Lycée Saint Augustin — 2025–2026
Classe de Terminale spécialité Mathématiques expertes — M. Berard

MATHÉMATIQUES
DEVOIR MAISON N° 4

Jeudi 8 Janvier 2026
Durée : 6 heures
Barème : 24 points

Récurrence. Combinatoire. Suites.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et vous poursuivez la composition en indiquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
L'élève est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Indications :

- La présentation doit comporter le nom, la classe, la date, le numéro du devoir et un encadré pour les commentaires et la note. Vos résultats doivent être encadrés.
- Composer sur **copies doubles grand carreaux uniquement**.
- À la fin d'un exercice, on **change de page** (ou de copie) obligatoirement.
- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part **importante** dans l'appréciation des copies.
- **En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.**

Exercice 1 Exposants pairs ou impairs *(4 points)*

1. Pour tout entier naturel n, calculer les deux sommes :

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad s'_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

2. En déduire que :

a) si n est pair, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2k} = 2^{n-1}$.

b) si n est impair, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}$.

Exercice 2 Lettres de l'alphabet *(4 points)*

Soit k un nombre entier compris entre 2 et 26.
Avec les 26 lettres de l'alphabet, combien peut-on former de mots de :

1. k lettres,

2. k lettres distinctes,

3. k lettres, les deux premières lettres sont des voyelles distinctes,

4. k lettres, les deux premières lettres sont des voyelles distinctes, les suivantes des consonnes distinctes.

Exercice 3 Suites arithmético-géométriques[1] *(6 points)*

Soient a et b deux réels, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b.$$

On se propose de calculer u_n en fonction de n et u_0.

1. Traiter le cas $a = 1$.

2. On suppose désormais $a \neq 1$. Résoudre l'équation $x = ax + b$. On note ℓ la solution.

Dans la question suivante, il est inutile (voire toxique) de remplacer ℓ par sa valeur ; seule est utile l'équation $\ell = a\ell + b$.

3. On pose, pour n dans $\mathbb{N}$: $v_n = u_n - \ell$. Montrer que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique. Conclure.

4. À quelles conditions portant sur a et u_0 la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est-elle convergente ?

1. Aussi appelées « Suites récurrentes linéaires d'ordre 1 »

Exercice 4 Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 *(10 points)*

Soient a et b deux nombres réels. On suppose que l'équation $x^2 = ax + b$ admet deux racines réelles distinctes λ et μ. On se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

1. Montrer que, pour α et β dans $\mathbb{R}$, la suite $(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n)_{n\geqslant 0}$ appartient à $\mathcal{E}$.

2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ un élément de $\mathcal{E}$. Vérifier qu'il existe deux nombres réels α et β tels que

$$\alpha + \beta = u_0 \quad \text{et} \quad \alpha\lambda + \beta\mu = u_1.$$

3. Avec les notations de **2.**, montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n.$$

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par :

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 5, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

4. Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n + 3^n.$$

On suppose désormais que l'équation $x^2 = ax + b$ admet une unique racine réelle λ.

5. Montrer que, pour α et β dans $\mathbb{R}$, la suite $(\alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n)_{n\geqslant 0}$ appartient à $\mathcal{E}$.

6. Montrer que, si la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est un élément de $\mathcal{E}$, il existe deux nombres réels α et β tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n.$$

7. *(Bonus +2 pts)* Montrer que si l'équation $x^2 = ax + b$ ne comporte pas de solutions réelles, alors il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, ainsi que deux réels α et β tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = r^n\big(\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta)\big).$$

Remarque : cette question mobilise des résultats sur les nombres complexes, n'essayez pas de la résoudre sans vous être renseigné au préalable.

Bon courage.