Sur les problèmes de type Schrödinger en dimension un.

Rapport de travail encadré de recherche rédigé dans le cadre du master de mathématiques fondamentales et appliquées à Sorbonne Université, Faculté des Sciences

Rédigé par Julien Valentin
Encadré par Corentin Audiard
Mai 2020

Plan

Le problème de Schrödinger linéaire

Le cas homogène

On s'intéresse au problème de *Schrödinger linéaire homogène* suivant

$$(SLH) : \begin{cases} u : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ i\partial_t u(t,x) + \Delta_x u(t,x) = 0 \\ u(0, \cdot) := u_0, u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \end{cases}$$

Heuristique Formellement, on s'attend à ce que la transformée de Fourier d'une solution de (SLH) vérifie l'équation

$$\frac{d}{dt}\hat{u}(t,\xi) + i\xi^2\hat{u}(t,\xi) = 0$$

On reconnaît une famille d'équations différentielles ordinaires d'ordre un indexée par la variable $\xi \in \mathbb{R}$, dont la condition initiale est $\hat{u}(0,\xi) = \widehat{u_0}(\xi)$. Elle admet pour unique solution la fonction suivante

$$\hat{u}(t) = \widehat{u_0}(\xi)e^{-i\xi^2 t}$$

Toujours formellement, cela signifie que

$$u(t)(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(t, \xi \mapsto \widehat{u_0}(\xi)e^{-i\xi^2 t}\right)(x)$$

Or la transformation de Fourier ainsi que la transformation inverse, lorsqu'elles existent, envoient un produit de fonctions sur le produit de convolution des deux transformées, de sorte que, pour un certain $K(t) := \mathcal{F}^{-1}\left(\xi \mapsto e^{-i\xi^2 t}\right)$, on souhaite

$$u(t,\cdot) = u_0 *_x K(t)$$

Lemme 1 (Calcul)**.** *Si on définit*

$$K : \begin{cases} (0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4i\pi t}} e^{i\frac{x^2}{4t}} \end{cases}$$

alors

$$\mathcal{F}(x \mapsto K(t,x))(\xi) = e^{-i\xi^2 t}$$

au sens de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Démonstration

Soit $t \in (0, +\infty)$. Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} < \mathcal{F}(K(t)), \phi > &= < K(t), \mathcal{F}(\phi) > \\ &= \frac{1}{\sqrt{4i\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{\xi^2}{4t}} \hat{\phi}(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Afin de pouvoir effectuer un calcul explicite de cette expression, on va modifier l'exponentielle. Soit $\epsilon \in (0, +\infty)$. On écrit

$$e^{i\frac{\xi^2}{4t}} = \lim_{\epsilon \to 0} e^{i\frac{\xi^2}{4t} - \epsilon\xi^2}$$

Calculons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{\xi^2}{4t} - \epsilon\xi^2} \hat{\phi}(\xi) d\xi &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{\xi^2}{4t} - \epsilon\xi^2} e^{-i\xi x} \phi(x) dx d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} e^{\left(i\frac{1}{4t} - \epsilon\right)\xi^2} e^{-i\xi x} d\xi \right] \phi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\left(\xi \mapsto e^{\left(i\frac{1}{4t} - \epsilon\right)\xi^2} \right)(x) \phi(x) dx \end{aligned}$$

Notons $a := \epsilon - i\frac{1}{4t}$, et remarquons que $Re(a) > 0$. On calcule maintenant $\mathcal{F}\left(\xi \mapsto e^{-a\xi^2}\right)$. On introduit

$$F_a(x) := \int_{\mathbb{R}} e^{-a\xi^2} e^{-ix\xi} d\xi$$

F_a est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, et

$$\frac{d}{dx} F_a(x) = \int_{\mathbb{R}} -i\xi e^{-a\xi^2 - ix\xi} d\xi$$

En effet, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\xi \mapsto e^{-a\xi^2 - ix\xi}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$; $x \mapsto e^{-a\xi^2 - ix\xi}$ admet pour dérivée partielle en x $(x, \xi) \mapsto -i\xi e^{-a\xi^2 - ix\xi}$, définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et intégrable en $\xi \in \mathbb{R}$; quel que soit $\xi \in \mathbb{R}, x \mapsto e^{-a\xi^2 - ix\xi}$ est continue ; enfin

$$\left| -i\xi e^{-a\xi^2 - ix\xi} \right| \leqslant \left| \xi e^{-\epsilon\xi^2} \right|$$

Le théorème de dérivation sous le signe somme permet de conclure. De plus, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F_a(x) &= \int_{\mathbb{R}} -i\frac{2a\xi}{2a} e^{-a\xi^2} e^{-ix\xi} d\xi \\ &= \left[e^{-a\xi^2 - ix\xi} \right]_{\mathbb{R}} + \frac{i}{2a} \int_{\mathbb{R}} e^{-a\xi^2} \left(ixe^{-ix\xi} \right) d\xi \\ &= -\frac{x}{2a} F_a(x) \end{aligned}$$

Cette dernière expression définit une nouvelle équation différentielle ordinaire d'ordre un, de sorte que

$$F_a(x) := F_a(0) e^{-\frac{x^2}{4a}}$$

Il reste à calculer $F_a(0)$.

$$F_a(0)^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-a\xi^2} d\xi \right)^2$$

Un théorème de Fubini nous permet alors d'écrire

$$F_a(0)^2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-a(\xi_1^2 + \xi_2^2)} d\xi_1 d\xi_2$$

On change de variable : on passe en coordonnées polaires avec $r := \xi_1^2 + \xi_2^2$ et donc

$$\begin{aligned} F_a(0)^2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} re^{-ar^2} dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} re^{-ar^2} dr \\ &= \frac{\pi}{a} \end{aligned}$$

Donc $F_a(0)$ est continue en la variable a dès que $Re(a) > 0$. De plus pour $a \in (0, +\infty)$, $F_a(0) > 0$. Donc on considère sa racine positive.

$$F_a(0) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Finalement, on obtient

$$F_a(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon - i\frac{1}{4t}}} e^{-\frac{x^2}{4(\epsilon - i\frac{1}{4t})}}$$

Donc, pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{\xi^2}{4t} - \epsilon\xi^2} \hat{\phi}(\xi) d\xi &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4i\pi t}} \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon - \frac{i}{4t}}} e^{-\frac{x^2}{4(\epsilon - \frac{i}{4t})}} \phi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{1 + 4i\epsilon t}} e^{-\frac{itx^2}{1+4i\epsilon t}} \phi(x) dx \end{aligned}$$

Enfin, on applique le théorème de convergence dominée aux fonctions

$$f_\epsilon(x) := \frac{1}{\sqrt{1 + 4i\epsilon t}} e^{-\frac{itx^2}{1+4i\epsilon t}} \phi(x)$$

La famille de fonctions ainsi définies converge simplement lorsque ϵ tend vers 0 vers

$$f(x) := e^{-itx^2} \phi(x)$$

De plus, pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\sqrt{1 + 4i\epsilon t}} e^{-\frac{itx^2}{1+4i\epsilon t}} \phi(x) \right| &\leqslant \left| e^{-\frac{itx^2}{1+4i\epsilon t}} \phi(x) \right| \\ &\leqslant \left| e^{-\frac{4\epsilon t^2 x^2}{1+4\epsilon t^2}} \phi(x) \right| \\ &\leqslant |\phi(x)| \end{aligned}$$

