Die Kuen'sche Fläche

Veronica Schier, Adrian Löwenberg Casas,
Julien Caselmann

26. Januar 2020

Ursprung und Entdeckung

- benannt nach Theodor Kuen (Reallehrer, später OstR)
- nach Gauß' Tod: starkes Interesse an Flächen konstanter negativer Krümmung
- Bour 1857: jede Schraubenfläche ist auf Rotationsfläche abwickelbar

Ursprung und Entdeckung

- 1860: Preisaufgabe der Pariser Akademie: Methoden, um aus gegebener Fläche darauf abwickelbare Flächen zu erzeugen $\Rightarrow$ Bäcklund, Bianchi, Lie etc.[Scriba]
- Entdeckung: pseudosphärische Flächen korrelieren direkt mit den Lösungen der Sinus-Gordon-Gleichung
- normalerweise keine expliziten Lösungen, aber Bäcklund: Folge expliziter Lösungen: Soliton-Lösungen, gehören zu „besonders schönen und symmetrischen pseudosphärischen Flächen“[Bruter]

Ursprung und Entdeckung

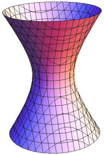
- Kuen experimentierte mit Bianchi-Transformationen und der Pseudosphäre
- 1884: Kuen entdeckt die außergewöhnlich geformte Fläche

1. Pseudosphäre
2. Tshebyshev-Parametrisierung
3. Bianchi-Transformationen

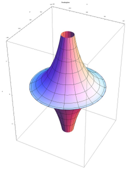
Pseudosphäre

- untersucht von Ferdinand Minding und Eugene Beltrami in 1868
- Differentialgeometrie: Fläche mit konstanter, negativer Gaußkrümmung
- Pseudosphäre mit Radius R: Fläche mit konstanter, negativer Gaußkrümmung $-\frac{1}{R^2}$ [Mathcurve]

Beispiele einer Pseudosphäre



(a) Hyperboloid



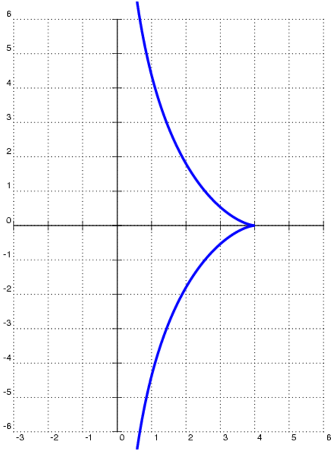
(b) Traktrikoid

(c) theoretische Oberflächen

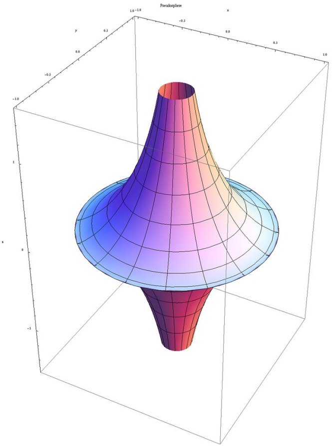
Beispiel: Traktrikoid

Formel für Traktrix pls

Beispiel: Traktrikoid



(a) Traktrix



(b) Traktrikoid

Tshebyshev Parametrisierung einer Pseudosphäre

Definition nach [Gray]

*Sei $a > 0$. Die **Tshebyshev Parametrisierung** einer Pseudosphäre mit Radius a ist die Abbildung von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch:*

$$(u, v) \mapsto a\left(\frac{cos(v)}{cosh(u)}, \frac{sin(u)}{cosh(u)}, u - tanh(u)\right).$$

Tshebyshev Parametrisierung einer Pseudosphäre

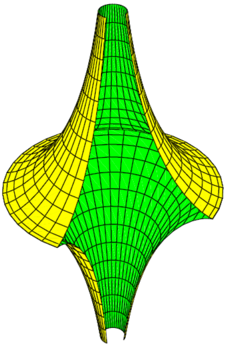


Abbildung: Pseudosphäre nach Tshebyshev Parametrisierung

Bianchi - Transformationen

Definition nach [Gray]

Sei $\mathcal{M}$ *eine Fläche im* $\mathbb{R}^3$ *mit konstanter Gaußkrümmung* $-\frac{1}{a^2}$, $a > 0$.
Eine Fläche $\mathcal{N}$ *mit Normalenfeld* $U_{\mathcal{N}}$ *ist eine* ***Bianchi-Transformation*** *von* $\mathcal{M}$*, wenn es eine Funktion* $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ *gibt, sodass* $\forall p \in \mathcal{M}$:

- $\|\phi(p) - p\| = a$
- $\phi(p) - p$ *ist parallel zu einem* $v \in T_p\mathcal{M}$
- $U_{\mathcal{N}}(\phi(p))$ *ist parallel zu einem* $v \in T_p\mathcal{M}$ *und senkrecht auf* $\phi(p) - p$

