqslant 2$.
Nous considérons les suites (a_n) et (b_n) définies sur $\mathbb{N}$ par

$$a_n = \frac{1}{p^n}\lfloor p^n x \rfloor \quad \text{et} \quad b_n = a_n + \frac{1}{p^n}.$$

a) Justifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \lfloor p^{n+1}x \rfloor - p\lfloor p^n x \rfloor \leqslant p - 1.$$

b) En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant a_{n+1} - a_n \leqslant \frac{1}{p^n} - \frac{1}{p^{n+1}}.$$

3. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

4. Justifier que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers le réel x.

5. Nous considérons la proposition

Proposition 2

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

ce qui signifie que, pour tout nombre réel x, il existe une suite de nombres rationnels qui converge vers x.
Cette proposition est-elle VRAIE ou FAUSSE ? Justifier votre réponse.

Corentin Poisblaud

Terminale spécialité Mathématiques expertes
M. Bérard

Colle S11

11/12/25

1 Démonstration

Démontrer le **Théorème de la convergence monotone**.

2 Exercice

Démontrer le théorème suivant de deux façons différentes : par un raisonnement par récurrence d'une part, et en faisant appel au théorème de convergence monotone d'autre part.

Théorème 1 – Théorème de croissance comparée des suites géométriques et factorielle

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$\frac{a^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$