Où le premier facteur est maximal lorsque $\epsilon = 0$. De plus, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ s'injecte dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, ce qui signifie que $x \mapsto |\phi(x)|$ est intégrable, plus précisément

$$\exists c > 0, \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \; \|\phi\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})} \leqslant c \sup\left(\left\{\|\phi\|_{m,n} / m, n \in \mathbb{N}^2\right\}\right)$$

Finalement, on conclut

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), < \mathcal{F}(K(t)), \phi >= \int_{\mathbb{R}} e^{-itx^2} \phi(x) dx$$

Donc $\mathcal{F}(K(t))(\xi) = e^{-it\xi^2}$ au sens de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. □

Notations Á partir de maintenant, on notera

$$\boxed{e^{it\Delta} : u_0 \mapsto \frac{1}{\sqrt{4i\pi t}} e^{i\frac{\cdot^2}{4t}} *_x u_0}$$

On notera également

$$S(t) : u_0 \mapsto u(t)$$

Proposition 1 (Donnée initiale $\mathcal{S}(\mathbb{R})$)**.** *Si $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors la fonction*

$$u : t \mapsto e^{it\Delta} u_0$$

définit une fonction $\mathcal{C}^\infty((0,+\infty), \mathcal{S}(\mathbb{R}))$ qui est l'unique solution au problème (SLH).

Démonstration

Montrons que $u \in \mathcal{C}^\infty((0,+\infty), \mathcal{S}(\mathbb{R}))$ On transforme u :

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-it\xi^2}\widehat{u_0}(\xi)$$

Alors quel que soit $t, m \in (0,+\infty) \times \mathbb{N}$, $\partial_t^m \hat{u}(t,\xi) = (-i\xi^2)^m \hat{u}(t,\xi)$, lesquelles sont toutes continues en t. De même, la règle de Leibniz nous donne une expression pour les dérivées partielles spatiales de tout ordre, qui sont encore continues. Donc $\hat{u}$ est infiniment partiellement dérivable sur $(0,+\infty) \times \mathbb{R}$ et ses dérivées partielles de tout ordre sont continues, donc $\hat{u} \in \mathcal{C}^\infty((0,+\infty) \times \mathbb{R})$. De plus, la transformée de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ donc $\widehat{u_0}$ est encore de Schwartz. Donc elle vérifie

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^2 : \sup\left(\left\{\left|\xi^m \widehat{u_0}^{(n)}(\xi)\right| / \xi \in \mathbb{R}\right\}\right) < +\infty$$

Donc, pour tout $t \in (0,+\infty)$, pour tout entier m,

$$|\partial_t^m \hat{u}(t,\xi)| \leqslant \left|\xi^{2m} e^{-it\xi^2} \widehat{u_0}(\xi)\right|$$

Donc on trouve la majoration uniforme en temps sur $(0,t)$ quel que soit t :

$$|\partial_t^m \hat{u}(t,\xi)| \leqslant \left|\xi^{2m} \widehat{u_0}(\xi)\right|$$

qui est fini. On peut donc passer au sup. Ainsi on a bien $\hat{u} \in \mathcal{C}^\infty((0,+\infty), \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On conclut ce paragraphe en rappelant que si $u \in \mathcal{C}^\infty((0,+\infty) \times \mathbb{R})$ et que ses dérivées de tout ordre sont intégrables alors sa transformée est également $\mathcal{C}^\infty((0,+\infty) \times \mathbb{R})$, et de nouveau on invoque le fait que la transformée de Fourier est un isomorphisme sur l'espace de Schwartz.

Montrons que u **est solution** On a déjà calculé

$$\partial_t \hat{u}(t,\xi) = -i\xi^2 \hat{u}(t,\xi)$$

qui est l'équation différentielle ordinaire évoquée dans l'introduction de cette section.

Unicité de la solution Soient deux solutions u, v de (SLH). Alors elles ont pour expression

$$u(t) = S(t)u_0$$
$$v(t) = S(t)u_0$$

Par linéarité de $S(t)$, on trouve que la différence est exactement la fonction $t \mapsto 0$ la fonction nulle $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Donc elles coïncident pour tout t. □

Proposition 2. *Soit $u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}((0,+\infty), \mathcal{S}'(\mathbb{R}))$ au sens suivant*
- — $\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), t \mapsto < u(t), \phi >$ *est continue,*
- — $\forall \phi \in \mathcal{S}((0,+\infty) \times \mathbb{R}), \forall t \in (0,+\infty)$,

$$< u(t), \phi(t) > - < u_0, \phi(0) >= \int_0^t < u(t), (\partial_t \phi(t) - i\Delta\phi(t)) > dt$$

Démonstration

On commence par montrer l'existence. Si $u : t \mapsto \left(\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-it\xi^2}\widehat{u_0}(\xi)\right)\right)$ alors quel que soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$< u(t), \overline{\phi} >= \frac{1}{2\pi} < e^{-it\xi^2}\widehat{u_0}, \widehat{\overline{\phi}} >= \frac{1}{2\pi} < \widehat{u_0}, \overline{e^{it\xi^2}\hat{\phi}} >$$

Or, $e^{it\xi^2}\hat{\phi}$ est continue de $(0, +\infty)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Donc il en est de même pour $t \mapsto < u(t), \bar{\phi} >$.

Soit maintenant ϕ une fonction de $\mathcal{S}((0, +\infty) \times \mathbb{R})$ et soit T un élément de $(0, +\infty)$. Un calcul préliminaire permet de montrer que $\hat{\bar{\hat{\phi}}} = \hat{\phi}(-\xi)$. Écrivons le calcul

$$\begin{aligned} &< u(t), \phi(t) > - < u_0, \phi(0) > - \int_0^T < u(t), (\partial_t\phi - i\Delta\phi) > dt \\ =&< \widehat{u_0}, e^{it\xi^2}\hat{\phi}(t, \xi) > - < \widehat{u_0}, \phi(0, -\xi) > - \int_0^T < \widehat{u_0}, e^{it\xi^2}\left(\partial_t\hat{\phi} + i\xi^2\hat{\phi}\right)(0) > dt \\ =&< \widehat{u_0}, e^{it\xi^2}\left(\hat{\phi}(T,-\xi) - \hat{\phi}(0,-\xi)\right) > - \int_0^T e^{it\xi^2}\left(\partial_t\hat{\phi} + i\xi^2\hat{\phi}\right)(t, -\xi)dt \end{aligned}$$

Or on peut intégrer par parties le terme $\int_0^T e^{it\xi^2}\left(\partial_t\hat{\phi}(t, -\xi)\right) dt$ et trouver

$$\int_0^T e^{it\xi^2}\left(\partial_t\hat{\phi}(t, -\xi)\right) dt = \left[e^{it\xi^2}\hat{\phi}(t, -\xi)\right]_0^T - \int_0^T i\xi^2 e^{it\xi^2}\hat{\phi}(t, -\xi)dt$$

Donc

$$< u(T), \phi(T) >=< u_0, \phi(0) > + \int_0^T < u(t), (\partial_t\phi - i\Delta\phi)(t) > dt$$

Ce qui est équivalent à

$$< u(T), \phi(T) > - < u_0, \phi(0) > - \int_0^T < u(t), (\partial_t\phi - i\Delta\phi)(t) > dt = 0$$

Dit autrement, u est solution faible du problème de Schrödinger homogène.