Bianchi - Transformationen

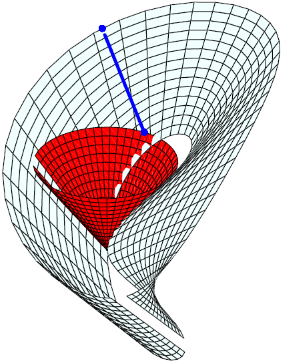


Abbildung: Erzeugung einer Fläche durch Translation der Punkte eines runden Kegels

Funfact: Erzeugung von Pseudosphären mit Bianchi-Transformationen

Definition nach [Gray]

*Ein **Patch bzw. eine lokale Fläche** ist eine differenzierbare Funktion $x : U \to \mathbb{R}^n$, mit $U \subset \mathbb{R}^2$ offen.*

Funfact: Erzeugung von Pseudosphären mit Bianchi-Transformationen

- wenden Bianchi-Transformation auf den Patch $x(u,v) = (0,0,\epsilon a u)$ an, mit $0 < a \equiv const, \epsilon = \pm 1$
- Ergebnis:

$$\hat{x} = a\Big(\delta cos(v) sech(u), \delta sin(v) sech(u), \epsilon\big(u - tanh(u)\big)\Big)$$

$\Rightarrow$ stimmt überein mit dem Patch:

$$(u,v) \mapsto \left(\frac{a\delta cos(v)}{cosh(u)}, \frac{a\delta sin(v)}{cosh(u)}, a\epsilon(u - tanh(u)\right)$$

Kuen'sche Fläche als Bianchi-Transformation der Pseudosphäre

Lemma nach [Gray]

Sei $\hat{x}$ Bianchi-Transformation der Tshebyshev-Parametrisierung der Pseudosphäre und setze $\theta := 2\arctan(e^u)$. Außerdem sei $\hat{\theta}$ Winkelfunktion von $\hat{x}$. Dann:

$$\hat{\theta}(u, v) = 2arctan\left(-\frac{v}{cosh(u)}\right).$$

Kuen'sche Fläche als Bianchi-Transformation der Pseudosphäre

Lemma nach [Gray]

Wenn $\hat{\theta}$ so ist wie im Lemma gerade, dann:

$$\cos(\hat{\theta}) = -\frac{v^2 - \cosh(u)}{v^2 + \cosh^2(u)},$$

$$\sin(\hat{\theta}) = \frac{-2v\cosh(u)}{v^2 + \cosh^2(u)}$$

Kuen'sche Fläche als Bianchi-Transformation der Pseudosphäre

Satz nach [Gray]

Die Bianchi-Transformation der Tshebyshev-Parametrisierung der Pseudosphäre ist gegeben durch Gleichsetzen von $\hat{x}$ mit:

$$\left(\frac{2\cosh(u)\left(\cos(v)+v\sin(v)\right)}{v^2+\cosh^2(u)}, \frac{2\cosh(u)\left(\sin(v)-v\cos(v)\right)}{v^2+\cosh^2(u)}, u-\frac{\sinh(2u)}{v^2+\cosh^2(u)}\right)$$

Parametrisierung der Kuen'schen Fläche

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2cosh(u)*(cos(v)+v*sin(v))}{v^2+cosh(u)^2} \\ \\ \frac{2cosh(u)*(sin(v)-v*cos(v))}{v^2+cosh(u)^2} \\ \\ \frac{sinh(2u)}{v^2+cosh(u)^2} \end{pmatrix} u, v \in [-2\pi, 2\pi]$$

Eigenschaften der Kuenschen Fläche

- Fläche konstanter Gaußkrümmung, aber **keine** Drehfläche [Wünsch]
- 2-soliton Lösung der Sinus-Gordon-Gleichung [Bruter]

Sinus-Gordon-Gleichung

Gleichung

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + sin(\phi) = 0$$

Funfact:

Im 20. Jahrhundert taucht die Sinus-Gordon-Gleichung in anderem Kontext erneut auf: als Modell einer relativistischen Quantenfeldtheorie[Bruter]

Eigenschaften der Kuen'schen Fläche

- Fläche konstanter Gaußkrümmung, aber **keine** Drehfläche [Wünsch]
- 2-soliton Lösung der Sinus-Gordon-Gleichung [Bruter]
- beliebtes Modeaccessoire

Kuen'sche Fläche als Statussymbol

Kuen'sche Fläche als Statussymbol

Kuen'sche Fläche als Briefbeschwerer

Mathcurve
The pseudosphere
https://www.mathcurve.com/surfaces.gb/pseudosphere/pseudosphere.shtml
5. Dezember 2019

Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica
Alfred Gray
1998

5000 Jahre Geometrie: Geschichte, Kulturen, Menschen
Christoph Scriba, Peter Schreiber
Springer Verlag
2009

Differentialgeometrie: Kurven und Flächen
Volkmar Wünsch
Springer Verlag
1997

Mathematics and Modern Art
Claude Bruter
Springer Verlag
2012