Die Kuen'sche Fläche

Veronica Schier, Adrián Löwenberg Casas,
Julien Caselmann

30. Januar 2020

Ursprung und Entdeckung

- benannt nach Theodor Kuen (Reallehrer, später OstR)
- nach Gauß' Tod: starkes Interesse an Flächen konstanter negativer Krümmung
- Bour 1857: jede Schraubenfläche ist auf Rotationsfläche abwickelbar

Ursprung und Entdeckung

- 1860 Preisaufgabe der Pariser Akademie: Methoden, um aus gegebener Fläche darauf abwickelbare Flächen zu erzeugen[Scriba]
- Entdeckung: pseudosphärische Flächen korrelieren direkt mit den Lösungen der Sinus-Gordon-Gleichung
- normalerweise keine expliziten Lösungen für solche PDEs $\Rightarrow$Bäcklund: Soliton-Lösungen [Bruter]

Ursprung und Entdeckung

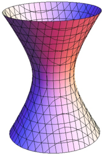
- Kuen experimentierte mit Bianchi-Transformationen und der Pseudosphäre
- 1884: Kuen entdeckt die außergewöhnlich geformte Fläche

1. Pseudosphäre
2. Patches und Tshebyshev-Patches
3. Bianchi-Transformationen

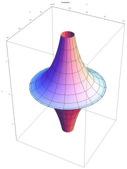
Pseudosphäre

- untersucht von Ferdinand Minding und Eugene Beltrami in 1868
- Differentialgeometrie: Fläche mit konstanter, negativer Gaußkrümmung
- Pseudosphäre mit Radius R: Fläche mit konstanter, negativer Gaußkrümmung $-\frac{1}{R^2}$ [Mathcurve]

Beispiele einer Pseudosphäre



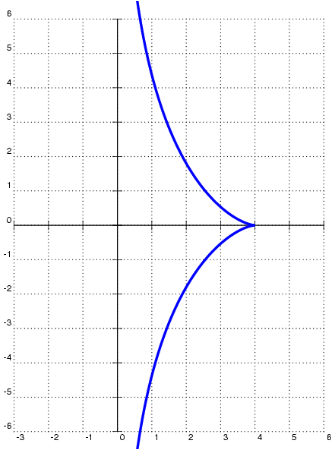
(a) Hyperboloid



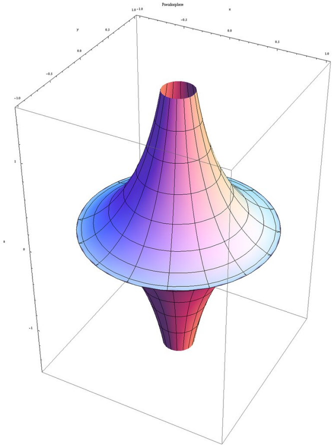
(b) Traktrikoid

(c) theoretische Oberflächen

Beispiel: Traktrikoid



(a) Traktrix



(b) Traktrikoid

Definition: Patch

Definition nach [Gray]

*Ein **Patch bzw. eine lokale Fläche** ist eine differenzierbare Funktion $x : U \to \mathbb{R}^n$, mit $U \subset \mathbb{R}^2$ offen.*

Definition: Tshebyshev-Patch

Definition nach [Gray]

*Ein **Tshebyshev-Patch** mit Radius a ist ein Patch $y : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, dessen Erste Fundamentalform $ds^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2$ folgende Eigenschaft besitzt:*
$E = G = a^2$

Tshebyshev-Patch zweiter Art mit Winkelfunktion θ

Lemma nach [Gray]

CSU impliziert
$F^2 = \langle y_p, y_q \rangle^2 \leq \|y_p\|^2 \|y_q\|^2 = EQ = a^4$, *also:* $F = a^2 \cos\omega$.
Die Metrik eines Tshebyshev-Patches mit Radius a kann also dargestellt werden als:
$ds^2 = a^2(dp^2 + 2\cos\omega dpdq + dq^2)$

Wir nennen $\theta = \frac{\omega}{2}$ *die Winkelfunktion des Tshebyshev-Patches.*

Tshebyshev Parametrisierung einer Pseudosphäre

Definition nach [Gray]

*Sei $a > 0$. Die **Tshebyshev Parametrisierung** einer Pseudosphäre mit Radius a ist die Abbildung von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch:*

$$(u, v) \mapsto a\left(\frac{cos(v)}{cosh(u)}, \frac{sin(u)}{cosh(u)}, u - tanh(u)\right).$$

Tshebyshev Parametrisierung einer Pseudosphäre

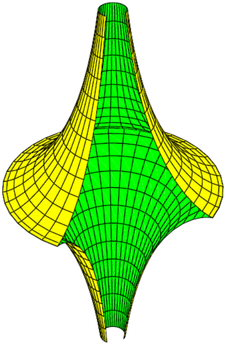


Abbildung: Pseudosphäre nach Tshebyshev Parametrisierung

Bianchi - Transformationen

Definition nach [Gray]

Sei $\mathcal{M}$ eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ mit konstanter Gaußkrümmung $-\frac{1}{a^2}$, $a > 0$.
Eine Fläche $\mathcal{N}$ mit Normalenfeld $U_{\mathcal{N}}$ ist eine ***Bianchi-Transformation*** *von $\mathcal{M}$, wenn es eine Funktion $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ gibt, sodass $\forall p \in \mathcal{M}$:*