Pour l'unicité, on procède par dualité. Sans perte de généralité, on suppose que u_0 est 0. Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on choisit $T \in [0, +\infty)$, soit enfin $\phi \in \mathcal{S}((0, +\infty) \times \mathbb{R})$, définie par

$$\hat{\phi}(t, \xi) := e^{i(T-t)\xi^2}\hat{\psi}(\xi)\chi_{[0,T]}(t)$$

On cherche la dérivée partielle de $\hat{\phi}$ par rapport au temps.

$$\partial_t\hat{\phi} = -i\xi^2\hat{\phi}$$

Et donc, de même que dans ce qui précède :

$$\partial_t\phi - i\Delta\phi = 0 \qquad \forall(t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}$$

On en déduit que $< u(t), \psi >= 0$ quel que soit ψ donc u est la forme linéaire continue nulle, ce qui conclut la preuve. $\square$

Proposition 3 (Donnée initiale $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$)**.** *On montre que :*

$$\forall t \in (0, +\infty), S(t) : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$$

De plus, $S(t)$ est une isométrie au sens où si $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ alors $u(t) := e^{it\Delta}u_0$ vérifie $u \in \mathcal{C}\left((0, +\infty), L^2(\mathbb{R})\right)$ et

$$\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$$

Démonstration

On montre que $\|u(t)\|_{\mathbf{L}^2} = \|u_0\|_{\mathbf{L}^2}$ On écrit la transformée de u

$$\hat{u}(t)(\xi) = e^{-it\xi^2}\widehat{u_0}(\xi)$$

Le théorème de Plancherel permet d'écrire que si $u \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ alors

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{\mathrm{L}^2} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|\hat{u}(t)\|_{\mathrm{L}^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\|\xi \mapsto e^{-it\xi^2}\widehat{u_0}(\xi)\right\|_{\mathrm{L}^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|\widehat{u_0}\|_{\mathrm{L}^2} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}}\|u_0\|_{\mathrm{L}^2} \\
&= \|u_0\|_{\mathrm{L}^2}
\end{aligned}$$

Or $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et il existe un unique prolongement à L^2 de cette transformation

Continuité en temps Pour montrer la continuité en la variable temporelle, on introduit la notion de semi-groupe fortement continu sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

Définition 1 (Semi-groupe fortement continu). *Une famille $\{S(t)\}_{[0,+\infty)}$ est un semi-groupe fortement continu s'il vérfie*
- $S(0) = Id$,
- $\forall s, t \in [0,+\infty)^2, S(s+t) = S(s)S(t)$ *et*
- $\forall u \in L^2(\mathbb{R}, \lim_{t\to 0}\|S(t)u - u\|_{L^2} = 0$

On a alors le théorème suivant

Théorème 1 (Contrôle). *Si $\{S(t)\}_{[0,+\infty)}$ est un semi-groupe fortement continu alors*

$$\exists w \geqslant 0, M \geqslant 1, \forall t \in (0,+\infty) : |||S(t)||| \leqslant Me^{wt}$$

Preuve du théorème

S est borné pour t assez petit En effet, supposons par l'absurde qu'il existe $(t_n)_{\mathbb{N}}$ telle que t_n tend vers 0 et $S(t_n) > n$. Le théorème de Banach-Steinhaus permet alors d'affirmer qu'il existe $u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ tel que $\|S(t_n)u\|_{\mathrm{L}^2}$ est non-bornée. Or c'est impossible, à cause du troisième point de la définition. Donc

$$\exists T > 0, \forall t \in (0,T), \exists M \geqslant 0 : |||S(t)||| \leqslant M$$

et, eu égard au fait que

$$S(0) = Id \Rightarrow |||S(t)||| \geqslant 1$$

Construction de w Soit

$$w := \frac{ln(M)}{T}$$

On note que $w \geqslant 0$ parce que $M \geqslant 1$. Soient ensuite $t \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$ et $\delta \in [0,T]$ tels que $t = nT + \delta$. Les propriétés de semi-groupe mènent aux inégalités

$$\begin{aligned}
|||S(t)||| &\leqslant |||S(\delta)|||\,|||S(T)^n||| \\
&\leqslant M^{n+1} \\
&\leqslant MM^{t/T} \\
&\leqslant Me^{wt}
\end{aligned}$$

□

On en déduit le corollaire suivant

Corollaire 1. *Soit $\{S(t)\}_{[0,+\infty)}$ un semi-groupe fortement continu. Alors $\forall u \in L^2(\mathbb{R})$, l'application $t \mapsto S(t)u$ définie sur $[0,+\infty) \to L^2(\mathbb{R})$ est continue.*

Démonstration du corollaire

Soient $t \in (0,+\infty)$ et $\epsilon > 0$, soit enfin $(s_n) \in (0,t)^{\mathbb{N}}$ telle qu'elle converge vers 0. Alors $\forall u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\|S(t+s_n)u - S(t)u\|_{\mathrm{L}^2} &\leqslant \|\!|S(t)|\!\|\, \|S(s_n)u - u\|_{\mathrm{L}^2} \\ &\leqslant Me^{wt}\, \|S(s_n)u - u\|_{\mathrm{L}^2}\end{aligned}$$

Avec ce dernier facteur qui tend vers 0, en vertu du troisième point de la définition des semi-groupes fortement continus. □

$\{S(t)\}_{[0,+\infty)}$ **est un semi-groupe fortement continu** Montrons le troisième point de la définition. Soit $T \in (0,+\infty)$. Soient $s,t \in [0,T), s < t$. On calcule

$$\begin{aligned}\|u(t) - u(s)\|_{\mathrm{L}^2} &= \left\|\widehat{u(t) - u(s)}\right\|_{\mathrm{L}^2} \\ &= \left\|e^{-it\xi^2}\widehat{u_0} - e^{-is\xi^2}\widehat{u_0}\right\|_{\mathrm{L}^2} \\ &= \left\|e^{-is\xi^2}\left(e^{i(t-s)\xi^2}\widehat{u_0} - \widehat{u_0}\right)\right\|_{\mathrm{L}^2} \\ &= \left\|\left(e^{-i(t-s)\xi^2}\widehat{u_0} - \widehat{u_0}\right)\right\|_{\mathrm{L}^2}\end{aligned}$$

Lorsque $s \to t$, on a bien $e^{i(t-s)\xi^2} \to (\xi \mapsto 1)$ ponctuellement. De plus

$$\forall s, \forall \xi : \left|e^{-i(t-s)\xi^2}\widehat{u_0}(\xi)\right\| = |\widehat{u_0}(\xi)\|$$

Qui est $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Le théorème de convergence dominée s'applique, d'où

$$\lim_{s\to t}\left\|\left(e^{-i(t-s)\xi^2}\widehat{u_0} - \widehat{u_0}\right)\right\|_{\mathrm{L}^2} = 0$$

et donc

$$\lim_{s\to t}\|u(t) - u(s)\|_{\mathrm{L}^2} = 0$$

Le corollaire précédent s'applique, ce qui assure la continuité. □

Proposition 4 (Donnée initiale $\mathrm{H}^s(\mathbb{R})$)**.** *Soit $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$. Alors la fonction*

$$u : t \mapsto S(t)u_0$$

définit l'unique solution de (SLH) telle que $u \in \mathcal{C}((0,+\infty), H^s(\mathbb{R}))$

Démonstration

Action de $S(t)$ Soit u_0 un élément de $\mathrm{H}^s(\mathbb{R})$ avec s un nombre réel quelconque. Munissons l'espace de sa norme

$$\|u_0\|_{\mathrm{H}^s} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^s|\widehat{u_0}(\xi)|^2 d\xi} = \left\|(1+|\xi|^2)^s\widehat{u_0}(\xi)\right\|_{\mathrm{L}^2}$$

