

# Colle S02

17/09/25

## 1 Démonstration

Démontrer le **Lemme d'Archimède** puis la proposition suivante :

### Proposition 1 – Propriété (Division euclidienne dans $\mathbb{N}$ )

Quels que soient  $a \in \mathbb{N}$  et  $b \in \mathbb{N}^*$ , il existe un couple unique d'entiers naturels  $(q, r)$  satisfaisant à

$$a = bq + r, \quad \text{avec } 0 \leq r < b.$$

## 2 Exercices

### 2.1 Équation fonctionnelle

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + xf(1-x) = 1+x \quad (\text{E1})$$

1. Dans cette question, on suppose que  $f$  est une fonction solution, c'est-à-dire une fonction qui vérifie (E1).
  - a) Déterminer  $f\left(\frac{1}{2}\right)$ .
  - b) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(1-x) + (1-x)f(x) = 2-x$ . On note cette égalité (E2).
  - c) À l'aide de (E1) et (E2), déterminer une expression de  $f(x)$  valable pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
2. Donner la conclusion de l'exercice.

### 2.2 Divisibilité d'un polynôme de degré $n$

Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls et  $x$  un entier relatif.

1. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes.
  - (i)  $p \mid x^2 - x$ ,  
—  $\forall n \in \mathbb{N}^*, p \mid x^n - x$ .
2. En déduire l'ensemble des entiers relatifs  $0$  tels que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'entier  $x^n - x$  est pair.

# Colle S02

17/09/25

## 1 Démonstration

Démontrer la proposition suivante puis les **Lois de De Morgan** :

### Proposition 1

- Associativité de «  $\wedge$  » et «  $\vee$  » ;
- Transitivité de «  $\Rightarrow$  » ;
- Distributivité de «  $\wedge$  » sur «  $\vee$  » ;
- Distributivité de «  $\vee$  » sur «  $\wedge$  ».

## 2 Exercices

### 2.1 Équation fonctionnelle

Trouver toutes les fonctions  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  qui vérifient :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad f(m + n) = f(m) + f(n).$$

### 2.2 Division euclidienne d'un polynôme

Pour tout entier  $x \in \mathbb{N}^*$ , nous posons :

$$p(x) = \left[ x^2 + (x - 1)^2 \right]^2.$$

Quel est le reste de la division euclidienne de  $p(x)$  par  $4x^2$  ?