

## Eléments finis de type poutre en flexion

### 1. Formulation locale d'un élément fini de type poutre en flexion

L'élément poutre  $e$  de longueur  $L$  est constitué de deux nœuds ayant chacun deux degrés de liberté. Dans le repère local (figure 1.) le vecteur des inconnues nodales est noté

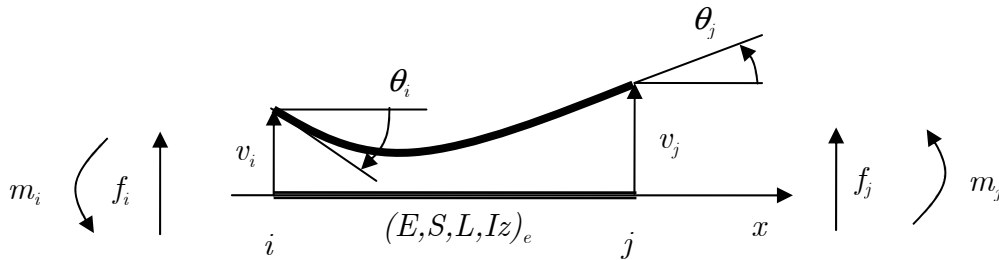
$$q_e = \left\{ v_i \quad \theta_i \quad v_j \quad \theta_j \right\}^T,$$

où  $v_i$  et  $\theta_i$  sont respectivement le déplacement vertical et l'angle de rotation au nœud  $i$  dans le repère local.

Le comportement sous chargement de l'élément poutre s'écrit

$$K_e q_e = F_e \text{ où } K_e = \left( \frac{EI_z}{L^3} \right)_e \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{sym.} & & & 4L^2 \end{bmatrix}_e \text{ et } F_e = \begin{Bmatrix} f_i \\ m_i \\ f_j \\ m_j \end{Bmatrix},$$

où  $I_z$  est le moment quadratique par rapport à l'axe  $z$ ,  $f_i$  les efforts nodaux,  $m_i$  les moments nodaux.

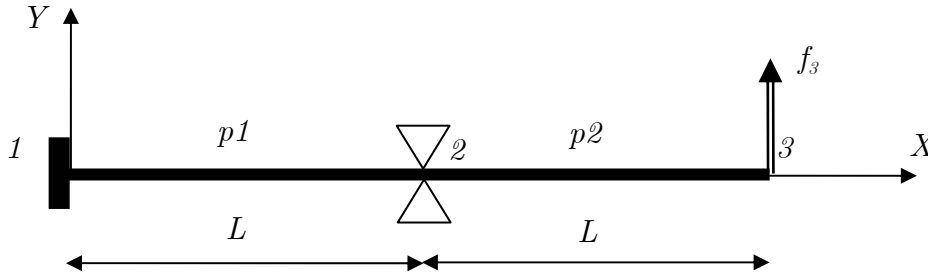


**Figure 1.** Poutre en flexion dans son repère local.

### 2. Formulation globale d'un élément fini de type poutre en flexion – Application.

On se propose de résoudre le problème d'une ossature plane constituée de deux poutres de géométries et de comportements identiques (figure 2.). Une charge  $f_3$  ( $f_3 > 0$ ) est appliquée au nœud 3. Le nœud 1 est encastré, le nœud 2 est appuyé.

*Remarque importante* : Les repères local et global des poutres sont identiques dans cette application. Dans le cas contraire, il faut (cf. TD1) exprimer les différentes matrices élémentaires de rigidité dans le repère global avant de faire l'assemblage.  $\square$



**Figure 2.** Ossature constituée de deux poutres,  $p1=[12]$  ;  $p2=[23]$ .

2.1. Les poutres  $p1$  et  $p2$  ont comme vecteurs des inconnues nodales  $q_1 = \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}^T$  et  $q_2 = \{v_2 \quad \theta_2 \quad v_3 \quad \theta_3\}^T$ . Le vecteur contenant toutes les inconnues nodales est  $q = \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2 \quad v_3 \quad \theta_3\}^T$ .

L'énergie de déformation du système constitué des deux poutres est égale à

$$U = \sum_{1 \leq e \leq 2} U_e = \sum_{1 \leq e \leq 2} \frac{1}{2} q_e^T K_e q_e = \frac{1}{2} q_1^T K_1 q_1 + \frac{1}{2} q_2^T K_2 q_2 \quad \text{où } \dim(q_e) = 4 \times 1.$$

Donner les expressions des matrices  $\underline{K}_1$  et  $\underline{K}_2$  intervenant dans l'équation

$$U = \frac{1}{2} q^T \underline{K}_1 q + \frac{1}{2} q^T \underline{K}_2 q = \frac{1}{2} q^T K q \quad \text{où } \dim(q) = 6 \times 1.$$

2.2. Montrer que la matrice de rigidité globale  $K$  de la structure libre a pour expression

$$K = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ & & 24 & 0 & -12 & 6L \\ & & & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & & & 12 & -6L \\ \text{sym.} & & & & & 4L^2 \end{bmatrix}.$$

Les équations d'équilibre du treillis s'écrivent alors

$$Kq = F \Leftrightarrow \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ & & 24 & 0 & -12 & 6L \\ & & & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & & & 12 & -6L \\ & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_2 \\ m_2 \\ f_3 \\ m_3 \end{bmatrix},$$

*sym.*

où  $f_1, f_2, f_3$  et  $m_1, m_2, m_3$  sont respectivement les efforts et les moments de liaisons aux nœuds 1, 2 et 3.

2.3. Après l'introduction des conditions aux limites, montrer que le système d'équations à résoudre pour exprimer l'équilibre de l'ossature se met sous la forme

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ & 12 & -6L \\ \text{sym.} & & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1).$$

#### 2.4. Application numérique et vérification avec RDM6

Les poutres de l'ossature ont les caractéristiques suivantes :  $E=210000\text{MPa}$ ,  $\nu=0.3$ . Les poutres sont des cylindres pleins de longueur  $L=1\text{m}$  et de diamètre  $0.1\text{m}$ . La force appliquée est  $f_3=100\text{N}$ .

La résolution numérique du système (1) donne

$$\theta_2 = 0.0000242 \text{ rad}, v_3 = 0.0566 \text{ mm}, \theta_3 = 0.0000727 \text{ rad}.$$

En déduire les valeurs de  $f_1, m_1, f_2$ .

Programme effectué sous Matlab pour résoudre (1) :

```
E=210000 % N/mm2
pois=0.3
l=490.874*10^4 % mm4
L=1e3 % mm
Force=100
k=E*I/L^3*[8*L^2 -6*L 2*L^2 ; -6*L 12 -6*L ; 2*L^2 -6*L 4*L^2]
f=[0 Force 0]'
u=k\f
```

□

Retrouver ces résultats à partir d'une simulation par éléments finis avec le code *RDM6*.