Calculons

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{\mathrm{H}^s} &= \left\|(1+|\xi|^2)^s\hat{u}(t)\right\|_{\mathrm{L}^2} \\ &= \left\|(1+|\xi|^2)^s e^{-it\xi^2}\widehat{u_0}\right\|_{\mathrm{L}^2} \\ &= \left\|e^{-it\xi^2}\left((1+|\xi|^2)^s\widehat{u_0}\right)\right\|_{\mathrm{L}^2} \\ &= \|u_0\|_{\mathrm{H}^s}\end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in (0, +\infty)$, $S(t)$ est une isométrie de $\mathrm{H}^s(\mathbb{R}) \to \mathrm{H}^s(\mathbb{R})$

Continuité temporelle Á nouveau, on vérifie que $S(t)$ est un semi-groupe fortement continu sur l'espace $\mathrm{H}^s(\mathbb{R})$. Soient $t_1, t_2 \in [0, T), T \in (0, +\infty)$ et $t_2 < t_1$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \|u(t_2) - u(t_1)\|_{\mathrm{H}^s} &= \left\| \widehat{u(t_2) - u(t_1)} \right\|_{\mathrm{H}^s} \\ &= \left\| e^{-it_2\xi^2} \left(e^{-i(t_1-t_2)\xi^2} \widehat{u_0} - \widehat{u_0} \right) \right\|_{\mathrm{H}^s} \\ &= \left\| e^{-i(t_1-t_2)\xi^2} \widehat{u_0} - \widehat{u_0} \right\|_{\mathrm{H}^s} \end{aligned}$$

Le théorème de convergence dominée s'applique encore, et conduit au résultat suivant

$$\lim_{s \to t} \|u(t) - u(s)\|_{\mathrm{H}^s} = 0$$

Á nouveau, le corollaire 1 s'applique et on conclut à la continuité de $S(t)$.

On se penche maintenant sur le problème linéaire non-homogène.

Le problème linéaire non-homogène

On s'intéresse maintenant le problème linéaire mais non homogène.

$$(SLNH) : \begin{cases} u : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ i\partial_t u(t,x) + \Delta_x u(t,x) = f(t) \\ u(0, \cdot) := u_0, u_0 \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \end{cases}$$

La formule de Duhamel pour ce problème invite à considérer la fonctionnelle

$$u(t) := e^{it\Delta} u_0 - i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s) ds$$

On a alors la proposition suivante

Proposition 5 (Existence et unicité pour (SLNH))**.** *Soit $T \in (0, +\infty)$. Si $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}\left([0,T], L^2(\mathbb{R})\right)$ linéaire, alors il existe une unique fonction $u : [0,T] \to L^2(\mathbb{R})$, continue, définie par la formule de Duhamel, solution de (SLNH) et on a l'estimation*

$$\|u(t)\|_{L^2} \leqslant \|u_0\|_{L^2} + \|f\|_{L^1_T L^2_x}$$

où

$$\|f\|_{L^1_T L^2_x} := \int_0^T \|f(s)\|_{L^2} \, ds$$

Démonstration

Unicité Soient u, v deux telles solutions. Dans ce cas on pose $w := u - v$. Il est clair que

$$\partial_t w - i\Delta_x w = 0$$

Or $w(0) = 0$, donc w est identiquement nulle. D'où l'unicité.

Estimation

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{\mathrm{L}^2} &\leqslant \|u_0\|_{\mathrm{L}^2} + \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s) ds \right\|_{\mathrm{L}^2} \\
&\leqslant \|u_0\|_{\mathrm{L}^2} + \int_0^t \left\| e^{i(t-s)\Delta} f(s) \right\|_{\mathrm{L}^2} ds \\
&\leqslant \|u_0\|_{\mathrm{L}^2} + \int_0^t \|f(s)\|_{\mathrm{L}^2} \, ds
\end{aligned}$$

Où on rappelle que $e^{it\Delta}$ est une isométrie de $\mathrm{L}^2 \to \mathrm{L}^2$ et f est supposée continue en temps, de sorte qu'elle est intégrable sur le compact $[0, T]$. On obtient donc l'estimation.

u **définit une solution** On dérive maintenant l'expression de u. Calculons, avec $t, \xi \in [0, T] \times \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\partial_t \hat{u}(t,\xi) &= \partial_t e^{-it\xi^2} \widehat{u_0}(\xi) - i \partial_t \int_0^t e^{-i(t-s)\xi^2} \hat{f}(s,\xi) ds \\
&= -i\xi^2 e^{-it\xi^2} \widehat{u_0}(\xi) - i \left(e^{-i(t-t)\xi^2} \hat{f}(t,\xi) + \int_0^t \partial_t e^{-i(t-s)\xi^2} \hat{f}(s,\xi) \right) \\
&= -i\xi^2 e^{-it\xi^2} \widehat{u_0}(\xi) - i\hat{f}(t,\xi) - i \int_0^t -i\xi^2 e^{-i(t-s)\xi^2} \hat{f}(s,\xi) ds
\end{aligned}$$

Appliquons la transformation inverse à chacun des termes :

$$\mathcal{F}^{-1} \left(\xi \mapsto \partial_t \hat{u}(t,\xi) \right)(x) = \partial_t u(t,x)$$

D'une part, ensuite :

$$\mathcal{F}^{-1} \left(\xi \mapsto -i\xi^2 e^{-it\xi^2} \widehat{u_0}(\xi) \right)(x) = -i\Delta_x u(t,x)$$

De plus

$$\mathcal{F}^{-1} \left(\xi \mapsto -i\hat{f}(t,\xi) \right)(x) = -if(t,x)$$

Enfin

$$\mathcal{F}^{-1} \left(\xi \mapsto -i\xi^2 e^{-it\xi^2} \hat{f}(t,\xi) \right)(x) = -i\Delta_x f(t,\xi)$$

Or f est supposée être linéaire, donc son laplacien en espace est nul. Finalement, on trouve

$$i\partial_t u(t,x) + \Delta_x u(t,x) = f(t,x)$$

qui est l'équation de Schrödinger non-homogène. □

Le problème non-linéaire

Après avoir étudié le problème linéaire, on s'intéresse au problème de Schrödinger contenant une forme particulière de non-linéarité. Commençons par introduire le cadre : on appelle ϵ un nombre choisi dans $\{-1, 1\}$. Ce paramètre introduit le vocabulaire suivant : s'il est égal à 1, on appellera le problème *focalisant*, sinon *défocalisant*. Soit maintenant un entier $p \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, fini. On l'appelle degré de la non-linéarité. Enfin, l'espace des événements est, comme précédemment, $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$ où on note (t, x) les variables associées.

Commençons par trois résultats sur les espaces de Sobolev $\mathrm{H}^1(\mathbb{R})$.