- $\|\phi(p) - p\| = a$
- *$\phi(p) - p$ ist parallel zu einem $v \in T_p\mathcal{M}$*
- *$U_{\mathcal{N}}(\phi(p))$ ist parallel zu einem $v \in T_p\mathcal{M}$ und senkrecht auf $\phi(p) - p$*

Bianchi - Transformationen

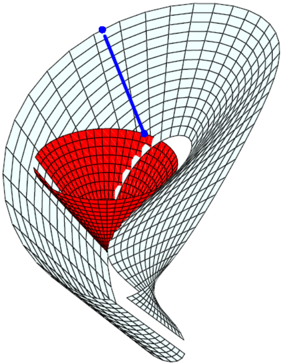


Abbildung: Erzeugung einer Fläche durch Translation der Punkte eines runden Kegels

Funfact: Erzeugung von Pseudosphären mit Bianchi-Transformationen

- wenden Bianchi-Transformation auf den Patch $x(u,v) = (0, 0, \epsilon a u)$ an, mit $0 < a \equiv const, \epsilon = \pm 1$
- Ergebnis:

$$\hat{x} = a\Big(\delta cos(v) sech(u), \delta sin(v) sech(u), \epsilon\big(u - tanh(u)\big)\Big)$$

$\Rightarrow$ stimmt überein mit dem Patch:

$$(u,v) \mapsto \left(\frac{a\delta cos(v)}{cosh(u)}, \frac{a\delta sin(v)}{cosh(u)}, a\epsilon\big(u - tanh(u)\big)\right)$$

Kuen'sche Fläche als Bianchi-Transformation der Pseudosphäre

Lemma nach [Gray]

Sei $\hat{x}$ Bianchi-Transformation der Tshebyshev-Parametrisierung der Pseudosphäre und setze $\theta := 2\arctan(e^u)$. Außerdem sei $\hat{\theta}$ Winkelfunktion von $\hat{x}$. Dann:

$$\hat{\theta}(u,v) = 2\arctan\left(-\frac{v}{\cosh(u)}\right).$$

Kuen'sche Fläche als Bianchi-Transformation der Pseudosphäre

Lemma nach [Gray]

Wenn $\hat{\theta}$ so ist wie im Lemma gerade, dann:

$$\begin{aligned} cos(\hat{\theta}) &= -\frac{v^2 - cosh(u)}{v^2 + cosh^2(u)}, \\ sin(\hat{\theta}) &= \frac{-2vcosh(u)}{v^2 + cosh^2(u)} \end{aligned}$$

Kuen'sche Fläche als Bianchi-Transformation der Pseudosphäre

Satz nach [Gray]

Die Bianchi-Transformation der Tshebyshev-Parametrisierung der Pseudosphäre ist gegeben durch Gleichsetzen von $\hat{x}$ mit:

$$\left(\frac{2\cosh(u)\Big(\cos(v)+v\sin(v)\Big)}{v^2+\cosh^2(u)}, \frac{2\cosh(u)\Big(\sin(v)-v\cos(v)\Big)}{v^2+\cosh^2(u)}, u-\frac{\sinh(2u)}{v^2+\cosh^2(u)}\right)$$

Parametrisierung der Kuen'schen Fläche

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2cosh(u)*(cos(v)+v*sin(v))}{v^2+cosh(u)^2} \\ \\ \frac{2cosh(u)*(sin(v)-v*cos(v))}{v^2+cosh(u)^2} \\ \\ u - \frac{sinh(2u)}{v^2+cosh(u)^2} \end{pmatrix} u, v \in [-2\pi, 2\pi]$$

Eigenschaften der Kuenschen Fläche

- Fläche konstanter Gaußkrümmung, aber **keine** Drehfläche [Wünsch]
- 2-soliton Lösung der Sinus-Gordon-Gleichung [Bruter]

Sinus-Gordon-Gleichung

Gleichung

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + sin(\phi) = 0$$

Funfact:

Im 20. Jahrhundert als Modell einer relativistischen Quantenfeldtheorie erneut aufgetaucht[Bruter]

Eigenschaften der Kuen'schen Fläche

- Fläche konstanter Gaußkrümmung, aber **keine** Drehfläche [Wünsch]
- 2-soliton Lösung der Sinus-Gordon-Gleichung [Bruter]
- beliebtes Modeaccessoire

Kuen'sche Fläche als Statussymbol

Kuen'sche Fläche als Statussymbol

Kuen'sche Fläche als Briefbeschwerer

Mathcurve
The pseudosphere
https://www.mathcurve.com/surfaces.gb/pseudosphere/pseudosphere.shtml
5. Dezember 2019

Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica
Alfred Gray
1998

5000 Jahre Geometrie: Geschichte, Kulturen, Menschen
Christoph Scriba, Peter Schreiber
Springer Verlag
2009

Differentialgeometrie: Kurven und Flächen
Volkmar Wünsch
Springer Verlag
1997

Mathematics and Modern Art
Claude Bruter
Springer Verlag
2012