T$^{\text{ale}}$ spé Maths expertes
J. Bérard

2025–2026

Lycée Saint-Augustin

TD 9 **Limite d'une fonction**

Exercice 1 (★☆☆☆) Trouver la limite en $+\infty$ des fonctions :

1. $x \mapsto e^{-\sqrt{x}}$
2. $x \mapsto \dfrac{x+7}{4x+3}$
3. $x \mapsto \dfrac{x^2+5}{x^3-1}$
4. $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$
5. $x \mapsto \cos(x^2)e^{-x}$
6. $x \mapsto (2+\sin(x))^x$

Exercice 2 (★☆☆☆) Q.C.M.

Pour chaque question de ce Q.C.M, il y a deux réponses exactes sur les 4 proposées.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1{,}3\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x+3}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.
   a) f n'a pas de limite en 3.
   b) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.
   c) La droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}$.
   d) La droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ au voisinage de $-\infty$.
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $g(x) = \dfrac{x^2-3x+5}{x-2}$ et on note Γ sa courbe représentative.
   a) Il existe trois réels a, b et c tels que
   $$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, \quad g(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}.$$
   b) La droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à la courbe représentative Γ.
   c) L'axe des abscisses est asymptote à la courbe représentative Γ au voisinage de $+\infty$.
   d) La droite d'équation $y = -x$ est asymptote oblique à la courbe Γ au voisinage de $-\infty$.

Exercice 3 (★☆☆☆) Déterminer selon les valeurs du réel a, la limite en $x = 2$ de la fonction

$$x \longmapsto \frac{x^3-8}{x^2+2x-a}.$$

Exercice 4 (★★☆☆) On considère la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2-4}$ dont on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. Montrer que $\mathcal{C}$ admet deux asymptotes obliques.

Exercice 5 (★★☆☆) Étudier la limite en $+\infty$, puis en 1 de la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x-1} + (x-1)\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Exercice 6 (★★☆☆) Trouver la limite en $+\infty$ des fonctions :

1. $x \mapsto \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$

2. $x \mapsto x - \sqrt{x^2 - x - 1}$.

Exercice 7 (★★☆☆) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, soit la fonction $f : x \longmapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Tracer sommairement le graphe de f. Quelle est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

2. La fonction f a-t-elle une limite en 0 ?

3. Quelle est la limite de $xf(x)$ lorsque x tend vers 0 ?

Exercice 8 (★★☆☆) Trouver la limite (finie ou infinie) des suites ci-dessous :

1. $a_n = \dfrac{2n+5}{6n+7}$

2. $b_n = \dfrac{n^2 - 5n + 6}{n\sqrt{n}}$

3. $c_n = \dfrac{5 + 3\sin^2(n)}{\sqrt{n+2} + 3}$

4. $d_n = \sqrt{n + \cos(n)} - \sqrt{n}$

5. $e_n = -2n^2 + (-1)^n$

6. $f_n = \sqrt{n - \sin^2(2n) - 7}$

7. $g_n = \dfrac{1 + 5\sin^3(n)}{3n - 7\sqrt{n} + \cos(n)}$

Exercice 9 (★★☆☆) Justifier que la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{x}{e^x - x}$$

est définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que la courbe représentative de cette fonction admet deux asymptotes que l'on précisera.

Exercice 10 (★★☆☆) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{x}{1 + \exp(\frac{1}{x})}$.

1. Quelle est la limite en $+\infty$ de :

a) la fonction g ?

b) la fonction $x \longmapsto \dfrac{g(x)}{x}$?

c) la fonction $x \longmapsto g(x) - \dfrac{x}{2}$?

2. En déduire que la courbe $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote oblique en $+\infty$. Cette droite est-elle aussi asymptote à $\mathcal{C}_g$ en $-\infty$?

3. Étudier la limite de g en 0.

Exercice 11 (★★★☆) Soient a, b, c et d quatre réels tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad a + bx + ce^x + d\frac{x}{e^x} = 0$$

Montrer que $a = b = c = d = 0$.

Exercice 12 (★★★☆) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{|x|}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Justifier que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de cette fonction admet une asymptote que l'on précisera.

2. Étudier la dérivabilité de f en 0.

Exercice 13 (★★★☆) Comparaison sur $\mathbb{R}_+$ de $\exp$ avec un polynôme

Établir que sur $\mathbb{R}_+$, tout polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ est majoré par la fonction exponentielle.

Exercice 14 (★★★★) Fonction périodique et limite en l'infini

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, non constante et périodique, de période $T > 0$.

1. Justifier que pour tout réel x et tout entier naturel n, $f(x + nT) = f(x)$.

2. Montrer que la fonction f n'a pas de limite en $+\infty$.