Lemme 2 ($\mathrm{H}^1(\mathbb{R})$ est stable par produit fini)**.** *Soient $u, v \in H^1(\mathbb{R})$. Alors le produit uv est encore dans $H^1(\mathbb{R})$ et on a la formule de Leibniz :*

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Enfin, on dispose de la formule d'intégration par parties

$$\forall y, x \in \mathbb{R} : \int_y^x u'(z)v(z)dz = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x u(z)v'(z)dz$$

La preuve du lemme 2 est valide s'il existe une injection continue de $\mathrm{H}^1(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$, et effectivement, on montre que

Lemme 3. *L'espace $H^1(\mathbb{R})$ s'injecte continûment dans $L^\infty(\mathbb{R})$. Plus précisément,*

$$\exists C_\infty \in (0, +\infty), \forall u \in H^1(\mathbb{R}) : \|u\|_{L^\infty} \leqslant C_\infty \|u\|_{H^1}$$

Démonstration du lemme 3

Le cas $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ Soit $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Alors on peut calculer, quel que soit $x \in \mathbb{R}$

$$u(x)^2 = |u(x)|^2$$

Or

$$\left(u(x)^2\right)' = 2u'(x)u(x)$$

D'où

$$|u(x)|^2 = \int_{-\infty}^x 2u'(t)u(t)dt$$

Et donc

$$|u(x)|^2 \leqslant \int_{\mathbb{R}} 2u'(t)u(t)dt$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz s'applique puisque u', u sont $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$:

$$\left|u(x)^2\right| \leqslant 2 \left\|u'(t)\right\|_{\mathrm{L}^2} \|u(t)\|_{\mathrm{L}^2}$$

On utilise alors l'inégalité de Young appliquée avec des exposants 2 aux facteurs $\|u'(t)\|_{\mathrm{L}^2}$ et $\|u(t)\|_{\mathrm{L}^2}$

$$\begin{aligned}\left|u(x)^2\right| &\leqslant 2\left(\frac{\|u'(t)\|_{\mathrm{L}^2}^2}{2} + \frac{\|u(t)\|_{\mathrm{L}^2}^2}{2}\right) \\ &\leqslant \|u\|_{\mathrm{H}^1}^2\end{aligned}$$

Donc on conclut que

$$\|u\|_{\mathrm{L}^\infty} \leqslant \|u\|_{\mathrm{H}^1}$$

Soit maintenant $u \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R})$. Par densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{H}^1(\mathbb{R})$, il existe une suite $(u_n) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_{\mathrm{H}^1} = 0$. De plus, pour toute paire $m, n \in \mathbb{N}$, l'inégalité est vérifiée

$$\|u_m - u_n\|_{\mathrm{L}^\infty} \leqslant \|u_m - u_n\|_{\mathrm{H}^1}$$

Ce qui affirme que la suite est de Cauchy dans L^∞, et elle converge vers $u \in \mathrm{L}^\infty$. On peut donc passer à la limite dans l'inégalité

$$\|u_n\|_{\mathrm{L}^\infty} \leqslant \|u_n\|_{\mathrm{H}^1}$$

□

Preuve du lemme 2

Démonstration de la stabilité et de la règle de Leibniz D'abord, on note que $u \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ puisque $\mathrm{H}^1(\mathbb{R})$ s'injecte dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$, plus précisément

$$\exists C_\infty \in (0, +\infty) : \forall u \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}), \|u\|_{\mathrm{L}^\infty} \leqslant C_\infty \|u\|_{\mathrm{H}^1}$$

donc $uv \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Soient $(u_n)_{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ telles que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u$$
$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v$$

où la convergence a lieu dans $\mathrm{H}^1(\mathbb{R})$. L'injection est continue donc en particulier, les suites convergent également dans L^∞. Ainsi

$$u_n v_n \longrightarrow uv \in \mathrm{L}^\infty$$

Enfin, la convergence a également lieu dans L^2. Dans $\mathcal{C}_c^1$, on a

$$\begin{aligned}(u_n v_n)' &= u_n' v_n + u_n v_n' \\ (u_n v_n)' &\longrightarrow u'v + uv' \in \mathrm{L}^2\end{aligned}$$

Du fait que $(u_n v_n)'$ reste bornée dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, on a bien $uv \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R})$ et la règle de Leibniz.

Preuve de l'intégration par parties Soient $u, v \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R})$. Intégrons la formule de Leibniz, soient $y, x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(uv)' &= u'v + uv' \\ \int_y^x (u(z)v(z))'dz &= \int_y^x u'(z)v(z)dz + \int_y^x u(z)v'(z)dz \\ \int_y^x u'(z)v(z)dz &= \int_y^x (u(z)v(z))'dz - \int_y^x u(z)v'(z)dz \\ \int_y^x u'(z)v(z)dz &= [u(z)v(z)]_y^x - \int_y^x u(z)v'(z)dz \\ \int_y^x u'(z)v(z)dz &= u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x u'(z)v(z)dz\end{aligned}$$

D'où l'intégration par parties. □

Le dernier résultat concerne la stabilité par valeur absolue, vue comme application *presque* $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Lemme 4 (Dérivation d'un produit de composition)**.** *Soit $u \in H^1(\mathbb{R})$. Pour tout $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $G(0) = 0$, l'application $G(u) \in H^1(\mathbb{R})$ et on a*

$$G(u)'(x) = u'(x)G'(u(x))$$

Démonstration

Notons $M = \|u\|_{\mathrm{L}^\infty}$. Puisque $G(0) = 0$, il existe $C \in (0, +\infty)$ telle que

$$\forall s \in [-M, M] : |G(s)| \leqslant C|s|$$

Donc, puisque pour tout x dans $\mathbb{R}$, $u(x) \leqslant M$, on écrit

$$|G(u(x))| \leqslant C|u(x)|$$

Ce qui montre que $G(u)$ est dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. De même, on a l'estimation

$$\left|u'(x)G'(u(x))\right| \leqslant G'(M)|u'(x)|$$

qui montre que $u'G(u)$ est également dans L^2. Il reste à vérifier que $u'G'(u)$ vérifie

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R})} G(u(x))\phi'(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} u'(x)G'(u(x))\phi(x)dx$$

Par densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, il existe une suite (u_n) telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u$ où la convergence a lieu dans H^1 et dans L^∞. Ainsi $G(u_n) \to G(u)$ dans L^∞ et $u_n'G'(u_n) \to u'G'(u)$ dans L^2. Or, chaque terme de la suite vérifie

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} G(u_n)\phi' = -\int_{\mathbb{R}} u'G'(u)\phi$$

Le passage à la limite dans l'égalité précédente conclut la preuve. □

Bien sûr, l'application valeur absolue n'est pas $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, cependant, le lemme suivant permet d'étendre le résultat.

Lemme 5 (Stabilité par valeur absolue)**.** *Soit $u \in H^1(\mathbb{R})$. Soit alors*

$$u^+(x) := \sup(0, u(x))$$

Alors $u^+ \in H^1(\mathbb{R})$ et sa quasi-dérivée est

$$\nabla u^+(x) = 1|_{\{u>0\}}\nabla u(x)$$

Démonstration

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que

- $\forall x \leqslant 0, f(x) = 0$
- $\forall x \geqslant 1, f(x) = x$
- $\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leqslant 1$

On pose alors $(f_n)_n$ définie comme, pour $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = \frac{1}{n}f(nx)$$

Convergence de $(f_n(u))$ Soit x tel que $u(x) \leqslant 0$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n(u(x)) = \frac{1}{n}f(nu(x)) = 0$$

Si x est tel que $u(x) > 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} nu(x) = +\infty$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(u(x)) = u(x)$$

Donc $(f_n(u))_{\mathbb{N}}$ admet comme limite presque partout la fonction u^+. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(u(x))| \leqslant |u(x)|$$

Laquelle est de carré intégrable. Le théorème de convergence dominée exprime que $f_n(u) \to u^+$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

Estimation de la quasi-dérivée Calculons, grâce au lemme de dérivation des applications composées

$$\left\|\nabla\left(f_n(u)\right) - 1|_{\{u>0\}}\nabla u\right\|_{\mathrm{L}^2} = \left\|\left(f_n'(u) - 1|_{\{u>0\}}\right)\nabla u\right\|_{\mathrm{L}^2}$$

Où le théorème de convergence dominée permet de conclure que le membre de droite tend également vers 0 à mesure que n tend vers l'infini. Ainsi, la convergence a en fait lieu dans $\mathrm{H}^1(\mathbb{R})$:

$$\lim_{n\to+\infty} \left\|f_n(u) - u^+\right\|_{\mathrm{H}^1} = 0$$

et $\nabla u^+ = 1|_{\{u>0\}}$.

