Bin nicht ganz glücklich damit: Eigentlich sollte N nicht mehr vorkommen, und auch I durch i: I/n ersetzt sein...

first try (07/05/2020)

Proposition 0.1. *Let $N_X = n_X N, N_Y = n_Y N$. Then, the determinstic limit for $x(t) = \frac{X_t}{N}$ reads*

(+) den Parameter erklären Sie vorher? (−) Mit "n" skalieren, sonst fliegt der beim Limes raus!

$$\dot{x} = -\mu x \frac{\theta_Y(N - x + n_Y + bN + 1 - \epsilon + \kappa\omega)}{(x + n_X + aI) + \theta_Y(N - x + n_Y + bN + 1 - \epsilon + \kappa\omega)} + \mu(1-x)\frac{\theta_X(x + n_X + aI)}{\theta_X(x + n_X + aI) + (N - x + n_Y + bN + 1 - \epsilon + \kappa\omega)} \tag{1}$$

Proof.

1. Master equation

For simplicity, define

persönlich finde ich $f_+(..)$ bzw. $f_-(..)$ suggestiver...

vielleicht: $\Delta(X_t) =$

$$\Delta := \frac{\theta_X(X_t + N_X + aI)}{\theta_X(X_t + N_X + aI) + (N - X_t + N_Y + bN + 1 - \epsilon + \kappa\omega)}$$

$\square(X_t) =$

$$\square := \frac{\theta_Y(N - X_t + N_Y + bN + 1 - \epsilon + \kappa\omega)}{(X_t + N_X + aI) + \theta_Y(N - X_t + N_Y + bN + 1 - \epsilon + \kappa\omega)}$$

The transition rates of our model are:

"x" ist viel besser als "*" aber i.d.R. würde man $\mu(N-X_t)\Delta$ schreiben

$$X_t \to X_t + 1 \text{ at rate } \mu(N - X_t) \times \Delta$$

$$X_t \to X_t - 1 \text{ at rate } \mu X_t \times \square$$

$\Delta(i+1)$ $\square(i-1)$ $\Delta(i)+\square(i)$

$\Rightarrow$ the master equation reads:

$$\dot{p_i} = \square \times p_{i+1} + \Delta \times p_{k-1} - (\Delta + \square) \times p_i \tag{2}$$

k oder i? oder k, sonst vielleicht Verwechslung mit $i = I/N$

2. Kramer-Moyal expansion

Again, we define for simplicity:

Index anhängen? $\dagger_i$ $\ddagger_i$

$$\dagger := \frac{\theta_X(i - 1 + N_X + aI)}{\theta_X(i - 1 + N_X + aI) + (N - i + 1 + N_Y + bN + 1 - \epsilon + \kappa\omega)}$$

$$\ddagger := \frac{\theta_Y(N - i - 1 + N_Y + bN + 1 - \epsilon + \kappa\omega)}{(i + 1 + N_X + aI) + \theta_Y(N - i - 1 + N_Y + bN + 1 - \epsilon + \kappa\omega)}$$

(**)

Now, we assume $p_i(t) \approx h \times u\left(\frac{i}{N}, t\right), h = \frac{1}{N}$ and $x = hi$ and compute:

$$\begin{aligned}
\partial_t\left(u\left(\frac{i}{n}, t\right)\right) &= \dot{p_i} = \square \times p_{i+1} + \Delta \times p_{k-1} - (\Delta + \square) \times p_i \\
&= \frac{1}{h}\Big[\mu(x+h) \times \ddagger \times u(x+h, t) \\
&+ \mu(1 - (x-h)) \times \dagger \times u(x-h, t) \\
&- \Big(\mu(1-x)\frac{\theta_X(i + N_X + aI)}{\theta_X(i + N_X + aI) + (N - i + N_Y + bN + 1 - \epsilon + \kappa\omega)} \\
&\quad + \mu x \frac{\theta_Y(N - i + N_Y + bN + 1 - \epsilon + \kappa\omega)}{(i + N_X + aI) + \theta_Y(N - i + N_Y + bN + 1 - \epsilon + \kappa\omega)}\Big) \times u(x, t)\Big]
\end{aligned} \tag{3}$$

hier mischen Sie x und i, das wäre eventuell besser zu vermeiden...

We will now compute the Taylor series of second order for the $u\,(x-h,t)$ and $u\,(x+h,t)$ terms:

$$
\begin{aligned}
&\mu(1-(x-h)) \times \dagger \times u\,(x-h,t) \\
&= \mu(1-x)\dagger\, u\,(x,t) - h\partial_x\left(\mu(1-x)\dagger\, u\right) + \frac{1}{2}h^2\partial_x^2\left(\mu(1-x)\dagger\, u\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mu(x+h) \times \ddagger \times u\,(x+h,t) \\
&= \mu x\ddagger\, u(x,t) + h\partial_x\left(\mu x\ddagger\, u\right) + \frac{1}{2}h^2\partial_x^2\left(\mu x\ddagger\, u\right)
\end{aligned}
$$

hier müssten m.E. I/N stehen.

We may now resume the computations (3) from above and add those new results:

$$
\begin{aligned}
\partial_t\left(u\left(\frac{i}{n},t\right)\right) &= \dots \\
&= -\partial_x\left(\mu(1-x)\frac{\theta_X(x+n_X+aI)}{\theta_X(x+n_X+aI)+(N-x+n_Y+bN+1-\epsilon+\kappa\omega)}\right. \\
&\qquad \left.-\mu x\frac{\theta_Y(N-x+n_Y+bN+1-\epsilon+\kappa\omega)}{(x+n_X+aI)+\theta_Y N-x+n_Y+bN+1-\epsilon+\kappa\omega)}\right) \\
&\qquad + \frac{1}{2N}\dots
\end{aligned}
$$

die müsstest du m.E. herausgekürzt haben (Erweiterung des Bruchs (**) mit $\frac{1}{N}$ um aus $i \pm 1$ die $\frac{1}{N}(i \pm 1) = x \pm h$ zu machen)

So, for $N \to \infty$:

$$
\begin{aligned}
\partial_t\left(u\left(\frac{i}{n},t\right)\right) = -\partial_x\Bigg(&\mu(1-x)\frac{\theta_X(x+n_X+aI)}{\theta_X(x+n_X+aI)+(N-x+n_Y+bN+1-\epsilon+\kappa\omega)} \\
&-\mu x\frac{\theta_Y(N-x+n_Y+bN+1-\epsilon+\kappa\omega)}{(x+n_X+aI)+\theta_Y N-x+n_Y+bN+1-\epsilon+\kappa\omega)}\Bigg)
\end{aligned}
$$

This means that the ODE due to the drift term in case $N \leftarrow \infty$ reads

$$
\begin{aligned}
\dot{x} = &-\mu x\frac{\theta_Y(N-x+n_Y+bN+1-\epsilon+\kappa\omega)}{(x+n_X+aI)+\theta_Y N-x+n_Y+bN+1-\epsilon+\kappa\omega)} \\
&+\mu\,(1-x)\,\frac{\theta_X(x+n_X+aI)}{\theta_X(x+n_X+aI)+(N-x+n_Y+bN+1-\epsilon+\kappa\omega)}
\end{aligned}
$$

Which is exatly the result stated in (0.1) $\square$