Conclusion Par densité. L'appartenance de $u \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R})$ permet de construire $(u_n)_{\mathbb{N}} \in \left(\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})\right)^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \to u$ dans H^1. Le lemme précédent nous permet d'écrire que, pour $m \in \mathbb{N}$

$$\|f_m(u_n) - f_m(u)\|_{\mathrm{H}^1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\mathrm{H}^1(\mathbb{R})$ est complet donc la suite $(f_m(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$, qui converge vers $f_m(u)$, a sa limite dans $\mathrm{H}^1(\mathbb{R})$. Donc la limite de $(f_m(u))_{\mathbb{N}}$, notée u^+ est dans $\mathrm{H}^1(\mathbb{R})$. □

Corollaire immédiat On peut appliquer le lemme précédent à $|u|$ où $u \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R})$. En effet, on exprime $|u|$ en fonction de u^+ :

$$|u| = u^+ + (-u)^+$$

On introduit le *problème de Schrödinger non-linéaire*, avec donnée $u_0 \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R})$,

$$(SNL) : \begin{cases} u : [0,T) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ i\partial_t u(t,x) + \Delta_x u(t,x) + \epsilon |u(t,x)|^{p-1} u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

Avant de commencer l'étude du problème, posons quelques notations. On définit d'abord la norme dite *espace-temps* suivante :

$$\|\cdot\|_{X_T} := \|\cdot\|_{\mathrm{L}^\infty([0,T),\mathrm{H}^1(\mathbb{R}))}$$

Ou encore

$$\|u\|_{X_T} = \sup\left(\left\{\|u(t)\|_{\mathrm{H}^1(\mathbb{R})} / t \in [0,T)\right\}\right)$$

Que l'on considère définie sur l'espace X_T

$$X_T := \mathcal{C}\left([0,T), \mathrm{H}^1(\mathbb{R})\right)$$

Ce qui justifie la définition de la norme L^∞ comme un sup et non comme un ess-sup. Cet espace fonctionnel est l'espace de Banach qui nous intéresse.

Lemme 6 (Contractance d'une fonctionnelle)**.** *Soit $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$. L'application*

$$\Phi : u \in X_T \longmapsto e^{it\Delta} u_0 + i\epsilon \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} \left(u(s,x)|u(s,x)|^{p-1}\right) ds$$

est contractante sur une boule de X_T muni de $\|\cdot\|_{X_T}$ lorsque T est suffisamment petit.

Preuve du lemme

Définition On note, avec $c \in (0,+\infty)$,

$$\mathrm{B}_T := \left\{u \in \mathrm{X}_T / \|u\|_{\mathrm{X}_T} \leqslant c\,\|u_0\|_{\mathrm{H}^1}\right\}$$

Soit donc $T \in (0,+\infty)$.

Φ est à valeurs dans $\mathbf{B}_T$ Soit $u \in \mathrm{B}_T$. On souhaite montrer que $\Phi(u)$ vérifie l'inégalité

$$\|\Phi(u)\|_{\mathrm{X}_T} \leqslant c\,\|u_0\|_{\mathrm{H}^1}$$

Par définition :

$$\|\Phi(u)\|_{\mathrm{X}_T} = \sup\left(\{\|\Phi(u)(t)\|_{\mathrm{H}^1} / t \in [0,T]\}\right)$$

Avec $t \in [0,T]$, on estime la norme L^2 de $\Phi(u)$

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u)(t)\|_{\mathrm{L}^2} &= \left\| e^{it\Delta}u_0 + i\epsilon\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}\left(u(s,x)|u(s,x)|^{p-1}\right)ds \right\|_{L^2} \\
&\leqslant \left\|e^{it\Delta}u_0\right\|_{\mathrm{L}^2} + \left\|\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}\left(u(s,x)|u(s,x)|^{p-1}\right)ds\right\|_{L^2} \\
&\leqslant \|u_0\|_{\mathrm{L}^2} + \int_0^t \left\|e^{i(t-s)\Delta}\left(u(s,x)|u(s,x)|^{p-1}\right)\right\|_{\mathrm{L}^2} ds \\
&\leqslant \|u_0\|_{\mathrm{L}^2} + t\left\|u(t,x)|u(t,x)|^{p-1}\right\|_{\mathrm{L}^2}
\end{aligned}$$

On estime maintenant la norme L^2 de sa dérivée spatiale :

$$\begin{aligned}
\|\partial_x\Phi(u)\|_{\mathrm{L}^2} &= \left\|\partial_x\left(e^{it\Delta}u_0 + i\epsilon\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}\left(u(s,x)|u(s,x)|^{p-1}\right)ds\right)\right\|_{\mathrm{L}^2} \\
&= \left\|\partial_x\left(e^{it\Delta}u_0\right) + i\epsilon\partial_x\left(\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}\left(u(s,x)|u(s,x)|^{p-1}\right)\right)\right\|_{\mathrm{L}^2}
\end{aligned}$$

La dérivée spatiale commute avec le produit de convolution, de sorte que le premier terme s'exprime simplement, et on a

$$\|\partial_x\Phi(u)\|_{\mathrm{L}^2} = \left\|e^{it\Delta}\partial_x u_0 + i\epsilon\partial_x\left(\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}\left(u(s,x)|u(s,x)|^{p-1}\right)\right)ds\right\|_{\mathrm{L}^2}$$

On applique l'inégalité triangulaire

$$\|\partial_x\Phi(u)\|_{\mathrm{L}^2} \leqslant \left\|e^{it\Delta}\partial_x u_0\right\|_{\mathrm{L}^2} + \left\|\partial_x\left(\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}\left(u(s,x)|u(s,x)|^{p-1}\right)\right)ds\right\|_{\mathrm{L}^2}$$

ou

$$\|\partial_x\Phi(u)\|_{\mathrm{L}^2} \leqslant \|\partial_x u_0\|_{\mathrm{L}^2} + \left\|\partial_x\left(\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}\left(u(s,x)|u(s,x)|^{p-1}\right)\right)ds\right\|_{\mathrm{L}^2}$$

On applique maintenant le théorème de dérivation sous le signe intégrale pour permuter les symboles intégration par rapport à s et ∂_x puis la commutativité entre ∂_x et $e^{i(t-s)\Delta}$ pour obtenir enfin

$$\begin{aligned}
\|\partial_x\Phi(u)\|_{\mathrm{L}^2} &\leqslant \|\partial_x u_0\|_{\mathrm{L}^2} + \left\|\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}\partial_x\left(u(s,x)|u(s,x)|^{p-1}\right)\right\|_{\mathrm{L}^2} \\
&\leqslant \|\partial_x u_0\|_{\mathrm{L}^2} + \int_0^t \left\|e^{i(t-s)\Delta}\partial_x\left(u(s,x)|u(s,x)|^{p-1}\right)\right\|_{\mathrm{L}^2} ds \\
&\leqslant \|\partial_x u_0\|_{\mathrm{L}^2} + t\left\|\partial_x\left(u(s,x)|u(s,x)|^{p-1}\right)\right\|_{\mathrm{L}^2}
\end{aligned}$$

On peut maintenant estimer la norme H^1 de $\Phi(u)$ en fonction de t

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u)(t)\|_{\mathrm{H}^1} &= \|\Phi(u)(t)\|_{\mathrm{L}^2} + \|\partial_x\Phi(u)(t)\|_{\mathrm{L}^2} \\
&\leqslant \|u_0\|_{\mathrm{L}^2} + t\,\|u(t,x)\|_{\mathrm{L}^2}^p + \|\partial_x u_0\|_{\mathrm{L}^2} + t\left\|\partial_x\left(u(t,x)|u(t,x)|^{p-1}\right)\right\|_{\mathrm{L}^2} \\
&\leqslant \|u_0\|_{\mathrm{H}^1} + t\left\|u(t,x)|u(t,x)|^{p-1}\right\|_{\mathrm{H}^1}
\end{aligned}$$

Le second terme demande une estimation supplémentaire, u étant dans B_T, elle vérifie $\|u\|_{\mathrm{X}_T} \leqslant c\,\|u_0\|_{H^1}$. De plus, on note que $\forall t,x \in [0,T]\times\mathbb{R} : u(t,x) \leqslant |u(t,x)|$ donc

$$u(t,x)|u(t,x)|^{p-1} \leqslant |u(t,x)|^p$$

Enfn, la norme H^1 est sous-multiplicative, ce qui permet d'écrire

$$\left\|u(t,x)|u(t,x)|^{p-1}\right\|_{\mathrm{H}^1} \leqslant \|u(t,x)\|_{\mathrm{H}^1}^p$$

On reprend alors la norme H^1 de $\Phi(u)$

$$\|\Phi(u)(t)\|_{\mathrm{H}^1} \leqslant \|u_0\|_{\mathrm{H}^1} + t\,\|u(t,x)\|_{\mathrm{H}^1}^p$$

On peut enfin estimer la norme X_T de $\Phi(u)$

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u)\|_{\mathrm{X}_T} &= \sup\left(\{\|\Phi(u)\|_{\mathrm{H}^1} / t \in [0,T]\}\right) \\
&\leqslant \sup\left(\left\{\|u_0\|_{\mathrm{H}^1} + t\,\|u(t,x)\|_{\mathrm{H}^1}^p / t \in [0,T]\right\}\right) \\
&\leqslant \|u_0\|_{\mathrm{H}^1} + T\,\|u(t,x)\|_{\mathrm{X}_T}^p \\
&\leqslant \|u_0\|_{\mathrm{H}^1} + Tc^p\,\|u_0\|_{\mathrm{H}^1}^p \\
&\leqslant \left(1 + Tc^p\,\|u_0\|_{\mathrm{H}^1}^{p-1}\right)\|u_0\|_{\mathrm{H}^1}
\end{aligned}$$

On peut alors contraindre T pour vérifier l'inégalité définissant B_T :

$$\begin{aligned}
&1 + Tc^p\,\|u_0\|_{\mathrm{H}^1}^{p-1} \leqslant c \\
\iff &T \leqslant \frac{c-1}{c^p\,\|u_0\|_{\mathrm{H}^1}^{p-1}}
\end{aligned}$$

La boule B_T fermée associée est donc préservée par Φ pour peu que c soit plus grand que 1, ce que je ne sais pas démontrer.

Φ est lipschitzienne sur $\mathbf{X}_T$ On souhaite établir le fait suivant

$$\exists k \in (0,+\infty), \forall u,v \in \mathrm{X}_T, \|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{\mathrm{X}_T} \leqslant k\,\|u-v\|_{\mathrm{X}_T}$$

Soient $u, v \in \mathrm{X}_T$. Alors

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{\mathrm{X}_T} &= \sup\left(\{\|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_{\mathrm{H}^1} / t \in [0,T]\}\right) \\
&= \sup\left(\left\{\left\|\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}\left(u(s,x)|u(s,x)|^{p-1} - v(s,x)|v(s,x)|^{p-1}\right)ds\right\|_{\mathrm{H}^1} / t \in [0,T]\right\}\right) \\
&\leqslant \sup\left(\left\{\int_0^t \left\|e^{i(t-s)\Delta}\left(u(s,x)|u(s,x)|^{p-1} - v(s,x)|v(s,x)|^{p-1}\right)\right\|_{\mathrm{H}^1} ds / t \in [0,T]\right\}\right) \\
&\leqslant \sup\left(\left\{\int_0^T \left\|e^{i(t-s)\Delta}\left(u(s,x)|u(s,x)|^{p-1} - v(s,x)|v(s,x)|^{p-1}\right)\right\|_{\mathrm{H}^1} ds / t \in [0,T]\right\}\right) \\
&\leqslant \int_0^T \sup\left(\left\{\left\|\left(u(s,x)|u(s,x)|^{p-1} - v(s,x)|v(s,x)|^{p-1}\right)\right\|_{\mathrm{H}^1} / t \in [0,T]\right\}\right) ds \\
&\leqslant T\left\|u(s,x)|u(s,x)|^{p-1} - v(s,x)|v(s,x)|^{p-1}\right\|_{\mathrm{X}_T}
\end{aligned}$$

Il reste à estimer la norme X_T. Commençons par écrire l'identité remarquable

$$u|u|^{p-1} - v|v|^{p-1} = (u-v)\sum_{k=0}^{p-2}\left(|u|^k|v|^{p-2-k}\right)$$

et cette somme possède $p-1$ termes. Donc

$$u|u|^{p-1} - v|v|^{p-1} \leqslant (u-v)\left((p-1)\max\left(\{|u|,|v|\}\right)^{p-1}\right)$$

et cette inégalité est vraie en tout $t, x \in [0,T] \times \mathbb{R}$. D'où

$$\left\|u(t)|u(t)|^{p-1} - v(t)|v(t)|^{p-1}\right\|_{\mathrm{X}_T} \leqslant (p-1)\left\|\max\left(\{|u|,|v|\}\right)^{p-1}\right\|_{\mathrm{X}_T}\|u-v\|_{\mathrm{X}_T}$$

Il reste à préciser le facteur $\left\|\max\left(\{|u|,|v|\}\right)^{p-1}\right\|_{\mathrm{X}_T}$. En particulier, on doit montrer que k construit est inférieur à 1. On sait que quel que soient $t,x \in [0,T]\times\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\max\left(\{|u(t,x)|,|v(t,x)|\}\right) \leqslant |u(t,x)| + |v(t,x)| \\
\Rightarrow &\left\|\max\left(\{|u(t,x)|,|v(t,x)|\}\right)\right\|_{\mathrm{H}^1} \leqslant \||u(t,x)|\|_{\mathrm{H}^1} + \||v(t,x)|\|_{\mathrm{H}^1} \\
\Rightarrow &\left\|\max\left(\{|u(t,x)|,|v(t,x)|\}\right)\right\|_{\mathrm{X}_T} \leqslant \||u|\|_{\mathrm{X}_T} + \||v|\|_{\mathrm{X}_T}
\end{aligned}$$

On reprend alors l'estimation de Φ

$$\|\Phi(u)-\Phi(v)\|_{\mathrm{X}_T} \leqslant T(p-1)\left(\|u\|_{\mathrm{X}_T}+\|v\|_{\mathrm{X}_T}\right)^{p-1}\|u-v\|_{\mathrm{X}_T}$$

□

Proposition 6 (Résolution locale du problème de Cauchy)**.** *Soit $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$. Soit $p \in \mathbb{N}-\{0,1\}$. Alors il existe $T \in (0,+\infty)$ tel qu'il existe une unique solution maximale u définie sur $[0,T)$ à valeurs dans $H^1(\mathbb{R})$ et continue par rapport à t sur ce demi-intervalle.*

Démonstration

Existence L'existence d'une solution maximale au problème de Cauchy posé en début de cette partie est une conséquence directe du lemme sur la contractance d'une fonctionnelle. En effet, B_T est une boule fermée de l'espace métrique complet X_T. On a montré que Φ donnée par la méthode de Duhamel appliquée au problème de Schrödinger non-linéaire est contractante sur B_T, elle admet donc un unique point fixe sur cette boule, et ce point fixe est solution du problème, au moins définie sur $[0,T)$.

Régularité On montre que le point fixe u de Φ a bien la régularité annoncée : $u \in \mathcal{C}\left([0,T),\mathrm{H}^1(\mathbb{R})\right)$. Pour cela, on choisit v dans cet espace. On a prouvé plus tôt que $e^{it\Delta}v$ est bien $\mathcal{C}\left([0,T),\mathrm{H}^1(\mathbb{R})\right)$. De plus, la formule de Duhamel donne

$$u = \Phi(u) = e^{it\Delta}\left(u_0 + i\epsilon\Phi_1(u)\right)$$

où $\Phi_1 = \int_0^t e^{-is\Delta}\left(u(s)|u(s)|^{p-1}\right)ds$. On vérifie donc que dès que $u \in \mathrm{X}_T$ on a bien $\Phi_1(u) \in \mathcal{C}\left([0,T),\mathrm{H}^1(\mathbb{R})\right)$. Soient $t_1,t_2 \in (0,T)$,

$$\begin{aligned}
\|\Phi_1(u)(t_1)-\Phi_1(u)(t_2)\|_{\mathrm{L}^2} &= \left\|\int_{t_2}^{t_1} e^{-is\Delta}\left(u(s)|u(s)|^{p-1}\right)ds\right\|_{\mathrm{L}^2} \\
&\leqslant \int_{t_2}^{t_1}\left\|e^{-is\Delta}\left(u(s)|u(s)|^{p-1}\right)\right\|_{\mathrm{L}^2} ds \\
&\leqslant (t_1-t_2)\left\|u|u|^{p-1}\right\|_{\mathrm{L}^\infty_T\mathrm{L}^2_x} \\
&\leqslant (t_1-t_2)\left\|u|u|\right\|^{p-1}_{\mathrm{L}^\infty_T\mathrm{L}^2_x} \\
&\leqslant (t_1-t_2)\left\|u|u|\right\|^{p-1}_{\mathrm{X}_T}
\end{aligned}$$

On applique maintenant une dérivée d'espace :

$$\begin{aligned}
\|\partial_x\Phi_1(u)(t_1)-\partial_x\Phi_1(u)(t_2)\|_{\mathrm{L}^2} &\leqslant \int_{t_2}^{t_1}\left\|e^{-is\Delta}\partial_x\left(u(s)|u(s)|^{p-1}\right)\right\|_{\mathrm{L}^2} ds \\
&\leqslant \int_{t_2}^{t_1}\left\|\partial_x\left(u(s)|u(s)|^{p-1}\right)\right\|_{\mathrm{L}^2} ds \\
&\leqslant \int_{t_2}^{t_1}\left\|(\partial_x u(s))\left((1+p-1)|u(s)|^{p-1}\right)\right\|_{\mathrm{L}^2} ds \\
&\leqslant \int_{t_2}^{t_1}\left\|(\partial_x u(s))\left(p|u(s)|^{p-1}\right)\right\|_{\mathrm{L}^2} ds \\
&\leqslant p(t_1-t_2)\left\|(\partial_x u(s))\left(|u(s)|^{p-1}\right)\right\|_{\mathrm{L}^\infty_T\mathrm{L}^2}
\end{aligned}$$

Ces deux estimations assurent la continuité de $\Phi(u)$ en la variable temporelle.

Unicité Soit u la solution maximale donnée par le développement précédent. Soit v une autre solution régulière du problème de Cauchy non-linéaire. On note M une borne commune pour les deux normes $\|u\|_{\mathrm{L}^\infty_T \mathrm{H}^1_x}$ et $\|v\|_{\mathrm{L}^\infty_T \mathrm{H}^1_x}$. Les résultats sur les injections de Sobolev et l'inégalité de Hölder permettent de montrer que $v|v|^{p-1}$ est dans $\mathrm{L}^1_T \mathrm{L}^2_x$. Le fait que v est solution permet d'écrire que v est point fixe pour Φ. Ainsi, pour tout $T_0 \in (0, T)$,

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{\mathrm{L}^1_{T_0} \mathrm{L}^2_x} &= \|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{\mathrm{L}^1_{T_0} \mathrm{L}^2_x} \\ &\leqslant C T_0 M^2 \|u - v\|_{\mathrm{L}^\infty_{T_0} \mathrm{H}^1_x} \end{aligned}$$

pour un certain C réel strictement positif. Cela signifie en particulier que la norme de $u - v$ doit être nulle sur l'intervalle $[0, T_0]$. Donc la solution est unique sur cet intervalle. Quitte à itérer, on peut montrer que c'est vrai que sur $[0, 2T_0]$, $[0, 3T_0]$ ... jusqu'à recouvrir $[0, T)$. □

Lemme 7 (Explosion en temps fini). *Soit u l'unique solution maximale régulière donnée par la proposition précédente. Alors si T est fini, on peut prouver que*

$$\lim_{t \to T} \|u(t)\|_{H^1} = +\infty$$

Démonstration

Par l'absurde, on suppose qu'il existe $M > 0$ tel que, quel que soit $t \in \mathbb{R}$,

$$\|u(t)\|_{\mathrm{H}^1} \leqslant M$$

Montrons alors que cette solution n'est pas maximale. En effet, soit $t_0 \in [0, T)$, et soit le problème de Cauchy dont on translate la condition initiale t_0 par son flot. On peut construire $u(t)$ la solution vérifiant $u(t_0)$ en $t = t_0$ sur un intervalle de longueur CM^{-p+1} où C est imposé par la construction de B_T - voir le lemme sur l'aspect contractant de la fonctionnelle Φ. Alors, en prenant t_0 tel que $T - t_0 < CM^{-p+1}$, on construit une solution définie au-delà du temps T. Cela revient à dire que la solution u n'est en fait pas maximale. C'est absurde, et on doit admettre que la borne de la norme H^1 est fausse. D'où le lemme. □

Références

[1] Anne-Laure Dalibard. *Cours M2 "Introduction aux EDP d'évolution"*. https://ljll.math.upmc.fr/dalibard/enseignement.html.

[2] Jean-Yves Chemin. *Notes du cours de M1 : bases of functional analysis.* https://www.ljll.math.upmc.fr/~chemin/pdf/4M005_2018_W.pdf

[3] François Golse, *Distributions, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles* http://www.cmls.polytechnique.fr/perso/golse/MAT431-10/POLY431.pdf

[4] Raphael Danchin, Pierre Raphael, *Solitons, dispersion et explosion, une introduction à l'étude des ondes non-linéaires* https://perso.math.u-pem.fr/danchin.raphael/cours/ananonlinX14.pdf